

55 (075)

С12

И. В. Савельев

КУРС ФИЗИКИ

ТОМ 1

механика

•
молекулярная
физика

2153-239

И. В. САВЕЛЬЕВ

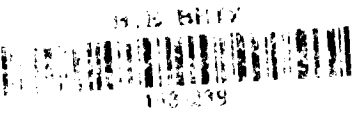
КУРС ФИЗИКИ

ТОМ 1

МЕХАНИКА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ
ФИЗИКА

Допущено
по народно
в качестве
высших тех



153-239

0 12

000

АБСОРБЕНТ-2



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.3
С12
УДК 53(075.8)

Рецензенты:
кафедра физики Московского авиационного института
им. С. Орджоникидзе (заведующий кафедрой доктор физико-
математических наук, профессор *Ф. А. Николаев*);
доктор физико-математических наук, профессор *А. Д. Гладун*

САВЕЛЬЕВ И. В. Курс физики: Учеб.: В 3-х т. Т. 1: **Ме-
ханника. Молекулярная физика.** — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.
лит., 1989. — 352 с. — ISBN 5-02-014430-4 (Т. 1).

Содержание и расположение материала соответствуют про-
грамме курса «Физика» для инженерно-технических специаль-
ностей вузов, утвержденной Учебно-методическим управлением по
высшему образованию Минвуза СССР. Главное внимание обра-
щено на разъяснение физических законов и их сознательное
применение. Новый курс существенно отличается от «Курса
общей физики» того же автора (М.: Наука, 1986—1988) отбором
материала, уровнем и способом изложения.

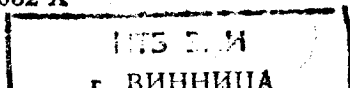
Для студентов и преподавателей высших технических учеб-
ных заведений; может быть использован студентами других
вузов.

Табл. 6. Ил. 163.

С 1604010000—012 100-89
053(02)-89

© Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1989

ISBN 5-02-014430-4 (Т.1)
ISBN 5-02-014052-X



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	7

ЧАСТЬ I

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Глава 1. Кинематика материальной точки	11
§ 1. Механическое движение	11
§ 2. Векторы	15
§ 3. Скорость	21
§ 4. Ускорение	27
§ 5. Поступательное движение твердого тела	31
Примеры решения задач	33
Глава 2. Динамика материальной точки	34
§ 6. Инерциальные системы отсчета. Закон инерции	34
§ 7. Сила и масса	36
§ 8. Второй закон Ньютона	38
§ 9. Единицы и размерности физических величин	39
§ 10. Третий закон Ньютона	43
§ 11. Силы	44
§ 12. Сила тяжести и вес	44
§ 13. Упругие силы	47
§ 14. Силы трения	51
Примеры решения задач	54
Глава 3. Законы сохранения	56
§ 15. Сохраняющиеся величины	56
§ 16. Закон сохранения импульса	57
§ 17. Энергия и работа	60
§ 18. Скалярное произведение векторов	61
§ 19. Кинетическая энергия и работа	62
§ 20. Работа	64
§ 21. Консервативные силы	67
§ 22. Потенциальная энергия материальной точки во внешнем силовом поле	71
§ 23. Потенциальная энергия взаимодействия	75
§ 24. Закон сохранения энергии	79
§ 25. Соударение тел	81
§ 26. Момент силы	84
§ 27. Закон сохранения момента импульса	88
Примеры решения задач	92

Глава 4. Механика твердого тела	94
§ 28. Кинематика вращательного движения	94
§ 29. Плоское движение твердого тела	97
§ 30. Движение центра масс твердого тела	99
§ 31. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси	101
§ 32. Момент инерции	104
§ 33. Кинетическая энергия вращающегося тела	108
§ 34. Кинетическая энергия тела при плоском движении	110
§ 35. Гироскопы	112
Примеры решения задач	116
Глава 5. Неинерциальные системы отсчета	118
§ 36. Силы инерции	118
§ 37. Центробежная сила инерции	122
§ 38. Сила Кориолиса	125
Примеры решения задач	130
Глава 6. Механика жидкостей	131
§ 39. Описание движения жидкостей	131
§ 40. Уравнение Бернулли	134
§ 41. Истечение жидкости из отверстия	138
§ 42. Вязкость. Течение жидкости в трубах	140
§ 43. Движение тел в жидкостях и газах	147
Примеры решения задач	152
Глава 7. Элементы специальной теории относительности	153
§ 44. Принцип относительности Галилея	153
§ 45. Постулаты специальной теории относительности	156
§ 46. Преобразования Лоренца	158
§ 47. Следствия из преобразований Лоренца	162
§ 48. Интервал	168
§ 49. Преобразование и сложение скоростей	171
§ 50. Релятивистский импульс	173
§ 51. Релятивистское выражение для энергии	176
§ 52. Взаимосвязь массы и энергии покоя	180
§ 53. Частицы с нулевой массой	182
§ 54. Границы применимости ньютоновской механики	183
Примеры решения задач	185
Глава 8. Гравитация	187
§ 55. Закон всемирного тяготения	187
§ 56. Гравитационное поле	191
§ 57. Космические скорости	193
§ 58. Понятие об общей теории относительности	195
Примеры решения задач	205

ЧАСТЬ 2

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Глава 9. Молекулярно-кинетическая теория	207
§ 59. Статистическая физика и термодинамика	207
§ 60. Состояние термодинамической системы. Процесс	209
§ 61. Молекулярно-кинетические представления	211
§ 62. Уравнение состояния идеального газа	214

§ 63. Давление газа на стенку сосуда	217
§ 64. Средняя энергия молекул	222
Примеры решения задач	226
Глава 10. Первое начало термодинамики	227
§ 65. Внутренняя энергия термодинамической системы	227
§ 66. Работа, совершаемая телом при изменениях его объема	228
§ 67. Первое начало термодинамики	231
§ 68. Внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа	234
§ 69. Уравнение адиабаты идеального газа	238
§ 70. Политропические процессы	241
§ 71. Работа, совершаемая идеальным газом при различных процессах	243
§ 72. Классическая теория теплоемкости идеального газа	245
Примеры решения задач	249
Глава 11. Статистические распределения	250
§ 73. Функция распределения вероятности	250
§ 74. Распределение Максвелла	253
§ 75. Барометрическая формула	262
§ 76. Распределение Больцмана	264
§ 77. Определение Перреном постоянной Авогадро	266
Примеры решения задач	268
Глава 12. Явления переноса	269
§ 78. Длина свободного пробега молекул	269
§ 79. Эмпирические уравнения явлений переноса	274
§ 80. Молекулярно-кинетическая теория явлений переноса в газах	279
Примеры решения задач	288
Глава 13. Второе начало термодинамики	289
§ 81. Микро- и макросостояния. Статистический вес	289
§ 82. Энтропия	292
§ 83. Энтропия идеального газа	296
§ 84. Второе начало термодинамики	298
§ 85. Коэффициент полезного действия тепловой машины	300
§ 86. Цикл Карно	303
Примеры решения задач	307
Глава 14. Реальные газы	308
§ 87. Уравнение Ван-дер-Ваальса	308
§ 88. Экспериментальные изотермы	315
§ 89. Фазовые превращения	321
Примеры решения задач	325
Глава 15. Твердое и жидкое состояния	326
§ 90. Отличительные черты кристаллического состояния	326
§ 91. Физические типы кристаллов	329
§ 92. Строение жидкостей	331
§ 93. Поверхностное натяжение	332
§ 94. Капиллярные явления	337
Примеры решения задач	341
Именной указатель	343
Предметный указатель	344

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный курс существенно отличается от «Курса общей физики» того же автора подбором материала, уровнем и способом изложения. «Курс общей физики» предназначен студентам, изучающим физику по расширенной программе. Настоящий курс написан в соответствии с утвержденной Учебно-методическим управлением по высшему образованию Минвуза СССР программой курса ФИЗИКА для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений (индекс УМУ-9/1).

В конце каждой главы помещены контрольные вопросы и примеры решения задач. Задачи для самостоятельного решения учащийся может найти в «Сборнике вопросов и задач по общей физике» И. В. Савельева (2-е изд. — М.: Наука, 1988). В этом сборнике имеются задачи разной степени трудности, в том числе достаточное количество таких, которые по уровню соответствуют данному курсу.

При работе с книгой следует помнить, что физика требует от учащегося обдумывания, размышлений. В усвоении материала основную роль должна играть память логическая, а не формальная. Запоминание должно достигаться через глубокое понимание. Над курсом надо работать «с карандашом в руках», обязательно проделывая все выкладки, не ограничиваясь только чтением книги.

Приношу благодарность профессору А. Д. Гладуноу и профессору Ф. А. Николаеву за внимательное прочтение и детальный анализ рукописи, а также за полезные замечания, которые были учтены при подготовке рукописи к печати.

Москва, февраль 1988 г.

И. В. Савельев

ВВЕДЕНИЕ

Физика есть наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы ее движения.

Классическое определение материи дано В. И. Лениным в его книге «Материализм и эмпириокритицизм»: «Материя есть философская категория для обозначения объективной реальности, которая дана человеку в ощущениях его, которая копируется, фотографируется, отображается нашими ощущениями, существуя независимо от них»¹⁾.

В настоящее время известны два вида неживой материи: вещество и поле. К первому виду материи — веществу — относятся, например, атомы, молекулы и все состоящие из них тела. Второй вид материи образуют электромагнитные, гравитационные и другие поля. Различные виды материи могут превращаться друг в друга. Так, например, электрон и позитрон (представляющие собой вещество) могут превращаться в фотоны (т. е. в электромагнитное поле). Возможен и обратный процесс.

Материя находится в непрерывном движении, под которым в диалектическом материализме понимается всякое изменение вообще. Движение представляет собой неотъемлемое свойство материи, которое несотворимо и неуничтожимо, как и сама материя. Материя существует и движется в пространстве и во времени, которые являются формами бытия материи.

Физические законы устанавливаются на основе обобщения опытных фактов и выражают объективные закономерности, существующие в природе. Эти законы обычно формулируются в виде количественных

¹⁾ Ленин В. И. Полн. собр. соч. — Т. 18. — С. 131.

соотношений между различными физическими величинами.

Основным методом исследования в физике является опыт, т. е. наблюдение исследуемого явления в точно контролируемых условиях, позволяющих следить за ходом явления и воссоздавать его каждый раз при повторении этих условий.

Для объяснения экспериментальных данных привлекаются гипотезы. Гипотеза — это научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо факта или явления и требующее проверки и доказательства для того, чтобы стать научной теорией или законом. Правильность высказанной гипотезы проверяется посредством постановки соответствующих опытов, путем выяснения согласия следствий, вытекающих из гипотезы, с результатами опытов и наблюдений. Успешно прошедшая такую проверку и доказанная гипотеза превращается в научную теорию или закон.

Физическая теория представляет собой систему основных идей, обобщающих опытные данные и отражающих объективные закономерности природы. Физическая теория дает объяснение целой области явлений природы с единой точки зрения.

Физику подразделяют на классическую и квантовую. Начало классической физики было положено И. Ньютоном, сформулировавшим основные законы механики. Завершено развитие классической механики созданием в 1905 г. А. Эйнштейном специальной теории относительности и учитывающей требования этой теории релятивистской механики. Таким образом, классическая механика подразделяется на ньютоновскую и релятивистскую механику. На рубеже XIX и XX столетий возникла квантовая физика. Ее начало было положено в 1900 г. М. Планком, выдвинувшим гипотезу квантов.

В 1897 г. был открыт электрон, причем выяснилось, что электроны входят в состав атомов всех химических элементов. Это указывало на сложное строение атомов, считавшихся прежде неделимыми.

Таким образом, начало XX века ознаменовалось в физике коренной ломкой целого ряда привычных понятий и представлений. Новые физические открытия

и теории разрушали сложившиеся у физиков представления о строении вещества, что было воспринято некоторыми физиками как исчезновение материи. Многие физики впали в идеализм, и начался кризис физики.

В. И. Ленин в книге «Материализм и эмпириокритицизм», написанной в 1908 г., дал уничтожающую критику «физического» идеализма. Он показал, что новые открытия свидетельствуют не об исчезновении материи, а об исчезновении того предела, до которого знали материю до тех пор. «„Материя исчезает“, — писал В. И. Ленин, — это значит исчезает тот предел, до которого мы знали материю до сих пор, наше знание идет глубже; исчезают такие свойства материи, которые казались раньше абсолютными, неизменными, первоначальными (непроницаемость, инерция, масса и т. д.) и которые теперь обнаруживаются, как относительные, присущие только некоторым состояниям материи. Ибо *единственное* „свойство“ материи, с признанием которого связан философский материализм, есть свойство *быть объективной реальностью, существовать вне нашего сознания*»¹).

Дальнейшее развитие физической науки в XX веке дало неопровержимые аргументы в пользу диалектического материализма.

Физика оказывает огромное воздействие на технику и общественную жизнь. Для примера укажем, что открытое Фарадеем явление электромагнитной индукции послужило основой электротехники. Из открытий в области физики атомного ядра возникла ядерная энергетика.

В наше время перед физикой стоят большие ответственные задачи. XXVII съезд Коммунистической партии Советского Союза утвердил в качестве основной задачи ускорение социально-экономического развития нашей страны, упрочение мира на Земле. Для решения этой задачи необходимо ускорение научно-технического прогресса, в котором важная роль принадлежит науке. В области естественных и технических наук съезд постановил развивать теоретическую и прикладную математику, информатику и кибернетику, физику элементарных частиц, атомного ядра и

¹) Ленин В. И. *Полн. собр. соч.* — Т. 18. — С. 275.

твёрдого тела, микро- и квантовую электронику и оптику, радиофизику, а также исследования в области атомной и термоядерной энергетики, преобразования и передачи электроэнергии, освоения нетрадиционных источников энергии. Решение этих проблем создаст необходимые предпосылки для кардинального ускорения научно-технического прогресса и тем самым для решения основной задачи — ускорения социально-экономического развития СССР,

ЧАСТЬ 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Глава 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 1. Механическое движение

Движением в широком смысле слова называется всякое изменение вообще. Простейшей формой движения является механическое движение, которое заключается в изменении с течением времени положения тел или их частей друг относительно друга. Перемещения тел мы наблюдаем повседневно в обыденной жизни. Наглядность механических движений была причиной того, что из всех естественных наук механика прежде других получила широкое развитие.

В зависимости от характера изучаемых объектов механика подразделяется на механику материальной точки, механику твердого тела и механику сплошной среды.

Материальной точкой¹⁾ называют тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других тел. Одно и то же тело в одних случаях можно считать материальной точкой, а в других случаях нужно рассматривать как тело конечных размеров. Например, исследуя движение Земли вокруг Солнца, можно считать Землю материальной точкой (отношение расстояния от Земли до Солнца к диаметру Земли равно примерно 12 000). Изучая же движение искусственного спутника, Землю надо рассматривать как протяженное тело. В дальнейшем наряду с термином «материальная точка» мы будем для краткости использовать термин «частица», подразумевая при этом не элементарную частицу

¹⁾ Термин «материальная точка» надо признать не очень удачным. Более подошел бы термин «точечная масса» (по аналогии с «точечным зарядом» в электричестве и «точечным источником света» в оптике).

(такую как электрон или протон), а макроскопическую частицу (т. е. частицу, образованную большим числом атомов).

Всякое тело под действием приложенных к нему сил в большей или меньшей степени деформируется, т. е. изменяет свои размеры, или форму, или и то и другое. В механике под твердым телом подразумевают абсолютно твердое тело, т. е. тело, деформациями которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Механика сплошной среды изучает движение и равновесие газов, жидкостей и деформируемых тел. Она рассматривает вещество как непрерывную сплошную среду, отвлекаясь от его прерывистого молекулярного строения. Одним из разделов механики сплошных сред является гидродинамика (механика жидкостей), которой посвящена гл. 6.

Классическая (неквантовая) механика подразделяется на ньютоновскую (нерелятивистскую) механику и релятивистскую механику. В основе ньютоновской механики лежат законы Ньютона¹⁾. Эта механика справедлива лишь для макроскопических тел, движущихся со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Под макроскопическим телом подразумевается тело, образованное очень большим количеством атомов; масса такого тела во много раз превосходит массу отдельного атома.

Релятивистской называется механика, учитывающая требования специальной теории относительности (СТО). Она справедлива и при скоростях, сравнимых со скоростью света. Заметим, что согласно СТО скорости тел не могут быть больше скорости света в вакууме.

Механику подразделяют на кинематику, статику и динамику. Кинематика описывает движение тел, не интересуясь причинами, обусловившими это движение; статика рассматривает условия равновесия тел; динамика изучает движение тел в связи с теми причинами (взаимодействиями между телами), которые обуславливают тот или иной характер движения. Законы статики являются частным случаем

¹⁾ Исаак Ньютон (1643—1727) — выдающийся английский ученый, основатель классической физики.

законов динамики. По этой причине в курсах физики статика обычно отдельно не изучается.

Движение тел происходит в пространстве и во времени (пространство и время — неотъемлемые формы существования материи). Ньютон считал пространство и время абсолютными, не зависящими как друг от друга, так и от присутствующих в пространстве тел. Абсолютное пространство определялось Ньютоном как безотносительное к чему-либо внешнемуместилище вещей, остающееся всегда одинаковым и неподвижным. О времени Ньютон писал: «Абсолютное, истинное или математическое время само по себе и в силу своей внутренней природы течет равномерно, безотносительно к чему-либо внешнему».

Теория относительности внесла в представления о пространстве и времени коренные изменения. Согласно СТО пространство и время неразрывно связаны друг с другом, образуя единое четырехмерное пространство-время (об этом подробно рассказано в § 45). Из общей теории относительности следует, что присутствие гравитирующих (тяготеющих) масс «искривляет» пространство и оказывает влияние на ход времени.

Однако, несмотря на неверность ньютоновых представлений о пространстве и времени, основанная на этих представлениях ньютоновская механика оказывается справедливой в применении к телам больших (по сравнению с массой атомов) масс и малых (по сравнению со скоростью света) скоростей.

Из определения механического движения как изменения взаимного расположения тел в пространстве следует, что, приступая к изучению движения какого-либо тела, нужно указать, по отношению к какому телу (или телам) мы рассматриваем движение данного тела. Кроме того, для измерения времени необходимо иметь часы. Роль часов может выполнять любое устройство, совершающее многократно один и тот же процесс. Совокупность неподвижных друг относительно друга тел, по отношению к которым рассматривается движение, и отсчитывающих время часов называется системой отсчета. Для того чтобы иметь возможность описывать движение количественно с телами, образующими систему отсчета, связывают какую-либо, например декартову, систему координат.

Тогда положение частицы можно определить, задав ее координаты x , y , z .

Линия, которую описывает материальная точка при своем движении, называется траекторией. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное движение, движение по окружности, криволинейное движение и т. д.

Пусть частица, двигаясь все время в одном направлении, переместилась вдоль некоторой траектории из точки 1 в точку 2 (рис. 1.1). Расстояние s_{12} между



Рис. 1.1. Если расстояние между точками 1 и 2, измеренное вдоль траектории, равно, скажем, 10 м, а расстояние между точками 2 и 3 равно 4 м, то пройденный частицей за все время движения путь составляет 14 м

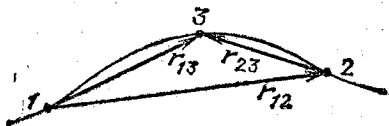
точками 1 и 2, отсчитанное вдоль траектории, называется длиной пройденного частицей пути или просто пройденным частицей путем. Если частица, дойдя до точки 2, повернет обратно и, не изменяя нового направления движения, придет в точку 3, то она пройдет дополнительно путь s_{23} , так что полный путь, пройденный частицей, будет равен $s_{12} + s_{23}$. Надо иметь в виду, что путь всегда выражается положительным числом; поэтому пути, пройденные за отдельные промежутки времени, в течение которых частица не изменяет направления своего движения, складываются арифметически.

Отрезок прямой, проведенный из начального положения частицы в конечное, называется перемещением (см., например, отрезок r_{12} на рис. 1.2). Перемещение характеризуется, кроме числового значения, также и направлением.

Допустим, что частица совершает последовательно два перемещения r_{12} и r_{23} (рис. 1.2). Суммой этих перемещений естественно назвать такое перемещение r_{13} , которое приводит к такому же результату, как и первые два перемещения вместе. Таким образом, перемещения складываются геометрически.

Величины такого рода, как перемещение, т. е. характеризующиеся числовым значением и направлением, а также складывающиеся по правилу, показанному на рис. 1.2, называются векторами. Векторы

Рис. 1.2. Перемещение r_{13} приводит к такому же результату, как перемещения r_{12} и r_{23} вместе. Траектория та же, что на рис. 1.1

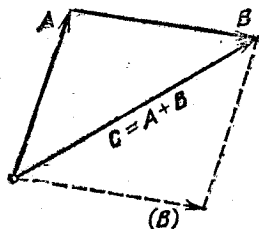


играют большую роль в физике. Поэтому прежде, чем продолжить изложение механики, мы кратко расскажем о векторах.

§ 2. Векторы

Векторами называются величины, характеризующиеся числовым значением и направлением и складываемые по правилу параллелограмма, показанному на рис. 2.1 (ср. с рис. 1.2). Числовое значение вектора

Рис. 2.1. Чтобы сложить векторы A и B , начало B совмещается с концом A . Вектор C , проведенный из начала A в конец B , является суммой векторов A и B . Этот вектор совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах A и B , построенных из общей точки



называется его модулем. Модуль вектора — скаляр¹⁾, причем всегда положительный.

Векторы обозначаются буквами полужирного шрифта (при письме — буквой со стрелкой над ней). Модуль вектора обозначается той же буквой светлого (обычного) шрифта либо буквой полужирного шрифта, по бокам которой ставят вертикальные черточки:

$$A = |A| = \text{модуль вектора } A.$$

Во всех случаях, когда это возможно, модуль вектора нужно обозначать буквой обычного шрифта. Однако,

¹⁾ Скалярами называются величины, определяемые одним лишь числовым значением. Примерами скаляров могут служить время, масса, длина, площадь, объем и т. п.

как мы покажем ниже, в некоторых случаях модуль можно обозначать только с помощью боковых черточек.

На рисунках векторы изображаются в виде прямолинейных отрезков со стрелкой на конце, указывающей направление вектора. Длина отрезка в установленном масштабе дает модуль вектора.

В основу векторного исчисления положено понятие свободного вектора, т. е. вектора, который может быть отложен из любой точки пространства. («Свободой» вектора B мы воспользовались на рис. 2.1.) Кроме свободных рассматриваются скользящие векторы, начало которых может быть помещено в любую точку прямой, вдоль которой направлен вектор, и связанные векторы, т. е. векторы, приложенные к определенной точке.

Векторы, направленные вдоль параллельных прямых (в одну и ту же либо в противоположные стороны), называются коллинеарными (рис. 2.2).

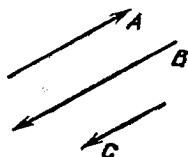


Рис. 2.2. Коллинеарные векторы A , B и C направлены вдоль параллельных прямых

Путем параллельного переноса коллинеарные векторы могут быть расположены на одной и той же прямой.

Векторы, лежащие в параллельных плоскостях, называются компланарными. Посредством параллельного переноса компланарные векторы могут быть сведены в одну плоскость.

Сложение и вычитание векторов. Правило сложения векторов дано на рис. 2.1. В случае большего чем два числа слагаемых начало каждого следующего слагаемого совмещается с концом предыдущего (рис. 2.3). В результате получается ломаная линия. Замыкающая этой линии, проведенная из начала первого слагаемого в конец последнего, дает результирующий вектор. Легко убедиться в том, что результирующий вектор не зависит от последовательности, в которой складываются заданные векторы.

Разностью векторов A и B называется такой вектор C , который в сумме с B дает A (рис. 2.4).

Модуль суммы векторов $A + B$ можно записать только с помощью боковых черточек:

$$\text{модуль } (A + B) = |A + B|, \quad (2.1)$$

поскольку выражение $A + B$ дает сумму модулей (т. е. сумму «длин») векторов A и B , которая, как

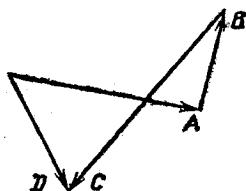


Рис. 2.3. Вектор D является суммой векторов A , B и C :
 $D = A + B + C$

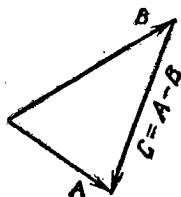


Рис. 2.4. Вектор C является разностью векторов A и B

следует из рис. 2.1, вообще говоря, не равна модулю (т. е. «длине») вектора $A + B$.

Модуль разности векторов $A - B$ также можно записать лишь с помощью черточек:

$$\text{модуль } (A - B) = |A - B|, \quad (2.2)$$

поскольку выражение $A - B$ дает разность модулей («длин») векторов A и B , которая, как следует из рис. 2.4, вообще говоря, не равна модулю («длине») вектора $A - B$.

Пусть некоторая векторная величина изменилась от первоначального значения A_1 до конечного значения A_2 . Тогда выражение

$$\Delta A = A_2 - A_1 \quad (2.3)$$

называется приращением вектора A (рис. 2.5). Понятие приращения величины играет большую роль в математике и в физике. Надо отчетливо понимать, что приращение — это то, что стало, минус то, что было. Для обозначения приращения применяется символ Δ (дельта). Если этот символ стоит перед обозначением какой-либо векторной или скалярной величины, то такое выражение означает приращение

соответствующей величины (ΔA — приращение вектора A , Δx — приращение скаляра x).

В соответствии с формулой (2.2) модуль приращения вектора может быть записан лишь с помощью боковых черточек:

$$\text{модуль } \Delta A = |\Delta A|. \quad (2.4)$$

Выражение ΔA означает приращение модуля

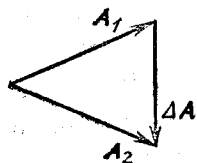


Рис. 2.5. При изменении вектора A его модуль остался прежним: $\Delta A = 0$. Модуль же приращения вектора, т. е. $|\Delta A|$, отличен от нуля — он равен длине отрезка, соединяющего концы векторов A_1 и A_2 . Таким образом, $|\Delta A| \neq \Delta A$

вектора A , которое, как следует из рис. 2.5, не равно модулю приращения A .

Умножение вектора на скаляр. Произведением вектора A на скаляр α называется вектор B , модуль которого в $|\alpha|$ раз больше модуля вектора A ($B = |\alpha|A$), а направление совпадает с направлением A , если скаляр положителен ($\alpha > 0$), и противоположно направлению A , если скаляр отрицателен ($\alpha < 0$) (рис. 2.6).

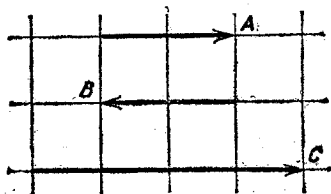


Рис. 2.6. Между векторами имеются соотношения: $A = -B$, $A = 0,5C$, $B = -A$, $B = -0,5C$, $C = 2A$, $C = -2B$

Соотношение $A = -B$ или $B = -A$ отнюдь не означает, что один из векторов положительный, а другой отрицательный. Векторы нельзя сравнивать друг с другом, не бывает положительных и отрицательных векторов, невозможны неравенства вида $A > B$. Соотношение $A = -B$ означает лишь, что векторы A и B имеют одинаковые модули, а направления этих векторов противоположны.

Из правила умножения вытекает, что любой вектор A можно представить в виде

$$A = A \cdot e_A, \quad (2.5)$$

где A — модуль вектора, а e_A — вектор с модулем, равным единице, направленный так же, как и вектор A .

Вектор e_A называется **единичным вектором** или **ортом** вектора A . Умножив обе части равенства (2.5) на скаляр, равный $1/A$, придем к соотношению

$$e_A = \frac{A}{A}, \quad (2.6)$$

из которого вытекает, что орт является безразмерной величиной.

Орты можно сопоставлять не только векторам, но и направлениям в пространстве, например координатным осям: e_x — орт оси x , e_y — орт оси y , e_z — орт оси z .

Проекция вектора на ось. Выберем в пространстве некоторое направление, которое мы зададим осью l

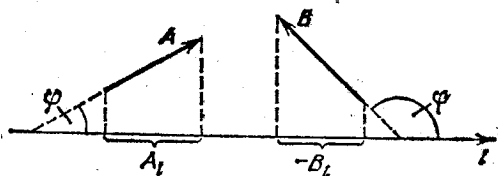


Рис. 2.7. Проекция вектора на ось равна длине отрезка, заключенного между проекциями на ось начала и конца вектора, взятой со знаком плюс, если угол φ острый, и со знаком минус, если угол φ тупой. Против фигурных скобок проставлены длины отрезков, которые могут выражаться только положительными числами. В случае вектора B отрезок имеет длину $-B_l$ ($-B_l > 0$, поскольку $B_l < 0$)

(рис. 2.7). Проекцией вектора A на ось l называется величина

$$A_l = A \cos \varphi, \quad (2.7)$$

где A — модуль вектора, а φ — угол между направлением вектора и осью l (поскольку A — свободный вектор, его можно посредством параллельного переноса расположить так, чтобы линия, вдоль которой он направлен, пересеклась с осью l).

При рассмотрении рис. 2.7 надо обратить внимание на следующее важное обстоятельство. Во всех случаях, когда на рисунках проставляются длины отрезков, эти длины должны быть положительными (длина не может быть отрицательной). Поэтому в случае вектора B для длины отрезка указано значение $-B_l$ (само $B_l < 0$).

Если $A + B + C = D$, то проекция результирующего вектора равна сумме проекций складываемых векторов:

$$D_l = A_l + B_l + C_l \quad (2.8)$$

(рис. 2.8). Формула (2.8) справедлива при любом числе слагаемых.

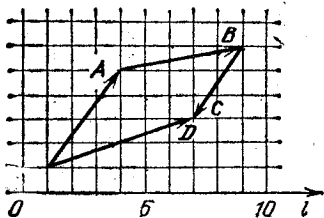


Рис. 2.8. $A_l = +3$, $B_l = +5$,
 $C_l = -2$, $D_l = +6$; $D_l = A_l +$
 $+ B_l + C_l$. Проекция результирующего вектора равна сумме проекций складываемых векторов

Выражение вектора через проекции на координатные оси. Всякий вектор можно представить в виде суммы любого числа слагаемых, называемых составляющими вектора (подчеркнем, что составляющая вектора есть вектор). Обычно векторы раскладывают на составляющие вдоль особых направлений, например вдоль координатных осей, вдоль касательной и нормали к кривой и т. п.

Разложим вектор A , лежащий в плоскости x, y , на составляющие A_x и A_y (рис. 2.9). Введем орты (единичные векторы) координатных осей e_x, e_y и e_z (e_z на рисунке не показан, он направлен «на нас»). Эта тройка ортов полностью определяет систему координат и поэтому называется базисом координатной системы.

Из рис. 2.9 следует, что вектор A можно представить в виде

$$A = A_x + A_y = A_x e_x + A_y e_y.$$

Мы рассмотрели вектор, у которого проекция на ось z равна нулю. В общем случае, когда все три проекции отличны от нуля, справедлива формула

$$A = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z. \quad (2.9)$$

Таким образом, всякий вектор можно выразить через его проекции на координатные оси и орты этих осей. В связи с этим проекции на оси координат называются компонентами вектора. (Подчеркнем, что, в

то время как составляющая есть вектор, компонента вектора — скаляр.)

Радиус-вектор. Радиус-вектором r точки называется вектор, проведенный из начала координат в данную точку. Обобщая выражение, приведенное в подпункте к рис. 2.10, на случай, когда все три координаты

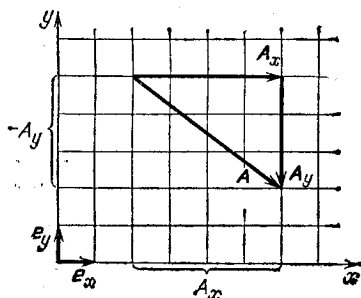


Рис. 2.9. Разложение вектора A на составляющие A_x и A_y . Проекции вектора A на координатные оси: $A_x = 4$, $A_y = -3$ (длина соответствующего отрезка оси y равна 3, т.е. $-A_y$). Составляющие вектора: $A_x = 4e_x = A_x e_x$, $A_y = -3e_y = A_y e_y$ (A_y направлена противоположно e_y). $A = A_x + A_y = A_x e_x + A_y e_y$

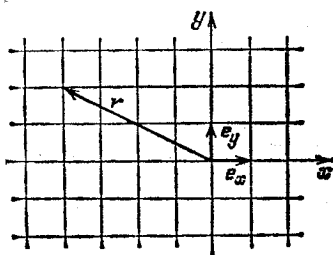


Рис. 2.10. Радиус-вектор точки с координатами: $x = -4$, $y = 2$, $z = 0$. Его можно представить в виде $r = -4e_x + 2e_y = x e_x + y e_y$

точки отличны от нуля, придем к соотношению

$$r = x e_x + y e_y + z e_z. \quad (2.10)$$

Это соотношение также можно получить как частный случай формулы (2.9), приняв во внимание, что компоненты (проекции на координатные оси) радиус-вектора равны x , y , z .

§ 3. Скорость

Рассмотрим движение частицы (т.е. материальной точки) по некоторой траектории. Если за равные, сколь угодно малые промежутки времени Δt частица проходит одинаковые пути Δs , движение частицы называется равномерным. Разделив путь s на время t , за которое он пройден, получим величину

$$v = \frac{s}{t}, \quad (3.1)$$

которую в обыденной жизни называют скоростью частицы. Эта величина численно равна пути, пройденному частицей в единицу времени.

Если движение неравномерное, величина, получаемая делением s на t , дает среднее значение скорости за промежуток времени t :

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t}. \quad (3.2)$$

{Средние значения величин мы будем обозначать, включая символы этих величин в угловые скобки.}

Чтобы определить скорость v в некоторый момент времени t , берут следующий за t небольшой промежуток времени Δt (его можно рассматривать как приращение времени; см. текст, следующий за формулой (2.3)) и измеряют путь Δs , пройденный частицей за время Δt (его можно рассматривать как приращение пути). Отношение $\Delta s/\Delta t$ даст среднюю скорость частицы за время Δt . Беря все меньшие промежутки времени Δt (соответственно будут уменьшаться пути Δs), получают значения отношения $\Delta s/\Delta t$, приближающиеся к «истинной» скорости в момент t . В пределе при стремлении Δt к нулю отношение $\Delta s/\Delta t$ даст скорость v в момент t . Аналитически это записывают следующим образом:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (3.3)$$

{латинское *limes* означает границу, предел}.

Пусть имеется величина y , являющаяся функцией независимой переменной x : $y = f(x)$. Тогда выражение

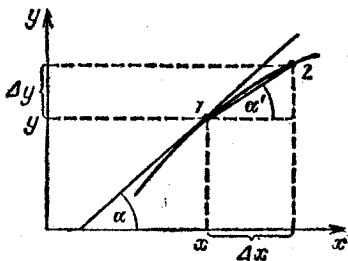
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.4)$$

называют производной функции y по x . Таким образом, производная y по x есть предел отношения приращения функции к соответствующему приращению независимой переменной при условии, что последнее стремится к нулю. Кроме y' , для обозначения производной применяется также символ dy/dx . Производная имеет простой геометрический смысл (рис. 3.1).

Сопоставление выражений (3.3) и (3.4) показывает, что скорость v представляет собой производную пути s по времени t .

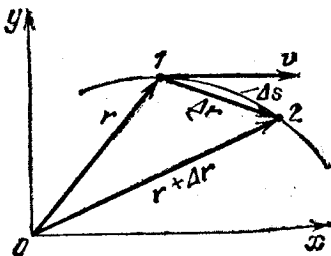
Все сказанное до сих пор относится к величине, которую называют скоростью в обыденной жизни. В механике под скоростью понимают векторную величину \mathbf{v} , которая характеризует не только быстроту

Рис. 3.1. Секунда 1—2 образует с положительным направлением оси x угол α' , тангенс которого равен $\Delta y/\Delta x$. В пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ секущая 1—2 превращается в касательную к кривой в точке 1. Следовательно, производная y по x численно равна тангенсу угла α , образованного касательной с положительным направлением оси x



движения частицы по траектории, но и направление, в котором движется частица в каждый момент времени. В соответствии с этим величина, определяемая формулой (3.3), представляет собой не саму скорость \mathbf{v} , а ее модуль v .

Рис. 3.2. В момент времени t частица находится в точке 1, положение которой определяется радиус-вектором \mathbf{r} . За промежуток времени Δt частица переходит в точку 2. Перемещение частицы совпадает с приращением радиус-вектора $\Delta \mathbf{r}$. Когда Δt стремится к нулю, точка 2 движется по направлению к точке 1. При этом длина дуги Δs сближается с длиной секущей 1—2, равной $|\Delta \mathbf{r}|$. Предельным положением секущей является касательная к траектории в точке 1



На рис. 3.2 показана траектория частицы. За время Δt частица получает перемещение $\Delta \mathbf{r}$, равное приращению радиус-вектора частицы \mathbf{r} . Скорость частицы \mathbf{v} определяется как предел отношения перемещения частицы $\Delta \mathbf{r}$ к промежутку времени Δt , за который оно произошло, при условии, что Δt стремится к нулю:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

Сравнение с (3.4) дает, что *скорость есть производная радиус-вектора по времени*,

В физике принято производные по времени обозначать не штрихом, как в формуле (3.4), а точкой над буквой, обозначающей данную величину. Поэтому определение (3.5) можно написать в виде

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (3.6)$$

Из рис. 3.2 следует, что вектор \mathbf{v} направлен по касательной к траектории в той точке, где находится частица в данный момент, в ту сторону, в которую движется частица.

Найдем модуль выражения (3.5), т. е. модуль скорости v :

$$v = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}. \quad (3.7)$$

Напомним, что в этой формуле нельзя написать Δr вместо $|\Delta \mathbf{r}|$, так как приращение модуля вектора, вообще говоря, не равно модулю приращения вектора (см. рис. 2.5).

На рис. 3.2 видно, что отношение $|\Delta \mathbf{r}|/\Delta s$ при уменьшении Δt стремится к единице. Поэтому преобразуем выражение (3.7) так:

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Мы пришли к формуле (3.3).

Отметим, что при равномерном движении скорость, изменяясь как угодно по направлению, остается постоянной по модулю.

Продифференцируем по времени выражение (2.10) для радиус-вектора, учтя, что \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z — постоянные векторы. В результате получим для скорости выражение

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z. \quad (3.9)$$

Вместе с тем в соответствии с формулой (2.9) скорость можно представить в виде

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z, \quad (3.10)$$

где v_x , v_y , v_z — компоненты скорости, т. е. проекции вектора \mathbf{v} на координатные оси.

Сравнение выражений (3.9) и (3.10) приводит к соотношениям

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}. \quad (3.11)$$

Таким образом, компоненты скорости равны производным соответствующих координат по времени.

Зная модуль скорости в каждый момент времени, можно вычислить путь, пройденный частицей от момента времени t_1 до момента t_2 . Разобьем интервал времени $t_2 - t_1$ на N малых (не обязательно одинаковых) промежутков Δt_i (i — номер промежутка, который пробегает значения 1, 2, ..., N). В соответствии с формулой (3.8) можно считать, что путь Δs_i , пройденный частицей за время Δt_i , приближенно равен произведению v_i на Δt_i :

$$\Delta s_i \approx v_i \Delta t_i \quad (3.12)$$

(здесь v_i — какое-либо значение скорости из промежутка Δt_i). Весь путь s , пройденный частицей, равен сумме путей Δs_i :

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^N \Delta s_i \quad (3.13)$$

(мы воспользовались сокращенной записью суммы). Заменяя в (3.13) Δs_i его приближенным значением (3.12), получим

$$s \approx \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (3.14)$$

Если уменьшать промежутки времени Δt_i , произведения $v_i \Delta t_i$ с возрастающей точностью будут определять пройденные за эти промежутки пути Δs_i . Поэтому, сделав предельный переход, при котором все Δt_i стремятся к нулю (N при этом неограниченно возрастает), мы получим точное значение пути:

$$s = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (3.15)$$

В математике выражение вида

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i, \quad (3.16)$$

составленное для значений x , заключенных в пределах от a до b , называют *определенным интегралом от функции $f(x)$* , взятым по переменной x между нижним пределом $x = a$ и верхним пределом $x = b$, и обозначают символом

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (3.17)$$

Сравнение выражений (3.15) и (3.16) показывает, что путь, пройденный частицей за промежуток времени от t_1 до t_2 , равен определенному интегралу от функции $v(t)$, показывающей, как изменяется модуль скорости с течением времени:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (3.18)$$

Определенный интеграл имеет простой геометрический смысл. Выясним его на примере интеграла

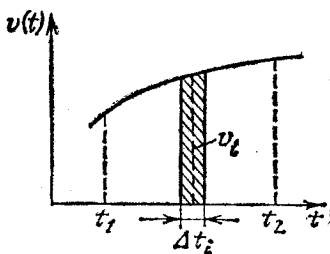


Рис. 3.3. Площадь заштрихованной полоски приближенно равна $v_i \Delta t_i$

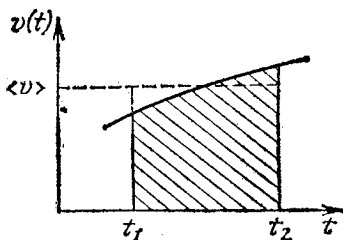


Рис. 3.4. Площадь фигуры, ограниченной кривой $v(t)$, совпадает с площадью прямоугольника высоты $\langle v \rangle$

(3.18). На рис. 3.3 видно, что произведение $v_i \Delta t_i$ приближенно равно площади полоски с основанием Δt_i . Сумма таких произведений, т. е. выражение (3.14), приближенно равна площади фигуры, ограниченной кривой $v(t)$. При дроблении полосок на более узкие (что соответствует процессу, при котором все $\Delta t_i \rightarrow 0$) сумма площадей полосок переходит в площадь фигуры, ограниченной снизу осью t , с боков — прямыми $t = t_1$ и $t = t_2$, а сверху — графиком функции $v(t)$. Эта площадь численно равна определенному интегралу (3.18).

С учетом выражения (3.18) среднее значение модуля скорости (см. формулу (3.2)) можно представить в виде

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (3.19)$$

(время движения $t = t_2 - t_1$). Геометрический смысл $\langle v \rangle$ ясен из рис. 3.4.

Аналогично вычисляются средние значения любых скалярных или векторных функций. Например, среднее значение функции $y(x)$ на промежутке от x_1 до x_2 определяется выражением

$$\langle y \rangle = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx. \quad (3.20)$$

Среднее значение скорости за время от t_1 до t_2 равно

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (3.21)$$

(Заметим, что векторную функцию нельзя изобразить в виде графика, поэтому рис. 3.3 и 3.4 к данному интегралу неприменимы.) Согласно формуле (3.6) $v(t) dt = dr$ есть перемещение частицы за время dt . Следовательно, можно написать, что

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_1^2 dr = \frac{r_{12}}{t_2 - t_1}, \quad (3.22)$$

где r_{12} — перемещение частицы за промежуток времени $t_2 - t_1$.

§ 4. Ускорение

Чтобы охарактеризовать изменение скорости частицы со временем, используется величина

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}, \quad (4.1)$$

называемая ускорением частицы. Приняв во внимание соотношение (3.6), можно написать, что

$$a = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \dot{r} = \ddot{r}. \quad (4.2)$$

Следовательно, ускорение можно определить как первую производную скорости по времени либо как вторую производную радиус-вектора по времени.

Продифференцировав по времени соотношение (3.9), получим для ускорения выражение

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z \quad (4.3)$$

(напомним, что $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — постоянные векторы). Вместе с тем ускорение, как и любой другой вектор, можно выразить через его компоненты по координатным осям:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z.$$

Сопоставление этого выражения с (4.3) дает, что

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (4.4)$$

Таким образом, компоненты ускорения равны вторым производным соответствующих координат по времени (ср. с (3.11)).

При движении в одну и ту же сторону по прямолинейной траектории скорость изменяется только по модулю. Следовательно, ускорение должно определяться значением \dot{v} — производной модуля скорости по времени. При равномерном движении по криволинейной траектории $\dot{v} = 0$, так что скорость изменяется только по направлению. Легко сообразить, что направление скорости будет изменяться тем быстрее, чем больше кривизна траектории и чем быстрее движется частица (чем больше v).

Представив скорость в виде

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_v \quad (4.5)$$

(\mathbf{e}_v — орт вектора \mathbf{v}), рассмотрим два частных случая: 1) движение по прямолинейной траектории и 2) равномерное движение по окружности.

1. При прямолинейном движении $\mathbf{e}_v = \text{const}$, изменяется только v , поэтому

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{e}_v. \quad (4.6)$$

Из этого выражения следует, что в случае, когда скорость со временем увеличивается (т. е. $\dot{v} > 0$), ускорение направлено так же, как скорость, а модуль ускорения равен \dot{v} . Если же скорость со временем уменьшается (т. е. $\dot{v} < 0$), направление ускорения

противоположно направлению скорости, а модуль ускорения равен $|\dot{v}|$ (напомним, что модуль вектора должен быть положительным).

2. При равномерном движении по окружности $v = \text{const}$, изменяется только e_v , поэтому

$$a = \dot{v}e_v. \quad (4.7)$$

Из рис. 4.1 следует, что за время Δt орт скорости поворачивается на угол $\Delta\varphi = v\Delta t/R$ и получает приращение Δe_v . По определению производной

$$\dot{e}_v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta e_v}{\Delta t}. \quad (4.8)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ будет стремиться к нулю и угол $\Delta\varphi$. Поэтому, заменив хорду AB на рис. 4.1б соответствующей дугой, можно положить $|\Delta e_v|$ приближенно равным $\Delta\varphi$ (напомним, что стороны треугольника OA и

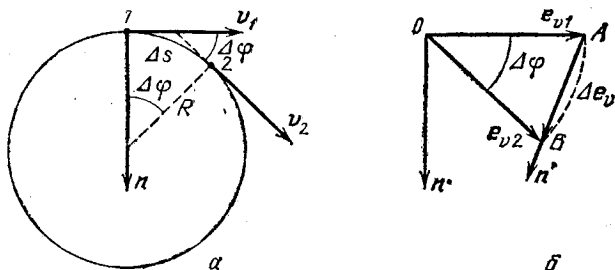


Рис. 4.1. а — В момент времени t частица находилась в точке 1, спустя время Δt она оказалась в точке 2, пройдя путь Δs , равный $v\Delta t$. б — Орт скорости поворачивается при этом на угол $\Delta\varphi$, равный $\Delta s/R = v\Delta t/R$, и получает приращение Δe_v

OB равны единице). При $\Delta t \rightarrow 0$ отношение хорды к дуге будет стремиться к единице.

Приняв $|\Delta e_v| \approx \Delta\varphi$, можно написать, что $\Delta e_v \approx \Delta\varphi \cdot n'$, где n' — единичный вектор, имеющий такое же направление, как и Δe_v . При предельном переходе этот единичный вектор превращается в n — орт нормали к траектории в той точке, в которой была частица в момент t . Подставив полученное значение Δe_v в формулу (4.8) и приняв во внимание, что $\Delta\varphi = v\Delta t/R$, получим

$$\dot{e}_v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi \cdot n'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} n' = \frac{v}{R} n.$$

Как мы и предполагали, быстрота поворота вектора скорости (т. е. поворота e_v) оказалась пропорциональной модулю скорости и кривизне траектории. (В случае окружности кривизна характеризуется величиной, обратной радиусу.)

Подставив найденное значение \dot{e}_v в формулу (4.7), получим, что

$$a_n = \frac{v^2}{R} n. \quad (4.9)$$

Таким образом, при равномерном движении по окружности ускорение определяется выражением (4.9). Направлено ускорение по нормали к скорости. Поэтому его называют нормальным ускорением и в обозначении его ставят индекс n (как мы и поступили в формуле (4.9)).

Каждой точке произвольной искривленной линии можно сопоставить окружность, которая сливается с линией на бесконечно малом ее участке (рис. 4.2).

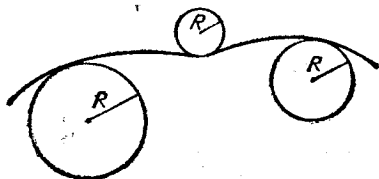


Рис. 4.2. Радиус окружности, сливающейся с траекторией на бесконечно малом ее участке, характеризует кривизну траектории

Радиус этой окружности характеризует кривизну линии в данной точке и называется радиусом кривизны.

Если частица движется равномерно по произвольной криволинейной траектории, ускорение также определяется формулой (4.9), причем под R подразумевается радиус кривизны траектории в той точке, где находится в данный момент частица.

При неравномерном движении частицы по криволинейной траектории оба множителя в формуле (4.5) изменяются со временем. Применяв правило дифференцирования произведения двух функций, получим выражение

$$a = \dot{v} = \dot{v}e_v + v\dot{e}_v,$$

из которого следует, что в общем случае ускорение распадается на два слагаемых. Одно из них, как мы выяснили ранее (см. формулу (4.6)), коллинеарно

скорости и, следовательно, направлено по касательной к траектории. Поэтому его называют тангенциальным (т. е. касательным) ускорением и обозначают a_τ . Второе слагаемое совпадает с (4.7), т. е. определяется формулой (4.9) и является нормальным ускорением.

Итак,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n = \dot{v} \mathbf{e}_v + \frac{v^2}{R} \mathbf{n} \quad (4.10)$$

[(обычно вместо \mathbf{e}_v пишут $\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной, однако мы предпочитаем писать \mathbf{e}_v , чтобы подчеркнуть, что это орт скорости). Первое слагаемое характеризует быстроту изменения модуля скорости, второе слагаемое — быстроту изменения направления скорости.]

Составляющие \mathbf{a}_τ и \mathbf{a}_n перпендикулярны друг к другу. Поэтому квадрат модуля ускорения равен сумме квадратов модулей составляющих: $a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$.

Отсюда следует, что

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\dot{v})^2 + (v^2/R)^2}. \quad (4.11)$$

§ 5. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной самой себе

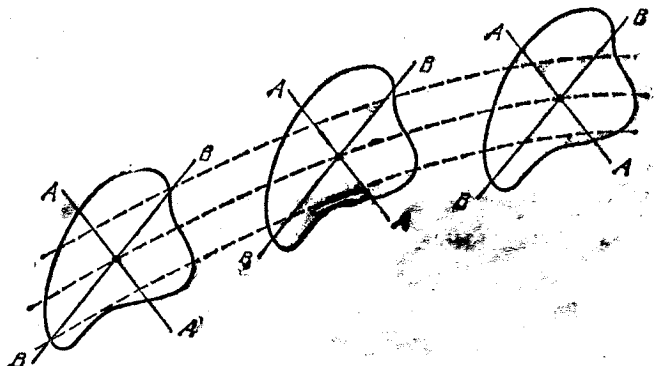


Рис. 5.1. При поступательном движении любая прямая, связанная с телом, остается параллельной самой себе

с телом, остается при его движении параллельной самой себе (рис. 5.1),

Обозначим цифрами 1 и 2 две произвольные точки тела (рис. 5.2). При поступательном движении вектор r_{12} , проведенный из точки 1 в точку 2, остается

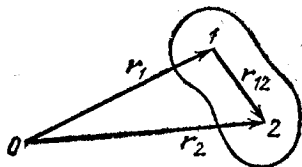


Рис. 5.2. Направление прямой, проходящей через точки 1 и 2, не изменяется. Расстояние между точками также неизменно. Поэтому $r_{12} = \text{const}$

постоянным. Он связан с радиус-векторами точек соотношением $r_2 = r_1 + r_{12}$. Продифференцировав это соотношение по времени, получим, что

$$\dot{r}_2 = \dot{r}_1, \quad \text{т. е.} \quad v_2 = v_1$$

(производная от постоянного вектора равна нулю). Еще одно дифференцирование дает, что

$$\dot{v}_2 = \dot{v}_1, \quad \text{т. е.} \quad a_2 = a_1.$$

Таким образом, скорости и ускорения точек 1 и 2 одинаковы. Такое же равенство скоростей и ускорений получается для каждой пары произвольно взятых точек. Отсюда заключаем, что при поступательном движении все точки твердого тела имеют в любой момент времени одинаковые скорости и ускорения.

Из одинаковости скоростей точек твердого тела следует, что при поступательном движении траектории всех точек идентичны и могут быть совмещены параллельным переносом.

Сказанное означает, что для описания поступательного движения твердого тела достаточно знать, как движется одна из его точек. Все остальные точки движутся таким же образом.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как связаны компоненты скорости и ускорения материальной точки с производными ее координат по времени?
2. Может ли криволинейное движение быть равномерным?
3. Чему равно скалярное произведение скорости и ускорения в случае равномерного движения по окружности?
4. Что характерно для скоростей и ускорений точек тела, движущегося поступательно?

Примеры решения задач

1. Компоненты скорости материальной точки определяются выражениями: $v_x = 1,0t$, $v_y = 2,0t$, $v_z = 3,0t$ (множители при t выражены в м/с²). Найти ускорение точки и его модуль.

Решение. Компоненты ускорения равны производным по времени компонент скорости: $a_x = \dot{v}_x = 1,0$ м/с², $a_y = \dot{v}_y = 2,0$ м/с², $a_z = \dot{v}_z = 3,0$ м/с². Вектор равен сумме произведений его компонент на орты соответствующих координатных осей:

$$\mathbf{a} = 1,0\mathbf{e}_x + 2,0\mathbf{e}_y + 3,0\mathbf{e}_z.$$

Квадрат модуля вектора равен сумме квадратов его компонент. Поэтому

$$a = \sqrt{1,0^2 + 2,0^2 + 3,0^2} = \sqrt{14} = 3,7 \text{ м/с.}$$

2. В некоторый момент времени t компоненты скорости имеют значения 1, 2 и -3 м/с, а компоненты ускорения — значения -3 , 2 и 1 м/с². Найти значение производной dv/dt в момент t и радиус кривизны траектории в той точке, в которой находится частица в момент t .

Решение. Производная dv/dt представляет собой проекцию ускорения \mathbf{a} на направление \mathbf{v} , т. е. произведение модуля вектора \mathbf{a} на косинус угла α между векторами \mathbf{a} и \mathbf{v} . Из соотношения $\mathbf{av} = av \cos \alpha$ следует, что $\cos \alpha = av/av$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a \cos \alpha = a \frac{\mathbf{av}}{av} = \frac{\mathbf{av}}{v} = \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \\ &= \frac{(-3) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = -0,53 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Модуль нормального ускорения $a_n = v^2/R$, откуда $R = v^2/a_n$; квадрат ускорения равен сумме квадратов тангенциального и нормального ускорений, поэтому $a_n^2 = a^2 - a_t^2 = a^2 - (dv/dt)^2$. С учетом этих соотношений

$$\begin{aligned} R &= \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_t^2}} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - (dv/dt)^2}} = \\ &= \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - [(av)/v]^2}} = \frac{v^3}{\sqrt{a^2 v^2 - (av)^2}} = \\ &= \frac{v^3}{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{3/2} \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) - (a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z)^2}} = 3,8 \text{ м.} \end{aligned}$$

3. Модуль скорости материальной точки изменяется со временем по закону $v = at^2$, где $a = 1,00$ м/с³. Найти путь, пройденный точкой за первые 10,0 с движения.

Решение. Путь равен определенному интегралу от модуля скорости по времени:

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t at^2 dt = \frac{at^3}{3} = \frac{1,00 \cdot 10,0^3}{3} = 3,3 \cdot 10^2 \text{ м.}$$

Г л а в а 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 6. Инерциальные системы отсчета. Закон инерции

Мы уже отмечали, что относительно разных систем отсчета движение имеет неодинаковый характер. Например, относительно вагона точка на ободке колеса движется по окружности, в то время как относительно Земли она движется по сложной кривой, называемой циклоидой.

Среди всевозможных систем отсчета существуют такие, относительно которых движение тел оказывается особенно простым. В частности, тела, не подверженные воздействию других тел, движутся относительно таких систем без ускорения, т. е. прямолинейно и равномерно. Эти особенные системы отсчета называются инерциальными. Существование инерциальных систем установлено из опыта и представляет собой закон природы.

Инерциальных систем существует бесчисленное множество. Любая система отсчета, движущаяся относительно какой-либо инерциальной системы поступательно с постоянной скоростью, является также инерциальной. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим движение частицы (т. е. материальной точки) относительно систем отсчета K и K' (рис. 6.1). Допустим, что система K' движется относительно системы K поступательно с постоянной скоростью v_0 . Между показанными на рисунке радиус-векторами имеется соотношение $r = r_0 + r'$. Продифференцировав его по времени, найдем, что

$$\dot{r} = \dot{r}_0 + \dot{r}', \text{ т. е. } v = v_0 + v'. \quad (6.1)$$

Если на частицу не действуют никакие тела и система K инерциальна, то скорость v частицы в этой

системе будет постоянной. Из (6.1) следует, что скорость v' частицы в системе K' также оказывается постоянной ($v_0 = \text{const}$ по условию). Это означает, что система K' также инерциальна.

Опытным путем установлено, что инерциальной является система отсчета, начало которой совмещено с центром Солнца, а оси направлены на неподвижные звезды. Эта система называется гелиоцентрической (гелиос — по-гречески солнце). Земля движется относительно Солнца по криволинейной траектории; кроме того, она вращается вокруг своей оси. Поэтому система отсчета, связанная с Землей, неинерциальна. Однако ускорение, с которым движется Земля, настолько мало, что при решении многих задач систему отсчета, связанную с Землей, можно считать практически инерциальной.

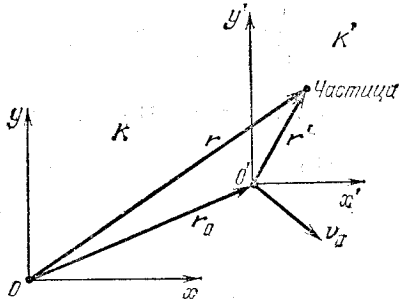


Рис. 6.1. Движение частицы в системах отсчета K и K'

этому система отсчета, связанная с Землей, неинерциальна. Однако ускорение, с которым движется Земля, настолько мало, что при решении многих задач систему отсчета, связанную с Землей, можно считать практически инерциальной.

Утверждение о существовании инерциальных систем отсчета Ньютон сформулировал в виде закона инерции, который называют также первым законом Ньютона. Согласно этому закону *всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.*

Закон инерции отнюдь не очевиден. До Галилея¹⁾ считали, что воздействие обуславливает не изменение скорости (т. е. ускорение), а саму скорость. Это мнение основывалось на таких известных из повседневной жизни фактах, как необходимость непрерывно толкать тележку, движущуюся по горизонтальной ровной дороге, для того чтобы ее движение не замедлялось. Теперь мы знаем, что, толкая тележку, мы

¹⁾ Галилео Галилей (1564—1642) — выдающийся итальянский физик и астроном.

уравновешиваем воздействие, оказываемое на нее трением. Однако, не зная об этом, легко прийти к заключению, что воздействие необходимо для поддержания движения неизменным.

§ 7. Сила и масса

Для того чтобы сформулировать второй закон Ньютона, нужны понятия силы и массы.

Силой называется векторная величина, характеризующая воздействие на данное тело со стороны других тел. Модуль этой величины определяет «интенсивность» воздействия, а направление совпадает с направлением ускорения, сообщаемого телу данным воздействием. Модуль силы можно, например, определять по растяжению эталонной пружины, вызываемому действием рассматриваемой силы.

Масса есть мера инертности тела. Под инертностью понимают неподатливость тела действию силы, т. е. свойство тела противиться изменению скорости под воздействием силы. Чтобы выразить массу данного тела числом, нужно сравнить ее с массой эталонного тела, принятой за единицу.

Рассмотрим следующий мысленный эксперимент¹⁾. Поместим два тела, массы которых мы хотим сравнить, в такие условия, при которых отсутствуют воздействия на них других тел. Затем заставим тела взаимодействовать друг с другом (например, сообщив им электрические заряды) и будем измерять ускорения, которые получают тела в результате взаимодействия. При этом обнаружится, что направления ускорений тел противоположны. Что же касается модулей ускорений, то, независимо от природы и интенсивности взаимодействия (которую можно варьировать, например, изменяя заряды на телах или расстояние между телами), отношение их получается одним и тем же: $a_1/a_2 = \text{const}$ для данной пары тел. Для другой пары тел отношение модулей ускорений

¹⁾ В мысленном эксперименте изучаемая сторона явления обнаруживается в наиболее простом и отчетливом виде. Достоверность наблюдаемого в мысленном эксперименте эффекта вытекает из наблюдений, полученных в ряде реальных экспериментов.

оказывается иным, но также не зависит от природы и интенсивности взаимодействия.

Отношение модулей ускорений, получающееся в описанных выше условиях, принимается равным обратному отношению масс рассматриваемых тел: $m_1/m_2 = a_2/a_1$. Если одно из тел является эталонным, то масса m другого тела определяется соотношением

$$m = \frac{a_{\text{эт}}}{a} m_{\text{эт}}, \quad (7.1)$$

где $m_{\text{эт}}$ и $a_{\text{эт}}$ — масса и модуль ускорения эталонного тела, a — модуль ускорения данного тела.

Практически невозможно изолировать сравниваемые тела от внешних воздействий. Однако можно сделать так, чтобы эти воздействия уравновешивали друг друга. В качестве примера рассмотрим два шарика, подвешенных на тонких нитях (рис. 7.1). Поместим между шариками сжатую и связанную ниткой пружинку. Первоначально шарики неподвижны. Это указывает на то, что силы, действующие на каждый из шариков, полностью уравновешивают друг друга.

Если пережечь нить, удерживающую пружинку в сжатом состоянии, шарики придут в движение. (В этом случае взаимодействие шариков осуществляется через пружинку.) Измерив ускорения шариков в начальный момент, можно произвести сравнение их масс.

Произведение массы тела на его скорость Ньютон назвал количеством движения тела. Это название устарело и теперь величину

$$p = mv \quad (7.2)$$

называют импульсом тела.

Выражение (7.2) определяет импульс материальных точек (частиц) и протяженных тел, движущихся поступательно (напомним, что при таком движении скорость всех точек тела одна и та же).

Впоследствии выяснилось, что выражение (7.2) определяет правильно импульс тела только в том слу-



Рис. 7.1.
Сравнение
масс шариков

чае, если скорость тела много меньше скорости света в вакууме (эту скорость принято обозначать буквой c , она равна $3 \cdot 10^8$ м/с). Согласно специальной теории относительности (СТО) импульс определяется выражением

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.3)$$

Следовательно, зависимость импульса от скорости частицы оказалась более сложной, чем предполагал Ньютон. При $v \ll c$ отношением v^2/c^2 можно пренебречь по сравнению с единицей, в результате чего формула (7.3) переходит в (7.2).

Мы сначала будем рассматривать ньютоновскую механику, поэтому будем считать импульс, равным mv .

§ 8. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона утверждает, что *скорость изменения импульса частицы равна действующей на частицу силе F* :

$$\frac{dp}{dt} = F. \quad (8.1)$$

(Напомним, что под частицей подразумевается материальная точка.) Соотношение (8.1) называется уравнением движения частицы.

Подставив в формулу (8.1) выражение для импульса, получим, что

$$\frac{d}{dt} (mv) = F.$$

Наконец, приняв во внимание, что $m = \text{const.}$ а $\dot{v} = a$ — ускорению частицы, придем к соотношению

$$ma = F. \quad (8.2)$$

Мы получили вторую формулировку второго закона Ньютона: *произведение массы частицы на ее ускорение равно силе, действующей на частицу*. Уравнение (8.2) справедливо и для протяженных тел в том случае, когда они движутся поступательно.

Если на тело действуют несколько сил, то под F в формулах (8.1) и (8.2) подразумевается их результирующая (т. е. векторная сумма сил).

Надо иметь в виду, что второй закон Ньютона (равно как и два других) возник в результате обобщения данных большого числа опытов и наблюдений и, следовательно, является экспериментальным законом.

Из (8.2) вытекает, что при $F = 0$ (т. е. в отсутствие воздействий на данное тело других тел) ускорение равно нулю, т. е. тело движется прямолинейно и равномерно. Таким образом, первый закон Ньютона, казалось бы, входит во второй закон как его частный случай. Несмотря на это, первый закон формулируется независимо от второго, поскольку в нем содержится утверждение о существовании в природе инерциальных систем отсчета.

Спроектируем векторы, фигурирующие в формуле (8.2), на координатные оси x , y , z и учтем соотношение (4.3). В результате получим три скалярных уравнения:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (8.3)$$

которые эквивалентны векторному уравнению (8.2). Спроектировав векторы \mathbf{a} и \mathbf{F} на произвольное направление, заданное осью, которую мы обозначим, скажем, буквой l , получим уравнение

$$ma_l = F_l. \quad (8.4)$$

При числовых расчетах используются уравнения движения в виде (8.3) или (8.4).

В заключение отметим, что уравнение (8.2) имеет столь простой вид только при согласованном выборе единиц ускорения, массы и силы. При независимом выборе этих единиц выражение второго закона Ньютона надо писать в виде

$$ma = kF, \quad (8.5)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

§ 9. Единицы и размерности физических величин

Измерить какую-либо величину означает найти ее отношение к величине того же вида, принятой за единицу.

Для каждой физической величины можно было бы установить единицу произвольно, независимо от

единиц других величин. Однако это привело бы к появлению в формулах «неудобных» числовых коэффициентов. Поэтому произвольно определяют только единицы небольшого числа величин (эти единицы называют основными). Единицы же остальных величин определяют с помощью формул, связывающих эти величины с теми, единицы которых выбраны в качестве основных (установленные так единицы называют производными). Например, установив единицы длины и времени, за единицу скорости принимают такую скорость, при которой частица в единицу времени проходит путь, равный единице (в соответствии с формулой $v = s/t$). Установив единицы массы и ускорения, единицу силы определяют так, чтобы единица силы сообщала единице массы ускорение, равное единице. В этом случае коэффициент k в формуле (8.5) будет равен единице.

При таком определении единиц формулы принимают более простой вид, а совокупность единиц образует определенную систему. Существует несколько систем, отличающихся выбором основных единиц. Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам с 1 января 1982 г. в Советском Союзе введен ГОСТ 8.417—81 (СТ СЭВ 1052—78) «Единицы физических величин». Согласно этому ГОСТу обязательному применению подлежат единицы Международной системы (СИ), а также десятичные кратные и дольные от них.

В качестве основных в СИ приняты семь единиц: длины — метр (обозначение м), массы — килограмм (кг), времени — секунда (с), силы электрического тока — ампер (А), термодинамической температуры — кельвин (К), силы света — кандела (кд), количества вещества — моль (моль).

В механике мы будем иметь дело с единицами длины, массы и времени, а также с производными от них единицами.

В 1983 г. на XVII Генеральной конференции по мерам и весам было принято определение метра, согласно которому метр представляет собой расстояние, проходимое в вакууме плоской электромагнитной волной за $1/299\,792\,458$ долю секунды. Метр приближенно равен $1/40\,000\,000$ доле длины земного меридиана. Применяются также кратные и дольные еди-

ницы: километр ($1 \text{ км} = 10^3 \text{ м}$), сантиметр ($1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$), миллиметр ($1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$), микрометр ($1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}$) и т. д.

Килограмм равен массе платино-иридиевого цилиндрического тела (диаметром и высотой 39 мм), хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре (близ Парижа). Это тело называется международным прототипом килограмма. Его масса близка к массе 1000 см^3 чистой воды при 4°C . Грамм (г) равен 10^{-3} килограмма.

Секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома цезия-133. Секунда приблизительно равна $1/86\,400$ средних солнечных суток.

Определения остальных основных единиц будут даны в соответствующих разделах курса.

Единицей скорости служит метр в секунду (м/с), равный скорости равномерно движущейся частицы, проходящей в секунду путь, равный одному метру. Единица ускорения — метр в секунду за секунду (м/с^2) — есть ускорение равноускоренного движения, при котором скорость частицы возрастает за секунду на 1 м/с . Единица силы в честь И. Ньютона названа ньютон (Н). Согласно (8.2) она равна силе, под действием которой тело с массой 1 кг получает ускорение 1 м/с^2 . Производные единицы остальных физических величин определяются аналогичным способом.

Изменение единицы влечет за собой изменение числового значения величины. Пусть длина стола в метрах выражается числом 2. Та же длина, измеренная в сантиметрах (т. е. единицах в сто раз меньших), выражается числом 200, в сто раз большим, чем 2.

Изменение основных единиц обуславливает изменение производных единиц. Если, например, в качестве единицы длины вместо метра взять километр (т. е. единицу в 1000 раз большую), а в качестве единицы времени вместо секунды взять час (т. е. единицу в 3600 большую), то единицей скорости будет километр в час (км/ч), равный $(1/3,6) \text{ м/с}$. Единица скорости равна единице длины, деленной на единицу времени. Мы видели, что увеличение единицы в числителе в 1000 раз в сочетании с увеличением единицы

в знаменателе в 3600 раз привело к увеличению единицы скорости в $1000/3600 = 1/3,6$ раз. Соответственно числовое значение скорости увеличится в 3,6 раз. Например, скорость 16,7 м/с равнозначна скорости 60 км/ч.

Соотношение, показывающее, как изменяется единица какой-либо величины при изменении основных единиц, называется размерностью этой единицы. Обычно вместо размерности единицы физической величины говорят для краткости о размерности самой величины. Мы тоже будем поступать таким образом.

Для обозначения размерности используется обозначение величины, взятое в квадратные скобки: $[v]$ — размерность скорости, $[a]$ — размерность ускорения и т. д. Для размерностей длины l , массы m и времени t используются специальные обозначения:

$$[l] = L, \quad [m] = M, \quad [t] = T. \quad (9.1)$$

В этих обозначениях размерность произвольной физической величины f имеет вид

$$[f] = L^\alpha M^\beta T^\gamma, \quad (9.2)$$

где α , β , γ — числа, называемые показателями размерности. Эти числа могут быть целыми или дробными, положительными или отрицательными. Если все показатели равны нулю, величина называется безразмерной. Безразмерная величина имеет нулевую размерность. Числовые значения безразмерных величин не зависят от выбора основных единиц.

Соотношение (9.2) называется формулой размерности, а правая часть его — размерностью величины f . Это соотношение означает, что при увеличении единицы длины в n_1 раз единица величины f увеличивается в n_1^α раз, при увеличении единицы массы в n_2 раз единица величины f увеличивается в n_2^β раз и, наконец, при увеличении единицы времени в n_3 раз единица величины f увеличивается в n_3^γ раз.

Размерность скорости равна размерности длины, деленной на размерность времени: $[v] = L/T = L^1 T^{-1}$. Следовательно, при увеличении единицы длины в n_1 раз, а единицы времени в n_3 раз единица скорости

увеличивается в $n_1 n_3^{-1} = n_1/n_3$ раз, что и получилось в рассмотренном выше примере.

Физические законы не могут зависеть от выбора единиц величин. Поэтому размерности обеих частей уравнений, выражающих эти законы, должны быть одинаковыми. Это правило используется для установления размерностей физических величин. Так, например, из формулы (8.2) вытекает, что размерность силы определяется формулой

$$[F] = [m][a] = [m][l]/[t^2] = \text{MLT}^{-2}. \quad (9.3)$$

Правило равенства размерностей обеих частей уравнений используется также для проверки правильности полученных соотношений.

§ 10. Третий закон Ньютона

Воздействие тел друг на друга всегда носит характер взаимодействия. Если тело 2 действует на тело 1 с силой F_{12} , то и тело 1 действует на тело 2 с силой F_{21} . Третий закон Ньютона утверждает, что *силы, с которыми взаимодействуют два тела, равны по модулю и противоположны по направлению, т. е.*

$$F_{12} = -F_{21}. \quad (10.1)$$

Таким образом, силы всегда возникают попарно. Подчеркнем, что силы, фигурирующие в соотношении (10.1), приложены к разным телам; поэтому они не могут уравновесить друг друга.

Заметим, что условием (10.1) мы неявно воспользовались в § 7 при рассмотрении способа сравнения масс. Действительно, из соотношения $m_1/m_2 = a_2/a_1$ следует, что $m_1 a_1 = m_2 a_2$; согласно второму закону Ньютона это означает равенство модулей сил, с которыми тела действуют друг на друга.

Третий закон Ньютона, как и первые два, справедлив лишь в инерциальных системах отсчета. В неинерциальных системах отсчета этот закон оказывается несправедливым. Кроме того, отступления от третьего закона наблюдаются в случае движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света. Однако эти отступления мы не будем рассматривать. В рамках ньютоновской механики в инерциальных системах отсчета третий закон Ньютона всегда справедлив.

§ 11. Силы

В классической механике приходится иметь дело с гравитационными и электромагнитными силами, а также с упругими силами и силами трения. Гравитационные и электромагнитные силы нельзя свести к другим, более простым, силам; поэтому их называют фундаментальными. Законы фундаментальных сил просты и выражаются точными формулами. Для примера приведем формулу, определяющую модуль силы гравитационного взаимодействия двух материальных точек:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (11.1)$$

Здесь r — расстояние между точками, m_1 и m_2 — их массы, G — коэффициент пропорциональности, называемый гравитационной постоянной.

Упругие силы и силы трения являются по своей природе электромагнитными и, следовательно, не могут считаться фундаментальными. Для этих сил можно получить лишь приближенные эмпирические (т. е. основанные на опыте) формулы.

Типичная ошибка, которую допускают учащиеся при решении задач, заключается в том, что одна и та же сила под разными названиями учитывается дважды. Этому способствуют имеющие, к сожалению, хождение термины: «движущая», «скатывающая», «центростремительная», «центробежная» и тому подобные силы. Этими терминами, которые характеризуют силы по оказываемому ими действию или по геометрическому признаку, пользоваться не следует. Чтобы не впасть в ошибку, нужно характеризовать силы по «источнику», вызвавшему их появление. Это означает, что за каждой силой надо видеть тело, воздействием которого обусловлена данная сила.

§ 12. Сила тяжести и вес

Вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением, которое называют ускорением свободного падения и обозначают буквой g . Отсюда вытекает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело действует сила

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} \quad (12.1)$$

(m — масса тела). Эта сила называется силой тяжести. Она приблизительно равна силе гравитационного притяжения тела к Земле. Различие между силой тяжести и гравитационной силой обусловлено тем, что система отсчета, связанная с Землей, не вполне инерциальна (подробнее об этом идет речь в § 37). Это различие настолько мало (оно не превышает 0,36 %), что в первом приближении силу тяжести можно считать равной силе, с которой тело притягивается к Земле.

Если подвесить тело (рис. 12.1а) или положить его на опору (рис. 12.1б), оно будет покоиться относительно Земли. В этом случае сила тяжести уравновешивается силой R , которую называют реакцией

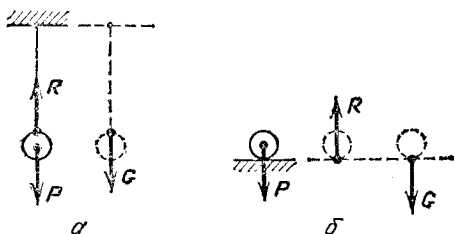


Рис. 12.1. Сила тяжести P и реакция R приложены к телу. Вес G приложен к подвесу (а) или опоре (б)

подвеса или опоры. (Реакциями называются силы, с которыми на данное тело действуют тела, ограничивающие его движение.) По третьему закону Ньютона тело действует на подвес или опору с силой G , которую называют весом тела.

Итак, *вес тела* — это сила, с которой тело действует на подвес или опору вследствие гравитационного притяжения к Земле.

Поскольку силы P и R (рис. 12.1) уравновешивают друг друга, выполняется соотношение $P = -R$. Вес G есть сила, с которой тело действует на подвес (или опору), R есть сила, с которой подвес (или опора) действует на тело. Согласно третьему закону Ньютона должно выполняться соотношение $G = -R$. Сравнение обоих соотношений дает, что

$$G = P = mg. \quad (12.2)$$

Таким образом, вес G и сила тяжести P равны друг другу. Однако приложены они к разным телам — вес к подвесу (или опоре), сила тяжести — к самому телу.

Равенство (12.2) имеет место только в том случае, когда подвес или опора (а следовательно, и тело) покоится относительно Земли (или движется без ускорения). Если же точка крепления подвеса или опоры движется с ускорением, вес перестает быть равным силе тяжести.

Допустим, что подвес прикреплен к потолку кабины лифта, которая движется с ускорением a

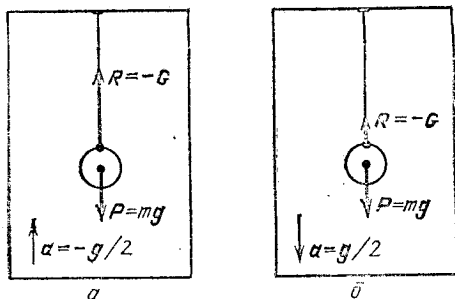


Рис. 12.2. *a* — Лифт движется с ускорением $a = -g/2$, $G = (3/2)mg$. *б* — Лифт движется с ускорением $a = g/2$, $G = (1/2)mg$

(рис. 12.2). С таким же ускорением движется и тело. Поэтому уравнение движения тела имеет вид

$$ma = P + R = P - G = mg - G.$$

Отсюда

$$G = P - ma = m(g - a). \quad (12.3)$$

Если бы лифт оборвался и стал падать с ускорением a , равным g , тело перестало бы действовать на подвес — вес тела стал бы равным нулю, т. е. наступило бы состояние невесомости. Космический корабль, летящий по околоземной орбите с неработающими двигателями, движется, как и оборвавшийся лифт, с ускорением g . Поэтому тела внутри корабля находятся в состоянии невесомости — они не оказывают давления на соприкасающиеся с ними тела. В частности, внутренние органы космонавта перестают оказывать давление на органы, расположенные

ниже, а все тело в целом перестает давить на кости скелета. Этим обуславливается специфическое физиологическое ощущение невесомости.

Соотношение (12.2) между массой и весом тела лежит в основе способа сравнения масс тел путем взвешивания. Тела, лежащие на чашках уравновешенных весов, действуют на чашки с равными силами и, следовательно, имеют одинаковые массы.

§ 13. Упругие силы

Под действием внешних сил возникают деформации (т. е. изменения размеров и формы) тел. Если после прекращения действия внешних сил восстанавливаются прежние форма и размеры тела, то деформация называется упругой. Деформация имеет упругий характер в случае, если внешняя сила не превосходит определенного значения, которое называется пределом упругости. При превышении этого предела деформация становится пластической. В этом случае после устранения внешних сил первоначальные форма и размеры тела полностью не восстанавливаются. В дальнейшем мы будем рассматривать только упругие деформации.

В деформированном теле возникают упругие силы, которые уравновешивают внешние силы, вызвавшие деформацию. Поясним это следующим примером (рис. 13.1). Под действием внешней силы $F_{\text{внеш}}$ пружина получает удлинение x , в результате чего в пружине возникает упругая сила $F_{\text{упр}}$, уравновешивающая силу $F_{\text{внеш}}$.

Упругие силы возникают во всей деформированной пружине. Любая часть пружины действует на другую часть с силой, равной $F_{\text{упр}}$ (рис. 13.2).

Установленный экспериментально закон Гука¹⁾ утверждает, что при упругой деформации *удлинение пружины пропорционально внешней силе*. Аналитически эту закономерность принято записывать следующим образом:

$$x = \frac{1}{k} F_{\text{внеш}}, \quad (13.1)$$

¹⁾ Роберт Гук (1635—1703) — английский физик.

(из рис. 13.1 следует, что знаки x и проекции $F_{\text{внеш}}$ на ось x совпадают). Величина k называется

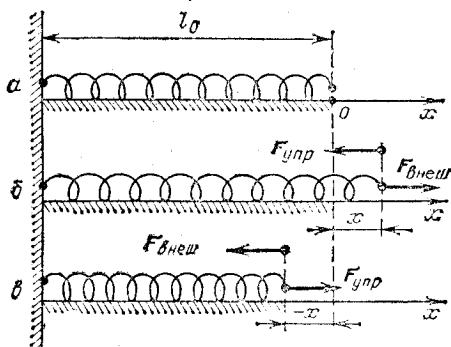


Рис. 13.1. *a* — Закрепленная одним концом пружина длины l_0 лежит свободно на гладком столе; деформация отсутствует. *б* — Под действием силы $F_{\text{внеш}}$ пружина получила положительное удлинение x ($x > 0$). *в* — При другом направлении $F_{\text{внеш}}$ удлинение пружины отрицательно ($x < 0$). На рисунке проставлена положительная величина $-x$ ($-x > 0$)

жесткостью пружины. Из (13.1) следует, что чем больше k , тем меньше удлинение получает пружина под действием данной силы.

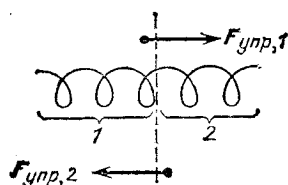


Рис. 13.2. Изображен участок растянутой пружины. Штриховой линией показана воображаемая граница между частями пружины, обозначенными цифрами 1 и 2

Упругая сила отличается от внешней только знаком. Поэтому $F_{\text{упр}, x} = -F_{\text{внеш}, x}$. Произведя такую замену в формуле (13.1), получим, что

$$x = -\frac{1}{k} F_{\text{упр}, x}. \quad (13.2)$$

Опустим для краткости индекс «упр» и напишем это соотношение в виде¹⁾

$$F_x = -kx. \quad (13.3)$$

Здесь F_x — проекция упругой силы на ось x , k — жесткость пружины, x — удлинение пружины.

¹⁾ Часто пишут формулу (13.3) в виде $F = -kx$, что неверно, ибо в соответствии с общепринятой системой обозначений F означает модуль силы, т. е. величину всегда положительную. Правая же часть формулы в зависимости от знака x принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Жесткость k пружины зависит от материала, размеров витка и длины пружины. Если разрезать деформированную пружину на две равные части, упругие напряжения в каждой из частей останутся прежними, а удлинение x половины пружины будет в два раза меньше, чем у первоначальной пружины. Отсюда согласно (13.3) следует, что жесткость «половины» пружины в два раза больше, чем целой.

Однородные стержни ведут себя при растяжении и одностороннем сжатии подобно пружине (рис. 13.3). Деформация приводит к возникновению в стержне упругих сил. Эти силы принято характеризовать напряжением σ , которое определяют как модуль силы, приходящейся на единицу площади:

$$\sigma = F_{\text{упр}, \perp} / S \quad (13.4)$$

(S — площадь поперечного сечения стержня; предполагается, что упругая сила распределена равномерно по сечению; значок \perp указывает на то, что сила перпендикулярна к площадке, на которую она действует). В случае растяжения σ считается положительным, в случае сжатия — отрицательным. Сила $F_{\text{упр}}$ направлена перпендикулярно к сечению стержня; поэтому напряжение σ называется нормальным.

Опыт дает, что приращение длины стержня Δl пропорционально напряжению σ :

$$\Delta l = \frac{1}{k} \sigma \quad (13.5)$$

(ср. с (13.2)). Отметим, что знак Δl совпадает со знаком σ .

Коэффициент k , как и в случае пружины, зависит от свойств материала и от длины стержня. Если разрезать стержень, например, на две равные части, k увеличится в два раза. Таким образом, можно

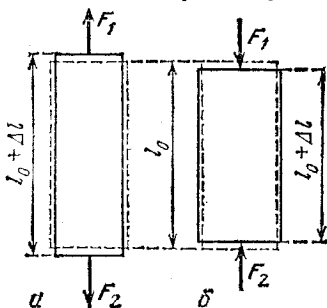


Рис. 13.3. а — Растяжение стержня: $\Delta l > 0$, $l_0 + \Delta l > l_0$. б — Сжатие стержня: $\Delta l < 0$, $l_0 + \Delta l < l_0$

написать, что

$$k = E/l_0, \quad (13.6)$$

где E — величина, характеризующая упругие свойства материала стержня. Ее называют модулем Юнга. Она измеряется в ньютонах на квадратный метр. Единица напряжения (а также давления), равная ньютону на квадратный метр, называется паскалем (Па)¹).

Подстановка в (13.5) значения (13.6) для k приводит к формуле

$$\Delta l = \frac{l_0 \sigma}{E}.$$

Обозначив относительное приращение длины стержня $\Delta l/l_0$ буквой ε , получим окончательную формулу

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma, \quad (13.7)$$

согласно которой относительное удлинение стержня прямо пропорционально напряжению и обратно пропорционально модулю Юнга. Формула (13.7) выражает закон Гука для стержня.

Из (13.7) вытекает, что модуль Юнга равен такому нормальному напряжению, при котором относительное удлинение было бы равно единице (т. е. приращение длины Δl равнялось бы первоначальной длине l_0 стержня), если бы столь большие упругие деформации были возможны. В действительности, например, железные стержни разрушаются при σ , равных примерно $0,002E$; предел упругости достигается при еще меньших напряжениях.

Заметим, что растяжение и сжатие стержней сопровождается соответствующим изменением их поперечных размеров.

Рассмотрим прямоугольный брусок, закрепленный неподвижно нижней гранью (рис. 13.4). Под действием силы F , приложенной к верхней грани, брусок получает деформацию, называемую сдвигом. Величина γ , равная тангенсу угла сдвига φ , называется относительным сдвигом. При упругих деформациях угол φ бывает очень мал; поэтому $\text{tg } \varphi \approx \varphi$.

¹) В честь французского ученого Блеза Паскаля (1623—1662).

Таким образом, относительный сдвиг определяется формулой

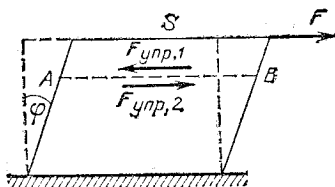
$$\gamma = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi. \quad (13.8)$$

Деформация сдвига приводит к возникновению в каждой точке бруска тангенциального упругого напряжения τ , которое определяется как модуль силы, приходящейся на единицу площади:

$$\tau = F_{\text{упр}, \parallel} / S. \quad (13.9)$$

Здесь S — площадь воображаемой поверхности, параллельной верхней грани бруска (например, поверхности AB на рис. 13.4). Предполагается, что действие

Рис. 13.4. Деформация сдвига: S — площадь верхней грани бруска, φ — угол сдвига, AB — воображаемая поверхность раздела, параллельная основанию бруска



внешней силы F распределено равномерно по верхней грани. Значок \parallel указывает на то, что сила $F_{\text{упр}}$ параллельна к площадке, на которую она действует.

Опыт дает, что относительный сдвиг пропорционален тангенциальному напряжению:

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau. \quad (13.10)$$

Величина G зависит только от свойств материала и называется модулем сдвига. Она равна такому тангенциальному напряжению, при котором $\gamma = \operatorname{tg} \varphi$ был бы равен единице (а $\varphi = 45^\circ$), если бы столь огромные упругие деформации были возможны. Измеряется G , как и модуль Юнга E , в паскалях.

§ 14. Силы трения

Трение подразделяется на внешнее и внутреннее. Внешнее трение возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел (трение скольжения) или при попытках вызвать такое перемещение (трение покоя). Внутреннее трение наблюдается при относительном перемещении

частей одного и того же сплошного тела (например, жидкости или газа).

Различают также сухое и жидкое (или вязкое) трение. Сухое трение возникает между поверхностями твердых тел в отсутствие смазки (т. е. жидкой или газообразной прослойки) между ними. Жидким называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды.

Сухое трение подразделяется на трение скольжения и трение качения.

Эмпирические законы сухого трения. Подействуем на тело (например, брусок), лежащее на неподвижной опоре, внешней силой F (рис. 14.1), постепенно

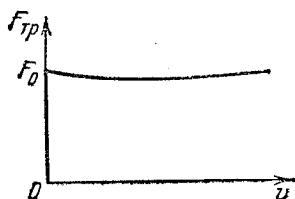
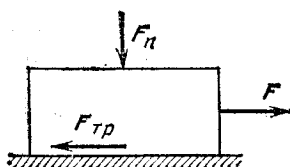


Рис. 14.1. Брусок прижимается к опоре, на которой он лежит, силой нормального давления F_n . Если модуль внешней силы F меньше предельного значения F_0 , внешняя сила F уравновешивается силой трения $F_{тр}$ и брусок остается неподвижным

Рис. 14.2. Зависимость силы трения от скорости скольжения. Вертикальный участок графика, начинающийся в нуле и заканчивающийся при $F_{тр} = F_0$, соответствует силе трения покоя

увеличивая ее модуль. Вначале брусок будет оставаться неподвижным. Это указывает на то, что внешняя сила F уравновешивается некоторой силой $F_{тр}$, направленной по касательной к трущимся поверхностям противоположно силе F . Сила $F_{тр}$ и есть сила трения покоя. Она обусловлена действием опоры, на которой лежит тело, и «автоматически» принимает значение, равное модулю силы F . Когда модуль внешней силы (а следовательно, и модуль силы трения покоя) превысит значение F_0 , тело начнет скользить по опоре — трение покоя сменяется трением скольжения.

Величина F_0 представляет собой максимальное значение силы трения покоя. Сама эта

сила, в зависимости от модуля внешней силы, принимает одно из значений в интервале от нуля до F_0 .

Модуль силы трения скольжения приблизительно равен F_0 и обычно зависит от скорости скольжения v . Примерный график зависимости $F_{\text{тр}}$ от v показан на рис. 14.2. Из графика следует, что с увеличением скорости сила трения скольжения вначале немного убывает, а затем начинает возрастать.

Опытным путем установлено, что максимальная сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно пропорциональна модулю силы нормального давления F_n , прижимающей трущиеся поверхности друг к другу:

$$F_0 = \mu_0 F_n. \quad (14.1)$$

Безразмерный множитель μ_0 называется коэффициентом трения покоя. Он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей.

Аналогичная зависимость имеет место и для силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \mu F_n. \quad (14.2)$$

Здесь μ — коэффициент трения скольжения, который является функцией скорости.

Трение качения возникает между шарообразным или цилиндрическим телом и поверхностью, по которой оно катится. Сила трения качения также подчиняется закону (14.2), но коэффициент трения в этом случае бывает значительно меньшим, чем при скольжении.

Эмпирические законы вязкого (жидкого) трения. На тело, движущееся в вязкой (жидкой или газообразной) среде, действует сила, тормозящая его движение. Эта сила складывается из силы вязкого трения и силы сопротивления среды. Слои среды, непосредственно соприкасающиеся с телом, движутся вместе с телом как одно целое. Сила вязкого трения возникает между этими и внешними относительно них слоями среды. Давление на различные участки движущегося тела оказывается неодинаковым. Результирующая сил давления имеет составляющую, направленную противоположно скорости. Эта составляющая и есть сила сопротивления среды. При больших скоростях сила сопротивления среды

может во много раз превосходить силу вязкого трения. Суммарную силу, обусловленную вязким трением и сопротивлением среды, принято условно называть силой трения.

Для определенной таким образом силы трения характерно то, что она обращается в нуль вместе со скоростью. При небольших скоростях сила растет пропорционально скорости:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -k_1 \mathbf{v}. \quad (14.3)$$

Знак минус указывает на то, что сила направлена противоположно скорости. Коэффициент k_1 зависит от формы и размеров тела, характера его поверхности, а также от свойства среды, называемого вязкостью.

При увеличении скорости тела линейная зависимость (14.3) постепенно переходит в квадратичную:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -k_2 v^2 \mathbf{e}_v \quad (14.4)$$

(\mathbf{e}_v — орт скорости).

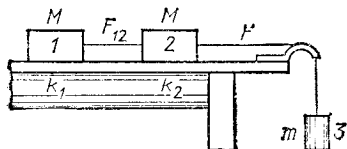
Границы области, в которой происходит переход от закона (14.3) к закону (14.4), зависят от тех же факторов, от которых зависит коэффициент k_1 .

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В каких системах отсчета справедливы законы Ньютона?
2. Какие формулировки второго закона Ньютона вы знаете?
3. Чему равен вес свободно падающего тела?
4. Какой знак имеет скалярное произведение силы трения и скорости тела?

Примеры решения задач

1. На горизонтальном столе лежат два тела массы $M = 1,000$ кг каждое. Тела связаны невесомой нерастяжимой нитью (см. рисунок). Такая же нить связывает тело 2 с телом 3 массы $m = 0,500$ кг. нить может скользить без трения по желобу, укрепленному на краю стола. Коэффициент трения первого тела со столом



К задаче 1

трения первого тела со столом

$k_1 = 0,100$, второго тела $k_2 = 0,150$. Найти: ускорение a , с которым движутся тела, силу F_{12} натяжения нити, связывающей тела 1 и 2, а также силу F натяжения нити, на которой висит тело 3.

Решение. Вследствие нерастяжимости нитей модуль ускорения всех тел одинаков. Уравнения движения тел имеют вид:

$$Ma = F_{12} - k_1 Mg \quad (\text{для тела 1}) \quad (1)$$

(a — модуль ускорения тела, F_{12} — модуль силы, с которой нить действует на тело, $k_1 Mg$ — модуль силы трения);

$$Ma = F - F_{12} - k_2 Mg \quad (\text{для тела 2}); \quad (2)$$

$$ma = mg - F \quad (\text{для тела 3}) \quad (3)$$

(поскольку нить невесома, т. е. имеет массу, практически равную нулю, силы, с которыми нить действует на тела 2 и 3, равны по модулю).

Решив совместно уравнения (1), (2) и (3), получим

$$a = \frac{m - (k_1 + k_2) M}{2M + m} g = 0,98 \text{ м/с}^2,$$

$$F_{12} = \frac{m(1 + k_1) - M(k_2 - k_1)}{2M + m} Mg = 2,0 \text{ Н},$$

$$F = \frac{M(2 + k_1 + k_2)}{2M + m} mg = 4,4 \text{ Н}.$$

2. Тонкая стальная цепочка с очень мелкими звеньями, имеющая длину $l = 1,000$ м и массу $m = 10,0$ г, лежит на горизонтальном столе. Цепочка вытянута в прямую линию, перпендикулярную к краю стола. Конец цепочки свешивается с края стола. Когда длина части цепочки, лежащей на столе, составляет $\eta = 0,725$ всей длины, цепочка начинает соскальзывать со стола вниз. Считая цепочку однородной по длине, найти: а) коэффициент трения k между цепочкой и столом, б) скорость v_k цепочки в конце соскальзывания.

Решение. а) Цепочка начнет соскальзывать при условии, что сила тяжести, действующая на свешивающуюся часть, станет равна силе трения, действующей на ту часть цепочки, которая лежит на столе:

$$(1 - \eta) mg = k\eta mg, \text{ откуда } k = (1 - \eta)/\eta = 0,38.$$

б) В момент, когда длина части, лежащей на столе, равна x ($x < \eta l$), ускорение цепочки определяется равенством

$$\begin{aligned} ma &= mg \frac{l-x}{l} - kmg \frac{x}{l} = mg \frac{l-x}{l} - \frac{1-\eta}{\eta} mg \frac{x}{l} = \\ &= mg \left(1 - \frac{1}{\eta} \frac{x}{l} \right). \end{aligned}$$

Сократив на m , найдем, что

$$a = g(1 - bx), \text{ где } b = 1/\eta l.$$

Приняв во внимание, что модуль скорости цепочки $v = -dx/dt$ (x со временем уменьшается, поэтому $dx/dt < 0$), можно модуль ускорения цепочки представить в виде

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = -v \frac{dv}{dx}.$$

Отсюда

$$v dv = -a dx = -g(1 - bx) dx.$$

За то время, за которое v изменяется от 0 до v_k , длина изменяется от ηl до 0. Поэтому

$$\int_0^{v_k} v dv = -g \int_{\eta l}^0 (1 - bx) dx.$$

Проинтегрировав, получим

$$\frac{v_k^2}{2} = g \left[\eta l - b \frac{(\eta l)^2}{2} \right].$$

Подставив значение b и произведя преобразования, найдем скорость цепочки в конце соскальзывания:

$$v_k = \sqrt{g\eta l} = 2,67 \text{ м/с.}$$

Г л а в а 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 15. Сохраняющиеся величины

Совокупность тел, выделенных для рассмотрения, называется механической системой. Тела системы могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не входящими в систему. В соответствии с этим силы, действующие на тела системы, подразделяются на внутренние и внешние. Внутренними называют силы, с которыми тела системы действуют друг на друга, внешними — силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе. Система, в которой внешние силы отсутствуют, называется замкнутой (или изолированной).

Для замкнутых систем остаются постоянными (сохраняются) три физические величины: энергия, импульс и момент импульса. Соответственно имеются три закона сохранения: закон сохранения энергии

гии, закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса. Эти законы тесно связаны со свойствами времени и пространства (подробнее об этом будет сказано ниже).

Кроме названных, есть еще ряд законов сохранения (например, закон сохранения электрического заряда), с которыми мы познакомимся в соответствующих разделах курса. Законы сохранения являются фундаментальными законами природы.

Рассматриваемые в механике законы сохранения энергии, импульса и момента импульса оказываются точными законами и имеют всеобщий характер — они применимы не только к механическим явлениям, но и вообще ко всем явлениям природы, в частности они соблюдаются в релятивистской области и в мире элементарных частиц.

Законы сохранения не зависят от природы и характера действующих сил. Поэтому с их помощью можно делать ряд важных заключений о поведении механических систем даже в тех случаях, когда силы остаются неизвестными.

§ 16. Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему, состоящую из N частиц (материальных точек). Обозначим через F_{ik} силу, с которой k -я частица действует на i -ю (первый индекс указывает номер частицы, на которую действует сила, второй индекс — номер частицы, воздействием которой обусловлена эта сила). Символом F_i обозначим результирующую всех внешних сил, действующих на i -ю частицу. Напишем уравнения движения всех N частиц:

$$\dot{p}_1 = F_{12} + F_{13} + \dots + F_{1k} + \dots + F_{1N} + F_1,$$

$$\dot{p}_2 = F_{21} + F_{23} + \dots + F_{2k} + \dots + F_{2N} + F_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dot{p}_i = F_{i1} + F_{i2} + \dots + F_{ik} + \dots + F_{iN} + F_i \quad (k \neq i),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dot{p}_N = F_{N1} + F_{N2} + \dots + F_{Nk} + \dots + F_{N,N-1} + F_N \quad (k \neq N)$$

(p_i — импульс i -й частицы)

Сложим вместе эти уравнения. Слева получится производная по времени от суммарного импульса системы:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i.$$

Справа отличной от нуля будет только сумма внешних сил $\sum \mathbf{F}_i$. Действительно, сумму внутренних сил можно представить в виде

$$(\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}) + (\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{31}) + \dots + (\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{ki}) + \dots \\ \dots + (\mathbf{F}_{N-1,N} + \mathbf{F}_{N,N-1}).$$

Согласно третьему закону Ньютона каждая из скобок равна нулю. Следовательно, *сумма внутренних сил, действующих на тела системы, всегда равна нулю*:

$$\sum_{\substack{i, k=1 \\ (i \neq k)}}^N \mathbf{F}_{ik} = 0. \quad (16.1)$$

С учетом этого получим, что

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i. \quad (16.2)$$

Таким образом, *производная по времени от суммарного импульса системы равна сумме внешних сил, действующих на тела системы*.

Если система замкнута, внешние силы отсутствуют и правая часть уравнения (16.2) равна нулю. Соответственно $dp/dt = 0$ и, следовательно, $\mathbf{p} = \text{const}$.

Итак, мы пришли к выводу, что *суммарный импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным*. Это утверждение составляет содержание закона сохранения импульса.

В основе закона сохранения импульса лежит однородность пространства, т. е. одинаковость свойств пространства во всех точках. Параллельный перенос замкнутой системы из одного места в другое без изменения взаимного расположения и скоростей частиц не изменяет механических свойств системы. Поведение системы на новом месте будет таким же, каким оно было бы на прежнем месте.

Заметим, что согласно формуле (16.2) импульс остается постоянным и у незамкнутой системы в том случае, если сумма всех внешних сил равна нулю.

Спроектировав все векторы, фигурирующие в уравнении (16.2), на некоторое направление x , получим

$$\frac{d}{dt} p_x = \sum_{i=1}^N F_{xi} \quad (16.3)$$

($\dot{\mathbf{p}} = \dot{p}_x \mathbf{e}_x + \dot{p}_y \mathbf{e}_y + \dot{p}_z \mathbf{e}_z$; отсюда следует, что проекция на ось x вектора $\dot{\mathbf{p}}$ равна dp_x/dt). Согласно (16.3) для того, чтобы сохранялась проекция суммарного импульса на некоторое направление, достаточно равенства нулю проекции на это направление суммы внешних сил; сама эта сумма может быть отличной от нуля.

Точка C , положение которой определяется радиус-вектором

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad (16.4)$$

называется центром масс системы материальных точек. Здесь m_i — масса i -й частицы, \mathbf{r}_i — радиус-вектор, задающий положение этой частицы, m — суммарная масса системы. Отметим, что в однородном поле сил тяжести центр масс совпадает с центром тяжести системы.

Спроектировав \mathbf{r}_C на координатные оси, получим декартовы координаты центра масс:

$$(x_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i y_i, \quad z_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i z_i. \quad (16.5)$$

Продифференцировав \mathbf{r}_C по времени, найдем скорость центра масс:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{p}}{m} \quad (16.6) \end{aligned}$$

(v_i — скорость, а p_i — импульс i -й частицы, p — импульс системы).

Согласно (16.6) суммарный импульс системы можно представить в виде произведения массы системы на скорость центра масс:

$$p = mv_c. \quad (16.7)$$

Подставив это выражение в формулу (16.2), получим уравнение движения центра масс:

$$\frac{d}{dt}(mv_c) = m\dot{v}_c = ma_c = \sum_{i=1}^N F_i \quad (16.8)$$

(a_c — ускорение центра масс). Таким образом, центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе системы, под действием результирующей всех внешних сил, приложенных к телам системы. Для замкнутой системы $a_c = 0$. Это означает, что *центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно либо покоится*.

Система отсчета, относительно которой центр масс покоится, называется системой центра масс (сокращенно ζ -системой). Эта система инерциальна. Система отсчета, связанная с измерительными приборами, называется лабораторной системой (сокращенно l -системой).

§ 17. Энергия и работа

Понятия энергии и работы широко используются в повседневной жизни. Эти понятия тесно связаны друг с другом. Например, говорят об энергичном или работоспособном человеке. Само слово «энергия» происходит от греческого слова «деятельность». Известно, что работа совершается за счет запаса энергии и, наоборот, совершая работу, можно увеличить запас энергии в каком-либо устройстве. Например, совершая работу при заводе часов, мы создаем запас энергии в пружине, за счет которого затем идут часы.

Энергия является общей количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи. Энергия не исчезает и не возникает из ничего; она может лишь переходить из одной формы в другую. Понятие энергии связывает воедино все явления при-

роды. В соответствии с различными формами движения материи рассматривают различные виды энергии: механическую, внутреннюю, электромагнитную, ядерную и др.

В дальнейших параграфах мы дадим определения механической энергии и работы. Механическая энергия бывает двух видов: кинетическая и потенциальная. Кинетическая энергия (или энергия движения) определяется массами и скоростями рассматриваемых тел. Потенциальная энергия (или энергия положения) зависит от взаимного расположения (от конфигурации) взаимодействующих друг с другом тел.

Работа определяется как скалярное произведение векторов силы и перемещения. Поэтому прежде, чем двигаться дальше, мы должны дать определение скалярного произведения векторов.

§ 18. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов A и B называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов и косинуса угла между ними:

$$AB = AB \cos \alpha. \quad (18.1)$$

На рис. 18.1 показано, что выражение (18.1) можно представить в виде

$$AB = A_B B = AB_A, \quad (18.2)$$

откуда следует, что скалярное произведение можно рассматривать как произведение модуля одного из перемножаемых векторов на проекцию другого вектора на направление первого.

Скалярное произведение векторов обладает свойствами коммутативности и дистрибутивности. Коммутативность означает, что произведение не зависит от порядка сомножителей: $AB = BA$. Дистрибутивность заключается в том, что произведение сумм векторов равно сумме произведений слагаемых, взятых попар-

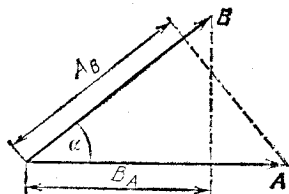


Рис. 18.1. Произведение $A \cos \alpha$ равно A_B — проекции вектора A на направление вектора B . Произведение $B \cos \alpha$ равно B_A — проекции вектора B на направление вектора A

но; например,

$$(A_1 + A_2)(B_1 + B_2) = A_1B_1 + A_1B_2 + A_2B_1 + A_2B_2. \quad (18.3)$$

Аналогичное равенство имеет место при любом числе слагаемых в каждом сомножителе.

Представив перемножаемые векторы через их компоненты и орты координатных осей (см. формулу (2.9)), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= (A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z)(B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z) = \\ &= A_xB_x\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + A_xB_y\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y + A_xB_z\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z + A_yB_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_x + \\ &\quad + A_yB_y\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y + A_yB_z\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z + A_zB_x\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x + \\ &\quad + A_zB_y\mathbf{e}_z\mathbf{e}_y + A_zB_z\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Скалярные произведения вида $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$, где $i \neq k$, равны нулю (в этом случае $\alpha = \pi/2$ и $\cos \alpha = 0$). Произведения вида $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i$ ($i = x, y, z$) равны единице (модули перемножаемых векторов равны единице, $\alpha = 0$). Следовательно, выражение (18.4) упрощается следующим образом:

$$\mathbf{AB} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \quad (18.5)$$

Мы нашли выражение скалярного произведения через компоненты сомножителей.

Под квадратом вектора понимают скалярное произведение вектора на самого себя:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = AA \cos 0 = A^2. \quad (18.6)$$

Взяв дифференциал от обеих частей этого равенства, получим

$$2\mathbf{A}d\mathbf{A} = 2Ad\mathbf{A}, \quad \text{или} \quad \mathbf{A}d\mathbf{A} = Ad\mathbf{A}. \quad (18.7)$$

Эта формула нам понадобится в дальнейшем.

§ 19. Кинетическая энергия и работа

Рассмотрим простейшую систему, состоящую из одной материальной точки (частицы) массы m , движущейся под действием сил, результирующая которых равна \mathbf{F} . Напишем уравнение движения частицы:

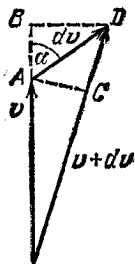
$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$$

(\dot{v} — ускорение частицы). Умножим скалярно обе части этого равенства на элементарное перемещение частицы ds :

$$m\dot{v}ds = Fds. \quad (19.1)$$

Учтя, что $ds = vdt$ (см. формулу (3.6)); напомним, что перемещение ds совпадает с приращением радиус-

Рис. 19.1. Отрезок AB равен проекции вектора $d\mathbf{v}$ на направление вектора \mathbf{v} . Согласно формуле (18.2) $\mathbf{v}d\mathbf{v} = v \cdot AB$. Отрезок CD равен $d\mathbf{v}$ — приращению модуля вектора \mathbf{v} . Отрезки AB и CD равны с точностью до бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $d\mathbf{v}$. Поэтому можно полагать, что $\mathbf{v}d\mathbf{v} = v \cdot AB = v \cdot CD = v dv$



вектора $d\mathbf{r}$), представим левую часть равенства (19.1) в виде

$$m\dot{v}vdt = mv dv$$

($\dot{v} = dv/dt$, откуда $\dot{v}dt = dv$).

Согласно формуле (18.6) $\mathbf{v}d\mathbf{v} = v dv$ (это равенство поясняет также рис. 19.1). Следовательно,

$$mv dv = mv dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Заменив полученным выражением левую часть формулы (19.1), придем к соотношению

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Fds. \quad (19.2)$$

Если результирующая сил, действующих на частицу, равна нулю, $d(mv^2/2) = 0$, а сама величина

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (19.3)$$

остаётся постоянной. Эта величина называется кинетической энергией частицы. Приняв во внимание, что произведение mv равно модулю импульса частицы p , выражению (19.3) можно придать вид

$$E_k = \frac{p^2}{2m}. \quad (19.4)$$

Если сила F , действующая на частицу, не равна нулю, кинетическая энергия получит за время dt приращение

$$dE_k = Fds, \quad (19.5)$$

где ds — перемещение частицы за время dt (см. (19.2)).

Величина

$$dA = Fds \quad (19.6)$$

называется работой, совершаемой силой F на пути ds (ds — модуль перемещения ds). Из (19.5) следует, что работа характеризует изменение кинетической энергии, обусловленное действием силы на движущуюся частицу:

$$dE_k = dA. \quad (19.7)$$

Проинтегрируем (т. е. «просуммируем») обе части равенства (19.2) вдоль траектории частицы от точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 Fds.$$

Левая часть полученного равенства представляет собой приращение кинетической энергии частицы:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_{k2} - E_{k1}.$$

Правая часть есть работа A_{12} силы F на пути 1—2:

$$A_{12} = \int_1^2 Fds.$$

Таким образом, мы пришли к соотношению

$$A_{12} = E_{k2} - E_{k1}, \quad (19.8)$$

из которого следует, что работа результирующей всех сил, действующих на частицу, идет на приращение кинетической энергии частицы.

§ 20. Работа

Согласно определению (18.1) выражение (19.6) для элементарной работы можно представить в виде

$$dA = Fds = F \cos \alpha \cdot ds, \quad (20.1)$$

где F — модуль силы, ds — путь, пройденный точкой приложения силы, α — угол между векторами силы F и перемещения ds .

Если угол α острый, работа dA положительна. Согласно (19.7) приращение кинетической энергии также положительно; следовательно, кинетическая энергия увеличивается. Если угол α тупой, работа и приращение кинетической энергии отрицательны; следовательно, кинетическая энергия уменьшается. При

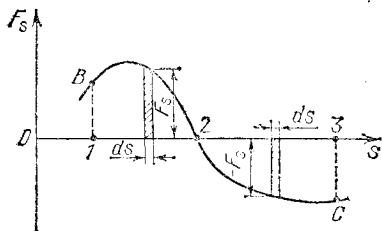


Рис. 20.1. Площадь заштрихованной полоски, расположенной над осью s , равна элементарной работе $dA = F_s ds$. Высота полоски, расположенной под осью s , равна $-F_s$ (сама $F_s < 0$), а ее площадь равна $-F_s ds = -dA$

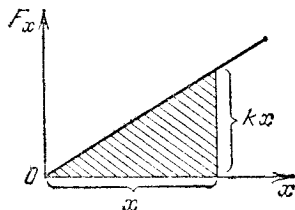


Рис. 20.2. График функции $F_x = kx$ (F_x — проекция внешней силы на ось x , k — жесткость пружины). Заштрихованная площадь равна $kx^2/2$

$\alpha = \pi/2$ работа равна нулю и кинетическая энергия остается неизменной.

В соответствии с (18.2) напомним выражение для работы в виде

$$dA = F_s ds, \quad (20.2)$$

где F_s — проекция силы на направление перемещения ds , а ds — модуль перемещения, равный элементарному пути. На рис. 20.1 дан график зависимости F_s от s . Работа, совершаемая на пути от точки 1 до точки 2, положительна и численно равна площади S_1 фигуры $1B2$, взятой со знаком плюс: $A_{12}(=)S_1$. Работа на пути от точки 2 до точки 3 отрицательна и численно равна площади S_2 фигуры $2C3$, взятой со знаком минус: $A_{23}(=)-S_2$. Мы взяли знак равенства в скобки, чтобы подчеркнуть, что речь идет только о числовом равенстве (размерности работы и площади не совпадают). Работа на всем пути $1-3$ численно равна разности площадей S_1 и S_2 : $A_{13}(=)S_1 - S_2$.

Применим полученный результат к нахождению работы, совершаемой внешней силой при растяжении пружины, подчиняющейся закону Гука (см. рис. 13.1). Растяжение будем осуществлять очень медленно для того, чтобы проекцию внешней силы на ось x можно было считать все время практически равной kx (см. формулу (13.1)). В рассматриваемом случае $F_s ds = F_x dx$. График зависимости F_x от x показан на рис. 20.2. Из рисунка следует, что работа, которую нужно совершить, чтобы вызвать удлинение пружины x , равна

$$A = \frac{kx^2}{2}. \quad (20.3)$$

Такая же работа совершается при сжатии пружины.

В случае, если на частицу действуют несколько сил, их работа на пути ds равна

$$dA = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) ds = \mathbf{F}_1 ds + \mathbf{F}_2 ds + \dots$$

(мы воспользовались дистрибутивностью скалярного произведения векторов; см. (18.3)). Каждое из слагаемых в правой части дает работу соответствующей силы. Таким образом, мы приходим к выводу, что работа суммы нескольких сил, действующих одновременно на частицу, равна сумме работ, которые совершила бы каждая сила в отдельности:

$$A = A_1 + A_2 + \dots \quad (20.4)$$

Это утверждение согласуется с опытом.

Работа, совершаемая в единицу времени, называется мощностью. Мощность P определяется соотношением

$$P = \frac{dA}{dt}, \quad (20.5)$$

где dA — работа, совершаемая за время dt . Подставив вместо dA выражение (19.6) и приняв во внимание, что ds/dt есть скорость v , получим

$$P = \mathbf{F} \frac{ds}{dt} = \mathbf{F}v. \quad (20.6)$$

Таким образом, *мощность равна скалярному произведению силы на скорость точки приложения силы.*

Единицей работы служит работа, совершаемая на пути в один метр силой в один ньютон, действующей

в направлении перемещения. Эта единица называется джоулем (Дж)¹).

Единицей мощности является такая мощность, при которой за одну секунду совершается работа, равная одному джоулю. Эта единица называется ваттом (Вт)²). Единица в 10^3 раз бóльшая называется киловаттом (кВт), а в 10^6 раз бóльшая — мегаваттом (МВт). В технике иногда применяется единица мощности, именуемая лошадиной силой (л. с.) и равная 736 Вт.

Из соотношения (19.8) следует, что размерность кинетической энергии совпадает с размерностью работы. В соответствии с этим энергия измеряется в тех же единицах, что и работа.

§ 21. Консервативные силы

Кроме контактных взаимодействий, возникающих между соприкасающимися телами, наблюдаются также взаимодействия между телами, удаленными друг от друга. Примерами могут служить взаимодействие между Солнцем и Землей, Землей и Луной, Землей и поднятым над ее поверхностью телом, взаимодействие между наэлектризованными телами. Подобные взаимодействия осуществляются посредством физических полей, которые представляют собой особую форму материи. Каждое тело создает в окружающем его пространстве особое состояние, называемое силовым полем. Это поле проявляет себя в действии сил на другие тела. Например, в гравитационном поле, создаваемом Землей, на тело массы m в каждой точке пространства вблизи поверхности Земли действует сила mg .

Силы, работа которых не зависит от пути, по которому двигалась частица, а зависит лишь от начального и конечного положений частицы, называются консервативными.

Легко показать, что работа консервативных сил на любом замкнутом пути равна нулю. Разобьем произ-

¹) В честь английского физика Джеймса Прескотта Джоуля (1818—1889).

²) В честь английского изобретателя Джеймса Уатта (1736—1819), создавшего паровой двигатель.

вольный замкнутый путь (рис. 21.1) точками 1 и 2 (взятыми также произвольно) на два участка, обозначенных римскими цифрами I и II. Работа на замкнутом пути складывается из работ, совершаемых на этих участках:

$$A = (A_{12})_I + (A_{21})_{II}. \quad (21.1)$$

Изменение направления движения по участку II на обратное сопровождается заменой всех элементарных

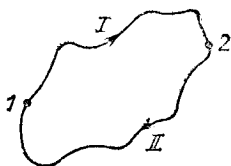


Рис. 21.1. К вычислению работы консервативных сил на замкнутом пути

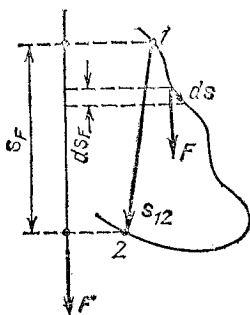


Рис. 21.2. Если $F = \text{const}$, работа, независимо от формы траектории, равна произведению модуля силы на проекцию перемещения s_{12} на направление силы

перемещений ds на $-ds$, вследствие чего $\int F ds$ изменяет знак на обратный. Отсюда заключаем, что $(A_{21})_{II} = -(A_{12})_{II}$. Произведя такую замену в (21.1), получим, что

$$A = (A_{12})_I - (A_{12})_{II}.$$

Вследствие независимости работы от пути последнее выражение равно нулю. Таким образом, консервативные силы можно определить как силы, работа которых на любом замкнутом пути равна нулю.

Если силы, действующие на частицу, во всех точках поля одинаковы по модулю и направлению, поле называется однородным. Если, кроме того, поле не изменяется со временем, оно называется стационарным. В случае однородного стационарного поля $F = \text{const}$.

Докажем, что силы, действующие на частицу в однородном стационарном поле, консервативны. Возьмем в таком поле две произвольные точки 1 и 2 (рис. 21.2) и вычислим работу, совершаемую над частицей при ее перемещении из первой точки во вторую по произвольной траектории. В выражении для работы постоянную силу можно вынести за знак интеграла:

$$A_{12} = \int_1^2 F ds = F \int_1^2 ds.$$

Сумма элементарных перемещений дает результирующее перемещение s_{12} частицы из точки 1 в точку 2; поэтому

$$A_{12} = F s_{12} = F s_F, \quad (21.2)$$

где F — модуль силы, а s_F — проекция перемещения s_{12} на направление силы (мы опустили индексы «12» в обозначении проекции перемещения). Полученное выражение определяется только положениями точек 1 и 2 и не зависит от формы траектории. Таким образом, мы доказали, что силы однородного стационарного поля консервативны.

Примером однородного стационарного поля может служить поле силы тяжести $\mathbf{P} = mg$ в ограниченной области вблизи поверхности Земли. Согласно (21.2) работа, совершаемая над частицей силой \mathbf{P} , независимо от формы траектории, равна

$$A_{12} = mg (h_1 - h_2), \quad (21.3)$$

где $h_1 - h_2$ есть проекция перемещения s_{12} на направление силы, т. е. на направление вниз по вертикали (рис. 21.3). Следовательно, сила $\mathbf{P} = mg$ консервативна.

Поле, в любой точке которого направление силы, действующей на частицу, проходит через неподвижный центр, а модуль силы зависит только от расстояния r до этого центра, называется центральным. Направлена сила либо от центра (как на рис. 21.4), либо к силовому центру.

Найдем работу, совершаемую над частицей в центральном стационарном, т. е. не изменяющемся со временем, силовом поле. В таком поле модуль силы

определяется функцией $F(r)$. Представим элементарную работу в виде

$$dA = F ds = F(r) ds_F,$$

где $F(r)$ — модуль силы, а ds_F — проекция перемещения на направление силы (см. формулу (18.2)). Из рис. 21.4, выполненного для силы, направленной от

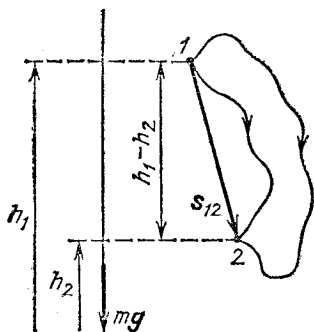


Рис. 21.3. Для любой из траекторий работа силы тяжести равна $A_{12} = mg(h_1 - h_2)$. Если бы точка 1 лежала ниже точки 2, разность $h_1 - h_2$, а следовательно, и A_{12} были бы отрицательными

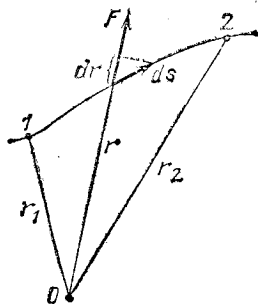


Рис. 21.4. Проекция перемещения ds на направление силы с точностью до бесконечно малой высшего порядка равна dr — приращению расстояния от силового центра O .

центра (т. е. для случая отталкивания частицы от силового центра), следует, что ds_F можно положить равной dr . Очевидно, что для силы, направленной к центру (т. е. для случая притяжения частицы к центру), ds_F будет равна $-dr$ (приращению r , взятому с обратным знаком). Соответственно dA равна $F(r)dr$ в случае отталкивания и $-F(r)dr$ в случае притяжения.

Работу на всем пути от точки 1 до точки 2 найдем, взяв интеграл от dA . В результате получим выражение

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr \text{ для случая отталкивания, (21.4)}$$

$$A_{12} = - \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr \text{ для случая притяжения. (21.5)}$$

Оба интеграла зависят только от вида функции $F(r)$ и от пределов интегрирования r_1 и r_2 ; от формы траектории они никак не зависят. Отсюда заключаем, что силы центрального стационарного поля являются консервативными.

§ 22. Потенциальная энергия материальной точки во внешнем силовом поле

Сопоставим каждой точке поля консервативных сил значение некоторой функции координат $E_p(x, y, z)$, которую определим следующим образом. Произвольно выбранной точке O припишем значение функции E_{p0} , взятое также произвольно. Значение функции в любой другой точке B положим равным сумме E_{p0} и работы A_{B0} , совершаемой силами поля при перемещении частицы из точки B в точку O :

$$E_{pB} = E_{p0} + A_{B0}. \quad (22.1)$$

Поскольку работа A_{B0} не зависит от пути, значения функции E_p во всех точках поля определяются однозначно. Функция (22.1) имеет, как и кинетическая энергия E_k , размерность работы (см. (19.8)) и называется потенциальной энергией частицы во внешнем силовом поле.

Образует разность значений потенциальной энергии для точек 1 и 2 (рис. 22.1). Согласно формуле (22.1)

$$\begin{aligned} E_{p1} - E_{p2} &= (E_{p0} + A_{10}) - \\ &- (E_{p0} + A_{20}) = A_{10} - A_{20} = \\ &= A_{10} + A_{02} \end{aligned}$$

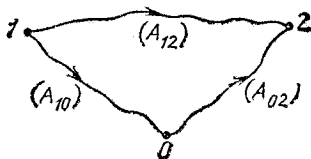


Рис. 22.1. Работа, совершаемая на любом пути из точки 1 в точку 2, равна работе, совершаемой на пути, проходящем через точку O

(мы воспользовались тем, что $A_{20} = -A_{02}$). Правая часть полученного соотношения дает работу, совершаемую над частицей силами поля на пути из точки 1 в точку 2, проходящем через точку O . Вследствие независимости работы от формы пути такая же работа A_{12} совершается на любом другом пути. Следовательно, мы приходим к выводу, что работа консер-

вативных сил равна разности значений функции E_p в начальной и конечной точках пути, т. е. убыли потенциальной энергии:

$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2}. \quad (22.2)$$

Из (22.1) следует, что потенциальная энергия определяется с точностью до неизвестной аддитивной постоянной E_{p0} . Однако это не имеет никакого значения, так как во все физические соотношения входит либо разность значений потенциальной энергии в двух точках, либо производная функции E_p по координатам.

В предыдущем параграфе мы нашли, что работа силы тяжести равна

$$A_{12} = mgh_1 - mgh_2 \quad (22.3)$$

(см. (21.3)). Сопоставление формул (22.2) и (22.3) дает, что потенциальная энергия частицы массы m в поле сил тяжести определяется выражением

$$E_p = mgh, \quad (22.4)$$

где h отсчитывается от произвольного уровня.

В отличие от кинетической энергии, которая всегда положительна, потенциальная энергия может быть как положительной, так и отрицательной. Если, например, h отсчитывать от поверхности Земли, то потенциальная энергия частицы, лежащей на дне ямы глубины l , будет равна $-mgl$ (подчеркнем, что $l > 0$, ибо глубина, как и длина, не может быть отрицательной).

Пусть частица движется в поле консервативных сил. При переходе из точки 1 в точку 2 над ней совершается работа (22.2). В соответствии с формулой (19.8) эта работа равна приращению кинетической энергии частицы. Приравняв оба выражения для работы, получим соотношение $E_{p1} - E_{p2} = E_{k2} - E_{k1}$, из которого следует, что

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}. \quad (22.5)$$

Величина E , равная сумме кинетической и потенциальной энергий, называется полной механической энергией частицы. Формула (22.5) означает, что $E_1 = E_2$, т. е. что *полная механическая энергия частицы, движущейся в поле консервативных сил,*

остается постоянной. Это утверждение выражает закон сохранения механической энергии для системы, состоящей из одной частицы.

В случае поля сил тяжести полная энергия определяется выражением

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh. \quad (22.6)$$

Кинетическая и потенциальная энергии могут превращаться друг в друга. Однако, если на частицу не действуют никакие силы, кроме обусловивших потенциальную энергию консервативных сил, полная энергия остается постоянной. Пусть частица свободно падает с высоты h . Первоначально ее кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия равна mgh . Формулы кинематики дают для скорости в конце падения значение $v = \sqrt{2gh}$. Следовательно, в конце падения кинетическая энергия частицы равна

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\sqrt{2gh})^2}{2} = mgh.$$

Потенциальная же энергия в конце падения равна нулю. Таким образом, потенциальная энергия превратилась в эквивалентное количество кинетической энергии.

Если известно выражение $E_p(x, y, z)$ для потенциальной энергии, можно найти силу, действующую на частицу в каждой точке поля. Пусть частица переместилась параллельно оси x , вследствие чего координата x получила приращение dx . При этом силы поля совершат над частицей работу $dA = \mathbf{F} ds = F_x ds_x$ (см. формулу (18.5); в данном случае ds_y и ds_z равны нулю). Проекция перемещения ds на ось x равна dx ; поэтому $dA = F_x dx$. Вместе с тем согласно формуле (22.2) эта работа должна быть равна убыли потенциальной энергии: $dA = -dE_p$. Приравняв оба выражения для работы, найдем, что $F_x dx = -dE_p$, откуда

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}.$$

Мы написали $\partial E_p / \partial x$ вместо dE_p / dx , чтобы отметить то обстоятельство, что производная по x вычисляется при условии, что координаты y и z остаются постоянными.

ными. Производная, вычисленная при этом условии, называется частной. Таким образом, компонента силы по оси x равна взятой с обратным знаком частной производной потенциальной энергии по переменной x . Для компонент силы по осям y и z получаются аналогичные выражения. Следовательно, мы приходим к соотношениям

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}. \quad (22.7)$$

Согласно (2.9) сумма произведений компонент силы на соответствующие орты координатных осей дает вектор силы:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z = \\ &= -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \mathbf{e}_z \right). \end{aligned} \quad (22.8)$$

Вектор с компонентами $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$, где φ — скалярная функция координат x , y , z , называется градиентом функции φ и обозначается символом $\text{grad } \varphi$:

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (22.9)$$

Направление вектора $\text{grad } \varphi$ совпадает с направлением оси l , вдоль которой функция φ возрастает с наибольшей скоростью, а модуль равен $d\varphi/dl$, т. е. скорости возрастания функции φ при перемещении вдоль оси l . В этом проще всего убедиться на примере функции, зависящей только от одной координаты, скажем x . Для такой функции

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{e}_x \frac{d\varphi}{dx}.$$

В этом случае осью l является ось x , если $d\varphi/dx > 0$, либо ось, противоположная оси x , если $d\varphi/dl < 0$. Модуль же $\text{grad } \varphi$ равен $|d\varphi/dx|$, т. е. $d\varphi/dl$.

Выражение (22.9) можно рассматривать как результат действия на функцию φ оператора

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (22.10)$$

который называется оператором Гамильтона или оператором набла. Поэтому градиент функ-

ции φ можно представить в виде $\nabla\varphi$:

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla\varphi.$$

Из сравнения выражений (22.8) и (22.9) заключаем, что

$$\mathbf{F} = -\text{grad } E_p, \text{ или } \mathbf{F} = -\nabla E_p. \quad (22.11)$$

Таким образом, *консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии частицы, взятому с обратным знаком.*

Если система состоит из N не взаимодействующих друг с другом частиц, находящихся в поле внешних консервативных сил, то потенциальная энергия этой системы равна сумме потенциальных энергий отдельных частиц:

$$E_p = \sum_{i=1}^N E_{pi}. \quad (22.12)$$

Здесь E_{pi} — потенциальная энергия i -й частицы. Функция E_p зависит от координат всех N частиц. Сила \mathbf{F}_i , действующая на i -ю частицу, равна $-\nabla E_{pi}$.

§ 23. Потенциальная энергия взаимодействия

Рассмотрим систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц. Силы, с которыми частицы действуют друг на друга, будем предполагать направленными вдоль проходящей через обе частицы прямой и зависящими только от расстояния между частицами. Эти силы для данной системы являются внутренними. Отметим, что указанными свойствами обладают гравитационные и электрические кулоновские (т. е. подчиняющиеся закону Кулона) силы.

Найдем работу внутренних сил, совершаемую при перемещении первой частицы на $d\mathbf{r}_1$, а второй частицы на $d\mathbf{r}_2$ (напомним, что перемещение частицы $d\mathbf{s}$ равно приращению ее радиус-вектора $d\mathbf{r}$). Из рис. 23.1 вытекает, что эту работу можно представить в виде

$$\begin{aligned} dA &= \mathbf{F}_{12}d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{21}d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_{12}d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{21}(d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_{12}) = \\ &= (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21})d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{21}d\mathbf{r}_{12}. \end{aligned}$$

Согласно третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, так что $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$. Поэтому выражение для работы

внутренних сил упрощается следующим образом:

$$dA = F_{21} dr_{12}. \quad (23.1)$$

Такая же работа была бы совершена, если бы первая частица была неподвижна и находилась в начале координат, а вторая частица получила перемещение dr_{12} , равное приращению ее радиус-вектора r_{12} .

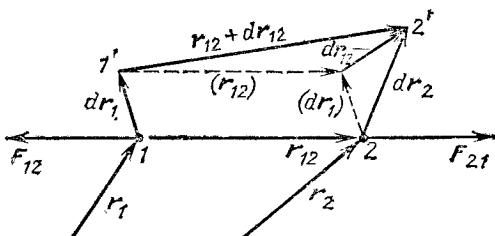


Рис. 23.1. Первая частица получила перемещение dr_1 , в результате чего она перешла из точки 1 в точку 1'; вторая частица получила перемещение dr_2 , в результате чего она перешла из точки 2 в точку 2'. Перемещение dr_2 можно представить как сумму перемещения dr_1 и приращения dr_{12} вектора r_{12} , проведенного от первой частицы ко второй (r_1 и r_2 — радиус-векторы частиц)

Отсюда следует, что работу, совершаемую внутренними силами при движении обеих частиц, можно вычислять, считая одну из частиц неподвижной, а вторую движущейся в центральном поле сил, создаваемом первой частицей.

В предыдущем параграфе было выяснено, что центральные силы консервативны, вследствие чего их работу можно вычислять как убыль потенциальной энергии. В рассмотренном случае эта энергия обусловлена взаимодействием частиц, входящих в систему; поэтому ее называют потенциальной энергией взаимодействия или взаимной потенциальной энергией.

Когда первая частица неподвижна и находится в начале координат, в выражении (23.1) можно опустить индексы и написать его в виде

$$dA = F dr. \quad (23.2)$$

Здесь F — центральная сила, действующая на вторую частицу, r — радиус-вектор этой частицы.

Если частица притягивается к силовому центру, работа на произвольном пути от точки 1 до точки 2 определяется выражением (21.5). Приравняв эту работу убыли потенциальной энергии (см. (22.2)), получим

$$A_{12} = - \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = E_{p1} - E_{p2}. \quad (23.3)$$

В случае гравитационного притяжения частиц

$$F(r) = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(см. формулу (11.1)). Следовательно,

$$A_{12} = - \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = - G m_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{G m_1 m_2}{r_2} - \frac{G m_1 m_2}{r_1}. \quad (23.4)$$

Сопоставление соотношений (23.3) и (23.4) дает для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух частиц выражение

$$E_p = - G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (23.5)$$

Потенциальная энергия взаимодействия, как и потенциальная энергия во внешнем силовом поле, определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Действительно, прибавление к выражению (23.5) произвольной константы не изменяет значения работы, вычисленного по формуле (23.4). Обычно эту константу принимают равной нулю, тем самым полагая, что при бесконечно большом расстоянии между частицами (т. е. когда они не взаимодействуют) потенциальная энергия обращается в нуль. При такой нормировке потенциальная энергия оказывается отрицательной. Это согласуется с тем, что при сближении частиц сила притяжения между ними совершает положительную работу и соответственно убыль потенциальной энергии также должна быть положительной.

Выражение, аналогичное (23.5), получается и для взаимной энергии двух точечных зарядов q_1 и q_2 , модуль силы взаимодействия между которыми также

изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния:

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что в этом случае

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (23.6)$$

Можно показать, что взаимная потенциальная энергия системы, состоящей из N частиц, силы взаимодействия между которыми консервативны, складывается из энергий взаимодействия частиц, взятых попарно. Например, в случае трех частиц

$$E_p = E_{p,12} + E_{p,23} + E_{p,31},$$

где $E_{p,12}$ — энергия взаимодействия первой и второй частиц и т. д. Это выражение можно представить в виде

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, k=1 \\ (i \neq k)}}^3 E_{p,ik}, \quad (23.7)$$

где индексы i и k принимают, независимо друг от друга, значения 1, 2, 3; случай $i = k$ исключается. В этом выражении содержится $3 \cdot 2 = 6$ слагаемых. Множитель $1/2$ появился вследствие того, что энергия взаимодействия, скажем, первой и второй частиц содержится в сумме два раза в виде $E_{p,12}$ и $E_{p,21}$.

В случае любого N

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, k=1 \\ (i \neq k)}}^N E_{p,ik}. \quad (23.8)$$

В этой сумме имеется $N(N-1)$ слагаемых (каждая из N частиц взаимодействует с $N-1$ частицей).

Взаимная энергия системы частиц зависит только от их взаимного расположения (от конфигурации системы). Если при движении частиц конфигурация системы не изменяется, то потенциальная энергия остается неизменной и внутренние силы работы не совершают.

Потенциальной энергией обладают не только системы обособленных взаимодействующих частиц, но

и сплошные деформированные тела (например, растянутая или сжатая пружина). В этом случае потенциальная энергия зависит от взаимного расположения отдельных частей тела (например, от расстояния между витками пружины). В § 20 мы установили, что как для растяжения, так и для сжатия пружины на величину x нужно совершить работу $A = kx^2/2$ (см. формулу (20.3)). Эта работа идет на приращение потенциальной энергии пружины. Следовательно, зависимость потенциальной энергии пружины от удлинения x имеет вид

$$E_p = \frac{kx^2}{2} \quad (23.9)$$

(мы предположили потенциальную энергию недеформированной пружины равной нулю).

§ 24. Закон сохранения энергии

Сведем воедино результаты, полученные в предыдущих параграфах. Для этого рассмотрим систему, состоящую из N взаимодействующих друг с другом частиц, находящихся под воздействием внешних как консервативных, так и неконсервативных сил. Силы взаимодействия между частицами предполагаются консервативными. Определим работу, совершаемую над частицами при перемещении системы из одного места в другое, сопровождающемся изменением конфигурации системы.

Работа внешних консервативных сил может быть представлена как убыль потенциальной энергии системы E'_p во внешнем силовом поле:

$$A_{12, \text{внеш, консерв}} = E'_{p1} - E'_{p2},$$

где E'_p определяется формулой (22.2).

Работа внутренних сил равна убыли взаимной потенциальной энергии частиц:

$$A_{12, \text{внутр}} = E''_{p1} - E''_{p2},$$

где E''_p определяется формулой (23.8).

Работу неконсервативных сил обозначим посредством A^*_{12} .

Согласно формуле (19.8) суммарная работа всех сил затрачивается на приращение кинетической

энергии системы E_k , которая равна сумме кинетических энергий частиц:

$$E_k = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (24.1)$$

Следовательно,

$$(E'_{p1} - E'_{p2}) + (E''_{p1} - E''_{p2}) + A_{12}^* = E_{k2} - E_{k1}.$$

Сгруппируем члены этого соотношения следующим образом:

$$(E_{k2} + E'_{p2} + E''_{p2}) - (E_{k1} + E'_{p1} + E''_{p1}) = A_{12}^*.$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий представляет собой полную механическую энергию системы E :

$$E = E_k + E'_p + E''_p. \quad (24.2)$$

Таким образом, мы установили, что работа неконсервативных сил равна приращению полной энергии системы:

$$E_2 - E_1 = A_{12}^*. \quad (24.3)$$

Из (24.3) следует, что в случае, когда неконсервативные силы отсутствуют, полная механическая энергия системы остается постоянной:

$$E = E_k + E'_p + E''_p = \text{const.} \quad (24.4)$$

Мы пришли к закону сохранения механической энергии, который гласит, что *полная механическая энергия системы материальных точек, находящихся под действием только консервативных сил, остается постоянной.*

Если система замкнута и силы взаимодействия между частицами консервативны, то полная энергия содержит лишь два слагаемых: $E = E_k + E'_p$ (E''_p — взаимная потенциальная энергия частиц). В этом случае закон сохранения механической энергии заключается в утверждении, что *полная механическая энергия замкнутой системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной.*

В основе закона сохранения энергии лежит однородность времени, т. е. равнозначность всех моментов

тов времени, заключающаяся в том, что замена момента времени t_1 моментом времени t_2 без изменения значений координат и скоростей тел не изменяет механических свойств системы. Поведение системы, начиная с момента t_2 , будет таким же, каким оно было бы, начиная с момента t_1 .

При наличии неконсервативных сил полная механическая энергия системы не сохраняется (см. формулу (24.3)). Неконсервативными, в частности, являются силы трения и силы сопротивления среды. Работа этих сил, как правило, отрицательна. Поэтому при наличии сил трения и сил сопротивления среды полная механическая энергия системы уменьшается, переходя во внутреннюю энергию тел, что приводит к их нагреванию. Такой процесс называется диссипацией энергии (латинское слово «диссипация» означает «рассеяние»). Силы, приводящие к диссипации энергии, называются диссипативными. Отметим, что неконсервативные силы не обязательно являются диссипативными.

Закон сохранения энергии имеет всеобщий характер. Он применим ко всем без исключения процессам, происходящим в природе. Полное количество энергии в изолированной системе тел и полей всегда остается постоянным; энергия лишь может переходить из одной формы в другую. Этот факт является проявлением неучтожимости материи и ее движения.

§ 25. Соударение тел

При соударении телá в большей либо меньшей мере деформируются. При этом кинетическая энергия тел частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и во внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии приводит к нагреванию тел.

Рассмотрим два предельных вида соударения — абсолютно неупругий и абсолютно упругий удар. Абсолютно неупругим называется удар, при котором потенциальная энергия упругой деформации не возникает; кинетическая энергия тел частично или полностью превращается во внутреннюю энергию; после удара тела движутся с одинаковой скоростью (т. е. как одно тело) либо покоятся. При таком ударе выполняется только закон сохранения им-

пульса, закон же сохранения механической энергии не соблюдается—механическая энергия частично или полностью переходит во внутреннюю.

Абсолютно упругим называется такой удар, при котором полная механическая энергия тел сохраняется. Сначала кинетическая энергия частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую и тела разлетаются со скоростями, определяемыми двумя условиями—сохранением суммарной энергии и суммарного импульса тел.

Мы ограничимся рассмотрением центрального удара двух однородных шаров. Удар называется центральным, если шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры (рис. 25.1). Из соображений симметрии ясно, что после удара шары будут двигаться вдоль той же прямой. Будем предполагать, что шары движутся поступательно (т. е. не вращаясь). Будем также предполагать, что шары образуют замкнутую систему либо что внешние силы, приложенные к шарам, уравновешивают друг друга.

Обозначим массы шаров m_1 и m_2 , скорости шаров до удара v_1 и v_2 , скорости после удара u_1 и u_2 .

Начнем с абсолютно неупругого удара. Закон сохранения импульса требует, чтобы суммарный импульс шаров после удара был таким же, как до удара. Поэтому

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u,$$

где u — одинаковая скорость шаров после удара. Отсюда

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (25.1)$$

Для числовых расчетов нужно спроектировать все векторы на ось x (рис. 25.1).

Теперь рассмотрим абсолютно упругий удар. Напишем уравнения сохранения импульса и энергии:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} &= \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Преобразуем эти уравнения следующим образом:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2), \quad (25.2)$$

$$[m_1(v_1 - u_1)](v_1 + u_1) = [m_2(u_2 - v_2)](u_2 + v_2) \quad (25.3)$$

(мы воспользовались тем, что $(A^2 - B^2) = (A + B) \times (A - B)$). Все векторы, входящие в уравнения (25.2) и (25.3), коллинеарны. Для коллинеарных векторов из $A = B$ и $AC = BD$ следует, что $C = D$. Поэтому можно написать, что

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2. \quad (25.4)$$

Умножив (25.4) на m_2 и вычтя результат из (25.2), а затем умножив (25.4) на m_1 и сложив результат с (25.2), найдем скорости шаров после удара:

$$u_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}. \quad (25.5)$$

Заметим, что выражение для u_2 отличается от выражения для u_1 только перестановкой индексов 1 и 2. Это естественно, поскольку шары в процессе соударения совершенно равноправны и безразлично, какой из них считать первым, а какой вторым.

Чтобы осуществить расчеты, нужно спроектировать все векторы на ось x . Сделаем это, например, для случая a на рис. 25.1. В этом случае проекция вектора v_1 равна модулю вектора, взятому со знаком плюс: $v_{1x} = v_1$, а проекция вектора v_2 — модулю, взятому со знаком минус: $v_{2x} = -v_2$. Поэтому

$$u_{1x} = \frac{-2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad u_{2x} = \frac{2m_1v_1 - (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}. \quad (25.6)$$

Пусть $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $v_1 = 1$ м/с, $v_2 = 3$ м/с. Подстановка этих чисел в формулы (25.6) дает значения: $u_{1x} = -(13/3)$ м/с, $u_{2x} = -(1/3)$ м/с. Обе проекции оказались отрицательными. Это означает,

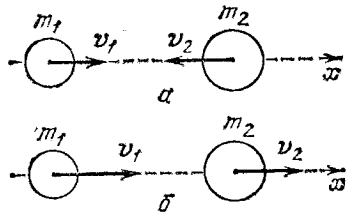


Рис. 25.1. Два возможных случая центрального удара: a — шары движутся навстречу друг другу; b — один шар догоняет другой

что после соударения оба шара движутся влево. Следовательно, первый шар изменил направление движения на обратное, второй же шар после удара движется в первоначальном направлении, изменился лишь модуль его скорости (с 3 до $(1/3)$ м/с).

Особый интерес представляет случай, когда массы шаров одинаковы: $m_1 = m_2$. При этом условии из (25.5) получается, что

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1.$$

Следовательно, шары равной массы при центральном ударе обмениваются скоростями. В частности, если один из шаров до соударения покоился, то после удара он движется с такой же скоростью, какую имел первоначально другой шар, который после удара оказывается неподвижным. При центральном абсолютно упругом ударе шар полностью передает свою скорость неподвижному шару той же массы.

§ 26. Момент силы

Повседневный опыт показывает, что при вращении какого-либо тела с помощью рычага (например, при затягивании болта гаечным ключом; рис. 26.1)

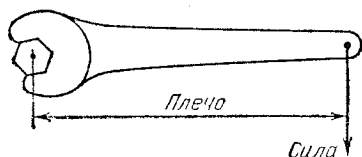


Рис. 26.1. Степень «затяжки» гайки или болта определяется произведением силы на плечо

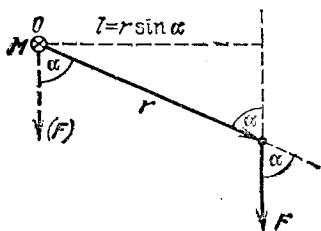


Рис. 26.2. Радиус-вектор r и сила F лежат в плоскости рисунка. Вектор момента силы M перпендикулярен к плоскости рисунка и направлен от нас. Точка O помещается в центре кружка с крестиком, изображающего вектор M

существенным оказывается не только модуль силы, но и длина рычага. В соответствии с этим вводится понятие момента силы.

Моментом силы относительно точки O называется вектор M , модуль которого равен произведению модуля силы F на ее плечо l :

$$M = Fl = Fr \sin \alpha \quad (26.1)$$

(рис. 26.2). Плечом силы называют длину перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, вдоль которой действует сила. Направлен вектор M перпендикулярно к плоскости, в которой лежат сила и точка O , причем так, что направление вращения, обусловленного силой, и направление вектора M образуют правовинтовую систему (поворот головки винта или шурупа с правой нарезкой в направлении силы вызвал бы перемещение винта в направлении вектора M). Поскольку его направление определяется условно, M является псевдовектором.

На рис. 26.2 вектор M изображен в виде кружка с крестиком внутри. Так мы будем в дальнейшем обозначать векторы, перпендикулярные к плоскости чертежа и направленные «от нас». Векторы, перпендикулярные к плоскости чертежа и направленные «на



Рис. 26.3. Если стрела имеет конусообразный наконечник и крестообразное оперение на хвосте, то в случае, когда: a — стрела летит от нас, видны ободок наконечника и хвостовое оперение; b — стрела летит на нас, видны ободок наконечника и острие стрелы в виде точки

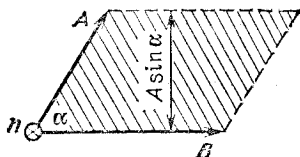


Рис. 26.4. Поворот правого винта в направлении от A к B вызвал бы его перемещение в направлении n . Основание параллелограмма численно равно B , высота численно равна $A \sin \alpha$

нас», мы будем обозначать кружком с точкой внутри него (рис. 26.3).

Момент силы можно представить в виде векторного произведения радиус-вектора r точки приложения силы на силу F .

Векторным произведением векторов A и B называется вектор, обозначаемый символом $[AB]$, (или

$A \times B$) и определяемый формулой

$$[AB] = AB \sin \alpha \cdot n, \quad (26.2)$$

где A и B — модули перемножаемых векторов, α — угол между векторами, n — единичный вектор нормали к плоскости, в которой лежат векторы A и B (рис. 26.4). Направление n выбирается так, чтобы последовательность векторов A , B , n образовывала правовинтовую систему: если смотреть вдоль вектора n , то поворот по кратчайшему пути от первого сомножителя ко второму осуществляется по часовой стрелке.

На рис. 26.4 видно, что модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах.

Из определения векторного произведения вытекает, что при перестановке сомножителей направление получающегося вектора изменяется на обратное:

$$[AB] = -[BA]. \quad (26.3)$$

Таким образом, векторное произведение, в отличие от скалярного, не коммутативно.

Можно доказать, что векторное произведение дистрибутивно. Это означает, что

$$[(A_1 + A_2)(B_1 + B_2)] = [A_1B_1] + [A_1B_2] + [A_2B_1] + [A_2B_2]. \quad (26.4)$$

Аналогичное соотношение имеет место при любом числе слагаемых в каждом сомножителе.

Из формулы (26.1) и рис. 26.2 следует, что модуль и направление момента силы M совпадают с модулем и направлением векторного произведения векторов r и F . Поэтому можно написать, что

$$M = [rF]. \quad (26.5)$$

Здесь r — радиус-вектор точки приложения силы, проведенный из точки, относительно которой определяется момент.

Когда сила приложена к одной из точек твердого тела, вектор M характеризует способность силы вращать тело вокруг точки O , относительно которой он берется. Поэтому момент силы называют также вращающим моментом. Если тело может вращаться вокруг точки O произвольным образом, то под дей-

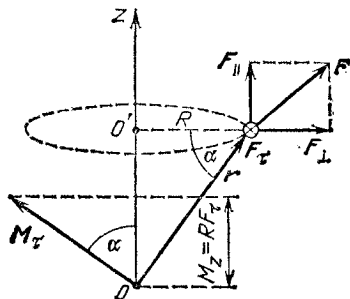
ствием силы тело повернется вокруг оси, совпадающей с направлением вращающего момента.

Проекция вектора M на произвольную ось z , проходящую через точку O , называется моментом силы относительно этой оси:

$$M_z = [rF]_{\text{пр. } z} \quad (26.6)$$

Разложим силу F на три составляющие, как показано на рис. 26.5. Воспользовавшись дистрибутив-

Рис. 26.5. Сила F разложена на три взаимно перпендикулярные составляющие: F_{\parallel} — параллельную оси z , F_{\perp} — перпендикулярную к оси z , F_{τ} — направленную по касательной к окружности радиуса R . Вектор M_{τ} равен $[rF_{\tau}]$, а его модуль

$$M_{\tau} = rF_{\tau}$$


ностью векторного произведения, представим момент силы F относительно точки O в виде

$$\begin{aligned} M &= [r, (F_{\parallel} + F_{\perp} + F_{\tau})] = [rF_{\parallel}] + [rF_{\perp}] + [rF_{\tau}] = \\ &= M_{\parallel} + M_{\perp} + M_{\tau}, \end{aligned}$$

где M_{\parallel} — момент силы F_{\parallel} и т. д.

Проекция на ось z вектора M равна сумме проекций моментов составляющих сил. Моменты M_{\parallel} и M_{\perp} перпендикулярны к оси z , поэтому их проекции равны нулю. Следовательно,

$$M_z = (M_{\tau})_{\text{пр. } z} = M_{\tau} \cos \alpha = rF_{\tau} \cos \alpha = RF_{\tau} \quad (26.7)$$

(рис. 26.5).

Из трех составляющих силы F вращение вокруг оси z может вызвать только сила F_{τ} , причем она тем успешнее осуществит этот поворот, чем больше ее плечо R относительно точки O' . Таким образом, момент силы относительно оси характеризует способность силы вращать тело вокруг этой оси.

Две равные по модулю противоположно направленные силы, не действующие вдоль одной прямой, называются парой сил (рис. 26.6). Расстояние l между прямыми, вдоль которых действуют силы,

называется плечом пары. Суммарный момент сил относительно точки O равен

$$M = [r_1 F_1] + [r_2 F_2].$$

Учтя, что $F_2 = -F_1$, можно написать

$$M = [r_1 F_1] - [r_2 F_1] = [(r_1 - r_2), F_1] = [r_{21} F_1], \quad (26.8)$$

где $r_{21} = r_1 - r_2$ (рис. 26.6). Полученное выражение не зависит от положения точки O . Следовательно, мо-

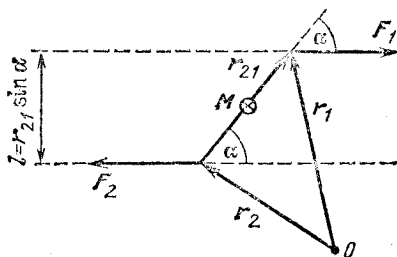


Рис. 26.6. Пара сил. Силы F_1 и F_2 лежат в плоскости рисунка. Точка O , вообще говоря, не лежит в этой плоскости. Расстояние l есть плечо пары, M — момент пары, направленный за чертеж

мент пары сил относительно любой точки будет одним и тем же. Вектор M перпендикулярен к плоскости, в которой лежат силы, а его модуль равен произведению модуля любой из сил на плечо.

Силы гравитационного и кулоновского взаимодействия между двумя частицами образуют пару с плечом, равным нулю. Поэтому их суммарный момент относительно любой точки равен нулю. Отсюда следует, что моменты внутренних сил попарно уравновешивают друг друга, и *сумма моментов всех внутренних сил для любой системы частиц всегда равна нулю*:

$$\sum M_{\text{внутр}} = 0. \quad (26.9)$$

Соответственно равен нулю и суммарный момент относительно любой оси z :

$$\sum M_{\text{внутр}, z} = 0. \quad (26.10)$$

§ 27. Закон сохранения момента импульса

По аналогии с моментом силы, моментом импульса материальной точки (частицы) относительно точки O называется векторная величина

$$L = [rp] = [r, mv], \quad (27.1)$$

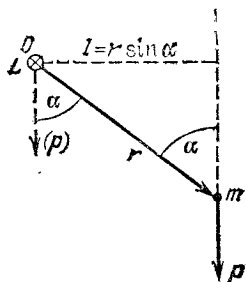
где r — радиус-вектор, определяющий положение частицы относительно точки O , а $p = mv$ — импульс частицы. Модуль этой величины, равный $rp \sin \alpha$, можно представить в виде произведения плеча l импульса на модуль вектора p :

$$L = lp \quad (27.2)$$

(рис. 27.1).

Частица обладает моментом импульса, независимо от формы траектории, по которой она движется. Рассмотрим два частных случая,

Рис. 27.1. Длина l перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, вдоль которой направлен импульс частицы, называется плечом импульса. Направление и модуль вектора p , вообще говоря, со временем изменяются. При этом изменяются плечо, а также модуль и направление вектора L



1. Частица движется вдоль прямолинейной траектории (рис. 27.2). Модуль момента импульса

$$L = mvl \quad (27.3)$$

может изменяться только за счет изменения модуля скорости

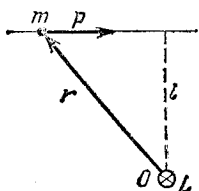


Рис. 27.2. При движении по прямолинейной траектории плечо l остается постоянным. Направление вектора L не изменяется

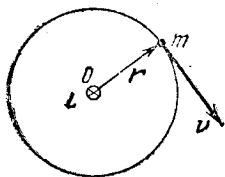


Рис. 27.3. При движении по окружности плечо импульса относительно центра окружности постоянно. Направление вектора L не изменяется

2. Частица движется по окружности радиуса r (рис. 27.3). Модуль момента импульса относительно центра окружности равен

$$L = mvr \quad (27.4)$$

и так же, как в предыдущем случае, может изменяться только за счет изменения модуля скорости. Несмотря на непрерывное изменение направления вектора \mathbf{p} , направление вектора \mathbf{L} остается постоянным.

Проекция вектора \mathbf{L} на произвольную ось z , проходящую через точку O , называется моментом импульса частицы относительно этой оси:

$$L_z = [\mathbf{r}\mathbf{p}]_{\text{пр. } z}. \quad (27.5)$$

Выясним, от чего зависит изменение момента импульса частицы. С этой целью продифференцируем выражение (27.1) по времени:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}, m\mathbf{v}] = [\mathbf{r}, m\dot{\mathbf{v}}] + [\dot{\mathbf{r}}, m\mathbf{v}].$$

Согласно второму закону Ньютона $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$ — результирующей сил, действующих на частицу; по определению $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$. Поэтому можно написать, что

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{F}] + [\mathbf{v}, m\mathbf{v}].$$

Второе слагаемое является векторным произведением коллинеарных векторов и поэтому равно нулю. Первое слагаемое представляет собой момент силы \mathbf{F} относительно той же точки, относительно которой взят момент импульса \mathbf{L} . Следовательно, мы приходим к соотношению

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (27.6)$$

согласно которому *скорость изменения момента импульса со временем равна суммарному моменту сил, действующих на частицу.*

Спроектировав векторы, фигурирующие в уравнении (27.6), на произвольную ось z , проходящую через точку O , получим соотношение

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (27.7)$$

Таким образом, *производная по времени от момента импульса относительно оси равна моменту относительно той же оси сил, действующих на частицу.*

Рассмотрим систему частиц, на которые действуют как внутренние, так и внешние силы. Моментом **им-**

пульса L системы относительно точки O называется сумма моментов импульса L_i отдельных частиц:

$$L = \sum L_i = \sum [r_i p_i]. \quad (27.8)$$

Дифференцирование по времени дает, что

$$\frac{dL}{dt} = \sum \frac{dL_i}{dt}. \quad (27.9)$$

В соответствии с (27.6) для каждой из частиц можно написать равенство

$$\frac{dL_i}{dt} = M_{i \text{ внутр}} + M_{i \text{ внеш}},$$

где $M_{i \text{ внутр}}$ — момент внутренних сил, а $M_{i \text{ внеш}}$ — момент внешних сил, действующих на i -ю частицу. Подстановка этих равенств в (27.9) приводит к соотношению

$$\frac{dL}{dt} = \sum M_{i \text{ внутр}} + \sum M_{i \text{ внеш}}.$$

Каждое из слагаемых в этих суммах представляет собой сумму моментов сил, действующих на i -ю частицу. Суммирование осуществляется по частицам. Если перейти к суммированию по отдельным силам, независимо от того, к какой из частиц они приложены, индекс i в суммах можно опустить.

Согласно (26.9) суммарный момент внутренних сил равен нулю. Поэтому получаем окончательно, что

$$\frac{dL}{dt} = \sum M_{\text{внеш}}. \quad (27.10)$$

Формула (27.10) сходна с формулой (16.2). Из сравнения этих формул заключаем, что подобно тому, как производная по времени от импульса системы равна сумме внешних сил, производная по времени от момента импульса системы равна сумме моментов внешних сил.

Спроектировав векторы, фигурирующие в формуле (27.10) на произвольную ось z , проходящую через точку O , придем к уравнению

$$\frac{d}{dt} L_z = \sum M_{\text{внеш}, z}. \quad (27.11)$$

Если система замкнута (т. е. внешних сил нет), правая часть равенства (27.10) равна нулю и, следовательно, вектор L не изменяется со временем. Отсюда вытекает закон сохранения момента

импульса, который гласит, что *момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным*. Разумеется, будет оставаться постоянным и момент импульса замкнутой системы относительно любой оси, проходящей через точку O .

Момент импульса сохраняется и для незамкнутой системы, если сумма моментов внешних сил равна нулю. Согласно (27.11) сохраняется момент импульса системы относительно оси z при условии, что сумма моментов внешних сил относительно этой оси равна нулю.

В основе закона сохранения момента импульса лежит изотропия пространства, т. е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям. Поворот замкнутой системы частиц без изменения их взаимного расположения (конфигурации) и относительных скоростей не изменяет механических свойств системы. Движение частиц друг относительно друга после поворота будет таким же, каким оно было бы, если бы поворот не был осуществлен.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какова связь между кинетической энергией материальной точки и работой приложенных к точке сил?
2. Как связана потенциальная энергия материальной точки с работой консервативных сил?
3. Работа силы, действующей на материальную точку, на любом пути равна нулю. Что можно сказать о взаимном направлении силы и скорости материальной точки?
4. Сила, действующая на материальную точку, изменяется по закону $F(t)$, а скорость точки — по закону $v(t)$. Чему равна мощность в момент t ?
5. Являются ли силы трения консервативными?
6. Чему равен импульс системы материальных точек в φ -системе?
7. Может ли обладать моментом импульса материальная точка, движущаяся по прямолинейной траектории?

Примеры решения задач

1. Материальная точка массы $m = 0,100$ кг начинает двигаться под действием силы $F = 2te_x + 3t^2e_y$. Найти работу, совершаемую силой над материальной точкой за время $\tau = 2,00$ с от начала движения.

Решение. Ускорение материальной точки равно $a = (2te_x + 3t^2e_y)/m$. Проинтегрировав это выражение по t , найдем скорость точки:

$$v = (t^2e_x + t^3e_y)/m.$$

Сила развивает мощность

$$P = Fv = F_x v_x + F_y v_y = (2t^3 + 3t^5)/m.$$

Работа равна интегралу от мощности по времени:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\tau} P dt = \frac{1}{m} \int_0^{\tau} (2t^3 + 3t^5) dt = \\ &= \frac{(1 \text{ Дж} \cdot \text{кг}/\text{с}^4) \tau^4 + (1 \text{ Дж} \cdot \text{кг}/\text{с}^6) \tau^6}{2m} = 4,0 \cdot 10^2 \text{ Дж}. \end{aligned}$$

2. Потенциальная энергия частицы определяется выражением $E_p = a(x^2 + y^2 + z^2)$, где $a = 1,00 \text{ Дж}/\text{м}^2$, а координаты выражены в метрах. Частица начинает двигаться из точки с координатами $(3,00; 3,00; 3,00)$. Найти ее кинетическую энергию E_k в момент, когда частица находится в точке с координатами $(1,00; 1,00; 1,00)$.

Решение. Поскольку полная энергия $E = E_k + E_p$ остается постоянной, кинетическая энергия равна убыли потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} E_k &= E_{p1} - E_{p2} = a [(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)] = \\ &= 1,00 [(3,00^2 + 3,00^2 + 3,00^2) - (1,00^2 + 1,00^2 + 1,00^2)] = 24 \text{ Дж}. \end{aligned}$$

3. Тело массы m бросили под углом к горизонту с начальной скоростью v_0 . Спустя время τ тело упало на Землю. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: а) приращение импульса тела Δp за время полета, б) среднее значение импульса $\langle p \rangle$ за время τ .

Решение. а) На тело действует сила $F = mg$. В соответствии с формулой $dp = Fdt$

$$\Delta p = \int_0^{\tau} F dt = \int_0^{\tau} mg dt = mg \int_0^{\tau} dt = mg\tau.$$

б) Начальное значение импульса равно mv_0 , конечное — $mv_0 + mg\tau$. Поскольку импульс изменяется со временем по линейному закону, его среднее значение равно полусумме начального и конечного значений:

$$\langle p \rangle = mv_0 + mg\tau/2.$$

4. Тело массы $m = 1,00$ кг брошено из точки с координатами $(0,00; 2,00; 0,00)$ (м) вверх по вертикали с начальной скоростью $v_0 = 10,0$ м/с. Найти приращение момента импульса ΔL относительно начала координат за все время полета тела (до возвращения в исходную точку). Ось z направлена вверх. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Как при движении вверх, так и при движении вниз тело перемещается по вертикальной прямой, отстоящей от начала координат на расстояние $y = 2,00$ м. Следовательно, плечо импульса $l = y = 2,00$ м. При движении вверх момент импульса направлен по оси x (сделайте рисунок, на котором ось x направлена «на нас», ось y — вправо, ось z — вверх), при движении вниз — в противоположном направлении. Следовательно, начальное значение момента импульса $L_1 = mv_0ye_x$, а конечное $L_2 = -mv_0ye_x$. Приращение момента импульса равно $\Delta L = L_2 - L_1 = -2mv_0ye_x = -2 \cdot 1,00 \cdot 10,0 \cdot 2,00 e_x =$
 $= -40 e_x$ (кг · м²/с).

Г л а в а 4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 28. Кинематика вращательного движения

При вращении твердого тела все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Окружности, по которым движутся точки тела, лежат в плоскостях, перпендикулярных к этой оси.

Быстроту вращения естественно характеризовать углом, на который поворачивается тело в единицу времени. Если за равные, сколь угодно малые промежутки времени Δt тело поворачивается на одинаковые углы $\Delta \varphi$, вращение называется равномерным. Пусть равномерно вращающееся тело поворачивается за время t на угол φ . Тогда величина

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \quad (28.1)$$

определяет угол поворота в единицу времени (ср. с формулой (3.1)). Эту величину называют угловой скоростью тела (точнее, эта величина есть модуль угловой скорости, сама угловая скорость — вектор; см. ниже). При неравномерном вращении выражение (28.1) дает среднее значение угловой скорости за промежутки времени t . Мгновенное значение угловой ско-

рости определяется выражением

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (28.2)$$

где $\Delta\varphi$ — угол, на который поворачивается тело за время Δt .

Чтобы охарактеризовать не только быстроту вращения, но также и ориентацию оси вращения в пространстве и направление вращения, вводят векторную величину ω , модуль которой определяется формулой (28.2). Направлен вектор ω вдоль оси вращения, причем так, что направление вращения и направление ω

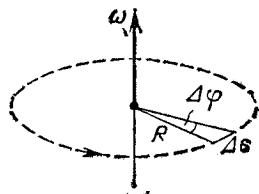


Рис. 28.1. Точка, находящаяся на расстоянии R от оси вращения, при повороте тела на угол $\Delta\varphi$ проходит путь Δs , равный $R\Delta\varphi$

образуют правовинтовую систему: если смотреть вслед вектору ω , вращение представляется происходящим по часовой стрелке (рис. 28.1). Определенная таким образом векторная величина ω называется угловой скоростью тела. Поскольку направление угловой скорости определяется условно, ω является псевдовектором. Единицей угловой скорости служит радиан в секунду (рад/с).

Изменение угловой скорости со временем характеризуется векторной величиной

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}, \quad (28.3)$$

которая называется угловым ускорением (ср. с формулой (4.1)). Как и угловая скорость, угловое ускорение является псевдовектором.

Если направление оси вращения в пространстве не изменяется, вектор ω может изменяться только по модулю. В этом случае векторы ω и α коллинеарны, причем направлены в одну и ту же сторону, если вращение ускоренное, и в противоположные стороны, если вращение замедленное.

При неизменном направлении оси вращения модуль углового ускорения определяется формулой

$$\alpha = \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = |\dot{\omega}| \quad (28.4)$$

(модуль вектора всегда положителен, производная же $d\omega/dt$ может быть как положительной, так и отрицательной). Нетрудно сообразить, что сама производная $d\omega/dt$ представляет собой проекцию углового ускорения на направление угловой скорости:

$$\alpha_{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}. \quad (28.5)$$

Отметим, что при поворотах оси вращения угловое ускорение α отлично от нуля даже в том случае, когда $d\omega/dt = 0$.

Угловое ускорение измеряется в радианах в секунду за секунду ($\text{рад}/\text{с}^2$).

Найдем связь векторов ω и α с величинами v и a , которые, чтобы отличить их от угловых, называют линейными скоростью и ускорением. Из рис. 28.1 следует, что точка тела, отстоящая от оси вращения на расстояние R , при повороте тела на угол $\Delta\varphi$ проходит путь $\Delta s = R\Delta\varphi$. Разделив Δs на время Δt , за которое произошел поворот тела на угол $\Delta\varphi$, и осуществив предельный переход, получим модуль линейной скорости точки:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right) = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega.$$

Таким образом, мы нашли связь между модулями линейной и угловой скоростей:

$$v = \omega R. \quad (28.6)$$

Будем определять положение точек тела с помощью радиус-вектора r , проведенного из точки O , лежащей на оси вращения. На рис. 28.2 видно, что $R = r \sin \beta$. Подстановка этого значения в (28.3) дает

$$v = \omega r \sin \beta.$$

Это равенство и показанные на рис. 28.2 взаимные направления векторов ω , r и v дают основание представить v в виде векторного произведения ω на r :

$$v = [\omega r]. \quad (28.7)$$

Согласно (4.9) модуль нормального ускорения определяется формулой $a_n = v^2/R$. Подставив сюда выражение (28.6) для v , найдем, что

$$a_n = \omega^2 R. \quad (28.8)$$

Таким образом, модуль нормального ускорения пропорционален квадрату угловой скорости.

Продифференцировав соотношение (28.6) по времени, получим

$$\dot{v} = \dot{\omega} R$$

(напомним, что $R = \text{const}$). В соответствии с формулой (4.10) $|\dot{v}|$ представляет собой модуль тангенциального ускорения a_τ . В случае, когда ось вращения, а следовательно и вектор ω , не изменяет направления в пространстве, $|\dot{\omega}|$ равен модулю углового ускорения α . Следовательно, мы приходим к формуле

$$a_\tau = \alpha R. \quad (28.9)$$

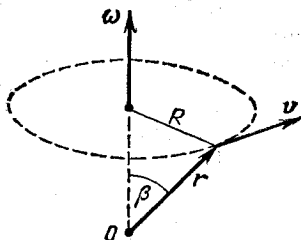


Рис. 28.2. Расстояние точки тела от оси вращения равно $R = r \sin \varphi$. Вектор v перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы ω и r

§ 29. Плоское движение твердого тела

Плоским называется такое движение, при котором все точки тела движутся в параллельных плоскостях. Произвольное плоское движение можно представить как совокупность поступательного движения и вращения (рис. 29.1). Разбиение движения на поступательное и вращательное можно осуществить множеством способов (на рис. 29.1 показаны три из них), отличающихся значениями скорости поступательного движения, но соответствующих одной и той же угловой скорости ω . Поэтому можно говорить об угловой скорости вращения твердого тела, не указывая, через какую точку проходит ось вращения.

Положим скорость поступательного движения равной v_0 . Примем одну из точек, лежащих на оси вращения, за начало координат O . Согласно формуле

§ 30. Движение центра масс твердого тела

Разбив твердое тело на множество очень малых частей (элементарных масс), его можно представить как систему материальных точек с неизменными расстояниями между ними. Поэтому для твердого тела справедливы все результаты, полученные в § 16 для системы обособленных частиц. В частности, центр масс твердого тела представляет собой точку с радиус-вектором

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \Delta m_i, \quad (30.1)$$

где Δm_i — i -я элементарная масса, \mathbf{r}_i — радиус-вектор, определяющий положение этой массы (см. формулу (16.4)).

Выражение (30.1) является не вполне однозначным, поскольку каждый из векторов \mathbf{r}_i можно проводить в любую из точек i -й элементарной массы. Чтобы устранить эту неопределенность, нужно взять предел выражения (30.1) при условии, что все Δm_i стремятся к нулю:

$$\mathbf{r}_C = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \Delta m_i \right).$$

Мы знаем, что такой предел называется интегралом (см. формулу (3.16)). Таким образом,

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \int \mathbf{r} dm, \quad (30.2)$$

где интегрирование производится по всему телу.

Выражение (30.2) зависит от распределения массы по объему тела. Это распределение можно охарактеризовать с помощью величины, называемой плотностью. Тело, свойства которого во всех точках одинаковы, называется однородным. Плотностью однородного тела называют величину

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (30.3)$$

где m — масса тела, а V — его объем. Таким образом, плотность однородного тела представляет собой массу единицы объема тела.

Для неоднородного тела формула (30.3) дает среднюю плотность. Плотность в точке P определяется выражением

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}, \quad (30.4)$$

где Δm — масса, заключенная в объеме ΔV , который включает в себя точку P . Предельный переход в этом выражении нельзя понимать так, что объем ΔV стягивается буквально в точку. Уменьшение ΔV следует осуществлять до тех пор, пока еще не начнет обнаруживаться атомная структура вещества. Поэтому под dV в (30.4) надо подразумевать физически бесконечно малый объем, т. е. такой объем, который, с одной стороны, достаточно мал для того, чтобы макроскопические (т. е. присущие большой совокупности атомов) свойства вещества можно было считать в его пределах одинаковыми, а с другой стороны, достаточно велик для того, чтобы не могла проявиться дискретность (прерывистость) вещества.

Согласно (30.4) элементарная масса dm равна произведению плотности ρ тела в данной точке на соответствующий элементарный объем dV :

$$dm = \rho dV. \quad (30.5)$$

Подставив это значение dm в выражение (30.2), получим, что

$$r_c = \frac{1}{m} \int_V r \rho dV \quad (30.6)$$

(буква V под знаком интеграла указывает на то, что интегрирование осуществляется по объему V тела). Если тело однородно, плотность ρ во всех точках тела одинакова и ее можно вынести за знак интеграла. В результате придем к формуле

$$r_c = \frac{\rho}{m} \int_V r dV = \frac{1}{V} \int_V r dV \quad (30.7)$$

(см. (30.3)). Таким образом, в случае однородного тела радиус-вектор центра масс представляет собой значение радиус-вектора r , усредненное по всем точкам тела (ср. с формулой (3.21)).

Твердое тело эквивалентно системе материальных точек. Поэтому для него справедливо уравнение

(16.8), согласно которому произведение массы системы (т. е. массы тела) на ускорение центра масс a_c равно сумме внешних сил:

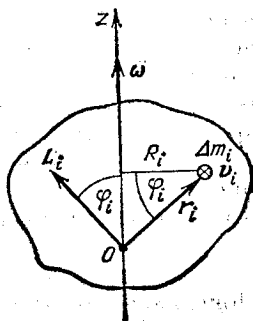
$$ma_c = \sum F_{\text{внеш}}. \quad (30.8)$$

Таким образом, центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу сил.

§ 31. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Разобьем тело, вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω , на элементарные массы

Рис. 31.1. Ось вращения и элементарная масса Δm_i лежат в плоскости чертежа. Скорость v_i направлена за чертеж. Момент импульса L_i перпендикулярен к векторам r_i и v_i . Расстояние Δm_i от оси вращения равно $R_i = r_i \cos \varphi_i$



Δm_i (рис. 31.1). Согласно формуле (27.1) момент импульса i -й элементарной массы относительно точки O , лежащей на оси вращения, равен

$$L_i = \Delta m_i [r_i v_i]. \quad (31.1)$$

Здесь r_i — радиус-вектор, определяющий положение массы Δm_i относительно точки O , v_i — скорость i -й элементарной массы.

Момент импульса тела L равен сумме моментов импульса элементарных масс:

$$L = \sum L_i = \sum \Delta m_i [r_i v_i]. \quad (31.2)$$

Из рис. 31.2 следует, что в случае несимметричного тела векторы ω и L неколлинеарны. Поэтому при равномерном вращении момент импульса описывает конус вокруг оси вращения (рис. 31.3). При неравномерном вращении тела вектор L , поворачиваясь вместе с телом, изменяет свою «длину».

Из соображений симметрии ясно, что для однородного тела, симметричного относительно оси вращения (для тела вращения), момент импульса относительно лежащей на этой оси точки O совпадает по направлению с вектором ω (рис. 31.4).

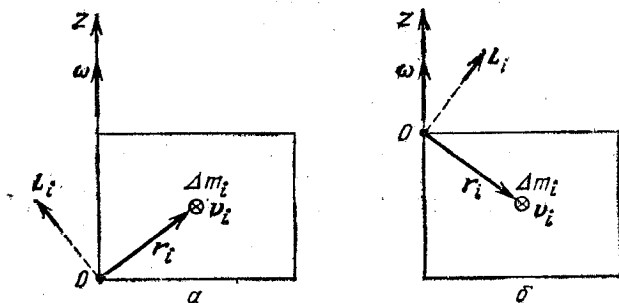


Рис. 31.2. Тело в виде однородной прямоугольной пластины вращается вокруг оси, совпадающей с одной из ее сторон (L_i — момент импульса i -й элементарной массы Δm_i относительно точки O): а — очевидно, что все L_i отклонены влево от оси вращения; соответственно отклонен влево и результирующий момент L (на рисунке не показан); б — все L_i отклонены вправо; так же отклонен результирующий момент L

Для твердого тела, как и для системы материальных точек, справедливо соотношение (27.10), согласно

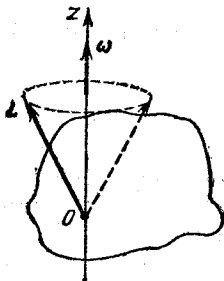


Рис. 31.3. При равномерном вращении момент импульса тела относительно точки O описывает конус. Проекция L на ось вращения остается постоянной

которому производная момента импульса по времени равна суммарному моменту внешних сил, действующих на тело:

$$\frac{dL}{dt} = \sum M_{\text{внеш}}. \quad (31.3)$$

Моменты L и $M_{\text{внеш}}$ берутся относительно одной и той же точки O .

Найдем момент импульса твердого тела относительно оси вращения z , т. е. проекцию вектора L на ось z (см. формулу (27.5)). На рис. 31.1 видно, что проекция L_{zi} момента L_i на ось z равна его модулю L_i , умноженному на косинус угла φ_i : $L_{zi} = L_i \cos \varphi_i$. Поскольку угол между векторами r_i и v_i прямой, $L_i = \Delta m_i r_i v_i$. Следовательно,

$$L_{zi} = \Delta m_i r_i v_i \cos \varphi_i = \Delta m_i R_i v_i,$$

где R_i — расстояние массы Δm_i от оси вращения (см. рис. 31.1). Согласно формуле (28.3) $v_i = \omega R_i$. С учетом этого

$$L_{zi} = \omega R_i^2 \Delta m_i.$$

Проекция момента импульса тела L_z равна сумме проекций L_{zi} :

$$\begin{aligned} L_z &= \sum L_{zi} = \sum \omega R_i^2 \Delta m_i = \\ &= \omega \sum R_i^2 \Delta m_i. \end{aligned} \quad (31.4)$$

Полученное выражение не зависит от положения на оси вращения точки O , относительно которой определяется момент импульса тела L . Таким образом, значение L_z в случаях *a* и *б* на рис. 31.2 одно и то же.

Величина

$$I = \sum R_i^2 \Delta m_i, \quad (31.5)$$

равная сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстояний от некоторой оси, называется моментом инерции тела относительно этой оси. Мы пришли к понятию момента инерции, рассматривая вращение твердого тела. Однако момент инерции существует безотносительно к вращению. Всякое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции относительно любой оси, подобно тому как тело обладает массой независимо от того, движется оно или находится в покое.

Воспользовавшись понятием момента инерции, представим выражение (31.4) для момента импульса

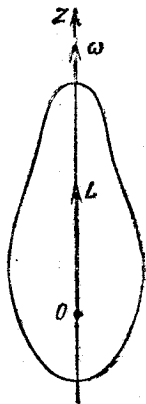


Рис. 31.4. Момент импульса однородного тела вращения коллинеарен с вектором ω

относительно оси z в виде

$$L_z = I\omega. \quad (31.6)$$

В этой формуле I есть момент инерции тела относительно оси вращения z .

Для момента импульса относительно оси справедлива формула (27.11). Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = \sum M_{\text{внеш}, z}.$$

Приняв во внимание, что $I = \text{const}$, а $\dot{\omega} = \alpha_z$ — проекции углового ускорения на ось z (см. (28.4); поскольку мы предположили направления вектора ω и оси z совпадающими, $\alpha_\omega = \alpha_z$), придем к уравнению

$$I\alpha_z = \sum M_{\text{внеш}, z}. \quad (31.7)$$

Это уравнение называют уравнением динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Оно аналогично уравнению второго закона Ньютона $ma_z = \sum F_z$. Роль массы играет момент инерции, роль линейного ускорения — угловое ускорение и, наконец, роль результирующей силы — суммарный момент внешних сил.

Из (31.7) следует, что в случае, когда суммарный момент внешних сил положителен, α_z также положительно (по определению $I > 0$). Это означает, что направления векторов α и ω совпадают (ω направлена по оси z) и вращение будет ускоренным. В случае же, когда суммарный момент внешних сил отрицателен, α_z также отрицательно. Это означает, что направления векторов α и ω противоположны и вращение будет замедленным. При изменении направления оси z на обратное у обеих частей уравнения (31.7) изменяется знак.

§ 32. Момент инерции

Из определения момента инерции

$$I = \sum R_i^2 \Delta m_i \quad (32.1)$$

следует, что эта величина аддитивна. Это означает, что момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции частей тела относительно той же оси.

Сделанное в начале § 30 замечание относительно приближенности выражения (30.1) полностью относится и к выражению (32.1). Поэтому суммирование в выражении для момента инерции должно быть заменено интегрированием:

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum R_i^2 \Delta m_i = \int R^2 dm. \quad (32.2)$$

Наконец, с учетом равенства (30.5) получим формулу

$$I = \int \rho R^2 dV, \quad (32.3)$$

где ρ — плотность тела в точке, в которой взят объем dV , R — расстояние этого объема от оси, относительно которой вычисляется момент.

Если тело однородно, плотность ρ во всех его точках одинакова и ее можно вынести за знак интеграла:

$$I = \rho \int R^2 dV. \quad (32.4)$$

Вычисление интеграла (32.4), а тем более интеграла (32.3) представляет собой, вообще говоря, очень сложную задачу. Дело значительно упрощается в случае однородных осесимметричных тел. В качестве примера найдем момент инерции однородного

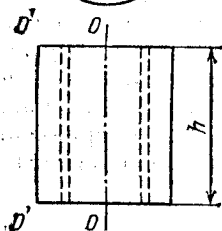
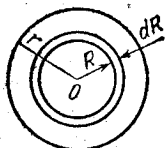


Рис. 32.1. К вычислению момента инерции цилиндра

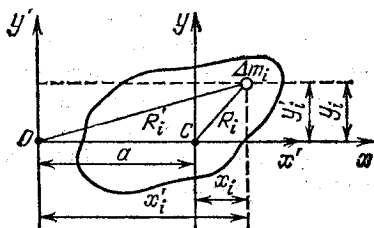


Рис. 32.2. Оси C и O перпендикулярны к плоскости чертежа. Оси x, y, x' и y' , а также центр масс C лежат в плоскости чертежа.

Имеют место соотношения: $x'_i = x_i + a, y'_i = y_i$

цилиндра относительно его геометрической оси OO (рис. 32.1). Разобьем цилиндр на слои радиуса R и

толщины dR . Масса такого слоя равна $dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi R h dR$ (dV — объем слоя). Все точки слоя отстоят от оси OO на одинаковое расстояние R . Поэтому вклад слоя в момент инерции равен

$$dI = \rho R^2 dV = \rho R^2 \cdot 2\pi R h dR = 2\pi \rho h R^3 dR.$$

Проинтегрировав это выражение по R в пределах от 0 до r (r — радиус цилиндра), получим искомый момент инерции:

$$I = 2\pi \rho h \int_0^r R^3 dR = 2\pi \rho h \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2} \rho h \pi r^2 \cdot r^2 = \frac{1}{2} m r^2 \quad (32.5)$$

($m = \rho h \pi r^2$ — масса цилиндра). Отметим, что полученное выражение не зависит от высоты цилиндра h . Следовательно, формула (32.5) определяет и момент инерции тонкого диска относительно перпендикулярной к нему проходящей через его центр оси.

Рассмотрим произвольное тело и две параллельные друг другу оси, одна из которых (ось C) проходит через центр масс тела, а другая (ось O) отстоит от первой на расстояние a (рис. 32.2). Выберем оси координат x, y и x', y' так, как показано на рисунке.

Момент инерции I относительно оси O определяется выражением

$$\begin{aligned} I &= \sum R_i^2 \Delta m_i = \sum (x_i'^2 + y_i'^2) \Delta m_i = \\ &= \sum [(x_i + a)^2 + y_i^2] \Delta m_i = \sum [x_i^2 + 2ax_i + a^2 + y_i^2] \Delta m_i. \end{aligned}$$

Разобьем это выражение на три суммы:

$$I = \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i + 2a \sum x_i \Delta m_i + a^2 \sum \Delta m_i.$$

Первая сумма представляет собой момент инерции I_C относительно оси, проходящей через центр масс.

Сумма $\sum \Delta m_i$ дает массу тела m . Наконец, $\sum x_i \Delta m_i = x_C m$, где x_C — координата центра масс, которая при сделанном выборе начала координат равна нулю. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$I = I_C + m a^2. \quad (32.6)$$

Это соотношение выражает теорему Штейнера¹⁾, которая гласит, что *момент инерции относи-*

¹⁾ Якоб Штейнер (1796—1863) — швейцарский математик.

тельно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями. Теорема Штейнера сводит вычисление момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела.

Воспользуемся теоремой Штейнера для нахождения момента инерции I' однородного цилиндра относительно оси $O'O'$, совпадающей с образующей цилиндра (см. рис. 32.1). В данном случае I_C определяется выражением (32.5), расстояние между осями a равно радиусу цилиндра r . Следовательно, согласно (32.6),

$$I' = \frac{1}{2} mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2.$$

Не составляет большого труда вычислить момент инерции тонкого однородного стержня массы m и длины l относительно перпендикулярной к нему оси OO , проходящей через его конец (рис. 32.3). Заметим, что стержень можно считать тонким, если максимальный поперечный размер его много меньше длины l . В соответствии с формулой (32.2)

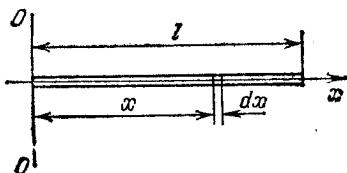


Рис. 32.3. Масса элемента стержня длины dx равна $dm = (m/l)dx$

$$I = \int x^2 dm = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} ml^2. \quad (32.7)$$

С помощью теоремы Штейнера можно найти момент инерции I_C стержня относительно перпендикулярной к нему оси, проходящей через его центр. Согласно (32.6),

$$I = I_C + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2,$$

откуда

$$I_C = \frac{1}{12} ml^2. \quad (32.8)$$

Наконец, приведем без вывода значение момента инерции однородного шара относительно оси, прохо-

дящей через его центр:

$$I = \frac{2}{5} mr^2 \quad (32.9)$$

(m — масса, а r — радиус шара).

§ 33. Кинетическая энергия вращающегося тела

Когда тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω , элементарная масса Δm_i , отстоящая от оси вращения на расстоянии R_i , обладает скоростью $v_i = \omega R_i$ (см. формулу (28.3)). Следовательно, ее кинетическая энергия равна

$$(\Delta E_k)_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i \omega^2 R_i^2.$$

Сумма энергий $(\Delta E_k)_i$ даст кинетическую энергию всего тела:

$$E_k = \sum (\Delta E_k)_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum R_i^2 \Delta m_i.$$

Приняв во внимание формулу (32.1), придем к выражению

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (33.1)$$

Это выражение аналогично выражению для кинетической энергии материальной точки (и поступательно движущегося тела): $E_k = mv^2/2$. Роль массы играет момент инерции, а роль линейной скорости — угловая скорость.

Найдем работу, совершаемую внешней силой при вращении твердого тела. Рассмотрим частный случай, когда сила направлена по касательной к окружности, по которой движется точка приложения силы (рис. 33.1). В этом случае сила F и перемещение ds точки ее приложения коллинеарны. Элементарная работа $dA = F_s ds = F_s R d\varphi$. В случае *a* на рис. 33.1 сила действует в направлении перемещения, поэтому F_s равна модулю силы F и $dA = FR d\varphi$. В случае *b* сила и перемещение направлены в противоположные стороны, поэтому $F_s = -F$ и $dA = -FR d\varphi$. Как следует из рисунка, оба выражения для работы можно представить одной формулой

$$dA = M_2 d\varphi. \quad (33.2)$$

В общем случае, когда внешняя сила направлена произвольно, ее можно разложить на три составляющие (см. рис. 26.5). Составляющие F_{\parallel} и F_{\perp} перпендикулярны к перемещению ds и поэтому работы не совершают. Они также не вносят вклада в M_z . Следо-

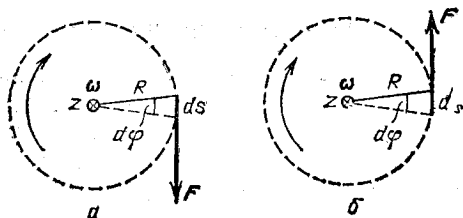


Рис. 33.1. Ось вращения z и угловая скорость ω направлены за чертеж (штриховая окружность — траектория точки приложения силы; путь $ds = R d\varphi$): a — момент M силы F относительно центра окружности направлен за чертеж, поэтому проекция M на ось z , т. е. момент M_z силы F относительно оси z положителен и равен FR ; b — момент M направлен «на нас», поэтому M_z отрицателен и равен $-FR$

вательно, и в этом случае работа определяется формулой (33.2).

Поскольку направления оси z и вектора ω совпадают, формулу (33.2) можно представить в виде

$$dA = M_{\omega} d\varphi, \quad (33.3)$$

где M_{ω} — проекция M на направление вектора ω .

Формула (33.3) сходна с формулой $dA = F_s ds$. Сходство становится особенно наглядным, если написать последнюю формулу в виде $dA = F_v ds$, где F_v — проекция силы F на направление скорости v точки приложения силы (направления векторов v и ds совпадают).

Разделив работу (33.3) на время dt , за которое тело повернулось на угол $d\varphi$, получим мощность, развиваемую силой F :

$$P = dA/dt = M_{\omega} (d\varphi/dt) = M_{\omega} \omega. \quad (33.4)$$

Знак мощности зависит от взаимного направления векторов M и ω . Если эти векторы направлены в противоположные стороны, $M_{\omega} < 0$ и мощность P отрицательна.

Формула (33.4) сходна с формулой $P = Fv = F_v v$ (см. (20.6)).

В табл. 33.1 сопоставлены формулы механики поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси. Из этого сопоставления следует, что во

Таблица 33.1. Сопоставление формул механики поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси

Поступательное движение	Вращение
v — линейная скорость	ω — угловая скорость
$a = \dot{v}$ — линейное ускорение	$\alpha = \dot{\omega}$ — угловое ускорение
m — масса	I — момент импульса
$p = mv$ — импульс	$L_z = I\omega$ — момент импульса
F — сила	M — момент силы
$dp/dt = F$ — уравнение движения	$dL/dt = M$ — уравнение движения
$ma = F$ — уравнение движения	$I\alpha_z = M_z$ — уравнение движения
$E_k = mv^2/2$ — кинетическая энергия	$E_k = I\omega^2/2$ — кинетическая энергия
$dA = F_s ds = F_v ds$ — работа	$dA = M_\omega d\varphi$ — работа
$P = F_v v$ — мощность	$P = M_\omega \omega$ — мощность

всех случаях роль линейной скорости играет угловая скорость, роль линейного ускорения — угловое ускорение, роль массы — момент инерции, роль импульса — момент импульса, силы — момент силы.

§ 34. Кинетическая энергия тела при плоском движении

Представим плоское движение тела как наложение поступательного движения со скоростью v_0 некоторой точки O и вращения вокруг оси, проходящей через эту точку, с угловой скоростью ω . В этом случае скорость i -й элементарной массы тела определяется формулой

$$v_i = v_0 + [\omega r_i],$$

где r_i — радиус-вектор i -й массы, проведенный из точки O (см. (29.1)).

Кинетическая энергия i -й элементарной массы равна

$$(\Delta E_k)_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i (v_0 + [\omega r_i])^2.$$

Возведение в квадрат дает

$$(\Delta E_k)_i = \frac{1}{2} \Delta m_i \{v_0^2 + 2v_0 [\omega r_i] + [\omega r_i]^2\}.$$

Просуммировав $(\Delta E_k)_i$ по всем элементарным массам, найдем кинетическую энергию тела:

$$E_k = \sum (\Delta E_k)_i = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i \{v_0^2 + 2v_0 [\omega r_i] + [\omega r_i]^2\}.$$

Разобьем полученное выражение на три слагаемых, вынося при этом постоянные множители за знак суммы:

$$E_k = \frac{1}{2} v_0^2 \sum \Delta m_i + v_0 \sum \Delta m_i [\omega r_i] + \frac{1}{2} \sum \Delta m_i [\omega r_i]^2. \quad (34.1)$$

Сумма элементарных масс даст массу тела: $\sum \Delta m_i = m$. Следовательно, первое слагаемое равно $mv_0^2/2$.

Квадрат вектора равен квадрату его модуля. Поэтому, как следует из рис. 34.1, $[\omega r_i]^2 = \omega^2 R_i^2$, где R_i — расстояние i -й массы от оси вращения. Соответственно третье слагаемое в (34.1) равно

$$\frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

(I_0 — момент инерции тела относительно оси вращения O).

Воспользовавшись дистрибутивностью векторного произведения, преобразуем второе слагаемое в (34.1) следующим образом:

$$v_0 \sum \Delta m_i [\omega r_i] = v_0 [\omega, \sum \Delta m_i r_i] = v_0 [\omega, m r_c],$$

где r_c — радиус-вектор центра масс, проведенный из точки O .

С учетом всего сказанного можно написать, что

$$E_k = \frac{1}{2} m v_0^2 + m v_0 [\omega r_c] + \frac{1}{2} I_0 \omega^2. \quad (34.2)$$

В первое слагаемое входят только величины, харак-

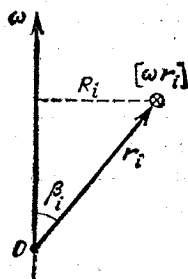


Рис. 34.1. Вектор $[\omega r_i]$ направлен за чертеж. Его модуль равен $\omega r_i \sin \beta_i = \omega R_i$

теризующие поступательное движение, в третье слагаемое — только величины, характеризующие вращательное движение. Второе же слагаемое содержит величины, характеризующие как поступательное, так и вращательное движение.

Если в качестве точки O взять центр масс тела C , то r_C будет равен нулю и формула (34.2) упростится следующим образом:

$$E_k = (1/2) m v_C^2 + (1/2) I_C \omega^2. \quad (34.3)$$

Здесь v_C — скорость центра масс, I_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

Таким образом, если разбить плоское движение тела на поступательное со скоростью центра масс и вращение вокруг оси, проходящей через центр масс, то кинетическая энергия распадается на два независимых слагаемых, одно из которых определяется только величинами, характеризующими поступательное движение, а другое — только величинами, характеризующими вращение. В этом заключается одно из преимуществ такого разбиения плоского движения, о которых упоминалось в предпоследнем абзаце § 29.

§ 35. Гироскопы

Гироскопом (или волчком) называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии. У симметричного тела направления момента импульса L и угловой скорости ω совпадают, поэтому $L = I\omega$ (см. рис. 31.4). Вследствие массивности гироскопа его момент инерции I очень велик, велика также угловая скорость ω .

Рассмотрим гироскоп, ось которого закреплена одним концом в шарнире O , вокруг которого она может поворачиваться без трения произвольным образом (рис. 35.1). Попытаемся повернуть ось гироскопа OA вокруг оси DD , подействовав на свободный конец оси силой F в течение времени dt . Однако гироскоп «проявит непослушание» — его ось повернется не вокруг оси DD , а вокруг оси BB , приняв положение OA' . Это, казалось бы, противоестественное поведение гироскопа носит название гироскопического эффекта.

Гироскопический эффект находится в полном согласии с законами механики твердого тела. Действительно, согласно уравнению (31.3) в результате действия силы F в течение времени dt момент импульса L получит приращение $dL = M dt$, где M — момент силы F относительно точки O . Новое значение момента импульса, равное $L + dL$, окажется повернутым вокруг оси BB относительно первоначального значения L . Поскольку вектор L направлен вдоль оси гироскопа, вместе с L повернется и ось, перейдя из положения OA в положение OA' .

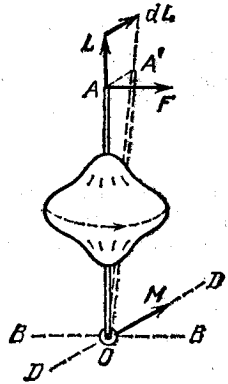


Рис. 35.1. Ось гироскопа OA , ось BB и сила F лежат в плоскости чертежа. Векторы M и $dL = M dt$ направлены за чертеж. Ось DD перпендикулярна к плоскости чертежа

Гироскопический эффект является причиной того, что хорошо раскрученный детский волчок не опрокидывается под действием силы тяжести. Это действие приводит лишь к тому, что ось волчка поворачивается, описывая конус (такое движение оси называется прецессией). Только когда вследствие трения вращение волчка заметно замедлится, он опрокинется и займет положение, соответствующее минимуму потенциальной энергии.

Рассмотрим простейший вид прецессии, называемый регулярной прецессией. Пусть один из концов оси гироскопа закреплен в шаровом шарнире O , позволяющем оси свободно поворачиваться в любом направлении (рис. 35.2). На гироскоп действует опрокидывающий момент $M = mgl \sin \beta$ (m — масса гироскопа). Будем откладывать вектор момента импульса гироскопа L из точки O . В момент времени t вектор L изображается отрезком OA . За время dt вектор L получит перпендикулярное к нему приращение $dL = M dt$, в результате чего он, оставаясь постоянным по модулю и не изменяя угла β с вертикалью, переходит в положение OB . В новом положении имеет место такое же взаимное расположение векторов L и M , какое было в момент t . Поэтому за

последующий элемент времени dt вертикальная плоскость, в которой лежит ось гироскопа, снова повернется на угол $d\varphi$ и т. д. В итоге ось гироскопа будет поворачиваться вокруг вертикальной оси, описывая конус с углом раствора 2β . При этом вектор L будет

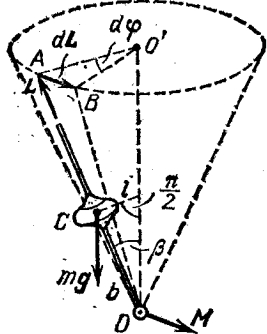


Рис. 35.2. Сила mg лежит в вертикальной плоскости OAO' . Момент силы M перпендикулярен к этой плоскости. Плечо силы $l = b \sin \beta$, где b — расстояние от шарнира O до центра масс гироскопа C , β — угол, образованный осью гироскопа с вертикалью. За время dt момент импульса получает приращение $dL = M dt$, в результате чего вертикальная плоскость, в которой лежат ось гироскопа и сила mg , поворачивается на угол $d\varphi$. Вместе с ней поворачивается и вектор M . Расстояние $O'A$ численно равно $L \sin \beta$

изменяться только по направлению, оставаясь неизменным по модулю. Это объясняется тем, что элементарные приращения dL все время будут перпендикулярными к вектору L . Аналогично ведет себя вектор скорости при равномерном движении частицы по окружности. Вектор v получает за время dt перпендикулярное к нему приращение $dv = a_n dt$, где a_n — постоянное по модулю нормальное ускорение. В результате изменяется только направление вектора v , модуль же его остается постоянным.

Таким образом, в поле сил тяжести ось гироскопа с неподвижной точкой поворачивается вокруг вертикали, описывая конус (в случае, когда $\beta = \pi/2$, конус вырождается в плоскость). Такое движение гироскопа называется регулярной прецессией. Угловую скорость прецессии $\omega_{пр}$ можно найти, разделив угол $d\varphi$ на соответствующее время dt . Из рис. 35.2 следует, что

$$d\varphi = \frac{|dL|}{L \sin \beta}$$

(здесь нельзя вместо $|dL|$ написать dL . В данном случае $dL = 0$). Из соотношения $dL = M dt$ вытекает, что $|dL| = M dt$. Поэтому

$$d\varphi = \frac{M dt}{L \sin \beta}$$

Отсюда с учетом того, что $M = mgb \sin \beta$, а $L = I\omega$, получаем формулу

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L \sin \beta} = \frac{mgb}{I\omega}. \quad (35.1)$$

Здесь m — масса гироскопа вместе с осью, I — момент инерции вращающихся частей гироскопа, ω — угловая скорость вращения гироскопа вокруг своей оси, b — расстояние от шарнира до центра масс гироскопа.

Примечательно то, что угловая скорость прецессии не зависит от угла β , образованного осью гироскопа с направлением вверх по вертикали (этот угол может иметь значения от 0 до π).

Нужно иметь в виду, что формула (35.1) справедлива только при условии, что

$$\omega_{\text{пр}} \ll \omega. \quad (35.2)$$

Дело в том, что прецессирующий гироскоп участвует одновременно в двух вращениях, совершающихся со скоростью ω и $\omega_{\text{пр}}$. Поэтому его момент импульса определяется выражением, более сложным, чем $L = I\omega$. Только при соблюдении условия (35.2) можно полагать, что $L = I\omega$, что мы и делали при выводе формулы (35.1).

Из формулы (35.1) следует, что условие (35.2) эквивалентно условию

$$\frac{mgb}{I\omega} \ll \omega, \text{ т. е. } mgb \ll I\omega^2.$$

Выражение mgb по порядку величины равно потенциальной энергии гироскопа E_p . Выражение $I\omega^2$ по порядку величины равно кинетической энергии гироскопа E_k . Поэтому условие справедливости формулы (35.1) можно представить в виде

$$E_p \ll E_k. \quad (35.3)$$

В случае, когда $\omega_{\text{пр}}$ можно пренебречь по сравнению с ω , полная механическая энергия гироскопа определяется выражением

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 + mgb \cos \beta$$

(за нуль мы приняли значение потенциальной энергии при $\beta = \pi/2$). В отсутствие трения полная энергия

сохраняется, ω также не уменьшается. Отсюда следует, что $\beta = \text{const}$. К этому результату мы уже пришли ранее.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чему равно ускорение центра масс тела, имеющего массу m и находящегося под действием сил F_1 и F_2 ?
2. От каких величин зависит угловое ускорение тела?
3. Могут ли момент импульса и угловая скорость вращающегося тела быть неколлинеарными?
4. В каком случае кинетическая энергия вращающегося тела определяется формулой $I\omega^2/2$?
5. Что происходит с угловой скоростью прецессии гироскопа при уменьшении скорости вращения гироскопа вокруг его оси?

Примеры решения задач

1. Две материальные точки с массами m_1 и m_2 соединены жестким невесомым стержнем длины l . Найти момент инерции I этой системы относительно перпендикулярной к стержню оси, проходящей через центр масс.

Решение. В рассматриваемом случае радиус-вектор r центра масс определяется выражением $r = (m_1 r_1 + m_2 r_2) / (m_1 + m_2)$, где r_1 и r_2 — радиус-векторы материальных точек. Если поместить начало координат в центр масс, то r будет равен нулю и выполняется соотношение $m_1 r_1 = -m_2 r_2$. В этом случае модули векторов r_1 и r_2 равны расстояниям r_1 и r_2 материальных точек от рассматриваемой в задаче оси, причем $r_1 + r_2 = l$. Из соотношений $m_1 r_1 = m_2 r_2$ и $r_1 + r_2 = l$ получается, что

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l.$$

По определению момента инерции

$$\begin{aligned} I &= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \\ &= m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} l \right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 = \mu l^2, \end{aligned}$$

где μ — приведенная масса материальных точек.

2. Тонкий стержень длины $l = 1,00$ м и массы $m = 0,600$ кг может вращаться без трения вокруг перпендикулярной к нему горизонтальной оси, отстоящей от центра стержня на расстояние $b = 0,100$ м. Стержень приводят в горизонталь-

ное положение и отпускают без толчка с нулевой начальной скоростью. Определить: а) угловое ускорение стержня β и силу давления F_0 на ось в начальный момент времени, б) угловую скорость ω и силу давления F на ось в момент прохождения стержнем положения равновесия.

Решение. а) На стержень действуют две силы: сила тяжести mg , приложенная к центру стержня и направленная вниз, и сила реакции оси, направленная вверх. Модуль суммарного момента этих сил относительно оси вращения $M = mgb$ (плечо силы реакции равно нулю, а плечо силы mg в начальный момент равно b). По теореме Штейнера момент инерции стержня относительно оси вращения $I = I_c + mb^2 = ml^2/12 + mb^2$ (первое слагаемое представляет собой момент инерции стержня относительно перпендикулярной к нему оси, проходящей через его центр). Разделив момент силы на момент инерции, получим угловое ускорение стержня в начальный момент времени:

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{mgb}{ml^2/12 + mb^2} = \frac{12gb}{l^2 + 12b^2} = \frac{12 \cdot 9,81 \cdot 0,100}{1,00^2 + 12 \cdot 0,100^2} = 11 \text{ рад/с}^2.$$

Модуль линейного ускорения центра масс стержня $a = \beta b$. Он равен модулю результирующей приложенных к стержню сил (т. е. $mg - F_0$), деленному на массу стержня:

$$\beta b = (mg - F_0)/m,$$

откуда

$$F_0 = m(g - \beta b) = m \left(g - \frac{12gb^2}{l^2 + 12b^2} \right) = \frac{l^2}{l^2 + 12b^2} mg = 0,89mg = 5,3 \text{ Н}.$$

б) В момент прохождения стержнем положения равновесия кинетическая энергия $E_k = I\omega^2/2$ равна убыли потенциальной энергии mgb (центр тяжести сместился вниз на расстояние b). Таким образом, $I\omega^2/2 = mgb$. Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgb}{I}} = \sqrt{\frac{2mgb}{ml^2/12 + mb^2}} = \sqrt{\frac{24gb}{l^2 + 12b^2}} = 4,6 \text{ рад/с}.$$

Линейная скорость центра стержня $v = b\omega$, радиус окружности, по которой движется центр, равен b . Следовательно, нормальное ускорение центра стержня в нижнем положении равно $a_n = v^2/b = b^2\omega^2/b = b\omega^2$. Согласно второму закону Ньютона это ускорение должно быть равно модулю результирующей приложенных к стержню сил (mg и силы F , с которой ось

действует на стержень), деленному на массу стержня:

$$b\omega^2 = (F - mg)/m.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} F = m(g + b\omega^2) &= m\left(g + \frac{24gb^2}{l^2 + 12b^2}\right) = \\ &= \frac{l^2 + 36b^2}{l^2 + 12b^2} mg = 1,21mg = 7,1 \text{ Н.} \end{aligned}$$

3. Горизонтально расположенный деревянный стержень массы $m = 0,800$ кг и длины $l = 1,80$ м может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. В конец стержня попадает и застревает в нем пуля массы $m' = 3,00$ г, летящая перпендикулярно к оси и к стержню со скоростью $v = 50,0$ м/с. Определить угловую скорость ω , с которой начинает вращаться стержень.

Решение. Пуля застревает в стержне, т. е. претерпевает с ним неупругий удар. Поэтому механическая энергия системы «пуля — стержень» не сохраняется. Воспользуемся законом сохранения момента импульса. До удара моментом импульса относительно оси вращения обладает только пуля. Этот момент равен $m'vl/2$. После застревания пули момент импульса системы равен $[I + m'(l/2)^2]\omega$, где $I = ml^2/12$ — момент инерции стержня. Следовательно,

$$m'v \frac{l}{2} = \left[m \frac{l^2}{12} + m' \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] \omega.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{6m'v}{(m + 3m')l} = 0,62 \text{ рад/с.}$$

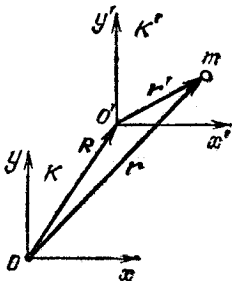
Глава 5. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

§ 36. Силы инерции

Законы Ньютона справедливы только в инерциальных системах отсчета. Несоблюдение законов в неинерциальных системах можно обнаружить на примере тела, покоящегося в некоторой инерциальной системе. В этом случае тело не испытывает действия сил: $F = 0$. Однако в неинерциальной системе, движущейся по отношению к инерциальным системам с ускорением, тело будет иметь ускорение a , отличное от нуля. Поскольку $F = 0$, равенство $F = ma$ не соблюдается.

На рис. 36.1 изображены две системы отсчета, из которых система K является инерциальной, а система K' движется относительно K с некоторым уско-

Рис. 36.1. Движение частицы m в системах отсчета K и K' . Вектор R определяет положение начала координат системы K' относительно системы K (r — радиус-вектор частицы в системе K , r' — радиус-вектор частицы в системе K'). Оси z и z' не показаны



рением и, следовательно, неинерциальна. Показанные на рисунке радиус-векторы связаны соотношением

$$r = R + r'.$$

Двукратное дифференцирование этого соотношения по времени приводит к равенству

$$\ddot{r} = \ddot{R} + \ddot{r}'. \quad (36.1)$$

Смысл производных \ddot{r} и \ddot{R} очевиден: первая дает ускорение частицы a в системе K , вторая — ускорение w начала O' системы K' относительно системы K .

С производной \ddot{r}' дело обстоит сложнее: если система K' в дополнение к поступательному движению еще и вращается со скоростью ω , то эта производная, кроме ускорения a' частицы в системе K' , содержит слагаемые, в которые входят множителями либо ω , либо $\dot{\omega}$ (соответствующий расчет ввиду его сложности мы не приводим). Это обусловлено тем, что \ddot{r}' в (36.1) представляет собой производную, вычисленную наблюдателем, находящимся в системе K , в то время как a' есть вторая производная r' , вычисленная наблюдателем, который вращается вместе с системой K' . Вектор r' ведет себя в обеих системах по-разному.

В случае, когда система K' движется относительно K поступательно (т. е. $\omega = 0$), $\ddot{r}' = a'$ и соотношение (36.1) можно представить в виде

$$a = w + a'. \quad (36.2)$$

Напомним, что здесь a — ускорение частицы в системе K , a' — ускорение частицы в системе K' , w — ускорение системы K' по отношению к системе K .

Умножим равенство (36.2) на массу частицы m и примем во внимание, что согласно второму закону Ньютона произведение ma дает силу F , с которой действуют на частицу другие тела. В результате получим уравнение

$$ma' = F - mw. \quad (36.3)$$

Таким образом, относительно системы K' частица ведет себя так, как если бы, кроме «реальной» силы F , на нее действовала дополнительная «фиктивная» сила $F_{in} = -mw$. Эта сила называется силой инерции. Фиктивность силы инерции надо понимать в том смысле, что не существует тел, воздействием которых была бы обусловлена эта сила. У нее нет «партнера», предписываемого третьим законом Ньютона. Сила инерции обусловлена свойствами (неинерциальностью) той системы отсчета, в которой рассматриваются механические явления.

Используя обозначение силы инерции, напомним уравнение (36.3) следующим образом:

$$ma' = F + F_{in}. \quad (36.4)$$

Это уравнение, справедливое в неинерциальной системе отсчета, по форме аналогично уравнению второго закона Ньютона. Следовательно, введение сил инерции позволяет описывать движение тел в любых (как инерциальных, так и неинерциальных) системах отсчета с помощью одних и тех же уравнений движения. В этом заключается смысл введения сил инерции.

Поясним сказанное следующим примером. Пусть в вагоне поезда, набирающего скорость и поэтому движущегося с постоянным ускорением w , висит на нити шарик, неподвижный относительно вагона (рис. 36.2). Относительно Земли (которую мы считаем инерциальной системой отсчета) шарик имеет так же, как и вагон, ускорение w . Это ускорение сообщается шарiku силой $F = mw$, равной сумме силы натяжения нити T и силы тяжести mg . Отсутствие ускорения шарика относительно вагона можно фор-

мально объяснить тем, что сила F уравнивается силой инерции, равной $-m\omega$.

Каждый, кто пользуется городским транспортом, испытывал на себе действие сил инерции. Так, при резком торможении автобуса или трамвая пассажиры

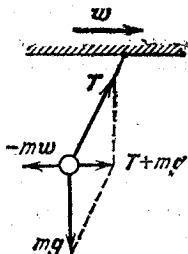


Рис. 36.2. Шарик неподвижен относительно вагона (т. е. относительно системы отсчета, движущейся с ускорением ω), потому что силы T и mg уравниваются силой $F_{in} = -m\omega$

испытывают силу, толкающую их вперед; стоящие вблизи стекла, ограждающего кабину водителя, могут при этом под действием «фиктивной» силы инерции набить себе вполне реальную шишку.

Введение сил инерции не является совершенно необходимым. Любое движение можно рассмотреть по отношению к инерциальной (например, гелиоцентрической) системе отсчета. Однако на практике часто представляет интерес именно движение тел по отношению к неинерциальным системам отсчета (например, по отношению к Земле). Использование сил инерции позволяет решить соответствующую задачу непосредственно в такой системе отсчета, что часто бывает намного проще, чем решение в инерциальной системе.

Характерной особенностью сил инерции является их пропорциональность массе тела. В этом отношении силы инерции сходны с гравитационными силами. Представим себе, что мы находимся в удаленной от всех внешних тел закрытой кабине, которая движется относительно инерциальных систем с постоянным

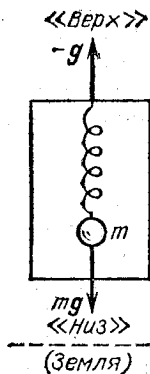


Рис. 36.3. В кабине, движущейся вверх с ускорением $-g$, пружина растянется так, как если бы под кабиной была Земля

ускорением $-g$ в направлении, которое мы назовем «верхом» (рис. 36.3). Тогда всякое тело внутри кабины будет вести себя так, как если бы на него действовала сила инерции $F_{in} = mg$. В частности, пружина, к концу которой подвешено тело массы m , растянется так, чтобы упругая сила уравновесила силу инерции. Однако такие же явления наблюдались бы и в том случае, если бы кабина была неподвижной, а под ней находилась Земля. Не имея возможности «выглянуть» из кабины, никакими опытами, проводимыми внутри кабины, мы не могли бы определить, чем обусловлена сила mg — ускоренным движением кабины или действием гравитационного поля Земли. На этом основании говорят об эквивалентности сил инерции и сил тяготения. Эта эквивалентность была положена Эйнштейном¹⁾ в основу общей теории относительности.

§ 37. Центробежная сила инерции

Теперь рассмотрим поведение тел в неинерциальной системе отсчета K' , вращающейся относительно

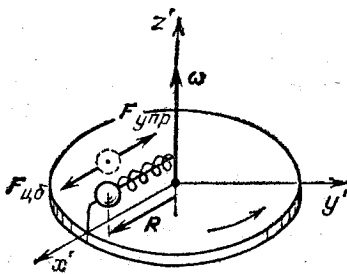


Рис. 37.1. Шарик может перемещаться только вдоль радиуса диска, скользя без трения по тонкому стержню

инерциальной системы K с постоянной угловой скоростью ω (поступательная составляющая движения отсутствует). Примером может служить система, связанная с вращающимся диском электропроигрывателя. Укрепим на диске радиальную направляющую, на которую наденем шарик, «привязанный» к оси диска пружиной (рис. 37.1). Пока диск не вращается, пружина не деформирована. При раскручивании диска шарик растягивает пружину до тех пор, пока упругая сила $F_{упр}$ не станет равной произведению массы шарика m

¹⁾ Альберт Эйнштейн (1879—1955) — физик-теоретик, один из основателей современной физики.

на его ускорение $a_n = -\omega^2 R$ (см. формулу (28.5); R —вектор, проведенный к шарiku от центра диска, его модуль дает расстояние R шарика от оси вращения системы K'):

$$F_{\text{упр}} = -m\omega^2 R \quad (37.1)$$

(вектор R перпендикулярен к оси вращения).

Относительно системы отсчета K' , связанной с диском, шарик покоится. Это можно формально объяснить тем, что в системе K' , кроме силы $F_{\text{упр}}$, на шарик действует сила инерции

$$F_{\text{цб}} = m\omega^2 R, \quad (37.2)$$

направленная вдоль радиуса от оси вращения диска.

Определяемая выражением (37.2) сила $F_{\text{цб}}$ называется центробежной силой инерции. Она возникает во вращающихся системах отсчета и не зависит от того, покоится тело в этой системе или движется относительно нее со скоростью v' . Это следует из того, что v' не входит в формулу (37.2).

Вследствие суточного вращения Земля подобна гигантскому вращающемуся диску (точнее, шару). Поэтому, рассматривая поведение тел в системе отсчета, связанной с Землей, нужно при точных расчетах учитывать центробежную силу инерции. Эта сила максимальна на экваторе, где $R = 6,38 \cdot 10^6$ м. За сутки, т. е. за 86 400 с, Земля поворачивается на угол 2π . Следовательно, угловая скорость Земли

$$\omega_3 = 2\pi : 86400 = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с.}$$

Согласно формуле (37.2) модуль центробежной силы инерции, действующей на экваторе на тело массы $m = 1$ кг, равен

$$F_{\text{цб}} = 1,00 \cdot (7,27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,38 \cdot 10^6 = 0,0337 \text{ Н,}$$

что составляет $1/291$ часть силы тяжести mg , равной 9,81 Н. Отсюда следует, что в ряде случаев, рассматривая движение тел относительно Земли, центробежной силой инерции можно пренебречь.

Ускорение свободного падения g есть ускорение тела относительно Земли, т. е. ускорение во вращающейся системе отсчета. В этой системе кроме гравитационной силы F_g , с которой Земля притягивает тело, нужно учитывать центробежную силу инерции

$F_{цб}$, модуль которой равен $m\omega_3^2 R_3 \cos \varphi$ (рис. 37.2). Следовательно, сила тяжести mg является результирующей сил F_g и $F_{цб}$.

Направление силы mg совпадает с направлением нити, натянутой грузом, которое называется направлением отвеса или вертикальным

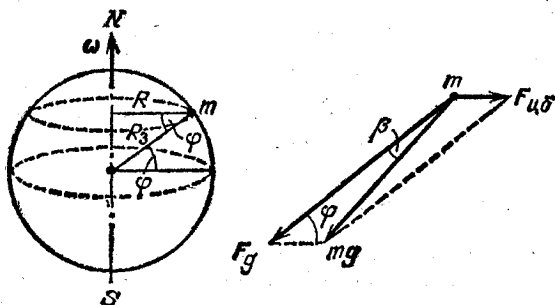


Рис. 37.2. Тело массы m , находящееся вблизи поверхности Земли на широте φ , отстоит на расстояние $R = R_3 \cos \varphi$ от оси вращения. Направление отвеса отклонено от направления к центру Земли на угол β

направлением. На рис. 37.2 видно, что направление отвеса не совпадает с направлением к центру Земли, образуя с ним угол β . Для определения этого угла воспользуемся теоремой синусов, согласно которой отношение сторон треугольника равно отношению синусов противолежащих этим сторонам углов. Углу β противолежит сторона треугольника, длина которой численно равна $F_{цб}$, углу φ — сторона, длина которой численно равно mg . Следовательно,

$$\frac{\sin \beta}{\sin \varphi} = \frac{F_{цб}}{mg} = \frac{m\omega_3^2 R_3 \cos \varphi}{mg} = \frac{\omega_3^2 R_3 \cos \varphi}{g}$$

откуда

$$\sin \beta = \frac{\omega_3^2 R_3}{2g} \sin 2\varphi$$

(мы учли, что $2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$). Подстановка значений $\omega_3 = 7,27 \cdot 10^{-5}$ рад/с, $R_3 = 6,38 \cdot 10^6$ м, $g = 9,81$ м/с² дает, что

$$\sin \beta = 0,0018 \sin 2\varphi. \quad (37.3)$$

Из (37.3) следует, что отклонение отвеса изменяется от нуля (на экваторе, где $\varphi = 0$, и на полюсах, где $\varphi = 90^\circ$) до 0,0018 рад или 6' (на широте $\varphi = 45^\circ$),

Разность $F_g - mg$ равна нулю на полюсах и достигает максимума, равного 0,3 % силы mg , на экваторе. Из-за сплюснутости Земли сила F_g сама по себе изменяется с широтой, будучи на полюсах на 0,2 % больше, чем на экваторе. В итоге ускорение свободного падения изменяется с широтой от 9,780 м/с² на экваторе до 9,832 м/с² на полюсах. Значение $g = 9,80665$ м/с² принято в качестве нормального (стандартного) значения.

§ 38. Сила Кориолиса

В предыдущем параграфе мы рассматривали тела, неподвижные относительно вращающейся системы отсчета. При движении тела кроме центробежной силы инерции возникает еще одна сила инерции, называемая силой Кориолиса¹⁾ или кориолисовой силой.

Возьмем горизонтально расположенный диск, вращающийся относительно инерциальной системы отсчета (которую мы для краткости будем называть неподвижной) с постоянной угловой скоростью ω (рис. 38.1). Допустим, что по окружности радиуса R равномерно движется привязанная нитью к оси диска материальная точка (частица) со скоростью v' относительно диска.

Линейная скорость точек окружности равна ωR . В случае, изображенном на рис. 38.1а, скорость v частицы относительно неподвижной системы имеет модуль, равный $v' + \omega R$. Поэтому ускорение частицы в неподвижной системе

$$a_n = \frac{v^2}{R} n = \frac{(v' + \omega R)^2}{R} n = \frac{v'^2}{R} n + \omega^2 R n + 2v'\omega n. \quad (38.1)$$

Слагаемое $(v'^2/R)n$ представляет собой ускорение a'_n частицы относительно диска (т. е. во вращающейся системе отсчета). Произведение массы частицы m на a_n дает силу натяжения нити F . Следовательно,

¹⁾ Гюстав Гаспар Кориолис (1792—1843) — французский ученый в области механики.

можно написать, что

$$F = ma'_n + m\omega^2 Rn + 2mv'\omega n.$$

Отсюда

$$ma'_n = F - m\omega^2 Rn - 2mv'\omega n. \quad (38.2)$$

Наблюдатель, «живущий» на диске, должен заключить, что кроме «реальной» силы F на частицу действуют две дополнительные силы, направленные от

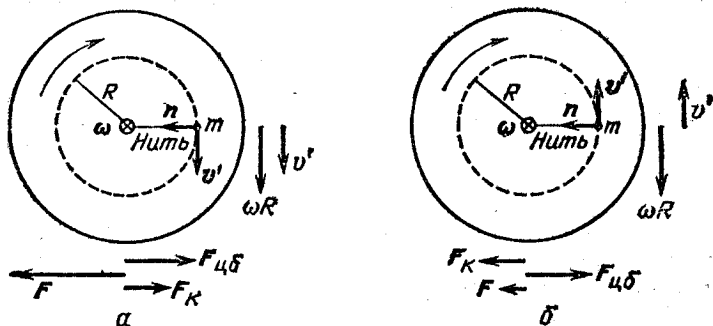


Рис. 38.1. Частица массы m движется на вращающемся диске по окружности радиуса R со скоростью v' относительно диска (F — сила натяжения нити, n — нормаль, направленная вдоль нити). Направление v' и направление вращения диска: a — совпадают, b — противоположны. Справа от дисков показаны направления скоростей, под диском — направления сил

оси вращения. Первая из них, равная $-m\omega^2 Rn$, есть уже знакомая нам центробежная сила инерции $F_{цб}$ (см. формулу (37.2); $-Rn = R$ — вектору, проведенному от оси вращения к частице). Вторая, равная $\leftarrow 2mv'\omega n$, может быть представлена в виде

$$F_K = 2m[v'\omega]. \quad (38.3)$$

Действительно, модуль векторного произведения $[v'\omega]$ равен $v'\omega$ (угол между векторами v' и ω прямой), а направление его противоположно направлению n . Сила инерции, определяемая формулой (38.3), и есть сила Кориолиса.

В случае, изображенном на рис. 38.1б, модуль скорости v равен $v' - \omega R$, если $v' > \omega R$, либо $\omega R - v'$, если $\omega R > v'$. Квадрат обоих выражений одинаков и равен $v'^2 + \omega^2 R^2 - 2v'\omega R$. Соответственно в формулах (38.1) и (38.2) слагаемое, содержащее произведение

$v'\omega$, изменит знак на обратный, так что вторая дополнительная сила будет равна $2mv'\omega n$. Легко убедиться в том, что и в этом случае вторая дополнительная сила может быть представлена формулой (38.3).

Мы получили формулу (38.3) для случая, когда скорость частицы направлена по касательной к окружности с центром на оси вращения системы K' . Можно показать, что эта формула определяет силу Кориолиса при любом направлении скорости v' по отношению к оси вращения. Из формулы следует, что в случае, когда частица движется в неинерциальной системе параллельно оси вращения (v' коллинеарна с ω), сила Кориолиса не возникает.

Векторное произведение перпендикулярно к обоим сомножителям. Поэтому из формулы (38.3) вытекает, что:

1) сила Кориолиса перпендикулярна к вектору ω , т. е. всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения системы отсчета;

2) сила Кориолиса перпендикулярна к скорости v' и, следовательно, работы над частицей не совершает. Эта сила может изменить только направление скорости v' , но не ее модуль.

Запоминанию формулы (38.3) могут способствовать следующие соображения. Сила Кориолиса возникает при движении частицы относительно вращающейся системы отсчета, т. е. при условии, что «имеются в наличии» масса частицы m , скорость частицы v' и угловая скорость системы ω . Очевидно, что сила Кориолиса определяется именно этими тремя величинами и никакими иными. Простейший способ получить из скаляра m и двух векторов v' и ω новый вектор состоит в том, чтобы перемножить v' и ω векторно, а затем умножить результат на m . В результате получим выражение $m[v'\omega]$, которое с точностью до двойки совпадает с (38.3). Запомнить последовательность сомножителей в произведении $[v'\omega]$ может помочь то обстоятельство, что величины m и v' , характеризующие частицу, стоят рядом в начале формулы, в то время как величина, характеризующая систему отсчета (т. е. ω), стоит особняком в конце формулы.

На рис. 38.2 показано воздействие, которое оказывает сила Кориолиса на движение тел вблизи земной поверхности. При свободном падении сила Кориолиса

отклоняет тела к востоку. Это отклонение пропорционально синусу широты местности и, следовательно, максимально на экваторе и равно нулю на полюсах. При падении на экваторе с высоты 30 м (такова примерно высота десятиэтажного дома) отклонение составляет 3,6 мм.

Силу Кориолиса необходимо учитывать при стрельбе на дальние расстояния и вводить соответствующую поправку. При выстреле из орудия, направленного на север, снаряд будет отклоняться к востоку в северном

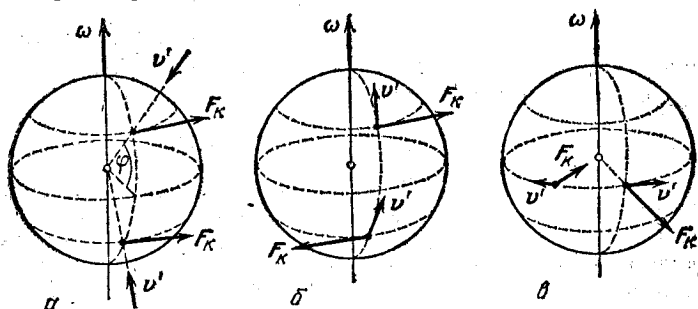


Рис. 38.2. Влияние силы Кориолиса на движение тел вблизи земной поверхности: *a* — свободно падающее тело отклоняется к востоку; *б* — тело, движущееся вдоль меридиана на север, отклоняется к востоку в северном полушарии и к западу в южном полушарии; тело, движущееся на юг, будет отклоняться в противоположную сторону; *в* — тело, движущееся вдоль экватора на восток, поднимается кверху; тело, движущееся на запад, прижимается к Земле

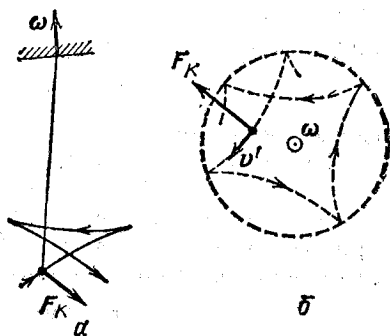
полушарии и к западу — в южном (рис. 38.2*б*). При выстреле вдоль меридиана на юг направления отклонения будут противоположными. При стрельбе вдоль экватора сила Кориолиса приподнимает снаряд кверху, если выстрел произведен в направлении на восток, и прижимает снаряд к Земле, если выстрел произведен в западном направлении (рис. 38.2*в*).

На рис. 38.2*б* видно, что сила Кориолиса, действующая на тело, движущееся вдоль меридиана в любом направлении (на север или на юг), направлена по отношению к направлению движения вправо в северном полушарии и влево в южном полушарии. Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег в северном полушарии и левый берег в южном полушарии. Действием силы Кориолиса объясняется

также неодинаковый износ рельсов при двухколейном движении — в северном полушарии сильнее изнашивается правый рельс, в южном полушарии — левый.

Убедительным доказательством суточного вращения Земли является вызываемый действием силы Кориолиса поворот плоскости колебаний маятника. Соответствующий опыт был впервые осуществлен Фуко¹⁾ в 1851 г. в Париже с маятником длины 67 м. Поэтому

Рис. 38.3. Качания маятника, находящегося на Северном полюсе: *a* — общий вид; *b* — траектория груза маятника (вид сверху). Стрелка указывает направление поворота плоскости качаний маятника относительно Земли; вектор ω — угловая скорость Земли, v — скорость груза маятника относительно Земли



маятники, предназначенные для демонстрации вращения Земли, называются маятниками Фуко. Такой маятник длины 98 м имеется в Ленинграде в Исаакиевском соборе.

На рис. 38.3 показан маятник, находящийся на Северном полюсе. Сила Кориолиса все время направлена вправо по ходу маятника (на южном полюсе она направлена влево). Плоскость качаний маятника поворачивается относительно Земли по часовой стрелке, совершая за сутки один оборот. Относительно гелиоцентрической системы отсчета плоскость качаний неподвижна, а Земля поворачивается против часовой стрелки, делая за сутки один оборот. Можно показать, что на широте φ плоскость качаний маятника поворачивается за сутки на угол $2\pi \sin \varphi$. На экваторе сила Кориолиса направлена вдоль подвеса маятника и не может вызвать поворота плоскости качаний.

¹⁾ Жан Бернар Леон Фуко (1819—1868) — французский физик.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как изменится модуль центробежной силы инерции, если скорость вращения системы отсчета увеличить в n раз?
2. Может ли сила Кориолиса изменить скорость частицы?
3. Чему равна сила Кориолиса в случае, когда скорость частицы параллельна оси вращения системы отсчета?

Примеры решения задач

1. Небольшое тело падает без начальной скорости на Землю на экваторе с высоты $h = 10,0$ м. В какую сторону и на какое расстояние x отклонится тело от вертикали за время падения τ ? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. В системе отсчета, связанной с Землей, на тело во время падения действует сила Кориолиса $F_K = 2m[v\omega]$, где m — масса тела, v — скорость тела относительно Земли, ω — угловая скорость суточного вращения Земли. Эта сила направлена на восток и сообщает телу ускорение, модуль которого $a_K = 2v\omega = 2\omega gt$ (векторы v и ω взаимно перпендикулярны, $v = gt$). Поэтому за время t возникает направленная на восток горизонтальная составляющая скорости

$$v_x = \int_0^t a_K dt = \int_0^t 2\omega gt dt = \omega gt^2.$$

В результате за время τ тело сместится к востоку по горизонтали на расстояние

$$x = \int_0^{\tau} v_x dt = \int_0^{\tau} \omega gt^2 dt = \frac{1}{3} \omega g \tau^3.$$

Время падения τ связано с высотой h соотношением $h = g\tau^2/2$, откуда $\tau = \sqrt{2h/g}$. Следовательно,

$$x = \frac{1}{3} \omega g \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} = \frac{2}{3} h \omega \left(\frac{2h}{g} \right)^{1/2} = 0,69 \text{ мм}$$

($\omega = 2\pi/86400$ рад/с).

2. Горизонтально расположенный стержень вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец, с угловой скоростью $\omega = 1,00$ рад/с. Расстояние от оси до другого конца стержня $l = 1,00$ м. На стержень надета небольшая муфта, закрепленная с помощью нити на расстоянии $l_0 = 0,100$ м от оси вращения. В момент $t = 0$ нить пережигают и муфта начинает

скользить без трения по стержню. Найти время τ , спустя которое муфта слетит со стержня.

Решение. Рассмотрим движение муфты после пережигания нити в системе отсчета, связанной со стержнем. В этой системе ускорение муфты определяется центробежной силой инерции (сила Кориолиса направлена перпендикулярно к стержню и вызывает лишь прижатие к нему муфты). Обозначим расстояние от оси вращения до муфты буквой x . Тогда модуль центробежной силы инерции $F_{цб} = m\omega^2 x$. Эта сила сообщает муфте радиальное ускорение $a = \omega^2 x$. Представим его в виде

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

(ср. с задачей 2 к гл. 2. В данном случае $dx/dt > 0$). Подставив вместо a выражение $\omega^2 x$, придем к соотношению $\omega^2 x dx = v dv$. Интегрирование левой части в пределах от l_0 до x , а правой — от 0 до v дает $\omega^2 (x^2 - l_0^2) = v^2$. Отсюда $v = \omega \sqrt{x^2 - l_0^2}$. Тело, движущееся со скоростью v , проходит путь dx за время $dt = dx/v$. Следовательно, время τ движения муфты по стержню определяется формулой

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{l_0}^l \frac{dx}{v} = \int_{l_0}^l \frac{dx}{\omega \sqrt{x^2 - l_0^2}} = \\ &= \frac{1}{\omega} \ln \left(x + \sqrt{x^2 - l_0^2} \right) \Big|_{l_0}^l = \frac{1}{\omega} \ln \left[\frac{l}{l_0} + \sqrt{\left(\frac{l}{l_0} \right)^2 - 1} \right] = 3,0 \text{ с.} \end{aligned}$$

Глава 6. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ

§ 39. Описание движения жидкостей

При изучении движения жидкостей их рассматривают как сплошную непрерывную среду, не вдаваясь в молекулярное строение жидкостей. Возможны два способа описания движения жидкости. Первый способ заключается в указании положений и скоростей всех частиц жидкости для каждого момента времени. Однако проще следить не за частицами жидкости, а за отдельными точками пространства и отмечать скорость, с которой проходят через каждую точку отдельные частицы жидкости. При таком способе движение жидкости характеризуется совокупностью функций $v(t)$, определенных для всех точек пространства.

Совокупность векторов $\mathbf{v}(t)$, заданных для всех точек пространства, называется полем вектора скорости. Это поле можно наглядно изобразить с помощью линий тока (рис. 39.1). Линию тока

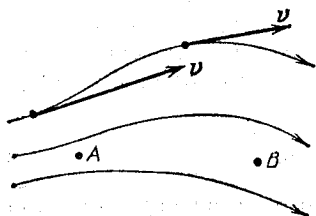


Рис. 39.1. Линии тока проводятся так, чтобы вектор \mathbf{v} в каждой точке пространства был направлен по касательной к соответствующей линии

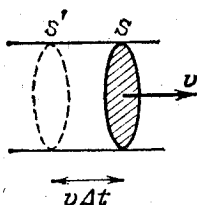


Рис. 39.2. За время Δt через поверхность S пройдут все частицы жидкости, заключенные в объеме между S и S'

можно провести через любую точку пространства. Если построить все мыслимые линии тока, они просто сольются друг с другом. Поэтому для наглядного представления течения жидкости строят лишь часть линий, выбирая их так, чтобы густота линий тока была численно равна модулю скорости в данном месте. Тогда по картине линий тока можно судить не только о направлении, но и о модуле вектора \mathbf{v} в разных точках пространства. Например, в точке A на рис. 39.1 густота линий, а следовательно и модуль v , больше, чем в точке B . Поскольку разные частицы жидкости могут проходить через данную точку пространства с разными скоростями (т. е. $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$), картина линий тока, вообще говоря, все время изменяется. Если скорость в каждой точке пространства остается постоянной ($v = \text{const}$), то течение жидкости называется стационарным (установившимся). При стационарном течении любая частица жидкости проходит через данную точку пространства с одной и той же скоростью v . Картина линий тока при стационарном течении остается неизменной, и линии тока в этом случае совпадают с траекториями частиц.

Если через все точки небольшого замкнутого контура провести линии тока, образуется поверхность, которую называют трубкой тока. Вектор \mathbf{v} каса-

гелен к поверхности трубки тока в каждой ее точке. Следовательно, частицы жидкости при своем движении не пересекают стенок трубки тока.

Возьмем трубку тока, достаточно тонкую для того, чтобы во всех точках ее поперечного сечения S скорость частиц v была одна и та же (рис. 39.2). При стационарном течении трубка тока подобна стенкам жесткой трубы. Поэтому через сечение S пройдет за время Δt объем жидкости, равный $Sv\Delta t$, а в единицу времени объем

$$V = Sv. \quad (39.1)$$

Жидкость, плотность которой всюду одинакова и изменяться не может, называется несжимаемой. На рис. 39.3 изображены два сечения очень тонкой

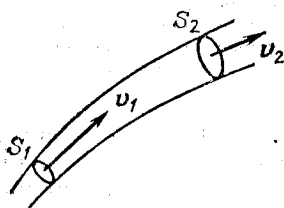


Рис. 39.3. Для несжимаемой жидкости при стационарном течении $S_1v_1 = S_2v_2$

трубки тока — S_1 и S_2 . Если жидкость несжимаема, то количество

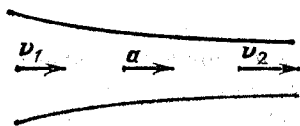


Рис. 39.4. При движении в сужающейся трубке тока скорость частиц возрастает — частицы движутся ускоренно

ее между этими сечениями остается неизменным. Отсюда следует, что объемы жидкости, протекающие в единицу времени через сечения S_1 и S_2 , должны быть одинаковыми:

$$S_1v_1 = S_2v_2 \quad (39.2)$$

(напомним, что через боковую поверхность трубки тока частицы жидкости не проникают).

Равенство (39.2) справедливо для любой пары произвольно взятых сечений. Следовательно, для несжимаемой жидкости при стационарном течении произведение Sv в любом сечении данной трубки тока имеет одинаковое значение:

$$Sv = \text{const.} \quad (39.3)$$

Это утверждение носит название теоремы о неразрывности струи.

Мы получили формулу (39.3) для несжимаемой жидкости. Однако она применима к реальным жидкостям и даже к газам в том случае, когда их сжимаемостью можно пренебречь. Расчеты показывают, что при движении газов со скоростями, много меньшими скорости звука в этой среде, их можно с достаточной точностью считать несжимаемыми.

Из соотношения (39.3) вытекает, что при изменяющемся сечении трубки тока частицы несжимаемой жидкости движутся с ускорением (рис. 39.4). Если трубка тока горизонтальна, это ускорение может быть обусловлено только непостоянством давления вдоль трубки — в местах, где скорость больше, давление должно быть меньше, и наоборот. Аналитическую связь между скоростью течения и давлением мы установим в следующем параграфе.

§ 40. Уравнение Бернулли

В реальных жидкостях при перемещении слоев жидкости друг относительно друга возникают силы внутреннего трения, тормозящие относительное смещение слоев. Воображаемая жидкость, у которой внутреннее трение полностью отсутствует, называется идеальной. Течение идеальной жидкости не сопровождается диссипацией энергии (см. предпоследний абзац § 24).

Рассмотрим стационарное течение несжимаемой идеальной жидкости. Выделим объем жидкости, ограниченный стенками узкой трубки тока и перпендикулярными к линиям тока сечениями S_1 и S_2 (рис. 40.1). За время Δt этот объем сместится вдоль трубки тока, причем граница объема S_1 получит перемещение Δl_1 , а граница S_2 — перемещение Δl_2 . Работа, совершаемая при этом силами давления, равна приращению полной энергии ($E_k + E_p$), заключенной в рассматриваемом объеме жидкости.

Силы давления на стенки трубки тока перпендикулярны в каждой точке к направлению перемещения жидкости, вследствие чего работы не совершают. Отлична от нуля лишь работа сил давления, приложен-

ных к сечениям S_1 и S_2 . Эта работа равна

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2) \Delta V \quad (40.1)$$

(см. рис. 40.1).

Полная энергия рассматриваемого объема жидкости складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии в поле сил земного тяготения. Вследствие стационарности течения полная энергия той части жидкости, которая ограничена сечениями 1' и 2' (внутренняя незаштрихованная часть трубки тока на рис. 40.1), за время Δt не изменяется. Поэтому приращение полной энергии равно разности значений полной энергии заштрихованных объемов ΔV_2 и ΔV_1 , масса которых $\Delta m = \rho \Delta V$ (ρ — плотность жидкости).

Возьмем сечение S трубки тока и перемещения Δl настолько малыми, чтобы всем точкам каждого из заштрихованных объемов можно было приписать одно и то же значение скорости v , давления p и высоты h . Тогда для приращения полной энергии получается выражение

$$\Delta E = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right). \quad (40.2)$$

Приравняв выражения (40.1) и (40.2), сократив на ΔV и перенеся члены с одинаковыми индексами в одну часть равенства, придем к уравнению

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (40.3)$$

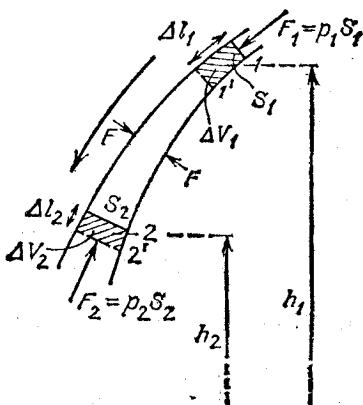


Рис. 40.1. За время Δt жидкость, заключенная между сечениями 1 и 2, перемещается вдоль трубки тока в положение, определяемое сечениями 1' и 2'. Вследствие нежимаемости жидкости произведение площади сечения S на его перемещение Δl для обеих границ рассматриваемого объема одно и то же: $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$

Это уравнение становится вполне строгим лишь при стремлении поперечного сечения S к нулю, т. е. при стягивании трубки тока в линию. Следовательно, величины v , h и p в обеих частях равенства нужно рассматривать как относящиеся к двум произвольным точкам одной и той же линии тока.

При выводе формулы (40.3) сечения S_1 и S_2 были взяты совершенно произвольно. Поэтому можно утверждать, что в стационарно текущей несжимаемой и идеальной жидкости вдоль любой линии тока выполняется условие

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const.} \quad (40.4)$$

Уравнение (40.3) или равнозначное ему уравнение (40.4) называется уравнением Бернулли¹⁾. Хотя это уравнение было получено для идеальной жидкости, оно хорошо выполняется для реальных жидкостей, у которых внутреннее трение невелико.

Для горизонтальной линии тока уравнение (40.3) имеет вид

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2.$$

Отсюда следует, что давление меньше в тех точках, где скорость больше (см. конец § 39).

Чтобы измерить давление в текущей жидкости, нужно ввести в нее трубку, соединенную с манометром.

Рис. 40.2. Трубка Пито. Давление p в точке 1 равно давлению в невозмущенном потоке. Давление p' в точке 2 превышает p на величину, равную $\rho v^2/2$

Допустим, что в жидкость введена изогнутая манометрическая трубка с входным отверстием, обращенным навстречу потоку (рис. 40.2). Такая трубка называется трубкой Пито²⁾. Трубка нарушает характер движения жидкости. В частности, вдоль линии тока, упирающейся своим концом в центр отверстия трубки, скорость будет изменяться от значения v для невозмущенного потока на боль-

¹⁾ Даниил Бернулли (1700—1782) — швейцарский ученый.

²⁾ Анри Пито (1695—1771) — французский геометр и инженер.

шом расстоянии от трубки до нуля непосредственно перед отверстием.

Напишем уравнение (40.3) для точек 1 и 2 упирающейся в отверстие линии тока (см. рис. 40.2), приняв во внимание, что $h_1 = h_2$ и $v_2 = 0$,

$$p_1 + \frac{\rho v^2}{2} = p_2.$$

Здесь p_1 равно давлению p в невозмущенном потоке, p_2 равно давлению $p_{\text{полн}}$, измеряемому манометром. Следовательно, манометр покажет давление

$$p_{\text{полн}} = p + \frac{\rho v^2}{2}. \quad (40.5)$$

Давление p в невозмущенном потоке называют статическим. Давле-

К манометру

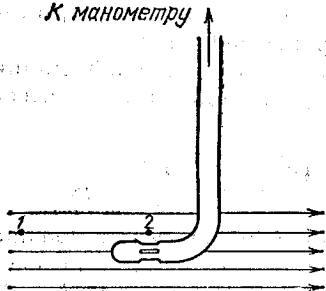


Рис. 40.3. Зонд. Давление в точке 2 практически равно давлению в точке 1, т.е. давлению в невозмущенном потоке

К дифференциальному манометру

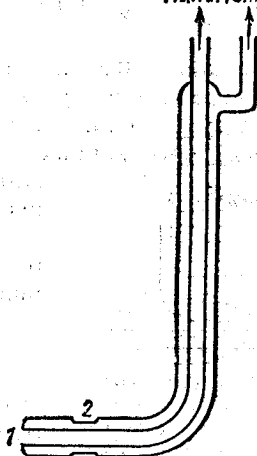


Рис. 40.4. Трубка Пито — Прандтля измеряет разность давлений в точках 1 и 2, т.е. динамическое давление

ние $p_{\text{полн}}$ называют полным. Слагаемое $\rho v^2/2$ называют динамическим давлением. Трубка Пито измеряет полное давление.

Теперь введем в поток изогнутую трубку с закрытым концом и боковыми отверстиями (рис. 40.3). Такая трубка называется зондом. Скорость жидкости вблизи отверстий (а следовательно, и давление) будет мало отличаться от скорости (и давления) в невозмущенном потоке. Поэтому манометр, присоединенный к зонду, покажет статическое давление p .

Прандтль¹⁾ усовершенствовал трубку Пито, соединив ее с зондом (рис. 40.4) и присоединив к дифференциальному манометру (т. е. манометру, измеряющему разность давлений). Показания манометра непосредственно дают разность полного и статического давлений, т. е. динамическое давление $\rho v^2/2$. Для заданной плотности жидкости манометр можно проградуировать в значениях скорости. Таким образом, трубка Пито — Прандтля может служить прибором для измерения скорости течения жидкости (или газа).

§ 41. Истечение жидкости из отверстия

Рассмотрим истечение идеальной несжимаемой жидкости из небольшого отверстия в широком открытом сосуде (рис. 41.1). Выделим мысленно в жидкости

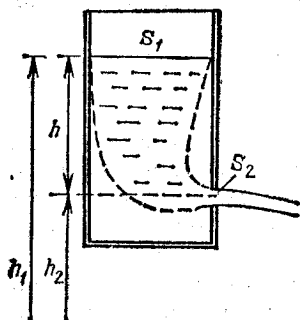


Рис. 41.1. Источник жидкости из отверстия. Штриховыми линиями внутри сосуда показаны стенки трубки тока

к данным сечениям можно применить теорему Бернулли. Давления p_1 и p_2 в обоих сечениях одинаковы и равны атмосферному. Скоростью v_1 перемещения открытой поверхности жидкости ввиду ее малости можно пренебречь. Поэтому уравнение (40.3) в данном случае упрощается следующим образом:

$$\rho g h_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_2,$$

¹⁾ Людвиг Прандтль (1875—1953) — немецкий ученый в области гидро- и газодинамики.

где v — скорость жидкости в сечении S_2 (скорость истечения из отверстия). Сократив на ρ , можно написать, что

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (41.1)$$

где $h = h_1 - h_2$ — высота открытой поверхности над отверстием.

Формула (41.1) называется формулой Торричелли¹⁾. Из нее следует, что скорость истечения жидкости из отверстия, находящегося на глубине h под открытой поверхностью жидкости, совпадает со скоростью, которую приобретает любое тело, падая с высоты h (в случае, если сопротивлением воздуха можно пренебречь). Этот результат получен в предположении, что жидкость идеальна. Для реальных жидкостей скорость истечения будет меньше, причем тем сильнее отличается от значения, определяемого формулой Торричелли, чем больше внутреннее трение в жидкости. Например, глицерин будет вытекать из сосуда медленнее, чем вода.

Согласно формуле (39.1) в единицу времени через отверстие площади S из сосуда вытекает объем жидкости, равный Sv . Масса вытекающей жидкости $m = \rho Sv$, где ρ — плотность жидкости. Вытекающая жидкость уносит с собой в единицу времени импульс $K = mv = \rho Svv$ (v — скорость частиц жидкости на выходе из сосуда). Этот импульс сообщается вытекающей жидкости сосудом. По третьему закону Ньютона сосуд получает от жидкости импульс, равный $-\rho Svv$. Импульс, сообщаемый в единицу времени, равен силе, действующей на тело. Следовательно, при истечении струи сосуд испытывает действие силы

$$F_r = -\rho Svv. \quad (41.2)$$

Эта сила называется реакцией вытекающей струи. Если сосуд поставить на тележку, то под действием силы F_r он придет в движение в направлении, противоположном направлению вытекания струи (рис. 41.2).

Модуль силы F_r можно найти с помощью формулы (41.1) для скорости истечения жидкости:

$$F_r = \rho Sv^2 = 2Spgh. \quad (41.3)$$

¹⁾ Эванджелиста Торричелли (1608—1647) — итальянский физик и математик.

Произведение ρgh дает гидростатическое давление на глубине h , а $S\rho gh$ — силу гидростатического давления на участок стенки сосуда площади S . Если закрыть отверстие пробкой, то на нее действовала бы именно такая сила. Из формулы (41.3) следует, что сила F_r

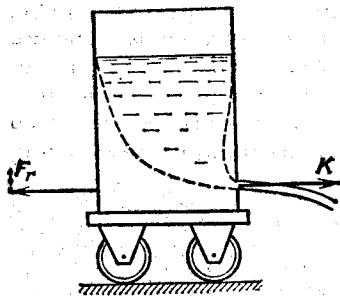


Рис. 41.2. При истечении струи на сосуд действует сила реакции $F_r = -K$, где K — импульс, уносимый струей в единицу времени

превосходит силу гидростатического давления в два раза. Это обусловлено тем, что возникающее при вытекании струи движение жидкости в сосуде приводит к перераспределению давления, причем давление на стенку, находящуюся против отверстия, оказывается большим, чем на стенку, в которой сделано отверстие.

На реакции вытекающей струи газа основано действие реактивных двигателей и ракет. Реактивное движение не нуждается в наличии атмосферы и используется для полетов в космическое пространство. Основоположителем теории межпланетных сообщений является Циолковский¹⁾. Он создал теорию полета ракеты и обосновал возможность применения реактивных аппаратов для межпланетных сообщений. В частности, Циолковским была разработана теория движения составных ракет, у которых каждая следующая ступень вступает в действие после того, как предыдущая ступень, израсходовав полностью топливо, отделяется от ракеты.

§ 42. Вязкость. Течение жидкости в трубах

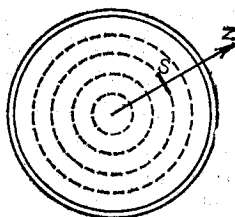
Идеальная жидкость, т. е. жидкость без внутреннего трения, является абстракцией. Всем реальным жидкостям и газам в большей или меньшей степени присуще внутреннее трение, называемое также вязкостью. Вязкость проявляется, в частности, в

¹⁾ Константин Эдуардович Циолковский (1857—1935) — советский ученый и изобретатель.

том, что возникшее в жидкости или газе движение, после прекращения действия причин, его вызвавших, постепенно прекращается. Примером может служить движение жидкости в стакане после того, как ее перестают размешивать ложечкой.

Рассмотрим течение жидкости в круглой трубе. Измерения показывают, что при медленном течении скорость частиц жидкости изменяется от нуля в непосредственной близости к стенкам трубы до максимума на оси трубы. Жидкость при этом оказывается как бы разделенной на тонкие цилиндрические слои,

Рис. 42.1. Поперечное сечение трубы, в которой течет жидкость. Штриховые окружности — условные границы между слоями, движущимися с разными скоростями; S — площадочка на границе между слоями. Направленная вдоль радиуса ось z перпендикулярна к площадке S



которые скользят друг относительно друга, не перемешиваясь (рис. 42.1). Такое течение называется ламинарным или слоистым (латинское слово *lamina* означает пластинку, полоску). Отсутствие перемешивания слоев можно наблюдать, создав в стеклянной трубке диаметра несколько сантиметров слабый поток воды и вводя на оси трубы через узкую трубочку окрашенную жидкость (например, анилин). Тогда по всей длине трубы возникнет тонкая окрашенная струйка, имеющая отчетливую границу с водой.

Из повседневного опыта известно, что для того, чтобы создать и поддерживать постоянным течение жидкости в трубе, необходимо наличие между концами трубы разности давлений. Поскольку при установившемся течении жидкость движется без ускорения, необходимость действия сил давления указывает на то, что эти силы уравниваются какими-то силами, тормозящими движение. Этими силами являются силы внутреннего трения на границе со стенкой трубы и на границах между слоями. Более быстрый слой стремится увлечь за собой более медленный слой, действуя на него с силой F_1 , направленной по течению. Одновременно более медленный слой стре-

мится замедлить движение более быстрого слоя, действуя на него с силой F_2 , направленной против течения (рис. 42.2).

Экспериментально установлено, что модуль силы внутреннего трения, приложенной к площадке S , лежащей на границе между слоями, определяется формулой

$$F = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S, \quad (42.1)$$

где η — называемый вязкостью коэффициент пропорциональности, зависящий от природы и состояния

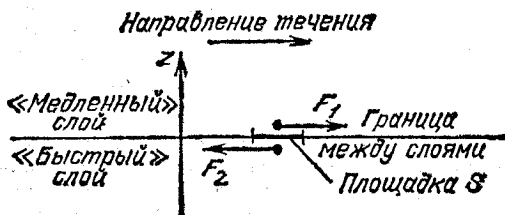


Рис. 42.2. Силы взаимодействия между граничащими друг с другом слоями при стационарном течении жидкости ($F_1 = -F_2$). Ось z перпендикулярна к границе между слоями

(например, температуры) жидкости, dv/dz — производная, показывающая, как быстро изменяется в данном месте скорость течения в направлении z , перпендикулярном к площадке S . В случае течения жидкости в трубе ось z направлена в каждой точке границы между слоями по радиусу трубы (см. рис. 42.1). Поэтому вместо dv/dz можно написать dv/dr . Знак модуля в формуле (42.1) поставлен в связи с тем, что в зависимости от выбора направления оси z и характера изменения скорости производная dv/dz может быть как положительной, так и отрицательной, в то время как модуль силы является положительной величиной.

Мы уже отмечали, что при ламинарном течении жидкости в круглой трубе скорость равна нулю у стенки трубы и максимальна на оси трубы. Найдём закон изменения скорости. Выделим воображаемый цилиндрический объем жидкости радиуса r и длины l (рис. 42.3). При стационарном течении этот объем движется без ускорения. Следовательно, сумма приложенных к нему сил равна нулю. В направлении

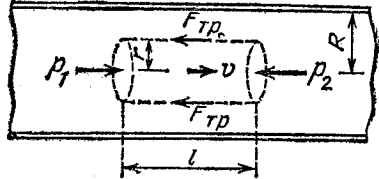
движения на жидкость действует сила давления, модуль которой равен $p_1 \pi r^2$; во встречном направлении — сила давления, модуль которой равен $p_2 \pi r^2$. Результирующая сил давления имеет модуль

$$F_{\text{давл}} = (p_1 - p_2) \pi r^2 \quad (42.2)$$

(πr^2 — площадь основания цилиндра).

На боковую поверхность действует тормозящая движению сила внутреннего трения, модуль которой согласно формуле (42.1) равен

$$F_{\text{тр}} = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| \cdot 2\pi r l = -\eta \frac{dv}{dr} \cdot 2\pi r l, \quad (42.3)$$



где $2\pi r l$ — площадь боковой поверхности цилиндра, dv/dr — значение производной на расстоянии r от оси трубы. Скорость убывает с расстоянием от оси трубы, поэтому производная dv/dr отрицательна и ее модуль равен $-dv/dr$ (модуль отрицательного числа равен этому числу, взятому с обратным знаком).

Рис. 42.3. На основания цилиндрического объема жидкости действуют перпендикулярные к ним силы давления, на боковую поверхность — касательные к ней силы внутреннего трения

Приравняв выражения (42.2) и (42.3), придем к дифференциальному уравнению

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = -\eta \frac{dv}{dr} \cdot 2\pi r l.$$

Разделив переменные, получим уравнение

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr,$$

интегрирование которого дает, что

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C. \quad (42.4)$$

Постоянную интегрирования C нужно выбрать так, чтобы на стенке трубы (т. е. при $r = R$) скорость обращалась в нуль. Это условие выполняется при

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2.$$

Подстановка этого значения в (42.4) приводит к формуле

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (42.5)$$

Скорость на оси трубы равна

$$v_0 = v(0) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (42.6)$$

С учетом этого формулу (42.5) можно написать в виде

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (42.7)$$

Отсюда следует, что при ламинарном течении скорость изменяется с расстоянием от оси трубы по параболическому закону (рис. 42.4а).

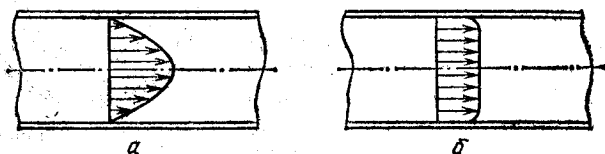


Рис. 42.4. Профиль скоростей при ламинарном (а) и турбулентном (б) течении жидкости в круглой трубе

С помощью формулы (42.7) можно вычислить поток жидкости Q , т. е. объем жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени. Разобьем сечение трубы на кольца ширины dr (рис. 42.5). Через кольцо радиуса r пройдет в единицу времени объем жидкости dQ , равный произведению площади кольца $2\pi r dr$ на скорость $v(r)$ на расстоянии r от оси трубы:

$$dQ = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot 2\pi r dr$$

(мы воспользовались формулой (42.7)). Проинтегрировав это выражение по r в пределах от нуля до R , получим поток Q :

$$Q = \int_0^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot 2\pi r dr = \frac{1}{2} \pi R^2 v_0 = \frac{1}{2} S v_0 \quad (42.8)$$

(S — площадь сечения трубы). Поток можно представить как произведение среднего по сечению зна-

чения скорости $\langle v \rangle$ на площадь S . Из формулы (42.8) следует, что при ламинарном течении среднее значение скорости равно половине значения скорости на оси трубы.

Подставив в (42.8) выражение (42.6) для v_0 , получим формулу

$$Q = \frac{(p_1 - p_2) \pi R^4}{8\eta l}, \quad (42.9)$$

которая называется формулой Пуазейля¹⁾. Из нее следует, что поток очень сильно зависит от радиуса трубы. Естественно, что Q пропорционален отношению $(p_1 - p_2)/l$, т. е. перепаду давления на единице длины трубы, а также обратно пропорционален вязкости жидкости η .

Формула Пуазейля используется для определения вязкости жидкостей и газов. Пропуская жидкость или газ через трубку известного радиуса, измеряют перепад давления и поток Q . Затем на основании полученных данных вычисляют η .

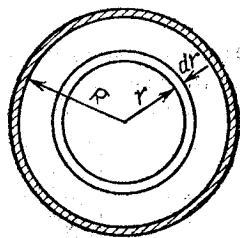


Рис. 42.5. Площадь кольца радиуса r и ширины dr равна $dS = 2\pi r dr$

Мы все время подчеркивали, что предполагаем течение медленным для того, чтобы оно имело ламинарный характер. Напомним, что ламинарное течение является стационарным. Это означает, что скорость частиц жидкости, проходящих через данную точку пространства, все время одна и та же. Если увеличивать скорость течения, то при достижении определенного значения скорости характер течения резко меняется. Течение становится нестационарным — скорость частиц в каждой точке пространства все время беспорядочно изменяется. Такое течение называется турбулентным. При турбулентном течении происходит интенсивное перемешивание жидкости. Если в турбулентный поток ввести окрашенную струйку, то уже на небольшом расстоянии от места ее введения окрашенная жидкость равномерно распределится по всему сечению потока. Это можно наблюдать в упо-

¹⁾ Жан Луи Мари Пуазейль (1799—1869) — французский врач и физик.

минавшемся выше опыте, если увеличить поток воды в стеклянной трубке.

Поскольку при турбулентном течении скорость в каждой точке все время меняется, можно говорить только о среднем по времени значении скорости, которая при неизменных условиях течения оказывается постоянной в каждой точке пространства. Профиль средних скоростей для одного из сечений трубы при турбулентном течении показан на рис. 42.5б. Сравнение с рис. 42.5а показывает, что вблизи стенки трубы скорость изменяется гораздо сильнее, чем при ламинарном течении; в остальной части сечения скорость изменяется меньше.

Рейнольдс¹⁾ установил, что характер течения определяется значением безразмерной величины

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (42.10)$$

где ρ — плотность жидкости (или газа), v — средняя по сечению трубы скорость потока, η — вязкость жидкости, l — характерный для поперечного сечения потока размер, например сторона квадрата при квадратном сечении, радиус или диаметр при круглом сечении. Величина Re называется числом Рейнольдса.

При малых значениях Re течение носит ламинарный характер. Начиная с некоторого значения Re , называемого критическим, течение приобретает турбулентный характер. Если в качестве характерного размера трубы взять ее радиус (в этом случае $Re = \rho v r / \eta$), то критическое значение числа Рейнольдса оказывается равным примерно 1000 (если в качестве l взять диаметр трубы, то критическое значение Re будет равно 2000).

Число Рейнольдса служит критерием подобия для течения жидкостей в трубах, каналах и т. д. Например, характер течения различных жидкостей (или газов) в круглых трубах разных диаметров будет одинаковым, если каждому течению соответствует одно и то же значение Re .

В число Рейнольдса входит отношение плотности ρ и вязкости η . Величина

$$v = \frac{\eta}{\rho} \quad (42.11)$$

¹⁾ Осборн Рейнольдс (1842—1912) — английский физик.

называется кинематической вязкостью. Чтобы отличить ее от ν , величину η называют динамической вязкостью. Будучи выраженным через кинематическую вязкость, число Рейнольдса имеет вид

$$Re = \frac{vl}{\nu}. \quad (42.12)$$

§ 43. Движение тел в жидкостях и газах

Воздействие жидкой или газообразной среды на движущееся в ней с постоянной скоростью v тело будет таким же, каким было бы действие на неподвижное тело набегающего на него со скоростью v однородного потока жидкости или газа (в дальнейшем для краткости мы будем говорить только о жидкости, подразумевая при этом и газы). Следовательно, при выяснении сил, действующих на тело, безразлично, что считать движущимся — тело или среду. Удобно предполагать тело неподвижным, а среду движущейся. Поэтому мы будем, как правило, рассматривать действие на неподвижное тело набегающего на него потока, помня, что результаты, полученные в этом случае, будут справедливыми и для случая движения тела относительно неподвижной среды.

Силу F , с которой набегающий поток действует на тело, можно разложить на две составляющие: направленную вдоль скорости v невозмущенного потока силу X , называемую лобовым сопротивлением, и перпендикулярную к v силу Y , называемую подъемной силой. Лобовое сопротивление складывается из сил давления и сил внутреннего трения. Очевидно, что на тело, симметричное относительно направления скорости потока v , может действовать только лобовое сопротивление, подъемная же сила в этом случае будет отсутствовать.

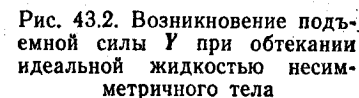
Можно доказать, что в несжимаемой идеальной жидкости равномерное движение тела произвольной формы должно было бы происходить без лобового сопротивления. Этот результат получил название парадокса Даламбера¹⁾.

¹⁾ Жан Лерон Даламбер (или Д'Аламбер) (1717—1783) — французский математик и механик.

Покажем отсутствие лобового сопротивления на примере обтекания идеальной жидкостью очень длинного («бесконечного») цилиндра (рис. 43.1). Не обладая вязкостью, идеальная жидкость должна скользить по поверхности цилиндра, полностью обтекая его.



Рис. 43.1. Обтекание цилиндра идеальной жидкостью



и относительно прямой, проходящей через точки 2 и 4. Теорема Бернулли позволяет по картине линий тока судить о давлении в разных точках потока. Вблизи точек 1 и 3 давление одинаково (и больше, чем в невозмущенном потоке, так как скорость вблизи этих точек меньше). Вблизи точек 2 и 4 давление также одинаково (и меньше, чем в невозмущенном потоке, так как скорость вблизи этих точек больше). Следовательно, результирующая сил давления на поверхность цилиндра (которая в отсутствие вязкости могла бы обусловить лобовое сопротивление) будет равна нулю. Как уже отмечалось, такой же результат получается и для тел любой (в том числе и несимметричной) формы. Этот вывод касается только лобового сопротивления. Подъемная сила, равная нулю для симметричных тел (см., например, рис. 43.1), для несимметричных тел отлична от нуля.

На рис. 43.2 показаны линии тока при обтекании идеальной жидкостью полуцилиндра. Вследствие полного обтекания линии тока симметричны относительно прямой, проходящей через точки 2 и 4. Однако относительно прямой, проходящей через точки 1 и 3, картина линий тока несимметрична. Вблизи точки 2, где линии гуще, давление меньше, чем вблизи точки 4, в результате чего возникает подъемная сила.

Иначе обстоит дело при движении тела в вязкой жидкости. В этом случае очень тонкий слой жидкости прилипает к поверхности тела и движется с ним как одно целое, увлекая за собой из-за внутреннего трения последующие слои. По мере удаления от поверхности тела скорость слоев становится все меньше и, наконец, на некотором расстоянии от поверхности жидкость будет не возмущенной движением тела. Таким образом, тело оказывается окруженным слоем жидкости с быстро изменяющейся внутри него скоростью. Этот слой называется пограничным. В нем действуют силы вязкого трения, которые в конечном счете приложены к телу и приводят к возникновению лобового сопротивления.

Но влияние вязкости не исчерпывается возникновением сил трения. Наличие пограничного слоя в корне изменяет характер обтекания тела жидкостью.

Полное обтекание становится невозможным. Действие сил трения в пограничном

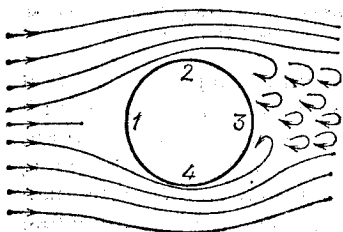


Рис. 43.3. Обтекание цилиндра вязкой жидкостью

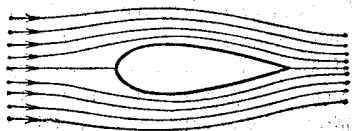


Рис. 43.4. Обтекание жидкостью тела каплевидной формы

слое приводит к тому, что поток отрывается от поверхности тела, в результате чего позади тела возникают вихри (рис. 43.3). Вихри уносятся потоком и постепенно затухают вследствие трения; при этом энергия вихрей расходуется на нагревание жидкости. Давление в образующейся за телом вихревой области оказывается пониженным, вследствие чего результирующая сил давления отлична от нуля. Это в свою очередь обуславливает лобовое сопротивление.

Таким образом, как уже отмечалось, лобовое сопротивление складывается из сопротивления трения и сопротивления давления. При данных поперечных размерах тела сопротивление давления сильно зависит от формы тела. Наименьшим сопротивлением давле-

ния обладают тела хорошо обтекаемой каплевидной формы (рис. 43.4).

Соотношение между сопротивлением трения и сопротивлением давления определяется значением числа Рейнольдса (см. формулу (42.10)). В данном случае v — скорость тела относительно жидкости (или скорость потока, набегающего на тело), l — характерный размер тела, например радиус для тела шаровой формы. При малых Re (т. е. при малых v и l) основную роль играет сопротивление трения, так что сопротивлением давления можно пренебречь. С ростом вязкости относительная роль сил трения возрастает. По мере увеличения Re роль сопротивления давления все больше растет. При больших значениях Re в лобовом сопротивлении преобладают силы давления.

Определяя характер сил, действующих на тело в потоке жидкости или газа, число Рейнольдса служит критерием подобия и в этом случае. Это обстоятельство используется при моделировании. Например, модель самолета ведет себя в потоке газа так же, как и ее прообраз, если кроме геометрического подобия модели и самолета будет соблюдено равенство для них значений числа Рейнольдса.

Стокс¹⁾ установил, что при небольших скоростях и размерах тел (т. е. при малых Re , когда сопротивление среды обусловлено практически только силами трения) модуль силы сопротивления определяется формулой

$$F = k\eta l v. \quad (43.1)$$

Здесь η — динамическая вязкость среды, v — скорость движения тела, l — характерный размер тела, k — коэффициент пропорциональности, который зависит от формы тела. Для шара, если взять в качестве l его радиус r , коэффициент пропорциональности равен 6π . Следовательно, сила сопротивления движению в жидкостях небольших шариков при малых скоростях равна

$$F = 6\pi\eta r v. \quad (43.2)$$

Надо иметь в виду, что формула Стокса справедлива при условии, что расстояние от тела до границ жид-

¹⁾ Джордж Габриель Стокс (1819—1903) — английский физик и математик.

кости (например, до стенок сосуда) много больше размеров тела.

Самолет поддерживается в воздухе подъемной силой, действующей на его крылья. Лобовое сопротивление играет при полете самолета вредную роль. Поэтому крыльям и фюзеляжу самолета придают удобообтекаемую форму (рис. 43.5). Вследствие асимметричной формы и наклонного расположения крыла скорость воздуха над крылом оказывается больше (а, следовательно, давление меньше), чем под крылом. Благодаря этому создается подъемная сила. Существенную роль в образовании подъемной силы играет вязкость воздуха, которая обуславливает образование вихрей, отрывающихся от задней кромки крыла. Однако вникать в детали явлений, обуславливающих подъемную силу, мы не имеем возможности.

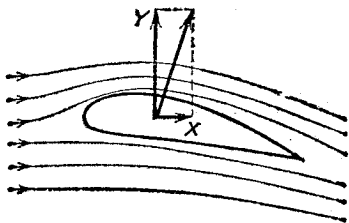


Рис. 43.5. Обтекание воздухом крыла самолета; X — лобовое сопротивление, Y — подъемная сила

Основы теории крыла самолета создал в 1904 г. Жуковский¹⁾, который сформулировал теорему о подъемной силе и вывел формулу для определения этой силы, являющуюся основой всех аэродинамических расчетов самолетов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Может ли быть одинаковым давление в двух точках, лежащих на разных уровнях в установленной наклонно сужающейся трубке, по которой течет идеальная жидкость?
2. Почему струя жидкости, вытекающая из отверстия, по мере удаления от отверстия все больше сжимается?
3. Во сколько раз при одном и том же перепаде давления поток воды в трубе диаметра 50 мм больше, чем в трубе диаметра 25 мм?

¹⁾ Николай Егорович Жуковский (1847—1921) — русский ученый.

Примеры решения задач

1. Цилиндрический сосуд высоты $h = 0,500$ м и радиуса $R = 10,0$ см наполнен доверху водой. В дне сосуда открывается отверстие радиуса $r = 1,00$ мм. Пренебрегая вязкостью воды, определить время τ , за которое вся вода вытечет из сосуда.

Решение. Обозначим высоту уровня воды над дном сосуда буквой x . Согласно формуле Торричелли скорость, с которой вытекает вода из отверстия, $v = \sqrt{2gx}$. За время dt через отверстие пройдет объем воды

$$dV = \pi r^2 v dt = \pi r^2 \sqrt{2gx} dt.$$

За то же время уровень воды в сосуде понизится на

$$-dx = dV/\pi R^2$$

(dx — приращение высоты x , которое отрицательно). Исключив dV из обоих соотношений, получим, что

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2gx}} \left(\frac{R}{r}\right)^2 dx.$$

Проинтегрируем левую часть по t от 0 до τ , а правую — по x от h до 0:

$$\int_0^{\tau} dt = -\left(\frac{R}{r}\right)^2 \int_h^0 \frac{dx}{\sqrt{2gx}}.$$

Отсюда

$$\tau = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ с} = 53 \text{ мин.}$$

2. С мостика, переброшенного через канал, по которому течет вода, опущена узкая согнутая под прямым углом трубка, обращенная открытым концом навстречу течению. Вода в трубке поднимается на высоту $b = 150$ мм над уровнем воды в канале. Определить скорость v течения воды.

Решение. Линии тока горизонтальны. Возьмем на линии, упирающейся в центр отверстия трубки, две точки — одну далеко от отверстия, вторую в центре отверстия. В первой точке скорость v и давление p такие же, как в невозмущенном потоке. Во второй точке скорость равна нулю, а давление превышает p на величину ρgb (ρ — плотность воды). Согласно уравнению Бернулли

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = p + \rho gb,$$

(фигурирующая в уравнении высота b для обеих точек одна и та же). Отсюда

$$v = \sqrt{2gb} = 1,72 \text{ м/с.}$$

Глава 7. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 44. Принцип относительности Галилея

Сопоставим описания движения частицы в инерциальных системах отсчета K и K' , движущихся друг относительно друга со скоростью V (рис. 44.1). Для простоты выберем оси координат так, как показано на рисунке. Отсчет времени начнем с того момента, когда начала координат O и O' совпадали. Тогда координаты x и x' произвольно выбранной точки P будут связаны соотношением $x = x' + Vt$.

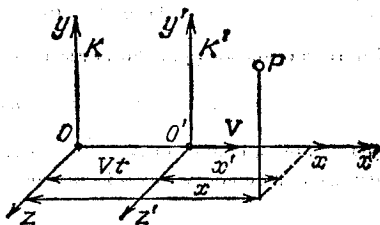


Рис. 44.1. Инерциальная система K' движется с постоянной скоростью V относительно инерциальной системы K . Оси x и x' совпадают, оси y и y' , а также z и z' параллельны друг другу

При сделанном выборе осей $y = y'$ и $z = z'$. В ньютоновской механике предполагается, что время во всех системах отсчета течет одинаково; поэтому $t = t'$. Таким образом, получается совокупность четырех уравнений:

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t', \quad (44.1)$$

называемых преобразованиями Галилея. Эти уравнения позволяют перейти от координат и времени одной инерциальной системы отсчета к координатам и времени другой инерциальной системы.

Продифференцируем первое из уравнений (44.1) по времени, учтя, что $t = t'$ и, следовательно, производная по t совпадает с производной по t' :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V = \frac{dx'}{dt'} + V.$$

Производная dx/dt есть проекция скорости частицы v в системе K на ось x этой системы; производная

ная dx'/dt' есть проекция скорости частицы v' в системе K' на ось x' этой системы. Следовательно,

$$v_x = v'_x + V, \quad (44.2)$$

где $V = V_x = V_{x'}$ (проекция вектора на ось x совпадает с проекцией того же вектора на ось x').

Дифференцирование второго и третьего из уравнений (44.1) дает, что

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt'}, & \text{т. е. } v_y &= v'_{y'}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz'}{dt} = \frac{dz'}{dt'}, & \text{т. е. } v_z &= v'_{z'}. \end{aligned} \quad (44.3)$$

Совокупность уравнений (44.2) и (44.3) можно представить одним векторным уравнением

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \quad (44.4)$$

Это уравнение можно рассматривать либо как формулу преобразования скорости частицы от системы K' к системе K , либо как закон сложения скоростей: скорость частицы относительно системы K равна сумме скорости частицы относительно системы K' и скорости системы K' относительно системы K .

Дифференцирование по времени уравнения (44.4) приводит к равенству

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' \quad (44.5)$$

($\mathbf{V} = \text{const}$, поэтому $\dot{\mathbf{V}} = 0$). Таким образом, ускорения частицы относительно систем K и K' одинаковы.

Сила \mathbf{F} , действующая на частицу в системе K , совпадает с силой \mathbf{F}' , действующей на частицу в системе K' :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'. \quad (44.6)$$

Это следует из того, что сила зависит от расстояний между данной частицей и взаимодействующими с ней частицами (и, может быть, от относительных скоростей частиц), а эти расстояния (и скорости) полагаются в ньютоновской механике одинаковыми во всех инерциальных системах отсчета. Масса также имеет одинаковое числовое значение во всех системах отсчета.

Из сказанного вытекает, что если выполняется равенство

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

то будет выполняться и равенство

$$ma' = F'.$$

Системы K и K' были взяты совершенно произвольно. Поэтому полученный результат означает, что *законы механики одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета*. Это утверждение называется принципом относительности Галилея.

Галилей первый обратил внимание на то, что никакими механическими опытами, осуществленными в пределах данной инерциальной системы отсчета, невозможно установить, находится ли она в состоянии покоя или в состоянии равномерного прямолинейного движения. Он писал, что в закрытой каюте равномерно движущегося корабля мухи летят с одинаковой скоростью по всем направлениям; расстояние, на которое вы прыгнете, не зависит от направления прыжка; капли из отверстия в дне подвешенного ведерка будут падать так же, как они падали, когда корабль был неподвижен. Вероятно, каждому доводилось, разглядывая из окна вагона стоящий на соседнем пути поезд, испытать обманчивое чувство, будто вагон, в котором он находится, начал двигаться, в то время как на самом деле трогался с места соседний поезд. Все перечисленные процессы являются проявлением принципа относительности.

Величины, которые имеют одно и то же числовое значение во всех системах отсчета, называются *инвариантными* (латинское слово *invariantis* означает «неизменяющийся»). Примерами таких величин могут служить масса, электрический заряд и др.

Инвариантными по отношению к преобразованию координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой называются также уравнения, вид которых не изменяется при таком переходе. Сами величины, входящие в уравнение, могут при переходе к другой системе отсчета меняться, однако формулы, выражающие связь между величинами, остаются неизменными. В качестве примера можно привести уравнение

$$\Delta E_k = A$$

(приращение кинетической энергии тела равно совершенной над ним работе; см. формулу (19.8)). Это ра-

венство справедливо во всех инерциальных системах отсчета, в то время как значения ΔE_k и A в разных системах различны.

Воспользовавшись понятием инвариантности, принцип относительности Галилея можно сформулировать следующим образом: *уравнения механики инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея.*

§ 45. Постулаты специальной теории относительности

В 1905 г. А. Эйнштейн создал специальную теорию относительности (СТО), которая представляет собой физическую теорию пространства и времени для случая пренебрежимо слабых гравитационных полей. В основе этой теории лежат два постулата: принцип относительности Эйнштейна и принцип постоянства скорости света.

Эйнштейн распространил механический принцип относительности Галилея на все без исключения физические явления, высказав утверждение, что *все законы природы одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета.* Кроме того, Эйнштейн показал, что преобразования Галилея должны быть заменены более общими преобразованиями Лоренца¹⁾. В соответствии с этим принцип относительности Эйнштейна можно сформулировать в виде: *уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца.*

Принцип постоянства скорости света утверждает, что *скорость света в вакууме не зависит от движений источников света и, следовательно, одинакова во всех инерциальных системах отсчета.* Справедливость этого утверждения была доказана осуществленным в 1887 г. опытом Майкельсона²⁾ и Морли. В этом опыте определялась разность времен, затрачиваемых светом на прохождение одного и того же пути туда и обратно в направлении скорости орбитального движения Земли и в перпендикулярном к этой скорости направлении. Если бы скорость света зависела от скорости источника, эти времена были бы различными. Однако

¹⁾ Хендрик Антон Лоренц (1853—1928) — нидерландский физик-теоретик.

²⁾ Альберт Абрахам Майкельсон (1852—1931) — американский физик.

никакого различия времен не было обнаружено. Таким образом, было установлено, что скорость света в вакууме является величиной инвариантной, т. е. одинаковой во всех инерциальных системах отсчета. Более того, скорость света в вакууме c является предельной. Никакой сигнал, никакое воздействие тел друг на друга не могут распространяться со скоростью, превышающей c .

Существование предельной скорости приводит к тому, что понятие одновременности, считавшееся в ньютоновской механике абсолютным, в действительности является относительным. В пояснение этого часто приводят следующий пример. Пусть из середины равномерно движущегося поезда испускается в

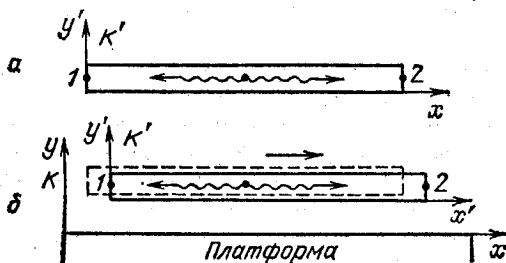


Рис. 45.1. *а* — Для пассажира поезда (т. е. в системе K') точки 1 и 2 неподвижны, поэтому сигнал достигает этих точек одновременно. *б* — Для дежурного по станции, стоящего на платформе, мимо которой проходит поезд (т. е. в системе K), точка 1 движется навстречу сигналу, точку же 2 сигналу приходится «догонять», поэтому сигнал приходит в точку 1 раньше, чем в точку 2. Штриховой линией изображено положение поезда в момент испускания сигнала

обоих направлениях световой сигнал (рис. 45.1). В любой инерциальной системе отсчета свет распространяется во всех направлениях с одинаковой скоростью c . Поэтому едущий в поезде пассажир отметит, что сигнал достиг головы и хвоста поезда одновременно. Дежурный же по станции отметит, что сигнал достиг хвоста поезда раньше, чем головы.

Из рассмотренного примера следует, что в разных системах отсчета время течет неодинаково.

Существование предельной скорости приводит также к тому, что пространство и время утрачивают приписывавшуюся им в ньютоновской механике обособленность, независимость друг от друга и оказы-

ваются взаимосвязанными, образуя единое четырехмерное пространство-время.

«Точечное» событие (например, распад элементарной частицы или тот факт, что частица в какой-то момент времени находится в некоторой точке обычного пространства) характеризуется четырьмя величинами — координатами x , y , z , указывающими, где оно произошло, и временем t , указывающим, когда оно произошло. Значения этих четырех величин зависят от системы отсчета, в которой мы «наблюдаем» событие.

Возьмем в пространстве-времени декартову систему координат с осями x , y , z и ct (вместо времени удобнее взять пропорциональную ему величину ct , чтобы размерность всех четырех координат была одинаковой). Тогда событие можно изобразить точкой в пространстве-времени, которую принято называть мировой точкой.

Конечно, представить себе наглядно, «осязуемо» четыре оси, образующие друг с другом прямые углы, невозможно, ибо наша способность создавать зримые образы основывается на жизненном опыте, а этот опыт относится к обычному трехмерному пространству. Однако в создании зримых образов четырех взаимно перпендикулярных осей нет необходимости. Достаточно представлять такие оси «разумом».

С течением времени мировая точка изменяет свое положение в пространстве-времени, описывая траекторию, которая называется мировой линией. Даже если частица неподвижна в обычном пространстве, ее мировая точка перемещается вдоль прямой мировой линии, параллельной оси ct .

При переходе к другой инерциальной системе отсчета значения координат x , y , z , а также, как мы увидим ниже, времени t изменяются и становятся равными x' , y' , z' и t' . Формулы, по которым преобразуются значения координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, мы получим в следующем параграфе.

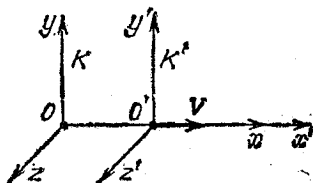
§ 46. Преобразования Лоренца

Пусть имеются инерциальные системы отсчета K и K' , показанные на рис. 46.1. Безразлично, какую из них считать неподвижной, а какую движущейся.

На рисунке предполагается, что движется система K' , в то время как система K неподвижна. С таким же правом можно считать, что неподвижна система K' , а система K движется относительно нее со скоростью $-V$.

Предположим, что происходит какое-то событие. В системе K оно характеризуется значениями координат и времени x, y, z, t ; в системе K' — значениями

Рис. 46.1. Система отсчета K' движется относительно системы K с постоянной скоростью V , направленной вдоль совпадающих осей x и x' . Оси y и y' , а также z и z' параллельны друг другу



координат и времени x', y', z', t' . Найдем формулы, связывающие нештрихованные значения со штрихованными. Из однородности пространства и времени следует, что эти формулы должны быть линейными.

При показанном на рис. 46.1 направлении координатных осей плоскость $y' = 0$ совпадает с плоскостью $y = 0$, а плоскость $z' = 0$ совпадает с плоскостью $z = 0$. Отсюда вытекает, что, например, координаты y и y' должны обращаться в нуль одновременно, независимо от значений других координат и времени. Это возможно лишь при условии, что

$$y = \alpha y',$$

где вследствие линейности уравнения α — постоянная величина. Ввиду равноправности систем K и K' обратное преобразование должно иметь вид

$$y' = \alpha y$$

с тем же значением α , что и при прямом преобразовании. Перемножив оба соотношения, найдем, что $\alpha^2 = 1$, откуда $\alpha = \pm 1$. Для одинаково направленных осей нужно взять $\alpha = +1$. В результате находим, что

$$y = y' \quad \text{или} \quad y' = y. \quad (46.1)$$

Аналогичным образом получается формула

$$z = z' \quad \text{или} \quad z' = z. \quad (46.2)$$

Из этих формул вытекает, что значения y и z не зависят от x' и t' , откуда следует, что значения x' и t' не могут зависеть от y и z ; соответственно значения x и t не могут зависеть от y' и z' . Это означает, что x и t являются линейными функциями только x' и t' .

Из рис. 46.1 следует, что точка O имеет координату $x=0$ в системе K и $x'=-Vt'$ в системе K' . Следовательно, выражение $x'+Vt'$ должно обращаться в нуль одновременно с координатой x (когда $x'+Vt'$ равно нулю, $x'=-Vt'$). Для этого линейное преобразование должно иметь вид

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad (46.3)$$

где γ — константа.

Точка O имеет координату $x'=0$ в системе K' и $x=Vt$ в системе K . Следовательно, выражение $x-Vt$ должно обращаться в нуль одновременно с координатой x' (когда $x-Vt=0$, то $x=Vt$). Для этого нужно, чтобы выполнялось соотношение

$$x' = \gamma(x - Vt). \quad (46.4)$$

В силу равноправности систем K и K' коэффициент γ в обоих случаях должен быть один и тот же.

Теперь воспользуемся принципом постоянства скорости света. Начнем отсчет времени в обеих системах с того момента, когда начала координат O и O' совпадают. Предположим, что в момент $t=t'=0$ в направлении осей x и x' посылается световой сигнал, который производит вспышку света на экране. Это событие (вспышка) характеризуется в системе K координатой x и временем t , а в системе K' — координатой x' и временем t' , причем

$$x = ct, \quad x' = ct'$$

(скорость c в обоих случаях одна и та же). Подставив эти значения x и x' в формулы (46.3) и (46.4), получим соотношения

$$ct = \gamma(ct' + Vt') = \gamma(c + V)t',$$

$$ct' = \gamma(ct - Vt) = \gamma(c - V)t.$$

Перемножив эти соотношения и сократив обе части получившегося равенства на tt' , придем к уравнению

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - V^2).$$

Отсюда

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (46.5)$$

где

$$\beta = V/c. \quad (46.6)$$

Подстановка найденного значения γ в (46.3) и (46.4) приводит к формулам

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (46.7)$$

Чтобы найти формулы преобразования времени, исключим из формул (46.7) координату x и разрешим получившееся уравнение относительно t . Затем исключим из формул (46.7) координату x' и разрешим получившееся уравнение относительно t' . В результате придем к формулам

$$t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (46.8)$$

Напишем вместе формулы (46.1), (46.2), (46.7) и (46.8), подразделив их на две группы:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (46.9)$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (46.10)$$

Эти формулы называются преобразованиями Лоренца. По формулам (46.9) осуществляется переход от системы K' к системе K , по формулам (46.10) — переход от системы K к системе K' . Вследствие равноправности систем преобразования (46.9) и (46.10) отличаются лишь знаком перед V . Это отличие обусловлено тем, что система K' движется относительно системы K со скоростью V , в то время как система K движется относительно системы K' со скоростью $-V$.

В преобразованиях Лоренца «перемешаны» координаты и время. Например, время t в системе K определяется не только временем t' в системе K' , но также и координатой x' . В этом проявляется взаимосвязь пространства и времени.

В пределе при $c \rightarrow \infty$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея (см. формулу (44.1)). Таким образом, различие в течение времени в разных инерциальных системах отсчета обусловлено существованием предельной скорости распространения взаимодействий.

При скоростях много меньших скорости света (т. е. при $\beta \ll 1$) преобразования Лоренца практически не отличаются от преобразований Галилея. Следовательно, преобразования Галилея сохраняют значение для скоростей, малых по сравнению со скоростью света.

При $V > c$ выражения для x , t , x' и t' в формулах (46.9) и (46.10) становятся мнимыми. В этом проявляется то обстоятельство, что движение со скоростями, большими c , невозможно. Невозможна даже система отсчета, движущаяся со скоростью c , потому что при $V = c$ знаменатели формул для x и t обращаются в нуль.

Преобразованиям Лоренца можно придать симметричный вид, если написать их для x и ct , т. е. для величин одинаковой размерности. В этом случае формулы преобразований выглядят следующим образом:

$$x = \frac{x' + \beta(ct')}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad (ct) = \frac{(ct') + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (46.11)$$

$$x' = \frac{x - \beta(ct)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (ct') = \frac{(ct) - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (46.12)$$

Формулы для x и ct , а также для x' и ct' отличаются друг от друга только перестановкой соответствующих переменных.

§ 47. Следствия из преобразований Лоренца

Из преобразований Лоренца можно получить следствия, казалось бы, противоречащие нашему повседневному опыту. Это противоречие обусловлено тем, что наш опыт относится к процессам, протекающим со скоростями, весьма малыми по сравнению со скоростью света, и поэтому явления, которые мы сейчас рассмотрим, нами не ощущаются. Однако они с не-

сомненностью присущи миру элементарных частиц, в котором движение со скоростями, близкими к c , представляет собой заурядное явление.

Относительность понятия одновременности. Рассмотрим инерциальные системы отсчета K_A и K_B

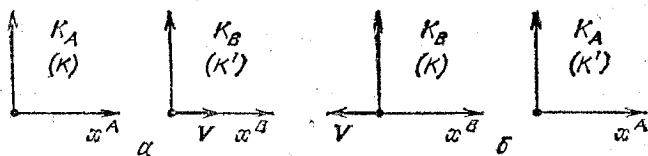


Рис. 47.1. а — Система K_B движется относительно системы K_A вправо; следовательно, K_A играет роль системы K , а K_B — роль системы K' . б — Система K_B движется относительно системы K_A влево; это равнозначно тому, что K_A движется относительно K_B вправо; следовательно, K_A играет роль системы K' , а K_B — роль системы K

(рис. 47.1). Предположим, что в системе K_A в точках с координатами x_1^A и x_2^A ($x_2^A > x_1^A$) происходят в момент времени t^A два одновременных события. Найдем разность моментов времени t_2^B и t_1^B , в которые будут зарегистрированы эти события в системе K_B .

Если система K_B движется относительно K_A вправо (рис. 47.1а), то, применяя преобразования Лоренца, K_A нужно считать системой K , а K_B — системой K' и пользоваться для вычисления моментов времени t_1^B и t_2^B формулами (46.10). В этом случае

$$t_1^B = \frac{t^A - (V/c^2)x_1^A}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_2^B = \frac{t^A - (V/c^2)x_2^A}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Соответственно

$$t_2^B - t_1^B = \frac{-(V/c^2)(x_2^A - x_1^A)}{\sqrt{1 - \beta^2}} < 0.$$

Если же система K_B движется относительно K_A влево (рис. 47.1б), то K_A нужно считать системой K' , а K_B — системой K и пользоваться формулами (46.9). В этом случае

$$t_1^B = \frac{t^A + (V/c^2)x_1^A}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_2^B = \frac{t^A + (V/c^2)x_2^A}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Соответственно

$$t_2^B - t_1^B = \frac{(V/c^2)(x_2^A - x_1^A)}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 0.$$

Таким образом, в любой системе, кроме K_A , события оказываются неодновременными, причем в одних системах второе событие будет происходить позже первого ($t_2^B > t_1^B$), а в других системах второе событие будет происходить раньше первого ($t_2^B < t_1^B$).

Нужно иметь в виду, что полученный нами результат относится лишь к событиям, причинно не связанным друг с другом (очевидно, что события, происходящие одновременно в разных точках пространства, не могут оказывать воздействия друг на друга). Иначе обстоит дело, если между событиями имеется причинная связь. В этом случае событие-причина во всех системах отсчета предшествует событию-следствию. Рождение элементарной частицы во всех системах отсчета происходит раньше ее распада. Ни в одной из систем «сын не рождается раньше отца».

Длина тел в разных системах отсчета. Сравним длину стержня в инерциальных системах отсчета K и K' (рис. 47.2). Предположим, что стержень, расположенный вдоль совпадающих осей x и x' , покоится в

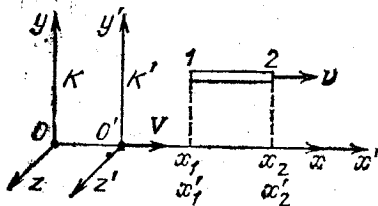


Рис. 47.2. Стержень покоится в системе K' . Относительно системы K он движется со скоростью v , равной относительной скорости систем V .

системе K' . Тогда определение его длины в этой системе не доставляет хлопот. Нужно приложить к стержню масштабную линейку и определить координату x'_1 одного конца стержня, а затем координату x'_2 другого конца. Разность координат даст длину стержня l_0 в системе K' :

$$l_0 = x'_2 - x'_1.$$

В системе K дело обстоит сложнее. Относительно этой системы стержень движется со скоростью v , равной скорости V , с которой система K' движется отно-

нительно системы K . (Обозначение V мы будем употреблять только применительно к относительной скорости систем отсчета.) Поскольку стержень движется, нужно произвести одновременный отсчет координат его концов x_1 и x_2 в некоторый момент времени t . Разность координат даст длину стержня l в системе K :

$$l = x_2 - x_1.$$

Для сопоставления длин l и l_0 нужно взять ту из формул преобразований Лоренца, которая связывает координаты x , x' и время t системы K , т. е. первую из формул (46.10). Подстановка в нее значений координат и времени приводит к выражениям

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Отсюда

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

(мы подставили вместо β его значение; см. (46.6)).

Заменив разности координат длинами стержня, а относительную скорость V систем K и K' равной ей скоростью стержня v , с которой он движется в системе K , придем к формуле

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (47.1)$$

Таким образом, длина движущегося стержня оказывается меньше той, которой обладает стержень в состоянии покоя. Аналогичный эффект наблюдается для тел любой формы: в направлении движения линейные размеры тела сокращаются тем больше, чем больше скорость движения. Это явление называется лоренцевым (или фицджеральдовым) сокращением. Поперечные размеры тела не изменяются. В результате, например, шар принимает форму эллипсоида, сплющенного в направлении движения. Можно показать, что зрительно этот эллипсоид будет восприниматься в виде шара. Это объясняется искажением зрительного восприятия движущихся предметов, вызванным неодинаковостью времен, которые затрачивает свет на прохождение пути от различно удаленных точек предмета до глаза. Искажение зрительного восприятия приводит к тому, что движущийся шар воспринимается глазом как эллип-

соид, вытянутый в направлении движения. Оказывается, что изменение формы, обусловленное лоренцевым сокращением, в точности компенсируется искажением зрительного восприятия.

Промежуток времени между событиями. Пусть в системе K' в одной и той же точке с координатой x' происходят в моменты времени t'_1 и t'_2 два каких-то события. Это могут быть, например, рождение элементарной частицы и ее последующий распад. В системе K эти события разделены промежутком времени

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

Найдем промежуток времени Δt между событиями в системе K , относительно которой система K' движется со скоростью V . Для этого определим в системе K моменты времени t_1 и t_2 , соответствующие моментам t'_1 и t'_2 , и образуем их разность:

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Для сопоставления времен t и t' нужно взять ту из формул преобразований Лоренца, которая связывает t , t' и координату x' системы K' , т. е. последнюю из формул (46.9). Подстановка в нее значений координаты и моментов времени приводит к выражениям

$$t_1 = \frac{t'_1 + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Отсюда

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (47.2)$$

Если события происходят с одной и той же частицей, покоящейся в системе K' , то $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ представляет собой промежуток времени, измеренный по часам, неподвижным относительно частицы и движущимся вместе с ней относительно системы K со скоростью v , равной V (напомним, что буквой V мы обозначаем только относительную скорость систем; скорости частиц и часов мы будем обозначать буквой v). Время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом, называется собственным временем этого тела и обычно обозначается буквой τ . Следовательно, $\Delta t' = \Delta \tau$. Величина $\Delta t = t_2 - t_1$ представляет

собой промежуток времени между теми же событиями, измеренный по часам системы K , относительно которой частица (вместе со своими часами) движется со скоростью v . С учетом сказанного формулу (47.2) можно представить в виде

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (47.3)$$

Из полученной формулы следует, что собственное время меньше времени, отсчитанного по часам, движущимся относительно тела (очевидно, что часы, неподвижные в системе K , движутся относительно частицы со скоростью $-v$).

В какой бы системе отсчета не рассматривалось движение частицы, промежуток собственного времени измеряется по часам системы, в которой частица покоится. Отсюда следует, что промежуток собственного времени является инвариантом, т. е. величиной, имеющей одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета.

С точки зрения наблюдателя, «живущего» в системе K , Δt есть промежуток времени между событиями, измеренный по неподвижным часам, а $\Delta\tau$ — промежуток времени, измеренный по часам, движущимся со скоростью v . Поскольку $\Delta\tau < \Delta t$ (см. (47.3)), можно сказать, что движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся часы.

Подтверждением соотношения (47.3) служит следующее явление. В составе космического излучения имеются рождающиеся на высоте 20—30 км нестабильные частицы, называемые мюонами. Они распадаются на электрон (или позитрон) и два нейтрино. Собственное время жизни мюонов (т. е. время жизни, измеренное в системе, в которой они неподвижны) составляет в среднем примерно 2 мкс. Казалось бы, что даже двигаясь со скоростью, очень мало отличающейся от c , они могут пройти лишь путь, равный $3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 600$ м. Однако, как показывают измерения, они успевают в значительном количестве достигнуть земной поверхности. Это объясняется тем, что мюоны движутся со скоростью, близкой к c . Поэтому их время жизни, отсчитанное по часам, неподвижным относительно Земли, оказывается значительно большим, чем собственное время жизни этих частиц (см. формулу (47.3)). Следовательно, не уди-

вительно, что экспериментатор наблюдает пробег мюонов, значительно превышающий 600 м. Для наблюдателя, движущегося вместе с мюонами, расстояние до поверхности Земли сокращается до 600 м (см. формулу (47.1)), поэтому мюоны успевают пролететь это расстояние за 2 мкс.

§ 48. Интервал

В обычном пространстве расстояние Δl между двумя точками с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 определяется выражением

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \quad (48.1)$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$ и т. д. Это расстояние не зависит от выбора системы координат, т. е. является инвариантом. При переходе к другой координатной системе изменяются, вообще говоря, величины Δx , Δy и Δz , однако эти изменения таковы, что расстояние Δl остается одним и тем же.

Казалось бы, что расстояние (или, как принято говорить, интервал) между двумя мировыми точками в четырехмерном пространстве-времени должно определяться аналогичным выражением

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \quad (48.2)$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ и т. д. Однако это выражение непригодно в качестве интервала, поскольку оно не является инвариантом — при переходе к другой инерциальной системе отсчета числовое значение этого выражения изменяется.

Инвариантным, как мы покажем, является выражение

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}, \quad (48.3)$$

которое называют интервалом между событиями. Величина Δs является аналогом расстояния Δl между точками в обычном пространстве.

Причина того, что интервал определяется не выражением (48.2), а выражением (48.3), заключается в том, что, как говорят, метрика пространства-времени отличается от метрики обычного трехмерного пространства. В обычном пространстве справедлива евклидова геометрия, вследствие чего его называют

евклидовым. Качественное различие между временем и пространством приводит к тому, что в выражение для интервала квадрат временной координаты и квадраты пространственных координат входят с разными знаками. Пространство, в котором расстояния между точками определяется выражением вида (48.3), называется псевдоевклидовым.

С учетом формулы (48.1) выражение (48.3) можно написать в виде

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}, \quad (48.4)$$

где Δl — расстояние между точками обычного пространства, в которых произошли данные события.

Допустим, что рассматриваются события, происходящие с одной и той же частицей. Тогда отношение $\Delta l / \Delta t$ дает скорость частицы v . Поэтому, вынося в (48.4) из-под корня $c \Delta t$, получим, что

$$\Delta s = c \Delta t \sqrt{1 - (\Delta l / c \Delta t)^2} = c \Delta t \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

Согласно (47.3) выражение $\Delta t \sqrt{1 - v^2 / c^2}$ равно $\Delta \tau$ — промежутку собственного времени частицы между событиями. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\Delta s = c \Delta \tau. \quad (48.5)$$

Поскольку c — константа, а $\Delta \tau$ — инвариант, интервал Δs также оказывается инвариантом.

Убедимся в инвариантности интервала еще одним способом. В соответствии с (48.3) квадрат интервала в системе K определяется выражением

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \quad (48.6)$$

В системе K' квадрат интервала между теми же событиями равен

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2. \quad (48.7)$$

Согласно формулам (46.10)

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V \Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y,$$

$$\Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - (V/c^2) \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Подстановка этих значений в выражение (48.7) дает

$$\Delta s'^2 = c^2 \frac{[\Delta t - (V/c^2) \Delta x]^2}{1 - \beta^2} - \frac{(\Delta x - V \Delta t)^2}{1 - \beta^2} - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \\ = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta s^2$$

(напомним, что $\beta = V/c$). Таким образом, инвариантность интервала доказана.

Итак, мы знаем уже три инвариантные величины: скорость света в вакууме c , промежуток собственного времени $\Delta\tau$ и интервал между событиями Δs .

В отличие от расстояния Δl , квадрат которого всегда положителен (а само Δl вещественно), квадрат интервала, определяемого формулой (48.4), может быть положительным (если $c\Delta t > \Delta l$), либо отрицательным (если $c\Delta t < \Delta l$), либо равным нулю (если $c\Delta t = \Delta l$). Последний случай имеет место для событий, заключающихся в испускании светового сигнала из одной мировой точки и приходе его в другую мировую точку (за время Δt световой сигнал проходит в вакууме путь $\Delta l = c\Delta t$). Соответственно интервал Δs может быть вещественным (если $\Delta s^2 > 0$), мнимым (если $\Delta s^2 < 0$) и равным нулю (для светового сигнала).

Вследствие инвариантности интервал будет вещественным, либо мнимым, либо равным нулю во всех инерциальных системах отсчета.

Для вещественного интервала

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta l'^2 > 0.$$

Отсюда следует, что существует такая система K' , в которой $\Delta l' = 0$, т. е. события, разделенные вещественным интервалом, могут быть пространственно совмещенными. Однако не существует системы, в которой $\Delta t' = 0$ (при таком значении $\Delta t'$ интервал стал бы мнимым). Таким образом, события, разделенные вещественным интервалом, ни в какой системе отсчета не могут быть одновременными. В соответствии с этим вещественные интервалы называются *временными*.

Для мнимого интервала

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta l'^2 < 0.$$

Следовательно, существует такая система K' , в которой $\Delta t' = 0$, т. е. события оказываются однове-

менными. Однако не существует системы, в которой $\Delta t' = 0$ (при таком значении $\Delta t'$ интервал стал бы вещественным). Таким образом, события, разделенные мнимым интервалом, ни в какой системе отсчета не могут оказаться пространственно совмещенными. В соответствии с этим мнимые интервалы называются пространственно подобными.

Расстояние Δl между точками, в которых происходят события, разделенные пространственноподобным интервалом, превышает $c\Delta t$. Поэтому такие события не могут воздействовать друг на друга и, следовательно, не могут быть причинно связанными друг с другом (не существует воздействий, распространяющихся со скоростью, большей c). Причинно связанные события могут быть разделены только времениподобным или нулевым интервалом.

Для события-причины и события-следствия

$$c\Delta t \geq \Delta l. \quad (48.8)$$

Согласно последней из формул (46.10)

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (V/c^2) \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{1 - (V/c^2) (\Delta x/\Delta t)}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (48.9)$$

Поскольку $|\Delta x| \leq \Delta l \leq c\Delta t$ (см. формулы (48.1) и (48.8)), отношение $|\Delta x|/\Delta t$ не превышает c ; $V < c$. Поэтому, независимо от знака Δx , правая часть равенства (48.9) больше нуля и, следовательно, $\Delta t'$ и Δt имеют одинаковые знаки. Это означает, что событие-причина во всех системах отсчета происходит раньше события-следствия. Об этом уже шла речь в предыдущем параграфе.

§ 49. Преобразование и сложение скоростей

Компоненты скорости v частицы в системе K определяются выражениями

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (49.1)$$

В системе K' компоненты скорости v' той же частицы равны

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_{y'} = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}. \quad (49.2)$$

Найдем формулы, связывающие нештрихованные компоненты скорости со штрихованными. Для этого воспользуемся преобразованиями Лоренца (46.9), заменив в них β через V/c . Из этих формул получаем, что

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & dy &= dy', & dz &= dz', \\ dt &= \frac{dt' + (V/c^2) dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (49.3)$$

Разделив первое из этих равенств на четвертое, придем к соотношению

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + (V/c^2) dx'} = \frac{dx'/dt' + V}{1 + (V/c^2) dx'/dt'},$$

которое с учетом (49.1) и (49.2) можно представить в виде

$$v_x = \frac{v'_{x'} + V}{1 + V v'_{x'}/c^2}. \quad (49.4)$$

Разделив второе и третье из равенств (49.3) на четвертое, получим еще два соотношения:

$$v_y = \frac{v'_{y'} \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V v'_{x'}/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_{z'} \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V v'_{x'}/c^2}. \quad (49.5)$$

По формулам (49.4) и (49.5) осуществляется преобразование скоростей при переходе от системы K' к системе K . Воспользовавшись преобразованиями Лоренца (46.10), легко получить формулы

$$v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - V v_x/c^2}, \quad v'_{y'} = \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V v_x/c^2}, \quad (49.6)$$

$$v'_{z'} = \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V v_x/c^2},$$

по которым осуществляется преобразование скоростей при переходе от системы K к системе K' . Формулы (49.6) отличаются от формул (49.4) и (49.5), как и следовало ожидать, только знаком перед V .

При $V \ll c$ полученные нами формулы переходят в формулы (44.2) и (44.3), по которым преобразуются скорости в ньютоновской механике.

Пусть частица движется параллельно осям x и x' в направлении скорости V (см. рис. 46.1). Тогда v_x совпадает с модулем скорости частицы v в системе K , а v'_x — с модулем скорости v' в системе K' , и формула (49.4) имеет вид

$$v = \frac{v' + V}{1 + Vv'/c^2}. \quad (49.7)$$

Скорости v , v' и V коллинеарны и направлены в одну и ту же сторону. Следовательно, формула (49.7) выражает закон сложения скоростей. Если $v' = c$, то

$$v = \frac{c + V}{1 + Vc/c^2} = c.$$

Этот результат является само собой разумеющимся, поскольку в основе преобразований Лоренца, а следовательно, и формул преобразования скоростей лежит предположение, что скорость света в вакууме одинакова во всех системах отсчета.

Допустим, что $v' = c$, а $V = c - \alpha$, где α — сколь угодно малая величина (выше отмечалось, что нельзя полагать $V = c$, потому что в этом случае формулы преобразований Лоренца утрачивают смысл). Подстановка этих значений в (49.7) дает, что

$$v = \frac{c + (c - \alpha)}{1 + (c - \alpha)c/c^2} = c.$$

Таким образом, если каждая из складываемых скоростей не превышает c , то и результирующая скорость не может превысить c .

§ 50. Релятивистский импульс

Законы сохранения, как и другие законы природы, должны соблюдаться во всех инерциальных системах отсчета, т. е. быть инвариантными по отношению к преобразованиям Лоренца. Проверим, является ли инвариантным закон сохранения импульса, определяемого как произведение массы тела на его скорость: $p = mv$.

Рассмотрим абсолютно неупругое центральное соударение двух одинаковых частиц массы m . При указанных на рис. 50.1 условиях суммарный импульс

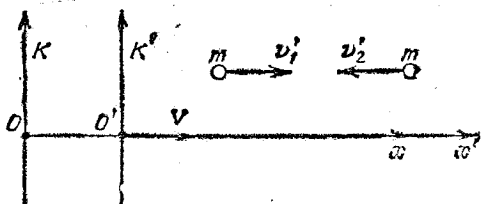


Рис. 50.1. В системе K' частицы до соударения летят навстречу друг другу параллельно оси x' со скоростями $v'_1 = V$ и $v'_2 = -V$. Модули обеих скоростей одинаковы и равны модулю относительной скорости систем K' и K ($v'_1 = v'_2 = V$). После соударения скорости частиц в системе K' равны нулю

частиц сохраняется в системе K' (до и после соударения он равен нулю). В этой системе компоненты скоростей частиц равны: $v'_{1x'} = V$, $v'_{2x'} = -V$.

Перейдем в систему K . Согласно формуле (49.4)

$$v_{1x} = \frac{v'_{1x'} + V}{1 + Vv'_{1x'}/c^2} = \frac{V + V}{1 + VV/c^2} = \frac{2V}{1 + V^2/c^2},$$

$$v_{2x} = \frac{v'_{2x'} + V}{1 + Vv'_{2x'}/c^2} = \frac{-V + V}{1 + V(-V)/c^2} = 0.$$

Таким образом, до соударения проекция на ось x суммарного импульса частиц равна

$$mv_{1x} + mv_{2x} = \frac{2mV}{1 + V^2/c^2}. \quad (50.1)$$

После соударения частицы покоятся в системе K' , следовательно, движутся со скоростью V относительно системы K . Поэтому проекция суммарного импульса равна $2mV$.

Полученный нами результат означает, что в системе K закон сохранения импульса, определяемого как mv , не соблюдается. Только при условии, что скорости частиц много меньше c , отличием выражения (50.1) от $2mV$ можно пренебречь. Отсюда следует, что определение импульса в виде mv пригодно только при условии, что $v \ll c$. Для скоростей, сравнимых со

скоростью света в вакууме, импульс должен быть определен как-то иначе, причем при $v/c \rightarrow 0$ это новое выражение для импульса должно переходить в ньютоновское выражение

$$p = mv = m \frac{dr}{dt}. \quad (50.2)$$

Оказывается, что выражение, обеспечивающее инвариантность закона сохранения импульса, получается из (50.2), если заменить в нем время dt собственным временем частицы $d\tau$ (которое в отличие от dt является инвариантом). Осуществив такую замену, получим выражение

$$p = m \frac{dr}{d\tau}. \quad (50.3)$$

Здесь dr есть перемещение частицы в той системе отсчета, в которой определяется импульс p , а $d\tau$ — промежуток времени, определяемый по часам, движущимся вместе с частицей.

Воспользовавшись формулой (47.3), заменим в выражении (50.3) промежуток собственного времени $d\tau$ промежутком dt , измеренным по часам той системы, в которой определяется импульс частицы (в этой системе частица движется со скоростью $v = dr/dt$). В результате получим, что

$$p = m \frac{dr}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Таким образом, релятивистское выражение для импульса имеет вид

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (50.4)$$

Из формулы (50.4) следует, что зависимость импульса от скорости является более сложной, чем это предполагается в ньютоновской механике¹⁾. При $v \ll c$

¹⁾ В научно-популярной литературе и в некоторых учебниках выражение (50.4) истолковывается следующим образом. Импульс, как и в ньютоновской механике, равен произведению массы тела на его скорость: $p = m_r v$, где m_r — так называемая релятивистская масса, зависящая от скорости по закону $m_r = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. В этом случае инвариантную массу m называют массой покоя и обозначают обычно через m_0 . В соответствии с трактовкой, принятой теперь в научной литературе, мы будем рассматривать только инвариантную массу, обозначая ее буквой m и называя просто массой,

релятивистское выражение для импульса переходит в ньютоновское выражение $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Проверим на примере, рассмотренном в начале этого параграфа, инвариантность закона сохранения импульса, определяемого формулой (50.4). В системе K' , очевидно, сумма релятивистских импульсов частиц равна нулю как до, так и после соударения. В системе K проекция на ось x суммарного импульса частиц до соударения равна

$$\frac{mv_{1x}}{\sqrt{1 - v_{1x}^2/c^2}} = \frac{m \cdot 2V}{(1 + V^2/c^2) \sqrt{1 - \left(\frac{2V/c}{1 + V^2/c^2}\right)^2}} = \frac{2mV}{1 - V^2/c^2}.$$

Если считать массу образовавшейся в результате абсолютно неупругого соударения составной частицы равной $2m$, то вычисленный по формуле (50.4) суммарный импульс после соударения окажется равным

$$\frac{2mV}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Таким образом, мы пришли к обескураживающему результату: в системе K импульс после соударения отличается от импульса до соударения.

Причина кажущегося несохранения импульса в системе K заключается в том, что, как мы увидим в § 52, масса M составной частицы равна не $2m$, а $2m/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Соответственно вычисленный по формуле (50.4) импульс после соударения будет равен

$$\frac{MV}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{2mV}{1 - V^2/c^2},$$

т. е. совпадает с импульсом до соударения.

§ 51. Релятивистское выражение для энергии

Из двух возможных в ньютоновской механике формулировок второго закона Ньютона (см. формулы (8.1) и (8.2)) в релятивистской механике справедлива только первая из них:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Подставив выражение (50.4) для \mathbf{p} , придем к основному уравнению релятивистской динамики материальной точки:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \mathbf{F}. \quad (51.1)$$

Из сказанного ясно, что в релятивистском случае масса утрачивает смысл коэффициента пропорциональности между ускорением и силой.

В отличие от ньютоновской механики сила \mathbf{F} в релятивистской механике не является инвариантной (в разных инерциальных системах отсчета она имеет различные модули и направления). Кроме того, ускорение \mathbf{a} и сила \mathbf{F} оказываются неколлинеарными (направление ускорения, как правило, не совпадает с направлением силы).

Чтобы получить релятивистское выражение для кинетической энергии, будем исходить из того, что работа, совершенная над телом, равна приращению его кинетической энергии:

$$dE_k = dA$$

(см. формулу (19.7)). Умножим правую часть равенства (51.1) на перемещение частицы ds , а левую часть — на равное ds произведение $v dt$ ($ds = v dt$). В результате получим соотношение

$$v \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) dt = \mathbf{F} ds.$$

Справа стоит элементарная работа dA . Следовательно, левая часть равенства представляет собой приращение кинетической энергии частицы:

$$dE_k = v \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) dt = v d \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right).$$

Преобразуем это выражение, воспользовавшись правилом дифференцирования произведения функций:

$$\begin{aligned} dE_k &= v \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} d(m\mathbf{v}) + m\mathbf{v} d \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \right] = \\ &= v \left[\frac{m d\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m\mathbf{v} (v/c^2) dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned}$$

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и учтем, что $v^2 = v^2$, а $v dv = v dv$ (см. формулу

(18.7)). В результате получим

$$dE_k = \frac{(1 - v^2/c^2) m v dv + (v^2/c^2) m v dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m v dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}.$$

Легко проверить дифференцированием, что

$$\frac{m v dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = d \left(\frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Следовательно,

$$dE_k = d \left(\frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Функции, дифференциалы которых равны друг другу, могут отличаться только на постоянную величину. Поэтому

$$E_k = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \text{const.}$$

Кинетическая энергия должна обращаться в нуль вместе со скоростью частицы v . Отсюда следует, что константа должна быть равна $-m c^2$ и соответственно

$$E_k = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m c^2 = m c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (51.2)$$

Разложим выражение (51.2) в ряд по степеням v/c :

$$\begin{aligned} E_k(v/c) &= E_k(0) + E'_k(0) \frac{v}{c} + \frac{1}{2} E''_k(0) \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots = \\ &= 0 + 0 \cdot \frac{v}{c} + \frac{m c^2}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

При $(v/c) \ll 1$ остальными членами ряда можно пренебречь. В результате получится ньютоновское выражение для кинетической энергии: $E_k = m v^2/2$. Это согласуется с тем, что при скоростях много меньших скорости света формулы релятивистской механики должны переходить в соответствующие формулы ньютоновской механики.

Мы уже отмечали, что законы сохранения должны быть инвариантными по отношению к преобразованиям Лоренца. Как показывает опыт, в частности огромный экспериментальный материал, накопленный в физике элементарных частиц, закон сохранения энергии оказывается инвариантным только в том случае, если свободной (т. е. не подверженной действию сил) частице приписывать, кроме кинетической энер-

гии (51.2), дополнительную энергию, равную mc^2 . Таким образом, свободная частица обладает энергией

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (51.3)$$

которую называют полной энергией.

В соответствии с (51.3) неподвижная частица обладает энергией

$$E_0 = mc^2, \quad (51.4)$$

которая называется энергией покоя. Она представляет собой внутреннюю энергию частицы. В случае сложного тела энергия покоя включает в себя, помимо энергий покоя образующих тело частиц, также кинетическую энергию частиц (обусловленную их движением относительно центра масс тела) и энергию их взаимодействия друг с другом. В энергию покоя, как и в полную энергию (51.3), не входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле. (Термин «полная энергия» имеет в релятивистской механике иной смысл, чем в ньютоновской механике. В ньютоновской механике полной энергией называется сумма кинетической и потенциальной энергий частицы. В релятивистской механике под полной энергией подразумевается сумма кинетической энергии и энергии покоя частицы.)

Из сопоставления формул (50.4) и (51.3) следует, что импульс и полная энергия частицы связаны соотношением

$$p = \frac{E}{c^2} v. \quad (51.5)$$

Найдем выражение для полной энергии через импульс частицы. Для этого исключим из выражения для модуля импульса $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ и выражения (51.3) для полной энергии скорость v . В результате получим

$$E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (51.6)$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 = \text{inv}. \quad (51.7)$$

Скорость c и масса m являются инвариантами. Следовательно, и выражение $E^2/c^2 - p^2$ представляет собой инвариант, т. е. имеет одинаковое числовое зна-

чение во всех инерциальных системах отсчета. При переходе от одной системы отсчета к другой полная энергия и импульс изменяются, однако числовое значение выражения (51.7) остается одним и тем же.

§ 52. Взаимосвязь массы и энергии покоя

Согласно формуле (51.4) масса тела и его энергия покоя связаны соотношением

$$E_0 = mc^2, \quad (52.1)$$

из которого вытекает, что всякое изменение массы тела Δm сопровождается изменением энергии покоя ΔE_0 , причем эти изменения пропорциональны друг другу:

$$\Delta E_0 = c^2 \Delta m. \quad (52.2)$$

Это утверждение носит название закона взаимосвязи массы и энергии покоя (иногда для краткости говорят просто об энергии).

Взаимосвязь m и E_0 приводит к тому, что суммарная масса взаимодействующих частиц не сохраняется. Убедимся в этом на следующем примере. Пусть две одинаковые частицы массы m , движущиеся с равными по модулю и противоположно направленными скоростями, претерпевают абсолютно неупругое соударение, в результате которого образуется новая неподвижная частица. До соударения полная энергия каждой частицы равна $mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Полная энергия образовавшейся частицы равна Mc^2 , где M — масса новой частицы. Из закона сохранения энергии следует, что $2mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2} = Mc^2$, откуда

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > 2m$$

(см. пример, рассмотренный в конце § 50).

Таким образом, масса образовавшейся частицы больше суммы масс исходных частиц. Это обусловлено тем, что кинетическая энергия частиц превратилась в эквивалентное количество энергии покоя, а это в свою очередь привело к возрастанию массы на $\Delta m = \Delta E_0/c^2$.

При распаде неподвижной частицы на несколько разлетающихся в разные стороны частиц наблюдается

обратное явление — сумма масс образовавшихся частиц оказывается меньше массы исходной частицы на величину, равную суммарной кинетической энергии этих частиц, деленной на c^2 .

В основе работы атомных электростанций лежит цепная реакция деления ядер урана. Суммарная масса образовавшихся при делении осколков (ядер более легких атомов) меньше массы ядра урана. Поэтому процесс деления сопровождается уменьшением энергии покоя частиц. Разность энергий покоя превращается в кинетическую энергию осколков и в энергию возникающего при делении электромагнитного излучения.

Рассмотрим тело, состоящее из N частиц с массами m_1, m_2, \dots, m_N . Тело не будет распадаться на образующие его частицы при условии, что они связаны друг с другом. Эту связь можно охарактеризовать энергией $E_{св}$, которую нужно затратить, чтобы разорвать связь между частицами и разнести их на такие расстояния, при которых взаимодействием частиц друг с другом можно пренебречь. Энергию $E_{св}$ называют энергией связи системы частиц. В соответствии с формулой (52.2),

$$E_{св} = c^2 \sum_{i=1}^N m_i - Mc^2, \quad (52.3)$$

где M — масса системы (масса тела)

Из формулы (52.3) следует, что энергия связи будет положительной в том случае, когда масса тела M меньше суммы масс образующих тело частиц.

При слиянии частиц высвобождается энергия $E_{св}$ (например, в виде электромагнитного излучения). Чтобы разделить тело на частицы, из которых оно состоит, нужно затратить энергию $E_{св}$.

Примером может служить атомное ядро. Так, ядро урана-238 имеет массу $M = 395,2 \cdot 10^{-27}$ кг. Оно состоит из 92 протонов с массой $m_p = 1,6727 \cdot 10^{-27}$ кг и 146 нейтронов с массой $m_n = 1,6750 \cdot 10^{-27}$ кг. Подстановка значений масс в формулу (52.3) дает для энергии связи протонов и нейтронов в ядре урана-238 значение

$$E_{св} = (3 \cdot 10^8)^2 (92 \cdot 1,6727 + 146 \cdot 1,6750 - 395,2) \cdot 10^{-27} = \\ = 2,88 \cdot 10^{10} \text{ Дж.}$$

§ 53. Частицы с нулевой массой

Законы ньютоновской механики не допускают существования частиц с нулевой массой. Такие частицы под действием ничтожно малой силы получали бы бесконечно большое ускорение. Однако существование частиц с $m = 0$ не противоречит законам релятивистской механики.

Согласно формулам

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{и} \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(см. (50.4) и (51.3)) частица с $m = 0$ может обладать отличными от нуля импульсом и энергией лишь в том случае, если $v = c$ (отношение $0/0$ представляет собой неопределенность, которая может равняться конечному числу). Таким образом, частицы с нулевой массой могут существовать, только двигаясь со скоростью c , т. е. со скоростью света в вакууме. Для такой частицы из формулы (51.4) вытекает соотношение

$$p = \frac{E}{c}. \quad (53.1)$$

К числу частиц с нулевой массой принадлежит световая частица, называемая фотоном. До недавнего времени полагали, что нулевую массу имеет также элементарная частица, называемая нейтрино. Однако в течение 1975—1980 гг. группа советских ученых, возглавляемая В. А. Любимовым, провела эксперименты, в результате которых она пришла к выводу, что масса нейтрино отлична от нуля и, вероятнее всего, имеет значение $6 \cdot 10^{-35}$ кг (1/15 000 массы электрона). Эти данные пока не подтверждены в других экспериментах, в связи с чем не могут считаться окончательными.

Энергия фотона определяется формулой

$$E = hv, \quad (53.2)$$

где h — постоянная Планка¹⁾, v — частота света. В соответствии с формулой (53.1) фотон обладает импульсом

$$p = \frac{hv}{c}, \quad (53.3)$$

¹⁾ Макс Планк (1858—1947) — немецкий физик, основоположник квантовой теории.

Свет представляет собой поток фотонов. При поглощении света поверхностью некоторого тела этому телу сообщается импульс, которым обладали поглощенные телом фотоны. В результате возникает давление, оказываемое светом на тело.

Пусть на единичную площадку поверхности тела падает за секунду и поглощается ею N фотонов, т. е. энергия $W = N h \nu$. Тогда согласно (53.3) площадке будет сообщаться импульс, равный $N(h\nu/c) = W/c$. Импульс, сообщаемый в единицу времени, равен силе, действующей на тело. Поэтому тело будет испытывать давление

$$P = \frac{W}{c}. \quad (53.4)$$

Здесь W — плотность потока энергии, т. е. энергия, падающая на единицу поверхности в единицу времени.

К формуле (53.4) приводит также электромагнитная теория света, созданная Максвеллом¹⁾ в 60-х годах XIX столетия.

Давление света очень мало. Например, на расстоянии 1 м от источника света силой в миллион кандел давление равно всего лишь примерно 10^{-7} Па. Впервые измерить световое давление удалось Лебедеву²⁾ в 1899 г. Результаты измерений оказались в полном согласии с формулой (53.4), а следовательно, и с формулой (53.3).

§ 54. Границы применимости ньютоновской механики

Область, в которой ньютоновская механика оказывается справедливой, ограничена релятивистскими и квантовыми эффектами.

Из рассказанного в данной главе следует, что механика Ньютона есть механика малых скоростей, т. е. механика тел, движущихся со скоростями v , много меньшими скорости света в вакууме ($v \ll c$). Скорости движений, с которыми мы имеем дело в повседневной жизни и в технике, настолько малы по сравнению с c , что применительно к этим движениям

¹⁾ Джеймс Клерк Максвелл (1831—1879) — английский физик, создатель классической электродинамики.

²⁾ Петр Николаевич Лебедев (1866—1912) — русский физик.

ньютоновскую механику можно считать практически строгой. Даже при $v = 0,1c$ отличие импульса, вычисленного по формуле (50.4), от ньютоновского импульса составляет всего лишь 0,5 %.

В мире элементарных частиц скорости, близкие к c , оказываются обычным явлением. Поэтому к этим частицам ньютоновская механика неприменима.

Согласно квантовой механике частицы не могут характеризоваться одновременно точными значениями координаты (например, x) и соответствующей компоненты импульса (т. е. p_x). Предел точности определяется соотношением неопределенностей Гейзенберга¹⁾:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h/4\pi. \quad (54.1)$$

Здесь Δx — неопределенность координаты, Δp_x — неопределенность x -компоненты импульса, h — постоянная Планка, равная $6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Аналогичные соотношения имеются и для других координат и компонент импульса.

Заменив в (54.1) импульс произведением массы на скорость, получим соотношение

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geq h/4\pi m. \quad (54.2)$$

Понятие траектории применимо только к «классической» (т. е. «неквантовой») частице, которой можно приписать в каждый момент времени точные значения координаты и скорости. Из соотношения (54.2) видно, что чем меньше масса частицы, тем менее определенными делаются ее координата и скорость и, следовательно, менее применимым оказывается понятие траектории. Для макроскопических тел (т. е. тел, образованных очень большим количеством атомов или молекул) неопределенности координаты и скорости не превосходят практически достижимой точности измерений этих величин, вследствие чего к таким телам понятие траектории применимо без всяких оговорок. Например, в случае пылинки с массой 1 мкг неопределенности координаты $\Delta x = 10^{-12}$ м соответствует неопределенность скорости $\Delta v_x \approx 10^{-13}$ м/с. Обе неопределенности, очевидно, пренебрежимо малы.

¹⁾ Вернер Гейзенберг (1901—1976) — немецкий физик-теоретик, один из создателей квантовой механики.

Для микрочастиц (электронов, протонов, нейтронов, отдельных атомов и молекул) понятие траектории оказывается в зависимости от условий, в которых происходит движение, либо неприменимым совсем, либо применимым с ограниченной точностью. Например, для электрона, движущегося в атоме, понятие траектории полностью утрачивает смысл. В то же время движение электронов в электронно-лучевой трубке можно приближенно рассматривать как происходящее по некоторым траекториям.

Таким образом, квантовые эффекты ограничивают применимость классической (ньютоновской и релятивистской) механики к телам малой массы.

Подводя итог, можно сказать, что ньютоновская механика есть механика малых (по сравнению с c) скоростей и больших (по сравнению с массами атомов) масс.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие принципы лежат в основе специальной теории относительности?
2. Как связаны друг с другом преобразования Галилея и преобразования Лоренца?
3. Как выглядит мировая линия покоящейся частицы?
4. Что означает псевдоевклидовость пространства-времени?
5. Какие вы знаете инвариантные величины?
6. Напишите формулу, выражающую импульс частицы через ее энергию и скорость.
7. Напишите формулу, выражающую энергию частицы через ее импульс.
8. Что характерно для частиц с нулевой массой?

Примеры решения задач

1. Собственное время жизни нестабильной элементарной частицы $\tau = 2,00$ мкс. Считая движение частицы прямолинейным и равномерным, определить путь l , который она пройдет до распада в системе отсчета, в которой время жизни частицы $t = 2,24$ мкс.

Решение. Интервал Δs между событиями является инвариантом. Поэтому

$$\Delta s^2 = c^2\tau^2 = c^2t^2 - l^2,$$

откуда

$$l = c \sqrt{t^2 - \tau^2} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{(2,24^2 - 2,00^2) \cdot 10^{-12}} = 303 \text{ м.}$$

2. Система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью $V = 0,500c$. Скорость некоторой частицы в системе K' равна $v' = 0,1732c (e'_x + e'_y + e'_z)$. Найти скорость v частицы в системе K и ее модуль.

Решение. Компоненты скорости в системе K равны

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2} = \frac{0,1732 + 0,500}{1 + 0,500 \cdot 0,1732} c = 0,620c,$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2} = \frac{0,1732 \sqrt{1 - 0,500^2}}{1 + 0,500 \cdot 0,1732} c = 0,138c,$$

аналогично $v_z = 0,138c$. Определив компоненты, находим скорость и ее модуль:

$$v = c [0,620 e_x + 0,138 (e_y + e_z)],$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 0,650c.$$

3. Импульс частицы массы m равен $p = mc$. Найти кинетическую энергию частицы E_k .

Решение. Кинетическая энергия равна разности полной энергии E и энергии покоя E_0 :

$$E_k = E - E_0.$$

Выразив полную энергию через импульс и подставив выражение для энергии покоя, получим

$$E_k = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} - mc^2 = c \sqrt{m^2 c^2 + m^2 c^2} - mc^2 = 0,414 mc^2.$$

4. Неподвижная частица массы M распадается на две одинаковые частицы с массой $m = 0,4M$ каждая. Найти скорость v , с которой движется каждая из этих частиц.

Решение. В силу закона сохранения импульса скорость образовавшихся частиц одинакова. Из закона сохранения энергии следует, что суммарная полная энергия образовавшихся частиц должна быть равна энергии покоя исходной частицы:

$$2 \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = Mc^2.$$

Подстановка $m = 0,4M$ дает, что

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0,8, \text{ откуда } v = 0,6c.$$

Глава 8. ГРАВИТАЦИЯ

§ 55. Закон всемирного тяготения

Гравитацией (или тяготением) называется универсальное взаимодействие (притяжение) между любыми видами материи.

Классическую нерелятивистскую теорию гравитации создал Ньютон в 1678 г. Он установил закон всемирного тяготения, согласно которому две материальные точки с массами m_1 и m_2 притягивают друг друга с силой, пропорциональной массам этих точек и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (55.1)$$

Коэффициент пропорциональности G называется гравитационной постоянной. Направлены

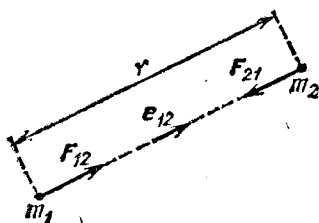


Рис. 55.1. На материальные точки действуют равные по модулю противоположно направленные силы

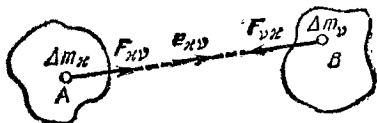


Рис. 55.2. Взаимодействие κ -й элементарной массы тела A с ν -й элементарной массой тела B ($e_{\kappa\nu}$ — единичный вектор)

силы взаимного притяжения вдоль соединяющей материальные точки прямой (рис. 55.1).

Силу, с которой, например, вторая материальная точка притягивает первую, можно представить в векторной форме:

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} e_{12}. \quad (55.2)$$

Здесь e_{12} — единичный вектор (орт), направленный от первой материальной точки ко второй. Сила F_{21} отличается от F_{12} знаком: $F_{21} = -F_{12}$.

Подчеркнем, что формулы (55.1) и (55.2) справедливы для материальных точек, т. е. тел, размерами которых можно пренебречь по сравнению с расстоянием между ними,

Чтобы вычислить силу взаимодействия между протяженными телами, нужно разбить эти тела на элементарные массы, столь малые, что их можно считать материальными точками (рис. 55.2). Сначала найдем силу $F_{\kappa B}$, с которой тело B притягивает κ -ю элементарную массу тела A . Для этого просуммируем $F_{\kappa v}$ по всем элементарным массам тела B , т. е. по всем значениям индекса v :

$$F_{\kappa B} = \sum_{v=1}^N G \frac{\Delta m_{\kappa} \Delta m_v}{r_{\kappa v}^2} e_{\kappa v}$$

($r_{\kappa v}$ — расстояние между элементарными массами, N — число элементарных масс, на которые разбито тело B).

Просуммировав найденное выражение по всем элементарным массам тела A , т. е. по всем значениям индекса κ , получим силу F_{AB} , с которой тело B действует на тело A :

$$F_{AB} = \sum_{\kappa=1}^K \sum_{v=1}^N G \frac{\Delta m_{\kappa} \Delta m_v}{r_{\kappa v}^2} e_{\kappa v} \quad (55.3)$$

(K — число элементарных масс, на которые разбито тело A). Число слагаемых в полученном выражении равно KN :

$$F_{AB} = F_{11} + F_{12} + \dots + F_{1N} + F_{21} + F_{22} + \dots + F_{2N} + \dots + F_{K1} + F_{K2} + \dots + F_{KN}.$$

Формула (55.3) дает приближенный результат. Чтобы получить точное значение силы F_{AB} , нужно устремить элементарные массы к нулю (числа K и N при этом будут стремиться к бесконечности), т. е. перейти от суммирования к интегрированию.

Найдем в качестве примера силу, с которой притягивают друг друга два тонких стержня, расположенных вдоль одной прямой (рис. 55.3). В данном случае все элементарные силы коллинеарны. Поэтому сложение сил можно заменить сложением их модулей и воспользоваться формулой (55.1). Из рис. 55.3 следует, что модуль силы, с которой элемент dx стержня A взаимодействует с элементом dy стержня B , равен

$$dF = G \frac{dm_A dm_B}{(r-x+y)^2} = G \frac{(m_A/2a) dx (m_B/2b) dy}{(r-x+y)^2}$$

(m_A — масса, а $2a$ — длина стержня A , m_B — масса, а $2b$ — длина стержня B , r — расстояние между центрами масс стержней). Проинтегрировав это выражение по x в пределах от $-a$ до $+a$ и по y в пределах

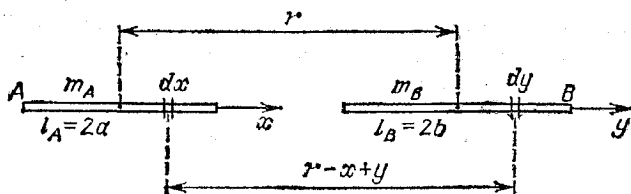


Рис. 55.3: Масса элемента стержня A длины dx равна $(m_A/2a)dx$, масса элемента стержня B длины dy равна $(m_B/2b)dy$

от $-b$ до $+b$, получим модуль силы взаимодействия стержней:

$$F_{AB} = \int dF = G \frac{m_A m_B}{4ab} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{dx dy}{(r - x + y)^2}.$$

Не приводя вычислений¹⁾, дадим окончательный результат:

$$F_{AB} = G \frac{m_A m_B}{4ab} \ln \frac{r^2 - (b - a)^2}{r^2 - (b + a)^2}. \quad (55.4)$$

Воспользовавшись формулой $\ln(1 - \alpha) \approx -\alpha$, справедливой для $\alpha \ll 1$, можно показать, что в случае, когда величины a и b много меньше r ($a \ll r$, $b \ll r$), т. е. стержни можно считать материальными точками, выражение (55.4) переходит в

$$F_{AB} = G \frac{m_A m_B}{r^2},$$

как и должно быть для материальных точек.

Если длина стержней одинакова ($b = a$), а расстояние между их центрами равно удвоенной длине стержня ($r = 4a$), формула (55.4) упрощается

¹⁾ Для тех, кто захочет проделать вычисления, укажем, что сначала нужно проинтегрировать выражение для F_{AB} по одной из переменных, скажем по x , считая другую переменную постоянной, затем проинтегрировать полученное выражение по y .

следующим образом:

$$F_{AB} = G \frac{m_A m_B}{4a^2} \ln \frac{4}{3} = G \frac{m_A m_B}{r^2} \cdot 4 \ln \frac{4}{3} = G \frac{m_A m_B}{r^2} \cdot 1,15. \quad (55.5)$$

Иногда можно встретить утверждение, что формула (55.1) справедлива для протяженных тел любой формы, причем под r следует понимать расстояние

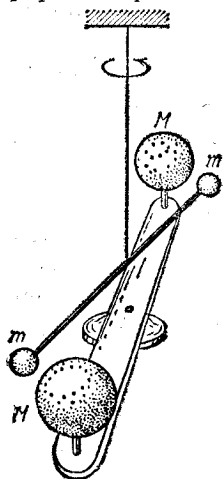


Рис. 55.4. Прибор Кавендиша для определения гравитационной постоянной. Свинцовые шары массы $m = 0,729$ кг прикреплены к концам легкого коромысла, подвешенного за середину к упругой нити. Шары массы $M = 158$ кг установлены на подставке, поворотом которой можно изменять расстояние между большими и малыми шарами

между центрами масс тел. Из рассмотренных примеров (формулы (55.4) и (55.5)) видно, что это утверждение ошибочно. Только если взаимодействующие тела представляют собой однородные шары или шаровые оболочки, вычисления по формуле (55.3) (с заменой суммирования интегрированием) приводят к формуле (55.2), где r — расстояние между центрами шаров (или оболочек). Следовательно, однородные шары взаимодействуют как материальные точки, имеющие массы шаров и помещенные в их центрах. Отсюда следует, что сила взаимодействия однородного шара с материальной точкой также определяется формулой (55.2), в которой под r надо подразумевать расстояние материальной точки от центра шара.

Значение гравитационной постоянной G было впервые определено Кавендишем¹⁾ в 1798 г. с по-

¹⁾ Генри Кавендиш (1731—1810) — английский физик и химик.

мощью метода крутильных весов (рис. 55.4). Сила, с которой малые шары притягивались к соответствующим большим шарам, определялась по закручиванию нити. Наиболее точным из определенных разными способами считается значение

$$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Подстановка в формулу (55.1) $m_1 = m_2 = 1 \text{ кг}$ и $r = 1 \text{ м}$ дает для силы F значение, численно равное G . Таким образом, два шара массы 1 кг каждый, центры которых отстоят на 1 м , притягивают друг друга с силой, равной $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н}$.

§ 56. Гравитационное поле

Гравитационное взаимодействие осуществляется посредством гравитационного поля. Всякое тело изменяет свойства окружающего его пространства — создает в нем гравитационное поле. Это поле проявляет себя в том, что на помещенное в него другое тело действует сила.

Для характеристики гравитационного поля вводится векторная величина

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (56.1)$$

где \mathbf{F} — сила, действующая в данной точке поля на тело массы m . Эта величина называется напряженностью гравитационного поля. Чем меньше размеры тела (и соответственно меньше его масса), тем точнее величина (56.1) будет характеризовать поле именно «в данной точке». Размерность напряженности гравитационного поля совпадает с размерностью ускорения.

Если пренебречь обусловленной вращением Земли центробежной силой инерции (см. рис. 37.2), то напряженность гравитационного поля вблизи поверхности Земли можно считать равной ускорению свободного падения тел.

Согласно формуле (55.2) на тело массы m , находящееся в гравитационном поле Земли на расстоянии r от ее центра, действует сила

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r$$

(M — масса Земли, e_r — орт радиус-вектора r , проведенного из центра Земли к телу m). Разделив эту силу на массу тела, получим напряженность гравитационного поля Земли в точке, определяемой радиус-вектором r :

$$g = -G \frac{M}{r^2} e_r. \quad (56.2)$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек определяется формулой (23.5). Заменяя в этой формуле m_1 массой Земли M ¹⁾, а m_2 — массой тела m , получим выражение

$$E_p = -G \frac{Mm}{r}, \quad (56.3)$$

которое определяет взаимную потенциальную энергию Земли и тела массы m , находящегося на расстоянии r от центра Земли.

Выражение (56.3) можно трактовать как потенциальную энергию тела массы m , которой оно обладает в гравитационном поле Земли. Разделив эту энергию на m , получим величину

$$\varphi = \frac{E_p}{m} = -G \frac{M}{r}, \quad (56.4)$$

которая определяется только массой Земли (т. е. тела, создающего гравитационное поле) и расстоянием от центра Земли до данной точки поля, вследствие чего также может быть использована для характеристики поля.

Величину

$$\varphi = \frac{E_p}{m} \quad (56.5)$$

(где E_p — потенциальная энергия, которой обладает тело массы m в данной точке поля) называют потенциалом гравитационного поля.

Между напряженностью поля g и потенциалом φ имеется связь, которая вытекает из связи между по-

¹⁾ В предыдущем параграфе было выяснено, что при вычислении силы взаимодействия Земли с материальной точкой (т. е. телом, размеры которого много меньше радиуса Земли) Землю можно считать материальной точкой.

тенциальной энергией и силой. Согласно формуле (22.11)

$$F = -\nabla E_p.$$

Подставив сюда вместо F и E_p их значения mg и $m\varphi$, найдем, что

$$mg = -\nabla(m\varphi).$$

Константу m можно вынести за знак градиента и затем сократить. В результате получается формула

$$g = -\nabla\varphi. \quad (56.6)$$

Таким образом, напряженность гравитационного поля равна градиенту потенциала, взятому с обратным знаком.

Потенциальная энергия тела, находящегося вблизи поверхности Земли, $E_p = mgh$ ¹⁾. Разделив E_p на m , получим для потенциала гравитационного поля вблизи поверхности Земли формулу

$$\varphi = gh. \quad (56.7)$$

§ 57. Космические скорости

Для того чтобы тело стало спутником Земли, т. е. двигалось по круговой околоземной орбите, ему нужно сообщить скорость v_1 , значение которой определяется вторым законом Ньютона. Положив радиус орбиты равным радиусу Земли R , напишем уравнение

$$m \frac{v_1^2}{R} = mg.$$

Здесь m — масса тела, v_1^2/R — ускорение, mg — сила тяжести, действующая на тело. Из написанного уравнения следует, что

$$v_1 = \sqrt{gR}. \quad (57.1)$$

Скорость (57.1) называется первой космической скоростью. Радиус Земли $R = 6,37 \cdot 10^6$ м,

¹⁾ Это выражение, казалось бы, не согласуется с выражением (56.3). Суть дела в том, что выражение (56.3) годится для любых значений r , больших радиуса Земли R , и нормировано так, чтобы E_p обращалась в нуль на бесконечности. Выражение (56.6) справедливо только для таких значений h , которые удовлетворяют условию $h \ll R$, и нормировано так, чтобы E_p обращалась в нуль на поверхности Земли.

$g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Следовательно,

$$v_1 = \sqrt{9,81 \cdot 6,37 \cdot 10^6} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ м/с} \approx 8 \text{ км/с}.$$

Скорость v_2 , которую нужно сообщить телу при запуске с Земли для того, чтобы оно вышло из сферы земного притяжения (т. е. удалилось на такое расстояние, при котором притяжение к Земле становится пренебрежимо малым), называется второй космической скоростью. Для нахождения v_2 воспользуемся законом сохранения энергии (сопротивлением воздуха при прохождении тела через атмосферу Земли пренебрегаем). В момент запуска полная энергия тела равна

$$E = \frac{mv_2^2}{2} - G \frac{Mm}{R} \quad (57.2)$$

(M — масса Земли; см. формулу (56.3); напомним, что выражение (56.3) нормировано так, чтобы потенциальная энергия обращалась в нуль на бесконечности). При удалении тела «на бесконечность» полная энергия становится равной нулю (мы ищем минимальное значение v_2 , поэтому считаем, что скорость тела на бесконечности равна нулю). Приравняв выражение (57.2) нулю, получим для v_2 значение

$$v_2 = \sqrt{2GM/R}. \quad (57.3)$$

Если пренебречь различием между силой тяжести mg и силой гравитационного притяжения тела к Земле (см. рис. 37.2), можно написать равенство

$$mg = G \frac{Mm}{R^2}.$$

Отсюда $GM/R = gR$. Следовательно, выражение (57.3) можно представить в виде

$$v_2 = \sqrt{2gR}. \quad (57.4)$$

Приняв во внимание формулу (57.1), получим, что

$$v_2 = v_1 \sqrt{2} = 11,2 \text{ км/с} \approx 11 \text{ км/с}.$$

Отметим, что значение v_2 не зависит от направления, в котором запускается тело с Земли. От этого направления зависит лишь вид траектории, по которой тело удаляется от Земли.

Скорость v_3 , которую нужно сообщить телу при запуске с Земли для того, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, называется третьей космической скоростью.

Подставив в формулу (57.3) вместо M массу Солнца ($1,97 \cdot 10^{30}$ кг) и вместо R — радиус земной орбиты ($1,50 \cdot 10^{11}$ м; в момент старта с Земли тело находится на таком расстоянии от Солнца), получим значение скорости, равное

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,97 \cdot 10^{30} / 1,50 \cdot 10^{11}} = \\ = 4,2 \cdot 10^4 \text{ м/с} = 42 \text{ км/с.} \end{aligned}$$

Такова была бы третья космическая скорость, если бы Земля в момент запуска была неподвижна и не притягивала бы тело к себе. Но Земля сама движется относительно Солнца со скоростью 30 км/с. Поэтому при запуске в направлении орбитального движения Земли скорость 42 км/с относительно Солнца достигается при скорости относительно Земли, равной $42 - 30 = 12$ км/с, а при запуске в противоположном направлении $42 + 30 = 72$ км/с. Таковы были бы минимальное и максимальное значения v_3 , если бы не было силы притяжения тела к Земле. С учетом этого притяжения для третьей космической скорости получаются значения от 17 до 73 км/с.

Впервые запуски тел с космическими скоростями были осуществлены в СССР. 4 октября 1957 г. был запущен искусственный спутник Земли. 2 января 1959 г. была запущена космическая ракета, которая вышла из сферы земного притяжения и стала первой искусственной планетой Солнечной системы. 12 апреля 1961 г. был осуществлен запуск человека в космическое пространство. Первый советский космонавт Юрий Алексеевич Гагарин совершил полет вокруг Земли и благополучно приземлился.

§ 58. Понятие об общей теории относительности

Созданная А. Эйнштейном в 1916 г. общая теория относительности (ОТО) представляет собой классическую (неквантовую) релятивистскую теорию гравитации. Некоторые физики склонны считать ОТО самой красивой из существующих физических теорий.

В основу ОТО Эйнштейн положил принцип эквивалентности (см. § 36), согласно которому свойства движения в неинерциальной системе отсчета те же, что в инерциальной системе при наличии гравитационного поля. Таким образом, неинерциальная система отсчета эквивалентна некоторому гравитационному полю.

Из принципа эквивалентности вытекает, что все явления, которые обусловлены неинерциальностью системы отсчета, могут наблюдаться в инерциальной системе в результате действия сил тяготения.

В качестве примера рассмотрим движение в вакууме световой частицы — фотона (совокупность таких частиц, летящих «бок о бок», образует световой луч). Из оптики известно, что в вакууме в отсутствие каких-либо полей световые лучи прямолинейны. Следовательно, в инерциальной системе отсчета в отсутствие гравитационного поля фотон летит со скоростью c по прямолинейной траектории. Примем эту траекторию за ось x (рис. 58.1). В неинерциальной

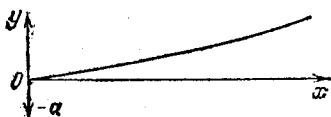


Рис. 58.1. Искривление траектории фотона (луча света) в неинерциальной системе отсчета, движущейся с постоянным ускорением $-a$. В инерциальной системе отсчета фотон летит вдоль оси x

системе отсчета, движущейся с ускорением $-a$ параллельно оси y , фотон будет обладать ускорением a , перпендикулярным к оси x . Поэтому относительно неинерциальной системы отсчета, одновременно с движением вдоль оси x со скоростью c , фотон будет двигаться равноускоренно вдоль оси y . За время t фотон пройдет вдоль оси x путь $x = ct$ и вдоль оси y путь $y = at^2/2$. Исключив из выражений для x и y время t , получим уравнение траектории фотона, т. е. уравнение луча в неинерциальной системе отсчета:

$$y = \frac{a}{2c^2} x^2.$$

Таким образом, световой луч, прямолинейный в инерциальной системе отсчета, в неинерциальной системе отсчета искривляется и приобретает форму параболы.

Согласно принципу эквивалентности такое же искривление луча должно наблюдаться в инерциальной

системе отсчета под действием перпендикулярного к лучу гравитационного поля. Отсюда заключаем, что световые частицы — фотоны подвержены действию сил тяготения.

В § 48 мы отмечали, что пространство, в котором квадрат расстояния dl между двумя точками определяется выражением

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

называется евклидовым. В таком пространстве справедлива евклидова геометрия, в которой постулируется, что линии, вдоль которых расстояние между двумя точками минимально, являются прямыми (образно можно сказать, что прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками). В евклидовой геометрии сумма углов треугольника равна π , а отношение длины окружности к радиусу равно 2π . Пространство с такими свойствами называется плоским.

Псевдоевклидово четырехмерное пространство-время в отсутствие гравитационных полей также является плоским. При переходе в неинерциальную систему отсчета пространство-время оказывается искривленным.

Рассмотрим понятие кривизны пространства на примере двумерных пространств. В случае двумерного плоского пространства множество принадлежащих ему точек образует плоскость и кривизна пространства равна нулю. Простейшим двумерным пространством с отличной от нуля кривизной является сфера (рис. 58.2). Кривизна этого пространства растет с уменьшением R и принимается равной $1/R^2$. Кратчайшим расстоянием между точками 1 и 2 в таком пространстве является не прямая (точки которой не принадлежат данному пространству), а дуга большой окружности (т. е. окружности, которая делит сферу на две равные части).

Линии, вдоль которых расстояние между двумя точками является минимальным, называются геодезическими. В случае сферы геодезическими линиями являются большие окружности.

Геометрия сферического пространства неевклидова. Это, в частности, проявляется в том, что сумма углов треугольника превышает π (рис. 58.2а), а длина окружности l меньше, чем $2\pi R$ (рис. 58.2б).

Мы выяснили неевклидовость двумерного сферического пространства, рассматривая его «со стороны» из трехмерного пространства. Однако «обитатели» сферы могли бы установить неевклидовость пространства, в котором они «живут», не выходя за его пределы. Для этого им достаточно было бы обнаружить,

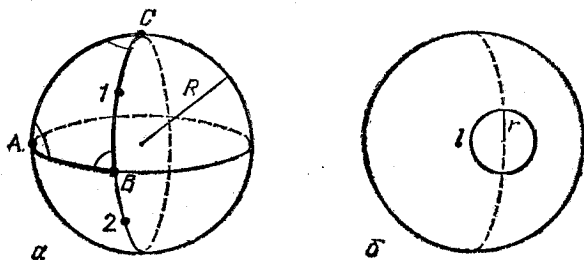


Рис. 58.2. Двумерное сферическое пространство: *a* — все углы при вершинах треугольника *ABC* равны $\pi/2$; сумма углов равна $3\pi/2$; *b* — радиус r окружности, построенной в двумерном сферическом пространстве, равный отрезку дуги большой окружности, превышает радиус окружности на плоскости

что сумма углов треугольника отлична от π , а длина окружности не равна $2\pi r$.

Аналогично обстоит дело в случае трехмерного пространства, в котором мы живем. Для того чтобы определить метрику этого пространства, нет необходимости рассматривать его со стороны из четырехмерного пространства (что невозможно). Достаточно, скажем, определить сумму углов треугольника и отношение длины окружности к ее радиусу. Следует иметь в виду, что вблизи поверхности Земли неевклидовость пространства крайне мала и не может наблюдаться непосредственно.

Вся совокупность экспериментальных данных указывает на то, что пространство, в котором мы живем, является практически плоским (т. е. евклидовым) лишь в случае слабых гравитационных полей (к числу которых относится поле Земли). Однако вблизи больших гравитирующих масс это пространство искривляется и становится неевклидовым.

Обратимся к четырехмерному пространству-времени. При наличии гравитационного поля оно оказывается искривленным. Кратчайшим расстоянием ме-

жду двумя мировыми точками в пространстве-времени является геодезическая линия.

Согласно Эйнштейну никаких специальных гравитационных сил не существует и всякое тело всегда движется в пространстве-времени «свободно» вдоль геодезических линий. При этом в обычном трехмерном пространстве тело движется, вообще говоря, вдоль криволинейных траекторий с переменной скоростью, т. е. так, как оно двигалось бы под действием некоторой силы. Например, Земля движется вокруг Солнца по искривленной траектории (орбите) не потому, что какие-то силы препятствуют ее прямолинейному движению, а потому, что она беспрепятственно скользит в искривленном пространстве-времени вдоль геодезической линии в окрестности Солнца. Таким образом, тяготение есть свойство самого пространства-времени, а не некое воздействие на его фоне.

Геометрия искривленного пространства-времени является неевклидовой, в чем мы убедились на примере двумерного сферического пространства. Первую неевклидову геометрию построил в 1826 г. Н. И. Лобачевский¹⁾. Затем появились неевклидовы геометрии Я. Больяй²⁾, К. Гаусса и, наконец, Б. Римана³⁾. Все они отличаются аксиомами, исходя из которых они построены. Эйнштейн положил в основу ОТО риманову геометрию.

Эйнштейн вывел уравнения гравитационного поля, которые связывают величину, характеризующую кривизну пространства-времени (тензор кривизны), с величиной, характеризующей распределение источников тяготения (тензором энергии-импульса). Уравнения Эйнштейна описывают, как заданное распределение энергии и импульса (в том числе и энергии покоя тел) искажает структуру пространства-времени в окрестности этого распределения. Эти уравнения исключительно сложны. Известно лишь несколько их точных решений.

¹⁾ Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) — русский математик.

²⁾ Януш Больяй (1802—1860) — венгерский математик.

³⁾ Берихард Риман (1826—1866) — немецкий математик.

В 1916 г. К. Шварцшильдом¹⁾ было получено решение уравнений Эйнштейна для случая пространства вокруг сферического тела. Если пренебречь гравитационными полями планет, условие этой задачи соответствует модели Солнечной системы.

Общая теория относительности дала, в частности, объяснение трех эффектов, наблюдаемых экспериментально.

Вращение перигелия планет. Согласно решению Шварцшильда планеты движутся по эллиптическим орбитам, которые медленно поворачиваются (прецессируют) в своей плоскости. Это приводит к вращению ближайшей к Солнцу точки орбиты, называемой перигелием. Эффект прецессии крайне мал. Сильнее всего он выражен для самой близкой к Солнцу планеты — Меркурия. Поворот оси эллиптической орбиты этой планеты составляет всего 43 угловых секунды в столетие (полный оборот осуществляется за три миллиона лет). Для Земли прецессия вызывает поворот орбиты на 4 угловых секунды в столетие.

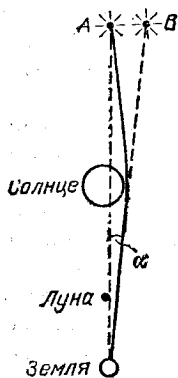


Рис. 58.3. Отклонение световых лучей Солнцем: A — действительное положение звезды, B — кажущееся положение. На рисунке не выдержан масштаб. В действительности расстояние от Солнца до точек A и B намного превосходит расстояние от Солнца до Земли. Угол α между направлениями на A и на B равен $1,75''$.

Прецессия орбит планет подтверждена астрономическими наблюдениями, причем теоретические и наблюдаемые значения совпадают с очень большой точностью.

Искривление световых лучей. Одним из подтверждений ОТО является искривление лучей под действием гравитационного поля (рис. 58.3). Для лучей,

¹⁾ Карл Шварцшильд (1873—1916) — немецкий астроном и физик.

проходящих в непосредственной близости к поверхности Солнца, теория дает значение угла отклонения α , равное 1,75 угловых секунд. Для лучей видимого света это явление можно наблюдать лишь во время полного солнечного затмения, когда звезды вблизи солнечного диска становятся видимыми. В силу разных причин такие измерения оказываются ненадежными. С большой точностью было определено отклонение Солнцем радиолучей от квазаров¹⁾ (оно должно быть таким же, как и отклонение световых лучей). Полученное значение угла α совпало с предсказанным ОТО с погрешностью до 1 %.

Гравитационное красное смещение. Согласно ОТО ход времени вблизи гравитирующих объектов замедляется. Чем сильнее гравитационное поле, тем медленнее течет время по сравнению с течением времени для наблюдателя, находящегося вне поля. Таким образом, на Солнце время течет медленнее, чем на Земле. Время течет быстрее на горных вершинах, чем в долинах. В Италии, США и Японии были проделаны эксперименты, в которых сравнивался ход двух идентичных атомных часов, одни из которых находились высоко в горах. Результаты измерений оказались в полном согласии с ОТО.

Допустим, что от Солнца к Земле распространяется световая волна, причем за одну секунду солнечного времени посылаются ν_c гребней и впадин волны. Тогда ν_c — частота света на Солнце. Так как время на Солнце течет медленнее, чем на Земле, одной секунде солнечного времени соответствуют $(1 + \delta)$ секунд земного времени ($\delta > 0$). За этот промежуток времени на Землю придут ν_c гребней и впадин волны. Следовательно, частота света на Земле ν_z будет в $(1 + \delta)$ раз меньше, чем на Солнце:

$$\nu_z = \nu_c / (1 + \delta).$$

Это явление называется гравитационным красным смещением (уменьшение частоты приводит к смещению спектральной линии к красному краю спектра).

¹⁾ Квазар — квазизвездный источник радионизлучений с длиной волны порядка нескольких сантиметров.

Вычисления приводят к следующей формуле для относительного изменения частоты за счет гравитационного красного смещения:

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2}. \quad (58.1)$$

Здесь ν_1 — частота излучения в точке, в которой потенциал гравитационного поля имеет значение Φ_1 , а ν_2 — частота в точке, в которой гравитационный потенциал имеет значение Φ_2 . Разность $\nu_2 - \nu_1$ очень мала по сравнению с ν_1 или ν_2 ; поэтому в качестве ν в знаменателе можно взять любую из частот ν_1 и ν_2 .

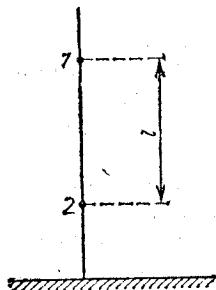


Рис. 58.4. Точки 1 и 2 лежат на одной вертикали вблизи поверхности Земли

Рассмотрим вертикальный световой луч вблизи поверхности Земли (рис. 58.4). Согласно формуле (56.7) разность гравитационных потенциалов между точками 1 и 2 равна

$$\Phi_1 - \Phi_2 = gl.$$

Подстановка этого значения в формулу (58.1) дает, что

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gl}{c^2} \quad (58.2)$$

(мы обозначили разность частот $\nu_2 - \nu_1$ через $\Delta\nu$).

В 1960 г. американские физики Р. В. Паунд¹⁾ и Дж. Ребка измерили в лабораторных условиях гравитационное изменение частоты γ -фотонов. Расстояние l в их опыте равнялось 21 м. Подстановка значений g , l и c в формулу (58.2) дает для относительного изменения частоты значение

$$\frac{gl}{c^2} = \frac{9,81 \cdot 21}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 2 \cdot 10^{-15}.$$

Полученный результат совпал с теоретическим.

Умножив числитель и знаменатель в левой части формулы (58.2) на постоянную Планка h и учтя, что

¹⁾ Роберт Вивиан Паунд (р. 1919) — американский физик-экспериментатор.

произведение $h\nu$ дает энергию ε фотона, можно придать формуле вид

$$\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon}{c^2} gl.$$

Согласно ньютоновской теории такое же изменение кинетической энергии получает, пройдя по вертикали расстояние l , частица с массой $m = \varepsilon/c^2$. Это обстоятельство послужило поводом для того, чтобы объяснять воздействие гравитации на свет тем, что фотон будто бы обладает массой, равной $h\nu/c^2$.

Такая точка зрения совершенно неправомерна. В случае слабых гравитационных полей и малых скоростей ($v \ll c$) ОТО переходит в ньютоновскую теорию (в закон всемирного тяготения), которая при указанных условиях оказывается справедливой. Однако фотон всегда движется со скоростью c и поэтому не может описываться нерелятивистской ньютоновской теорией. Например, расчет искривления световых лучей Солнцем согласно ньютоновской теории приводит к грубо неверному результату — отклонение оказывается ровно в два раза меньшим, чем получающееся в ОТО в полном согласии с опытом. Чтобы с помощью ньютоновской теории получить правильное значение угла отклонения лучей, нужно приписать фотону массу, равную $2h\nu/c^2$. Но не может же одна и та же частица иметь несколько различных значений массы. Правильная точка зрения заключается в том, что фотон — безмассовая частица. Это не мешает ему испытывать воздействие гравитационного поля. В теории Ньютона источником гравитационного поля служит масса тел. Согласно же ОТО гравитация порождается энергией и импульсом. Фотон, не имея массы, обладает как энергией, так и импульсом.

А. А. Фридман¹⁾ нашел в 1922 г. решение уравнений Эйнштейна в предположении, что вещество однородно распределено по пространству. Из этого решения следует, что однородная Вселенная не может быть стационарной. Она всегда находится в состоянии либо расширения, либо сжатия. Наблюдения по-

¹⁾ Александр Александрович Фридман (1888—1925) — советский физик и математик.

казывают, что в настоящее время Вселенная находится в состоянии расширения.

В 1929 г. Хаббл¹⁾ обнаружил у далеких галактик одинаковое для всех спектральных линий относительное увеличение длины волны, примерно пропорциональное расстоянию r от нас до галактики:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = Hr. \quad (58.3)$$

Это соотношение носит название закона Хаббла, а коэффициент пропорциональности H — постоянной Хаббла.

Возрастание длин волн обусловлено удалением источников света (это явление называется эффектом Доплера). Из закона Хаббла вытекает, что галактики удаляются от нас (разлетаются) со скоростями, пропорциональными расстояниям до них. Чтобы описать разбегание галактик, говорят, что Вселенная расширяется. Это расширение служит подтверждением правильности ОТО.

Следует иметь в виду, что разбегание галактик происходит не только относительно Земли (в таком случае Земля могла бы рассматриваться как «центр» Вселенной). Из любой точки Вселенной далекие галактики будут видны удаляющимися от этой точки. В этом и заключается сущность расширяющейся Вселенной.

В заключение отметим, что до сих пор не обнаружено ни одного отклонения от предсказаний общей теории относительности.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Можно ли вычислять силу гравитационного взаимодействия между протяженными телами произвольной формы по формуле для силы взаимодействия материальных точек, подразумевая под r в этой формуле расстояние между центрами масс тел?
2. Чему равны напряженность и потенциал гравитационного поля вблизи поверхности Земли?
3. При соблюдении каких условий справедлив закон всемирного тяготения?

¹⁾ Эдвин Пауэлл Хаббл (1899—1953) — американский астроном.

Примеры решения задач

1. Средний радиус земной орбиты $R = 1,496 \cdot 10^{11}$ м, период обращения Земли вокруг Солнца $T = 365,25$ сут. Воспользовавшись этими данными, определить массу Солнца M . Орбиту Земли считать окружностью.

Решение. Скорость движения Земли по орбите $v = 2\pi R/T$. Нормальное ускорение Земли

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2 : R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Умножим a_n на массу Земли m и приравняем получившееся выражение силе, с которой Солнце притягивает Землю:

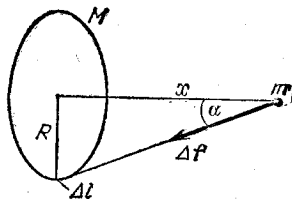
$$m \frac{4\pi^2 R}{T^2} = G \frac{mM}{R^2}.$$

Отсюда

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ кг.}$$

2. Имеется тонкое однородное кольцо радиуса R . На оси кольца помещается частица. Найти расстояние r частицы от центра кольца, при котором сила притяжения частицы к кольцу максимальна.

Решение. Пусть масса кольца равна M , а частицы m . Разобьем кольцо на одинаковые очень малые элементы длины Δl (см. рисунок). Модуль силы, с которой элемент кольца притягивает частицу,



К задаче 2

$$\Delta f = G \frac{m (M/2\pi R) \Delta l}{R^2 + x^2},$$

где x — расстояние частицы от центра кольца. Результирующая всех таких сил направлена вдоль оси x . Каждая из сил Δf вносит в результирующую вклад

$$\Delta f \cos \alpha = \Delta f \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}}.$$

Просуммировав это выражение по всему кольцу, получим модуль силы F , с которой кольцо притягивает частицу:

$$F = \sum \Delta f \cos \alpha.$$

Подставив выражения для Δf и $\cos \alpha$ и приняв во внимание, что $\sum \Delta l = 2\pi R$, придем к формуле

$$F = G \frac{mMx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Чтобы найти значение $x = r$, при котором F максимальна, продифференцируем полученное выражение по x и приравняем производную нулю:

$$\frac{dF}{dx} = GmM \frac{R^2 - 2x^2}{(R^2 + x^2)^{5/2}} = 0.$$

Отсюда следует, что значение x , при котором сила максимальна, равно $R/\sqrt{2}$. Таким образом, $r = R/\sqrt{2}$.

Г л а в а 9. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

§ 59. Статистическая физика и термодинамика

Существует два способа описания процессов, происходящих в макроскопических телах (т. е. телах, состоящих из очень большого числа частиц — атомов или молекул), — статистический и термодинамический.

Статистической физикой называется раздел физики, посвященный изучению свойств макроскопических тел, исходя из свойств образующих тело частиц и взаимодействий между ними.

Возьмем в качестве примера один кубический сантиметр газа при комнатной температуре (т. е. температуре порядка 20°C) и атмосферном давлении. В этом количестве газа содержится приблизительно $3 \cdot 10^{19}$ молекул. Казалось бы, что, зная положение и скорость всех молекул в некоторый начальный момент времени, можно с помощью законов механики определить положение и скорость каждой молекулы, а следовательно, и состояние газа в последующие моменты времени. Однако для столь детального описания совокупности молекул, образующих газ, потребовалось бы написать, а затем решить около 10^{20} уравнений движения (по три уравнения на каждую молекулу). Если даже затрачивать на написание каждого уравнения только одну секунду, то лишь на написание уравнений (без их решения!) потребовалось бы время, в 300 раз превышающее возраст Вселенной (который оценивается в 10^{10} лет).

Кроме непреодолимых технических трудностей (которые сами по себе приобретают принципиальный характер), существуют физические причины, по которым рассмотренное выше описание движения всех молекул оказывается неосуществимым. В § 54 мы по-

знакомились с соотношением неопределенностей Гейзенберга, согласно которому «абсолютно» точное одновременное определение координат и скоростей молекул невозможно. Поэтому начальные значения координат и скоростей могут быть определены лишь с неизбежной погрешностью. С течением времени эти погрешности будут накапливаться, так что очень скоро и координаты, и скорости молекул будут сильно отличаться от расчетных.

Допустим, что мы даже решим задачу и получим для каждого момента времени 10^{20} точных значений координат и 10^{20} точных значений компонент скоростей молекул. Вся эта необозримая громада чисел не даст нам никакого представления о состоянии и свойствах газа как целого. Вместе с тем состояние газа определяется заданием всего лишь трех макроскопических параметров: температуры, давления и объема. Суть дела в том, что в огромной совокупности молекул возникают качественно новые закономерности, называемые статистическими. Эти закономерности утрачивают смысл при переходе к системам с малым числом частиц.

Статистическая физика изучает статистические закономерности. При этом она пользуется вероятностными методами и истолковывает свойства тел, непосредственно наблюдаемые на опыте (такие как давление и температура), как суммарный, усредненный результат действия отдельных молекул.

В отличие от статистической физики, термодинамика изучает свойства макроскопических тел и протекающие в них процессы, не вдаваясь в микроскопическую природу тел. Не вводя в рассмотрение атомы и молекулы, не входя в микроскопическое рассмотрение процессов, термодинамика позволяет делать ряд выводов относительно их протекания.

В основе термодинамики лежит небольшое число фундаментальных законов (называемых *началами* термодинамики), установленных путем обобщения очень большого количества опытных фактов. По этой причине результаты, получаемые термодинамикой, имеют весьма общий характер.

У статистической физики и термодинамики общий предмет изучения — свойства веществ и происходящие в них процессы. Подходя к изучению этих свойств

и процессов с различных точек зрения, статистическая физика и термодинамика взаимно дополняют друг друга, образуя, по существу, единое целое.

§ 60. Состояние термодинамической системы. Процесс

Термодинамической системой называется совокупность макроскопических тел, которые могут обмениваться энергией между собой и с внешней средой (т. е. с другими телами). Примером может служить жидкость и находящийся в соприкосновении с ней пар или газ. В частности, система может состоять из одного твердого, жидкого или газообразного тела.

Термодинамическая система может находиться в различных состояниях, отличающихся температурой, давлением, объемом, плотностью и т. д. Подобные величины, характеризующие состояние системы, называются параметрами состояния.

Параметры состояния не всегда имеют определенные значения. Например, у тела, подогреваемого с одной стороны и охлаждаемого с другой, температура в разных точках будет различной и телу, как целому, нельзя приписать определенное значение температуры. Состояние, в котором хотя бы один из параметров не имеет определенного значения, называется **неравновесным**.

Состояние термодинамической системы будет **равновесным**, если все параметры состояния имеют определенные значения, не изменяющиеся с течением времени.

Термодинамические системы, которые не обмениваются с внешней средой ни энергией, ни веществом, называются **изолированными** (или замкнутыми).

Если систему, находящуюся в неравновесном состоянии, изолировать (в указанном выше смысле) от внешней среды, т. е. предоставить самой себе, то она перейдет в равновесное состояние. Такой переход называется **процессом релаксации** или просто **релаксацией** (латинское слово *relaxatio* означает уменьшение напряжения, ослабление). Время, за которое первоначальное отклонение какой-либо величины от равновесного значения уменьшается в e раз, называется **временем релаксации**. Для каж-

дого параметра состояния имеется свое время релаксации. Наибольшее из этих времен представляет собой время релаксации системы.

Поясним сказанное примером. Пусть в теплоизолированном цилиндрическом сосуде, закрытом плотно пригнанным поршнем, находится в равновесном состоянии газ. Давление газа равно p , температура T . Вдвинем резко на небольшое расстояние поршень и сразу вернем его в первоначальное положение. Равновесие газа будет нарушено. Давление в непосредственной близости к поршню возрастет и станет, предположим, равным $(p + 272)$ Па, температура газа вблизи поршня также возрастет и примет значение $(T + 0,272)$ К. После возвращения поршня в первоначальное положение начнется процесс релаксации. Допустим, что за время t_1 отклонение давления от равновесного значения p станет равным 100 Па (напомним, что $e = 2,72$), а за время t_2 , большее чем t_1 , отклонение температуры от значения T становится равным 0,100 К. Тогда время релаксации газа будет равно t_2 .

Термодинамическим процессом называется переход системы из одного состояния в другое. Такой переход всегда связан с нарушением равновесия системы. Например, чтобы уменьшить объем газа, заключенного в описанный выше сосуд, нужно вдвинуть поршень. При этом газ будет сжиматься и в первую очередь повысится давление газа вблизи поршня — равновесие будет нарушено. Нарушение равновесия будет тем значительнее, чем быстрее перемещается поршень. Если двигать поршень очень медленно, то равновесие нарушается незначительно и давление в разных точках мало отличается от равновесного значения, отвечающего данному объему газа. В пределе при бесконечно медленном сжатии давление газа будет иметь в каждый момент времени определенное значение. Следовательно, состояние газа все время будет равновесным, так что бесконечно медленный процесс окажется состоящим из последовательности равновесных состояний. Такой процесс называется равновесным или квазистатическим.

Бесконечно медленный процесс является абстракцией. Практически можно считать квазистатическим процесс, протекающий настолько медленно, что откло-

нения значений параметров от равновесных пренебрежимо малы.

При изменении направления равновесного процесса (например, замене сжатия газа расширением) система будет проходить через те же равновесные состояния, что и при прямом ходе, но в обратной последовательности. Поэтому равновесные процессы называют также обратимыми.

Если по координатным осям откладывать значения каких-либо двух параметров (например, p и V или p и T и т. д.), то равновесное состояние системы можно изобразить точкой на координатной плоскости (рис. 60.1), а обратимый процесс — сплошной линией. Неравновесные состояния и процессы так изображать нельзя. Необратимые процессы, протекающие между двумя равновесными состояниями, мы будем условно изображать штриховыми линиями.

Процесс, при котором система после ряда изменений возвращается в исходное состояние, называется круговым процессом или циклом. Обратимый цикл изображается на координатной плоскости замкнутой кривой.

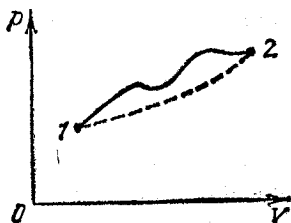


Рис. 60.1. Точки 1 и 2 изображают равновесные состояния системы, сплошная линия — обратимый, а штриховая — необратимый процесс

§ 61. Молекулярно-кинетические представления

Согласно молекулярно-кинетическим представлениям любое тело (твердое, жидкое или газообразное) состоит из мельчайших обособленных частиц, называемых молекулами. Эти частицы находятся в беспорядочном, хаотическом движении, интенсивность которого зависит от температуры тела. Такое движение молекул называется тепловым.

Непосредственным доказательством существования теплового движения молекул служит открытое в 1827 г. Броуном¹⁾ явление (броуновское движение),

¹⁾ Роберт Броун (1773—1858) — английский ботаник.

закрывающееся в том, что весьма малые (видимые только в микроскоп) взвешенные в жидкости макроскопические твердые частицы всегда находятся в состоянии непрерывного беспорядочного движения, которое не зависит от внешних причин и обусловлено молекулярным движением в веществе — движение взвешенных частиц совершается под влиянием беспорядочных ударов молекул жидкости.

Идея об атомистическом строении вещества была высказана еще древними греками. Однако у древних греков эта идея была всего лишь гениальной догадкой. В XVII веке представление о молекулярной природе вещества возрождается вновь, но уже не как догадка, а как научная гипотеза. Особенное развитие эта гипотеза получила в трудах М. В. Ломоносова¹⁾, который предпринял попытку дать единую картину всех известных в его время физических и химических явлений. При этом он исходил из корпускулярного (корпускула — частица) представления о строении вещества. Ломоносов «причину тепла» видел во вращательном движении частиц тела. Таким образом, Ломоносовым были по существу сформулированы молекулярно-кинетические представления.

Для характеристики масс атомов и молекул используются величины, называемые относительной атомной массой (или просто атомной массой) химического элемента и относительной молекулярной массой (или просто молекулярной массой) вещества. (Прежде эти величины назывались атомным и молекулярным весом.)

Относительной атомной массой (A_r) химического элемента называется отношение массы атома этого элемента к $1/12$ массы атома ^{12}C (так обозначается изотоп углерода с массовым числом 12). Относительной молекулярной массой (M_r) вещества называется отношение массы молекулы этого вещества к $1/12$ массы атома ^{12}C . Из их определения следует, что атомная и молекулярная массы являются безразмерными величинами.

Масса, равная $1/12$ массы атома ^{12}C , называется атомной единицей массы (а. е. м.). Обозначим

¹⁾ Михаил Васильевич Ломоносов (1711—1765) — первый русский ученый-естествоиспытатель мирового значения.

се через $m_{\text{ед}}$. Тогда масса атома будет равна $A_r m_{\text{ед}}$, а масса молекулы $M_r m_{\text{ед}}$.

Одной из основных единиц СИ является единица количества вещества, называемая молем. Моль представляет собой количество вещества, в котором содержится число частиц (атомов, молекул, ионов, электронов или других структурных единиц), равное числу атомов в 0,012 кг изотопа углерода ^{12}C .

Число частиц, содержащихся в моле вещества, называется постоянной Авогадро¹⁾. Опытным путем найдено, что эта постоянная равна

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}. \quad (61.1)$$

Следовательно, в моле железа содержится N_A атомов железа, в моле воды содержится N_A молекул воды, в моле электронов содержится N_A электронов и т. д.

Массу моля обозначают буквой M и называют молярной массой. Она равна произведению постоянной Авогадро на массу молекулы:

$$M = N_A M_r m_{\text{ед}}. \quad (61.2)$$

В случае углерода ^{12}C молярная масса равна 0,012 кг/моль, а масса атома $12m_{\text{ед}}$. Подставив эти значения в (61.2), получим, что

$$0,012 \text{ кг/моль} = N_A (\text{моль}^{-1}) \cdot 12m_{\text{ед}} (\text{кг}),$$

откуда

$$\begin{aligned} m_{\text{ед}} (\text{кг}) &= \frac{0,001 \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{N_A (\text{моль}^{-1})} = \\ &= \frac{0,001 \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}. \end{aligned} \quad (61.3)$$

Таким образом, масса атома равна $1,66 \cdot 10^{-27} A_r$ (кг), а масса молекулы равна $1,66 \cdot 10^{-27} M_r$ (кг).

Перемножив равенства (61.2) и (61.3) и произведя сокращения, найдем, что

$$M = 0,001 M_r (\text{кг/моль}), \text{ или } M = M_r (\text{г/моль}). \quad (61.4)$$

Это означает, что молярная масса, выраженная в граммах на моль, численно равна относительной мо-

¹⁾ Амедео Авогадро (1776—1856) — итальянский физик и химик,

лекулярной массе. Однако надо помнить, что, в то время как M_r — величина безразмерная, M измеряется в кг/моль (или г/моль).

Получив представление о массе молекул, произведем оценку их размеров. Естественно предположить, что в жидкостях и твердых телах молекулы располагаются «вплотную» друг к другу. Поэтому приближенную оценку объема молекулы можно получить, разделив объем моля жидкости на число молекул в моле, т. е. на постоянную Авогадро N_A . Проще всего это сделать для воды. Известно, что моль (т. е. 18 г) воды занимает объем $18 \text{ см}^3/\text{моль} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$. Следовательно, на долю одной молекулы приходится объем, равный

$$\frac{18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \cdot \text{моль}^{-1}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}} = 30 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3.$$

Отсюда вытекает, что линейные размеры молекул воды примерно равны

$$\sqrt[3]{30 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,3 \text{ нм}.$$

Молекулы других веществ имеют размеры того же порядка.

§ 62. Уравнение состояния идеального газа

Параметры состояния закономерно связаны друг с другом. Соотношение, определяющее связь между параметрами состояния какого-либо тела, называется уравнением состояния этого тела.

В простейшем случае равновесное состояние тела определяется значениями трех параметров: давления p , объема V и температуры T (масса тела предполагается известной). Связь между этими параметрами может быть выражена аналитически формулой

$$F(p, V, T) = 0, \quad (62.1)$$

где $F(p, V, T)$ — некоторая функция параметров. Уравнение (62.1) и есть уравнение состояния данного тела.

Остановимся кратко на понятии температуры. В первом приближении температуру можно определить как величину, характеризующую степень нагретости тел. В технике и в быту используется температура, отсчитанная по шкале Цельсия. Единица этой

шкалы называется градусом Цельсия ($^{\circ}\text{C}$). В физике пользуются термодинамической температурой, которая не только более удобна, но, кроме того, имеет глубокий физический смысл (в § 64 мы установим, что термодинамическая температура определяется средней кинетической энергией, приходящейся на одну молекулу газа). Единица термодинамической температуры — кельвин (К) является одной из основных единиц СИ. Числовые значения кельвина и градуса Цельсия одинаковы. Термодинамическая температура T связана с температурой t по шкале Цельсия соотношением

$$T = t + 273,15. \quad (62.2)$$

Температура, равная 0 К, называется абсолютным нулем температуры; ему соответствует $t = -273,15^{\circ}\text{C}$. Температуре $t = 0^{\circ}\text{C}$ соответствует $T = 273,15 \text{ К}$.

Отметим, что термодинамическая температура прежде именовалась абсолютной температурой, а кельвин — градусом Кельвина ($^{\circ}\text{K}$).

Опытным путем было установлено, что при обычных условиях (т. е. при комнатной температуре и атмосферном давлении) параметры состояния таких газов, как кислород и азот, довольно хорошо подчиняются уравнению

$$\frac{pV}{T} = b, \quad (62.3)$$

где b — константа, пропорциональная массе газа. Оказалось также, что чем разреженнее газ (чем меньше его плотность), тем точнее выполняется это уравнение.

У разреженных газов молекулы практически не взаимодействуют между собой. Они лишь иногда сталкиваются друг с другом. Однако эти столкновения происходят настолько редко, что большую часть времени молекулы движутся свободно. Газ, взаимодействием между молекулами которого можно пренебречь, был назван идеальным. Такой газ строго подчиняется уравнению (62.3), которое, следовательно, является уравнением состояния идеального газа. Особенно близки по своим свойствам к идеальному газу гелий и водород.

Согласно закону Авогадро при нормальных условиях, т. е. при температуре 0°C ($273,15\text{ K}$) и давлении в одну атмосферу ($1,013 \times 10^5\text{ Па}$), объем моля любого газа равен $22,4\text{ л/моль} = 22,4 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3/\text{моль}$. Отсюда следует, что в случае, когда количество газа равно одному молю, константа b в уравнении (62.3) будет одинаковой для всех газов. Обозначив константу b для одного моля буквой R , напишем уравнение состояния идеального газа следующим образом:

$$pV_m = RT. \quad (62.4)$$

Индекс «м» при V указывает на то, что имеется в виду объем одного моля газа (молярный объем).

Константа R называется молярной газовой постоянной или просто газовой постоянной. Согласно закону Авогадро

$$R = \frac{pV_m}{T} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 22,4 \cdot 10^{-3}}{273,15} = 8,31\text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K}). \quad (62.5)$$

Чтобы получить уравнение состояния для произвольной массы m идеального газа, умножим обе части уравнения (62.4) на отношение m/M , где M — молярная масса газа:

$$p \frac{mV_m}{M} = \frac{m}{M} RT.$$

При одинаковых p и T газ массы m будет занимать объем V , в m/M раз больший, чем V_m ; поэтому $mV_m/M = V$. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (62.6)$$

Это есть уравнение состояния для массы m идеального газа.

Умножим и разделим правую часть уравнения (62.6) на постоянную Авогадро N_A :

$$pV = \frac{m}{M} N_A \frac{R}{N_A} T = N \frac{R}{N_A} T. \quad (62.7)$$

Здесь $N = (m/M) N_A$ — число молекул, содержащихся в массе m газа.

Величина

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \quad (62.8)$$

называется постоянной Больцмана¹⁾. Она определяет «долю» газовой постоянной, приходящуюся на одну молекулу.

С учетом (62.8) уравнению состояния (62.7) можно придать вид

$$pV = NkT. \quad (62.9)$$

Разделим обе части этого уравнения на объем газа V . Отношение N/V дает число молекул в единице объема газа, которое мы будем обозначать буквой n и называть плотностью молекул. Следовательно,

$$p = nkT. \quad (62.10)$$

Уравнения (62.6), (62.9) и (62.10) представляют собой различные формы записи уравнения состояния идеального газа.

§ 63. Давление газа на стенку сосуда

При своем движении молекулы газа ударяют о стенку сосуда, в котором заключен газ, создавая тем самым давление газа на стенку. Попробуем вычислить это давление, исходя из молекулярно-кинетических представлений. Чтобы облегчить вычисления, сделаем несколько упрощающих задачу предположений.

1. Давление газа на стенку не зависит от формы сосуда. Поэтому предположим, что сосуд имеет форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами a , b и c (рис. 63.1).

2. Допустим, что ударяющиеся о стенку молекулы отражаются от нее по зеркальному закону и без изменения модуля скорости. В частности, если до удара молекула двигалась вдоль нормали к стенке, то и после удара она движется вдоль той же нормали.

3. Если газ находится в равновесии, все направления движения молекул равновероятны, ни одному из них нельзя отдать предпочтения перед другими. Для

¹⁾ Людвиг Больцман (1844—1906) — австрийский физик.

простоты предположим, что молекулы движутся только вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, совпадающих с ребрами параллелепипеда (на рис. 63.1 показана молекула, движущаяся параллельно ребру a). Если в сосуде содержится N молекул, то вдоль каждого из направлений движется $N/3$

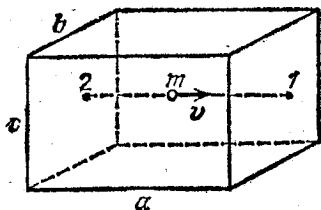


Рис. 63.1. Молекула, движущаяся со скоростью v , затрачивает на прохождение пути от точки 1 до точки 2 и обратно время $t = 2a/v$. Величина, обратная этому времени, дает число ударов молекулы о правую либо левую стенку в единицу времени

молекул, причем половина из них (т. е. $N/6$ молекул) движется вдоль данного направления в одну сторону, половина в другую.

Начнем с определения числа ударов молекул об единицу поверхности стенки в единицу времени. Можно ожидать, что число ударов будет тем больше, чем с большей скоростью движутся молекулы и чем гуще они располагаются (чем больше число молекул в единице объема).

Допустим, что все N содержащихся в сосуде молекул движутся с одинаковой по модулю скоростью v . Молекула, движущаяся параллельно ребру a , ударится о перпендикулярную к ребру грань $v/2a$ раз за секунду. Всего таких молекул $N/3$. Следовательно, грань испытает за секунду $(v/2a)N/3 = Nv/6a$ ударов. Разделив это число на площадь грани bc , получим интересующее нас число ударов молекул о единицу поверхности стенки в единицу времени. Обозначив это число буквой ν , можно написать, что

$$\nu = \frac{Nv/6a}{bc} = \frac{1}{6} \frac{Nv}{abc} = \frac{1}{6} \frac{N}{V} v,$$

где V — объем сосуда. Отношение N/V равно n — числу молекул в единице объема. Таким образом, мы приходим к формуле

$$\nu = \frac{1}{6} nv. \quad (63.1)$$

Если взять другую грань, скажем, грань, перпендикулярную к ребру b , то число ударов об эту грань

будет равно $(v/2b)N/3$. Разделив это число на площадь грани ac , снова приходим к выражению (63.1). Следовательно, давление газа на все грани сосуда одинаково, как и должно быть.

В действительности скорости молекул различны по модулю. Допустим, что n_1 молекул в единице объема имеют скорость v_1 , n_2 молекул — скорость v_2 , ..., n_i молекул — скорость v_i и т. д. Очевидно, что $\sum n_i = n$ — полному числу молекул в единице объема. Согласно (63.1) молекулы i -й группы наносят единице поверхности стенки в единицу времени $v_i = n_i v_i / 6$ ударов. Полное же число ударов будет равно

$$v = \sum v_i = \frac{1}{6} \sum n_i v_i \quad (63.2)$$

(суммирование производится по всем значениям индекса i).

Выражение $\sum n_i v_i$ дает сумму скоростей всех n молекул, содержащихся в единице объема. Разделив эту сумму на n , получим среднее значение $\langle v \rangle$ скоростей молекул газа:

$$\langle v \rangle = \frac{\sum n_i v_i}{n}. \quad (63.3)$$

Из (63.3) следует, что $\sum n_i v_i = n \langle v \rangle$. Сделав такую замену в (63.2), приходим к формуле

$$v = \frac{1}{6} n \langle v \rangle. \quad (63.4)$$

Подчеркнем, что имеется в виду среднее значение модуля скорости. Среднее значение самой скорости $\langle v \rangle$ в случае равновесия газа равно нулю.

Отметим, что, как мы и предвидели, v оказалось пропорциональным скорости и «густоте» молекул.

При выводе формулы для v мы предполагали, что молекулы беспрепятственно летят от стенки к стенке. В действительности молекулы при своем движении сталкиваются друг с другом. Соответствующий расчет дает, например, что при атмосферном давлении молекула кислорода в среднем пробегает между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами путь, равный примерно 10^{-7} м. Однако при вычислении числа ударов молекул о стенку столкновения между молекулами можно не принимать во

внимание. Причина этого заключается в том, что соударения не нарушают хаотического характера движения молекул. Переход некоторого числа молекул из группы молекул, движущихся параллельно ребру a , в группы молекул, движущихся параллельно ребрам b и c , сопровождается одновременным переходом такого же числа молекул из других групп в группу молекул, движущихся параллельно ребру a .

Указанное обстоятельство является проявлением принципа детального равновесия. Согласно этому принципу *любой микроскопический процесс в равновесной макроскопической системе протекает с той же скоростью, что и обратный ему процесс*. В рассматриваемом нами случае под микроскопическим процессом надо понимать переход молекулы из группы молекул, движущихся вдоль одного направления и имеющих скорость v_i , в группу молекул, движущихся вдоль другого направления и имеющих скорость v_k .

Теперь приступим к вычислению давления. Молекула, летящая к стенке со скоростью v_i , отражается от нее со скоростью $-v_i$. Следовательно, приращение импульса, сообщаемое стенкой молекуле, равно $(-mv_i) - (mv_i) = -2mv_i$ (напомним, что приращение это «то, что стало» минус «то, что было»). По третьему закону Ньютона молекула сообщает стенке при ударе импульс $2mv_i$. Молекулы i -й группы ударяются об единицу поверхности стенки в единицу времени $\nu_i = \frac{1}{6}n_i v_i$ раз, сообщая стенке импульс, равный по модулю $2mv_i \cdot \frac{1}{6}n_i v_i = \frac{1}{3}n_i m v_i^2$. Молекулы же всех групп сообщают единице поверхности стенки за секунду импульс, равный

$$\frac{1}{3} m \sum n_i v_i^2. \quad (63.5)$$

Импульс, сообщаемый телу в единицу времени, дает силу, действующую на тело, а сила, действующая на единицу поверхности тела, дает давление, оказываемое на тело. Следовательно, выражение (63.5) определяет давление p газа на стенку сосуда. Прежде чем написать окончательную формулу для p , учтем, что согласно формуле, аналогичной формуле (63.3), $\sum n_i v_i^2$ равна произведению полного числа молекул в единице объема n на среднее значение

квадрата скорости молекул $\langle v^2 \rangle$. (Отметим, что, как выяснится в дальнейшем, среднее значение квадрата скорости $\langle v^2 \rangle$ не равно квадрату средней скорости $\langle v \rangle^2$.) Таким образом,

$$p = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle. \quad (63.6)$$

Более строгий расчет, учитывающий, что молекулы движутся не вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, а с равной вероятностью вдоль любого направления в пространстве, приводит для числа ударов молекул об единицу поверхности в единицу времени к формуле

$$v = \frac{1}{4} n \langle v \rangle. \quad (63.7)$$

Для давления же и в этом случае получается формула (63.6), так что она является не приближенной, как формула (63.4), а точкой. Это объясняется тем, что предположение о движении молекул вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений приводит к занижению числа ударов ($1/6$ вместо $1/4$) и одновременно к завышению значения импульса, сообщаемого молекулой стенке при ударе. Мы полагали этот импульс равным для всех молекул $2mv$, а при «косом» ударе стенке сообщается импульс $2mv \cos \alpha$, где α — угол, под которым падает и отражается от стенки молекула (угол между направлением скорости и нормалью к стенке). Усредненное по углам значение импульса будет меньше, чем $2mv$.

Мы предполагали массу всех молекул одинаковой. Поэтому в формуле (63.6) m можно внести под знак среднего и представить выражение для p в виде

$$p = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle, \quad (63.8)$$

где $\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle$ есть средняя энергия поступательного движения молекулы.

Произведение $n \langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle$ дает суммарную энергию поступательного движения n молекул. Таким образом, давление равно двум третям энергии поступательного движения молекул, содержащихся в единице объема газа.

§ 64. Средняя энергия молекул

Из сравнения выражений

$$p = nkT \quad \text{и} \quad p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle$$

(см. формулы (62.10) и (63.8)) следует, что

$$\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (64.1)$$

Таким образом, *термодинамическая температура есть величина, пропорциональная средней энергии поступательного движения молекул*. Отметим, что поступательно движутся только молекулы газа. Движение молекул в жидких и твердых телах носит иной характер (об этом движении будет идти речь в дальнейшем).

Существенно, что средняя энергия молекул зависит только от температуры и не зависит от массы молекулы.

Представив $\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle$ в виде $\langle mv^2/2 \rangle = (m/2) \langle v^2 \rangle$, можно получить из соотношения (64.1) выражение для среднего значения квадрата скорости молекулы:

$$\langle v^2 \rangle = 3kT/m. \quad (64.2)$$

Корень квадратный из этой величины называется *среднеквадратичной скоростью молекул*:

$$v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3kT/m}. \quad (64.3)$$

Только поступательно движутся лишь одноатомные молекулы. Двух- и многоатомные молекулы, кроме поступательного, могут совершать также вращательное и колебательное движения. Эти виды движения связаны с некоторым запасом энергии, вычислить который позволяет устанавливаемый классической (т. е. основанной на ньютоновских законах) статистической физикой закон равнораспределения энергии по степеням свободы молекулы. Прежде чем сформулировать этот закон, рассмотрим понятие числа степеней свободы механической системы.

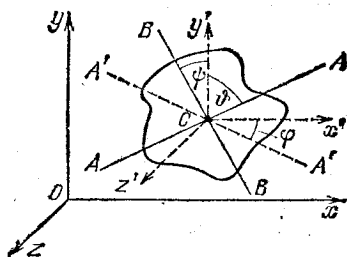
Числом степеней свободы механической системы называется количество независимых величин, с по-

мощью которых может быть задано положение системы в пространстве.

Положение материальной точки определяется значениями трех ее координат, например декартовых координат x, y, z или сферических координат r, θ, φ и т. д. В соответствии с этим материальная точка имеет три степени свободы.

Положение абсолютно твердого тела можно определить с помощью координат x, y, z его центра масс и углов θ, φ, ψ , указывающих ориентацию тела в пространстве (рис. 64.1). Следовательно, абсолютно

Рис. 64.1. Координаты центра масс C определяются в неподвижной системе x, y, z . Вспомогательные координатные оси x', y', z' перемещаются поступательно вместе с телом. Взаимно перпендикулярные оси AA' и BB' жестко связаны с телом. Прямая $A'A'$ есть проекция оси AA на плоскость $x'z'$. Углы θ и φ определяют ориентацию в пространстве оси AA . Угол ψ определяет ориентацию оси BB



твердое тело имеет шесть степеней свободы. При поступательном движении тела изменяются только координаты центра масс, в то время как углы θ, φ, ψ остаются неизменными. Поэтому соответствующие степени свободы называются **поступательными**. (Три степени свободы материальной точки, очевидно, поступательные.) Изменения углов θ, φ, ψ при неподвижном центре масс обуславливаются вращением тела, в связи с чем соответствующие степени свободы называются **вращательными**. Таким образом, из шести степеней свободы абсолютно твердого тела три являются поступательными и три вращательными.

Система N материальных точек, между которыми нет жестких связей, имеет $3N$ степеней свободы (положение каждой точки определяется тремя координатами). Каждая жесткая связь, обуславливающая неизменное расстояние между двумя точками, уменьшает число степеней свободы на единицу. Например, в случае двух материальных точек, расстояние l между которыми остается неизменным (рис. 64.2), число

степеней свободы равно пяти. Это следует из того, что координаты точек связаны соотношением

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2. \quad (64.4)$$

Поэтому, чтобы определить положение системы, достаточно задать пять координат, шестая получается из условия (64.4). Чтобы классифицировать степени свободы такой системы, учтем, что ее положение в пространстве можно определить, задав, например, координаты x, y, z центра масс системы и углы θ, φ , определяющие направление в пространстве прямой l (подобно тому, как определяется направление оси AA на

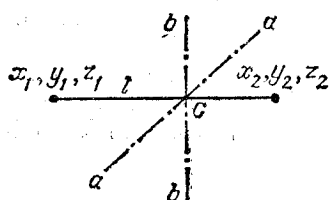


Рис. 64.2. Две материальные точки с жесткой связью: C — центр масс системы; прямая, проходящая через обе точки, — ось системы

рис. 64.1). Следовательно, три степени свободы будут поступательными и две вращательными. Последние соответствуют вращениям вокруг взаимно перпендикулярных осей aa и bb , перпендикулярных к оси системы. Вращение материальных точек вокруг оси системы лишено смысла.

Если две материальные точки связаны так, что между ними действует квазиупругая сила (т. е. сила, подобная силе, возникающей в растянутой или сжатой пружине), обращающаяся в нуль при некотором равновесном расстоянии l_0 между точками, то число степеней свободы будет равно шести. Положение такой системы можно определить, задав три координаты центра масс, углы θ, φ , определяющие ориентацию оси системы в пространстве, и расстояние l между точками. Изменение l обуславливается колебаниями в системе, в связи с чем степень свободы, соответствующую изменению l , называют колебательной. Таким образом, система двух материальных точек с упругой связью имеет три поступательные, две вращательные и одну колебательную систему свободы.

Система, состоящая из N упруго связанных друг с другом материальных точек, имеет $3N$ степеней свободы. Существует равновесная конфигурация точек, соответствующая минимуму потенциальной энергии

системы. Если точки вывести из положений, соответствующих равновесной конфигурации, в системе возникнут колебания. Положение системы в пространстве можно определить, задав положение равновесной конфигурации и величины, характеризующие смещения точек из равновесных положений. Положение равновесной конфигурации, как и положение абсолютно твердого тела, определяется тремя координатами центра масс и тремя углами. Координатам центра масс соответствуют три поступательные, а углам — три вращательные степени свободы. Следовательно, число колебательных степеней свободы равно $3N - 6$. Если равновесные положения всех N точек лежат на одной прямой, то вращательных степеней свободы будет только две. Соответственно число колебательных степеней свободы равно $3N - 5$.

Экспериментально установлено, что при определении числа степеней свободы молекул атомы нужно рассматривать как материальные точки. Соответственно одноатомной молекуле следует приписывать три поступательные степени свободы. Двухатомной молекуле с жесткой связью между атомами нужно приписывать пять степеней свободы — три поступательные и две вращательные. Двухатомной молекуле с упругой связью между атомами надо приписывать шесть степеней свободы — три поступательные, две вращательные и одну колебательную. Трехатомной нелинейной молекуле с жесткой связью между атомами нужно приписывать шесть степеней свободы — три поступательные и три вращательные, и т. д.

При любом числе степеней свободы молекулы три из них поступательные, причем ни одна из них не имеет преимуществ перед другими. Поэтому на каждую из поступательных степеней свободы приходится в среднем одинаковая энергия, равная $\frac{1}{2}kT$ (согласно (64.1) на все три поступательные степени свободы приходится энергия, в среднем равная $\frac{3}{2}kT$).

Согласно закону равнораспределения на каждую степень свободы (поступательную, вращательную и колебательную) в среднем приходится одинаковая кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2}kT$.

Система, совершающая гармонические (т. е. косинусоидальные или синусоидальные) колебания, называется гармоническим осциллятором.

Колебательное движение (например, качания маятника) связано с наличием у колеблющейся системы не только кинетической, но и потенциальной энергии. В учении о колебаниях доказывается, что средние значения кинетической и потенциальной энергий гармонического осциллятора одинаковы. Отсюда следует, что колебательная степень свободы молекулы обладает, по сравнению с поступательной или вращательной, удвоенной энергетической емкостью — на каждую колебательную степень свободы приходится в среднем две половинки kT — одна в виде кинетической и одна в виде потенциальной энергии.

Из закона равнораспределения кинетической энергии по степеням свободы вытекает, что средняя энергия молекулы определяется формулой

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (64.5)$$

где i — сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = \nu_{\text{пост}} + \nu_{\text{вращ}} + 2\nu_{\text{колеб}}. \quad (64.6)$$

Напомним, что закон равнораспределения получен на основе классических представлений о характере движения молекул. Поэтому он является приближенным и нарушается в тех случаях, когда становятся существенными квантовые эффекты.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое моль?
2. Какой характер имеет взаимодействие молекул идеального газа?
3. Какие вам известны формы записи уравнения состояния идеального газа?
4. Как связано давление газа с энергией поступательного движения молекул, находящихся в единице объема?

Примеры решения задач

1. Определить число n молекул воздуха в единице объема при температуре 0°C и давлении $1,013 \cdot 10^5$ Па (1 атм).

Решение. Уравнение состояния идеального газа можно написать в виде $p = nkT$. Отсюда

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} = \\ = 2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}.$$

(Температуре 0°C соответствует $T = 273,15 \text{ K}$.)

2. Найти плотность ρ воздуха при температуре и давлении, указанных в предыдущей задаче. (Молярная масса воздуха $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.)

Решение. Из уравнения состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

вытекает, что

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,314 \cdot 273,15} = 1,29 \text{ кг/м}^3 = 1,29 \text{ г/л}.$$

Г л а в а 10. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 65. Внутренняя энергия термодинамической системы

Внутренняя энергия какого-либо тела складывается из кинетической энергии поступательного и вращательного движения молекул, кинетической и потенциальной энергий колебательного движения атомов в молекулах, потенциальной энергии взаимодействия между молекулами и внутримолекулярной энергии (т. е. энергии электронных оболочек атомов и ядрядерной энергии). Кинетическая энергия тела как целого и его потенциальная энергия во внешнем силовом поле во внутреннюю энергию тела не входят.

В термодинамические формулы входит не сама энергия, а ее изменение либо производная по какому-нибудь параметру. Поэтому внутреннюю энергию можно определять с точностью до произвольной аддитивной постоянной, выбирая ее так, чтобы выражение для энергии было предельно простым. В частности, обычно изучаются процессы, при которых внутримолекулярная энергия остается постоянной, в связи с чем эту энергию можно просто отбрасывать.

Внутренняя энергия системы тел складывается из внутренней энергии каждого из тел в отдельности и энергии взаимодействия между телами. Последняя представляет собой энергию взаимодействия в тонком слое на границе между телами, которая столь мала по сравнению с энергией макроскопических тел, что ею можно пренебречь и считать, что внутренняя энергия системы макроскопических тел равна сумме внутренних энергий этих тел. Следовательно, внутренняя энергия есть величина аддитивная.

Внутренняя энергия является функцией состояния системы. Это означает, что независимо от предыстории системы ее энергия в данном состоянии имеет присущее этому состоянию значение. Поэтому приращение внутренней энергии при переходе системы из одного состояния в другое всегда равно разности значений внутренней энергии в конечном и начальном состояниях независимо от пути, по которому совершался переход, т. е. независимо от характера процесса, приведшего к переходу системы из одного состояния в другое.

§ 66. Работа, совершаемая телом при изменениях его объема

Ограничимся рассмотрением случаев, когда взаимодействие данного тела с другими телами можно охарактеризовать давлением, которое оно на них оказывает. Примерами могут служить взаимодействие газа со стенками сосуда, в который он заключен, или взаимодействие жидкого либо твердого тела со средой (например, газом), которая его окружает. В этом случае работа, совершаемая данным телом над внешними телами, может быть выражена через давление и приращение объема тела.

Рассмотрим газ, находящийся в цилиндрическом сосуде, закрытом плотно пригнанным поршнем (рис. 66.1). Допустим, что газ начал очень медленно (обратимо) расширяться и переместил поршень на расстояние Δl , настолько малое, что давление газа p можно считать в течение процесса расширения неизменным. Газ действует на поршень с силой $F = pS$ и совершает при расширении над поршнем работу

$$\Delta' A = F dl = pS \Delta l = p \Delta V.$$

Чтобы подчеркнуть малость перемещения Δl , напишем полученную формулу для элементарной работы в виде

$$d'A = p dV \quad (66.1)$$

(смысл штриха при d поясняется в следующем параграфе). Формула (66.1) справедлива при любом достаточно малом изменении объема тела произвольной

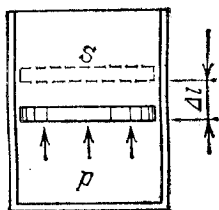


Рис. 66.1. Газ в цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем площади S . При перемещении поршня на расстояние Δl объем газа получает приращение $\Delta V = S\Delta l$

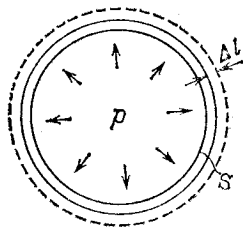


Рис. 66.2. Приращение объема газа внутри резинового мяча $\Delta V = S\Delta l$

формы. Покажем это еще на одном примере. Имеется резиновый мяч (рис. 66.2), оболочка которого вследствие уменьшения атмосферного давления немного растянулась. При этом газ, заключенный внутри мяча, совершит над оболочкой работу $\Delta'A = F\Delta l = pS\Delta l = p\Delta V$. Мы снова пришли к формуле (66.1).

Подчеркнем, что величина (66.1) является алгебраической. При расширении рассматриваемого (твердого, жидкого или газообразного) тела приращение объема ΔV положительно, соответственно положительна и $\Delta'A$. При сжатии тела ΔV отрицательно, соответственно отрицательна и $\Delta'A$.

По поводу работы, совершаемой телами при изменениях их объема, в учебной литературе встречается много неточностей. Например, пишется: «Условимся считать работу при расширении положительной, а при сжатии — отрицательной». Знак работы автоматически следует из формулы (66.1), и для его определения не требуется никаких дополнительных условий. Нехорошо выглядят утверждения такого типа: «При сжатии газ совершает отрицательную работу. Ее со-

вершают внешние тела, действующие на газ». Это неверно. Отрицательную работу, действительно, совершает газ. Внешние же тела при сжатии газа совершают не отрицательную, а положительную работу.

Отметим, что работа $\Delta'A$, совершаемая данным телом над внешними телами, и работа $\Delta'A'$, совершаемая в ходе того же процесса внешними телами над данным телом, отличаются знаком:

$$\Delta'A = -\Delta'A'. \quad (66.2)$$

Формула (66.1) определяет элементарную работу, совершаемую при бесконечно малом приращении объема. Работа, совершаемая при конечных изменениях

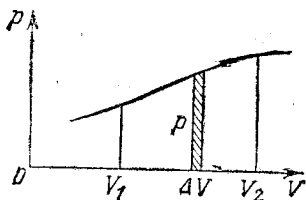


Рис. 66.3. Элементарная работа $\Delta'A = p\Delta V$ численно равна площади заштрихованной полоски

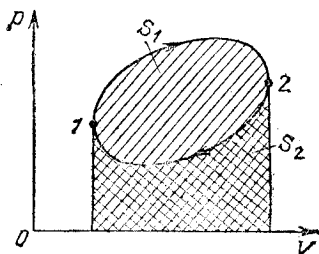


Рис. 66.4. Работа A_{12} на участке 1—2 численно равна площади S_1 , заштрихованной линиями, наклоненными вправо, взятой со знаком плюс ($A_{12} > 0$). Работа A_{21} на участке 2—1 численно равна площади S_2 , заштрихованной линиями, наклоненными влево, взятой со знаком минус ($A_{21} < 0$). Работа за цикл равна $A_{12} + A_{21} = S_1 - S_2 > 0$, т. е. численно равна площади цикла. При обратном направлении цикла знаки работ изменятся на обратные

объема, вычисляется путем суммирования элементарных работ, т. е. путем интегрирования:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (66.3)$$

(A_{12} — работа, совершаемая телом при обратимом изменении объема тела от значения V_1 до значения V_2).

Обратимый процесс изменения объема тела можно изобразить на диаграмме p, V (рис. 66.3). Тогда работа, совершаемая телом при изменении его объема от значения V_1 до значения V_2 , будет численно равна площади фигуры, ограниченной осью V , кривой $p = p(V)$ и прямыми V_1 и V_2 .

Из рис. 66.4 следует, что работа, совершаемая при обратимом круговом процессе, численно равна площади, охватываемой кривой, изображающей цикл, взятой со знаком плюс, если обход по кривой совершается по часовой стрелке, и со знаком минус, если обход по кривой совершается против часовой стрелки.

§ 67. Первое начало термодинамики

Изменение внутренней энергии может происходить за счет двух различных процессов: совершения над телом работы A' и передачи ему теплоты Q .

Мы станем придерживаться следующих обозначений. Работу, совершаемую данным телом над внешними телами, будем обозначать буквой A , а работу, совершаемую внешними телами над данным телом, — буквой A со штрихом (A'). Очевидно, что для одного и того же процесса $A = -A'$ (это вытекает из третьего закона Ньютона). Количество теплоты, переданное данному телу внешней средой, будем обозначать буквой Q , а количество теплоты, переданное данным телом внешней среде — буквой Q со штрихом (Q'). Для одного и того же процесса $Q = -Q'$. Следует помнить, что A, A', Q и Q' — алгебраические величины: они могут быть как положительными, так и отрицательными. Если, например, теплота передается данным телом внешней среде, то количество теплоты, полученное телом, будет отрицательным ($Q < 0$).

Физическая природа теплопередачи заключается в том, что отдельные молекулы более нагретого тела совершают положительную работу над отдельными молекулами менее нагретого тела. Кроме того, происходит обмен энергией между отдельными молекулами через излучение. Совокупность указанных микроско-

пических процессов и обуславливает передачу энергии от тела к телу в виде теплоты. Макроскопическая работа телами при этом не совершается.

Теплота Q определяет количество энергии, переданное от одного тела другому посредством теплопередачи. Отсюда следует, что количество теплоты должно измеряться в тех же единицах (джоулях), что и энергия или работа ¹⁾.

При совершении одним телом работы A над другим, равно как и при сообщении одним телом другому теплоты Q , эти тела обмениваются внутренней энергией — энергия одного из тел увеличивается, а энергия другого на столько же уменьшается. Это следует из закона сохранения энергии. В термодинамике этот закон принято называть первым началом и записывать следующим образом:

$$Q = U_2 - U_1 + A. \quad (67.1)$$

Здесь U_1 и U_2 — начальное и конечное значения внутренней энергии тела (или системы тел), A — работа, совершенная телом (или системой), и Q — количество сообщенной телу (системе) теплоты.

Словами первое начало термодинамики формулируется следующим образом: *количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами.*

Подчеркнем, что речь идет не о «безликом» изменении внутренней энергии (под которым можно подразумевать как $U_2 - U_1$, так и $U_1 - U_2$), а именно о приращении, т. е. разности конечного и начального значений внутренней энергии.

Не следует думать, что при сообщении системе теплоты ее внутренняя энергия обязательно возрастает. Если, например, совершенная системой работа больше, чем полученное количество теплоты ($A > Q$), то приращение внутренней энергии отрицательно и, следовательно, конечное значение внутренней энергии будет меньше начального ($U_2 < U_1$). Может также случиться, что система не получает теплоту, но отдает

¹⁾ Раньше применялась единица количества теплоты, называемая калорией. Между калорией и джоулем имеются соотношения: 1 кал = 4,18 Дж, 1 Дж = 0,24 кал.

($Q < 0$), а внутренняя энергия увеличивается. Это будет в том случае, когда совершаемая над системой работа больше, чем количество отдаваемой системой теплоты (A' и Q' положительны, причем $A' > Q'$; соответственно A и Q отрицательны, причем $|A| > |Q|$).

Первое начало термодинамики формулируется также следующим образом: *невозможен перпетуум мобиле (вечный двигатель) первого рода, т. е. такой периодически действующий двигатель, который совершал бы работу в большем количестве, чем получаемая им извне энергия.*

При вычислении работы и теплоты обычно приходится разбивать рассматриваемый процесс на ряд элементарных процессов, соответствующих очень малому (в пределе — бесконечно малому) изменению параметров системы. Уравнение первого начала для элементарного процесса имеет вид

$$\Delta'Q = \Delta U + \Delta'A, \quad (67.2)$$

где $\Delta'Q$ — элементарное количество теплоты, $\Delta'A$ — элементарная работа и ΔU — приращение внутренней энергии системы в ходе данного элементарного процесса.

В то время как ΔU есть приращение внутренней энергии, $\Delta'Q$ и $\Delta'A$ не являются приращениями величин Q и A . Внутренняя энергия представляет собой функцию состояния системы. Поэтому ее приращение при переходе системы из одного состояния в другое не зависит от пути, по которому совершался переход, и можно говорить о запасе внутренней энергии, которым обладает система в различных состояниях.

Из рис. 66.3 вытекает, что совершенная телом работа зависит от пути, по которому совершался переход из одного состояния в другое (площадь, охватываемая различными кривыми, неодинакова). То же самое относится и к количеству теплоты. Следовательно, ни A , ни Q не являются функциями состояния — нельзя говорить о запасе работы или теплоты, которым обладает тело в различных состояниях.

Из сказанного ясно, что символ Δ , стоящий перед A и Q , имеет иной смысл, чем символ Δ , стоящий перед U . Чтобы отметить это обстоятельство, в случае A

и Q символ Δ снабжен штрихом. Символ ΔU обозначает приращение внутренней энергии, символы же $\Delta'A$ и $\Delta'Q$ обозначают не приращение, а элементарное количество работы и теплоты.

Если перейти от дельт к дифференциалам, уравнение (67.2) примет вид

$$d'Q = dU + d'A. \quad (67.3)$$

Смысл штрихов здесь тот же, что и в формуле (67.2).

Согласно принятой в математике терминологии dU есть полный дифференциал, в то время как $d'A$ и $d'Q$ не являются полными дифференциалами¹⁾. Соответственно интеграл

$$\int_1^2 dU = U_2 - U_1$$

не зависит от пути, по которому осуществляется интегрирование, и равен разности значений функции U в состояниях 2 и 1. Интегралы же

$$\int_1^2 d'A = A_{12} \quad \text{и} \quad \int_1^2 d'Q = Q_{12} \quad (67.4)$$

зависят от пути, по которому производится интегрирование (они являются функциями процесса), и не могут быть представлены в виде $A_2 - A_1$ и $Q_2 - Q_1$, поскольку о запасе работы и теплоты говорить нельзя — эти величины не являются функциями состояния. В выражениях (67.4) A_{12} — работа, совершаемая телом в ходе процесса 1—2, а Q_{12} — количество теплоты, полученной телом в ходе того же процесса.

§ 68. Внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа

Теплоемкостью какого-либо тела называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один кельвин. Аналитически это определение записывается

¹⁾ В некоторых книгах для элементарной работы и элементарного количества теплоты применяются обозначения δA и δQ . Однако обозначения $d'A$ и $d'Q$ предпочтительнее, поскольку эти величины хотя и не полные, но все же дифференциалы.

следующим образом:

$$C_{\text{тела}} = \frac{d'Q}{dT},$$

где $d'Q$ — количество теплоты, сообщение которого повышает температуру тела на dT . Теплоемкость тела измеряется в джоулях на кельвин (Дж/К).

Теплоемкость единицы массы вещества, называемую удельной теплоемкостью, мы будем обозначать строчной буквой c . Измеряется она в джоулях на килограмм-кельвин (Дж/(кг·К)).

В физике предпочитают пользоваться теплоемкостью моля вещества, называемой молярной теплоемкостью. Измеряется она в джоулях на моль-кельвин (Дж/(моль·К)). Обозначать эту теплоемкость мы будем прописной буквой C .

Удельная и молярная теплоемкости связаны соотношением

$$c = C/M, \quad (68.1)$$

где M — молярная масса.

Теплоемкость зависит от условий, при которых происходит нагревание тела. Наибольший интерес представляет теплоемкость для случаев, когда нагревание производится при постоянном объеме или при постоянном давлении. В первом случае мы имеем дело с теплоемкостью при постоянном объеме (обозначается C_V), во втором — с теплоемкостью при постоянном давлении (C_p).

Если нагревание производится при постоянном объеме, то тело не совершает работы над внешними телами и, следовательно, вся теплота идет на приращение внутренней энергии тела: $d'Q_V = dU$ (см. формулу (67.3); индекс V при Q подчеркивает то обстоятельство, что теплота сообщается в условиях, когда объем тела не изменяется). Отсюда следует, что молярная теплоемкость любого вещества при постоянном объеме равна

$$C_V = \frac{dU_M}{dT} \quad (V = \text{const}). \quad (68.2)$$

В термодинамике подобные выражения принято записывать в виде

$$C_V = \left(\frac{\partial U_M}{\partial T} \right)_V \quad (68.3)$$

Символ частной производной, снабженный индексом V , указывает на то, что при дифференцировании функции U_M по переменной T объем предполагается постоянным.

Теплоемкость при постоянном давлении C_p бывает больше, чем C_V , потому что при $p = \text{const}$ нагреваемое тело расширяется и часть подводимой теплоты расходуется на совершение работы над внешними телами.

Опытным путем установлено, что у газов, близких по своим свойствам к идеальному газу (см. § 62), теплоемкость при постоянном объеме в широких температурных интервалах практически не зависит от температуры: $C_V = \text{const}$.

Согласно формуле (68.2)

$$dU_M = C_V dT.$$

Проинтегрировав это соотношение, получим выражение для внутренней энергии моля идеального газа

$$U_M = \int C_V dT = C_V T + \text{const}$$

(мы учли, что $C_V = \text{const}$). В § 65 было выяснено, что внутренняя энергия определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Поэтому константу в выражении для U_M можно отбросить. В результате получается формула

$$U_M = C_V T. \quad (68.4)$$

Внутренняя энергия — величина аддитивная. Следовательно, внутренняя энергия массы газа m будет равна

$$U = \frac{m}{M} C_V T. \quad (68.5)$$

Напишем уравнение (67.3) для моля газа, заменив в нем согласно (66.1) $d'A$ через $p dV_M$ и предположив, что теплота сообщается газу при постоянном давлении:

$$d'Q_p = dU_M + p dV_M.$$

(V_M — объем моля; индекс p при Q указывает на то, что теплота сообщается газу в условиях, когда давление остается постоянным). Разделив это выражение на приращение dT , которое получает температура

газа при сообщении ему теплоты $d'Q_p$, придем к формуле для молярной теплоемкости газа при постоянном давлении:

$$C_p = \frac{dU_M}{dT} + p \frac{dV_M}{dT} \quad (p = \text{const}).$$

Согласно формуле (68.2) слагаемое dU_M/dT равно молярной теплоемкости при постоянном объеме. Учтя это и использовав применяемый в термодинамике способ записи формул (см. пояснение к формуле (68.3)), придем к соотношению

$$C_p = C_V + p \left(\frac{\partial V_M}{\partial T} \right)_p. \quad (68.6)$$

Мы не делали никаких предположений о свойствах газа, поэтому формула (68.6) справедлива для любых газов. Теперь предположим, что газ идеальный. В соответствии с уравнением состояния (62.4) $V_M = RT/p$. Продифференцировав это выражение по T в предположении, что $p = \text{const}$, получим, что

$$\left(\frac{\partial V_M}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p}. \quad (68.7)$$

Подстановка этого значения производной в (68.7) приводит к соотношению

$$C_p = C_V + R. \quad (68.8)$$

Таким образом, работа, совершаемая молекул идеального газа при повышении его температуры на один кельвин при постоянном давлении, равна газовой постоянной R .

Подчеркнем, что соотношение (68.8) справедливо только для идеального газа.

Отношение теплоемкостей

$$\gamma = C_p/C_V \quad (68.9)$$

представляет собой характерную для каждого газа величину. Ниже мы установим, что значение γ определяется числом и характером степеней свободы молекул.

Согласно формуле (68.8)

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}, \quad (68.10)$$

откуда

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (68.11)$$

Подставив это выражение для C_V в (68.5), получим для внутренней энергии моля идеального газа формулу

$$U_m = \frac{RT}{\gamma - 1}. \quad (68.12)$$

Умножив обе части полученного равенства на отношение m/M и учтя, что $(m/M)RT = pV$, придем к еще одному выражению для внутренней энергии произвольной массы идеального газа:

$$U = \frac{1}{\gamma - 1} pV. \quad (68.13)$$

Таким образом, внутренняя энергия идеального газа пропорциональна произведению давления на объем.

§ 69. Уравнение адиабаты идеального газа

В ходе любого обратимого процесса газ подчиняется своему уравнению состояния. Для идеального газа это уравнение имеет вид

$$pV = \frac{m}{M} RT \quad (69.1)$$

(см. (62.6)).

Бывают процессы, в ходе которых газ, кроме уравнения состояния, подчиняется некоторому дополнительному условию, определяющему характер процесса. Дополнительное условие может заключаться, например, в том, что один из параметров состояния остается постоянным.

Если постоянно давление газа, процесс называют *изобарическим*. В этом случае дополнительное условие имеет вид $p = \text{const}$. Если остается неизменным объем газа ($V = \text{const}$), процесс называется *изохорическим*. Наконец, если в ходе процесса остается неизменной температура ($T = \text{const}$), процесс называется *изотермическим*. Из уравнения (69.1) следует, что в случае идеального газа при изотермическом процессе давление и объем связаны соотношением

$$pV = \text{const}, \quad (69.2)$$

которое называется уравнением изотермы идеального газа, а кривая, определяемая этим уравнением, называется изотермой.

Процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой, называется адиабатическим. Чтобы найти уравнение адиабаты идеального газа, т. е. уравнение, связывающее параметры состояния идеального газа при адиабатическом процессе, воспользуемся уравнением (67.3) первого начала термодинамики, подставив в него выражение (68.5) для U и написав элементарную работу $d'A$ в виде $p dV$:

$$d'Q = d\left(\frac{m}{M} C_V T\right) + p dV. \quad (69.3)$$

В отсутствие теплообмена с внешней средой $d'Q = 0$. Поэтому для адиабатического процесса уравнение (69.3) упрощается следующим образом:

$$p dV = -\frac{m}{M} C_V dT \quad (69.4)$$

(мы произвели очевидные преобразования).

Взяв дифференциал от обеих частей уравнения (69.1), придем к равенству

$$p dV + V dp = \frac{m}{M} R dT. \quad (69.5)$$

Умножим уравнение (69.4) на отношение R/C_V и сложим его с уравнением (69.5). В результате получим

$$\gamma p dV + V dp = 0, \quad (69.6)$$

где $\gamma = 1 + R/C_V = C_p/C_V$ (см. формулу (68.10)). Наконец, разделим (69.6) на произведение pV :

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0. \quad (69.7)$$

Левую часть этого уравнения можно представить в виде $d \ln(pV^\gamma)$, откуда следует, что

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (69.8)$$

Мы получили уравнение адиабаты идеального газа в переменных p и V . Его называют уравнением Пуассона.

Написав уравнение (69.8) в виде $pV \cdot V^{\gamma-1} = \text{const}$ и заменив pV в соответствии с (69.1) через $(m/M)RT$, придем к уравнению адиабаты идеального газа

в переменных T и V :

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (69.9)$$

(постоянные m , M и R мы включили в константу; следовательно, константы в формулах (69.8) и (69.9) имеют неодинаковое значение).

Из уравнения (69.9) вытекает, что при адиабатическом расширении идеальный газ охлаждается, а при сжатии нагревается.

Вычислим производную dp/dV для изотермы и адиабаты в одной и той же точке (p, V) . Продифференцировав уравнение изотермы (69.2), получим, что $p dV + V dp = 0$, откуда

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V} \quad (\text{для изотермы}).$$

Дифференцирование уравнения адиабаты (69.8) дает, что $p\gamma V^{\gamma-1} dV + V^{\gamma} dp = 0$, откуда

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V} \quad (\text{для адиабаты}).$$

Таким образом, тангенс угла наклона касательной u адиабаты в γ раз больше, чем u изотермы — адиабата идет круче, чем изотерма (рис. 69.1).

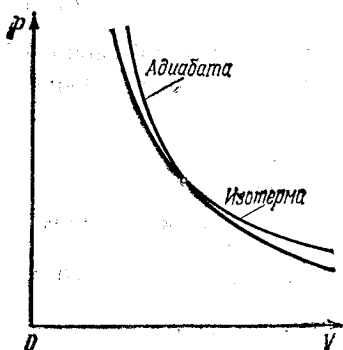


Рис. 69.1. Сопоставление адиабаты и изотермы идеального газа. Адиабата построена для $\gamma = 1,40$.

При выводе формул подразумевалось, что рассматриваемые процессы являются обратимыми (иначе параметры состояния не имели бы определенных значений и формулы утрачивали смысл). Мы знаем, что обратимыми могут быть только процессы, протекающие бесконечно медленно. Однако осуществить не только бесконечно медленный, но даже просто очень медленный адиабатический процесс невозможно,

поскольку совершенно не проводящих теплоту материалов для изготовления адиабатической оболочки не существует. Вместе с тем количество теплоты, кото-

рым обменивается тело с внешней средой, будет тем меньше, чем быстрее протекает процесс. Следовательно, близкими к адиабатическому могут быть только достаточно быстро протекающие процессы. Скорость процесса должна быть, с одной стороны, настолько большой, чтобы теплообменом с внешней средой можно было пренебречь, а с другой стороны, достаточно малой для того, чтобы процесс можно было считать практически обратимым. Такие условия выполняются, в частности, в пределах небольших объемов газа, в котором распространяется звуковая волна. Поэтому поведение газа при прохождении звуковой волны в пределах каждого достаточно малого объема хорошо описывается уравнением адиабаты.

§ 70. Политропические процессы

Политропическими называются процессы, в ходе которых теплоемкость тела остается постоянной. Следовательно, при политропическом процессе газ, кроме уравнения состояния, подчиняется дополнительному условию

$$C = \text{const.} \quad (70.1)$$

Чтобы найти уравнение политропы для идеального газа, подставим в уравнение (69.3) вместо $d'Q$ выражение $(m/M)CdT$:

$$\frac{m}{M} C dT = \frac{m}{M} C_V dT + p dV.$$

Преобразуем это соотношение следующим образом:

$$\frac{m}{M} (C - C_V) R dT = R p dV \quad (70.2)$$

(мы умножили обе части равенства на R).

Из уравнения (69.5) вытекает, что

$$\frac{m}{M} R dT = p dV + V dp.$$

Осуществив такую замену в формуле (70.2), придем к уравнению

$$(C - C_V)(p dV + V dp) = R p dV,$$

откуда

$$(C - C_V - R) p dV + (C - C_V) V dp = 0.$$

Разделим это уравнение на pV и учтем, что $C_V + R = C_p$. В итоге получим

$$(C - C_p) \frac{dV}{V} + (C - C_V) \frac{dp}{p} = 0. \quad (70.3)$$

Введем величину

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}. \quad (70.4)$$

Тогда уравнению (70.3) можно придать вид

$$n \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0. \quad (70.5)$$

Это уравнение отличается от уравнения (69.7) лишь тем, что вместо постоянной величины γ при dV/V стоит постоянная величина n . Поэтому решение уравнения (70.5) можно получить, заменив в (69.8) γ на n :

$$pV^n = \text{const}. \quad (70.6)$$

Это и есть уравнение политропы идеального газа. Определяемая выражением (70.4) величина n называется показателем политропы. Уравнение политропы в переменных T и V также получается из (69.8) заменой γ на n :

$$TV^{n-1} = \text{const}. \quad (70.7)$$

Решив уравнение (70.3) относительно C , получим формулу, выражающую теплоемкость C при политропическом процессе через показатель политропы n :

$$C = \frac{nC_V - C_p}{n - 1}. \quad (70.8)$$

Все рассмотренные в предыдущем параграфе процессы являются политропическими. Для изобарического и изохорического процессов это очевидно, поскольку C_p и C_V — постоянные величины. Из формулы (70.4) следует, что для изобарического процесса $n = 0$, а для изохорического $n = \infty$. Действительно, при $n = 0$ уравнение (70.6) переходит в уравнение изобары: $p = \text{const}$. Чтобы получить из (70.6) уравнение для случая, когда $n = \infty$, извлечем из левой части этого уравнения корень n -й степени. В результате придем к уравнению

$$p^{1/n} V = \text{const},$$

которое при $n \rightarrow \infty$ переходит в уравнение изохоры: $V = \text{const}$. При $n = \gamma$ уравнение (70.6) переходит в уравнение адиабаты (69.8). Наконец, при $n = 1$ получается уравнение изотермы (69.2).

Для теплоемкости при изотермическом процессе формула (70.8) дает значение, равное бесконечности: $C_T = \infty$. Это согласуется с тем, что сообщение телу количества теплоты $d'Q \neq 0$ не приводит к изменению температуры: $dT = 0$. Для теплоемкости при адиабатическом процессе формула (70.8) дает значение, равное нулю: $C_Q = 0$. Такое значение теплоемкости обусловлено тем, что $d'Q = 0$, в то время как dT отлично от нуля.

Ниже сопоставлены значения n и C для различных процессов:

Процесс	n	C
Изобарический	0	C_p
Изотермический	1	∞
Адиабатический	γ	0
Изохорический	∞	C_V

§ 71. Работа, совершаемая идеальным газом при различных процессах

Если известна для некоторого обратимого процесса зависимость давления газа от объема, т. е. функция $p = f(V)$, то работа, совершаемая в ходе этого процесса, вычисляется путем интегрирования:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV. \quad (71.1)$$

Здесь V_1 и V_2 — объем газа в начальном и конечном состояниях.

При изохорическом процессе $dV = 0$ вследствие чего работа равна нулю. Это справедливо не только для идеального газа, но и вообще для всякого тела.

В ходе изобарического процесса давление остается постоянным. Поэтому его можно вынести в формуле (71.1) за знак интеграла. В результате получается,

что

$$A_{12} = p(V_2 - V_1). \quad (71.2)$$

Эта формула также справедлива для любого тела.

Из уравнения (62.6) вытекает, что для идеального газа $p = (m/M)RT/V$. Подставив эту функцию в формулу (71.1) и приняв во внимание, что при изотермическом процессе $T = \text{const}$, получим

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Таким образом, работа, совершаемая идеальным газом при изотермическом процессе, определяется формулой

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (71.3)$$

Работу, совершаемую при адиабатическом процессе, проще всего вычислить, воспользовавшись тем, что, поскольку $d'Q = 0$, из уравнения первого начала термодинамики следует равенство

$$d'A = -dU \quad (71.4)$$

(работа совершается за счет убыли внутренней энергии). Интегрирование уравнения (71.4) дает, что

$$A_{12} = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2.$$

Подставив выражение (68.13) для U , найдем для работы идеального газа при адиабатическом процессе формулу

$$A_{12} = \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} \right).$$

Напишем эту формулу в виде

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \frac{p_2 V_2^\gamma}{p_1 V_1^\gamma} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Для адиабатического процесса $p_2 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma$. Поэтому окончательно

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (71.5)$$

Из уравнения состояния следует, что $p_1 V_1 = (m/M)RT_1$. Произведя такую замену, получим еще

одно выражение для работы, совершаемой идеальным газом при адиабатическом процессе:

$$A_{12} = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]. \quad (71.6)$$

Формулы для работы при политропическом процессе получаются из (71.5) и (71.6) просто заменой γ на n .

Подчеркнем, что работа газа — величина алгебраическая: при расширении газа она положительна, а при сжатии отрицательна.

§ 72. Классическая теория теплоемкости идеального газа

Молекулярно-кинетическая теория позволяет установить связь между теплоемкостью идеального газа и числом степеней свободы молекул. В § 62 отмечалось, что молекулы идеального газа не взаимодействуют между собой (исключая относительно редкие столкновения молекул друг с другом). Поэтому внутреннюю энергию моля идеального газа можно найти, умножив среднюю энергию одной молекулы $\langle \epsilon \rangle$ на постоянную Авогадро N_A . Согласно формуле (64.5) средняя энергия молекулы равна $(i/2)kT$. Следовательно,

$$U_M = N_A \langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2} N_A kT = \frac{i}{2} RT \quad (72.1)$$

(см. (62.8)).

Сравнение выражений (68.4) и (72.1) дает для молярной теплоемкости идеального газа при постоянном объеме формулу

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (72.2)$$

В соответствии с формулой (68.7)

$$C_p = C_V + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (72.3)$$

Из формул (72.2) и (72.3) следует, что

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \quad (72.4)$$

Таким образом, значение γ определяется числом и характером степеней свободы молекул идеального газа.

В табл. 72.1 даны значения C_V/R , C_p/R и γ , вычисленные для различных молекул по формулам (72.2), (72.3) и (72.4). Как теория согласуется с экспериментом, позволяют судить табл. 72.2 и рис. 72.1.

Таблица 72.1. Теоретические значения теплоемкости идеального газа

Молекула	Число степеней свободы			i	$\frac{C_V}{R}$	$\frac{C_p}{R}$	γ
	поступат.	вращат.	колебат.				
Одноатомная	3	—	—	3	3/2	5/2	1,67
Двухатомная жесткая	3	2	—	5	5/2	7/2	1,40
» упругая	3	2	1	7	7/2	9/2	1,29
Трехатомная жесткая	3	3	—	6	6/2	8/2	1,33

Таблица 72.2. Экспериментальные значения C_p/R для газов при 25 °С и атмосферном давлении

Газ	Число атомов в молекуле	C_p/R	Газ	Число атомов в молекуле	C_p/R
Водород (H)	1	2,50	Водород (H ₂)	2	3,47
Азот (N)	1	2,50	Азот (N ₂)	2	3,50
Кислород (O)	1	2,63	Кислород (O ₂)	2	3,53
Неон (Ne)	1	2,50	Хлор (Cl ₂)	2	4,07
Аргон (Ar)	1	2,50	CO ₂	3	4,47
Криптон (Kr)	1	2,50	C ₃ O ₂	5	7,91

Из табл. 72.2 на первый взгляд следует, что согласие теории с экспериментом, хотя бы для одно- и двухатомных молекул, вполне удовлетворительное. Однако на самом деле это не так. В соответствии с теорией теплоемкость газов должна быть целой кратной $R/2$, поскольку число степеней свободы может быть только целым: степень свободы либо есть, либо ее нет. Поэтому даже очень малые отклонения теплоемкости от значений, кратных $R/2$, играют принципиальную роль. В таблице же наблюдается много таких отклонений, причем заведомо превышающих погрешности измерений.

Особенно разительным становится расхождение между теорией и экспериментом, если обратиться к рис. 72.1, на котором показана зависимость C_p/R аргона, водорода и азота от температуры. Даже у одноатомного аргона в температурном интервале от 100

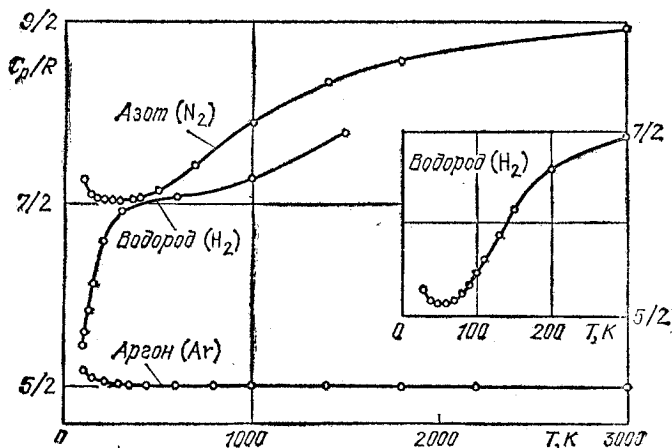


Рис. 72.1. Зависимость C_p/R от температуры для аргона, водорода и азота. Кружками отмечены экспериментальные точки. Справа в рамке дан начальный участок кривой для водорода

до 200 К наблюдается заметное изменение теплоемкости. У азота лишь на участке от 200 до 400 К теплоемкость остается приблизительно постоянной и соответствующей пяти степеням свободы ($i = 5$). Затем теплоемкость монотонно растет, достигая при 3000 К значения, примерно соответствующего $i = 7$ (т. е. шести степеням свободы, из которых одна колебательная). Водород при 40—70 К ведет себя как одноатомный газ с $i = 3$. Затем число степеней свободы как бы непрерывно растет, достигает при 400 К значения, равного пяти (молекулы движутся поступательно и вращаются), и продолжает расти.

Полное согласие с экспериментом было достигнуто в квантовой теории теплоемкости газов. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением двухатомных молекул. Согласно квантовой механике энергия вращательного и колебательного движений молекулы может иметь не любые, а лишь дискретные значения (т. е.

значения, отличающиеся друг от друга на конечную величину). Поэтому энергия, связанная с этими видами движения, может изменяться только скачками. Для энергии поступательного движения такого ограничения не существует — она может изменяться непрерывно, сколь угодно малыми порциями.

Интервалы между уровнями (т. е. допустимыми значениями) энергии для колебательного движения

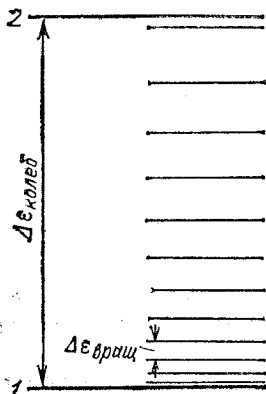


Рис. 72.2. Схема энергетических уровней двухатомной молекулы: 1 — основной (т. е. самый низкий) колебательный уровень, 2 — первый возбужденный уровень; следующие за ним колебательные уровни не показаны. В промежутке между колебательными находятся вращательные уровни

много больше, чем для вращательного движения: $\Delta\epsilon_{\text{колеб}} \gg \Delta\epsilon_{\text{вращ}}$ (рис. 72.2).

Подавляющая часть молекул газа обладает энергией, близкой к средней энергии $\langle \epsilon \rangle$, которая имеет значение порядка kT (см. формулу (64.5)). Если эта энергия заметно меньше, чем $\Delta\epsilon_{\text{вращ}}$, то вращательное движение возбудиться не может и двухатомные молекулы ведут себя как одноатомные (см. на рис. 72.1 значение C_p/R для водорода при 50 К). При повышении температуры и соответственно увеличении $\langle \epsilon \rangle$ все большая часть молекул оказывается вовлеченной во вращательное движение. На рис. 72.1 этому процессу соответствует участок кривой для водорода в интервале от 50 до 400 К.

При kT порядка $\Delta\epsilon_{\text{колеб}}$ начинают возбуждаться колебания молекул. Число молекул, вовлеченных в колебательное движение, с повышением температуры растет. На рис. 72.1 этому процессу соответствует участок, начинающийся при 600 К, на кривой для во-

дорода и участок от 300 до 3000 К на кривой для азота.

Подводя итог, можно сказать, что классическая теория теплоемкости дает удовлетворительные результаты для одноатомных молекул (это связано с тем, что поступательное движение не имеет квантовых ограничений). Для многоатомных молекул классическая теория приближенно верна лишь для отдельных температурных интервалов, причем каждому интервалу соответствует свое число степеней свободы молекул.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Газ совершает над граничащими с ним телами отрицательную работу. Что происходит при этом с объемом газа?
2. Может ли случиться, что газ получает теплоту, а его внутренняя энергия уменьшается?
3. Изменяется ли внутренняя энергия идеального газа при изотермическом расширении?
4. Всегда ли справедливо соотношение $C_p - C_v = R$?
5. В ходе какого процесса работа, совершаемая телом, пропорциональна изменению его объема?
6. Чему равна работа, совершаемая при изохорическом процессе?
7. В ходе какого процесса работа, совершаемая телом, равна убыли его внутренней энергии?

Примеры решения задач

1. Тело с не зависящей от температуры теплоемкостью $C = 20$ Дж/К охлаждается от $t_1 = 100^\circ\text{C}$ до $t_2 = 0^\circ\text{C}$. Определить количество теплоты Q , полученное телом.

Решение. $Q = C(t_2 - t_1) = 20(0 - 100) = -2,0$ кДж. Q получилось отрицательным. Это означает, что тело отдает $Q' = +2,0$ кДж. (Надо помнить, что количество полученной теплоты, так же как и отданной, — величина алгебраическая.)

2. Идеальный газ (с $\gamma = 1,40$), находившийся первоначально при температуре $t_1 = 0^\circ\text{C}$, подвергается сжатию, в результате чего объем газа уменьшается в 10 раз. Считая процесс сжатия адиабатическим, определить, до какой температуры t_2 нагревается газ вследствие сжатия.

Решение. Уравнение адиабаты в переменных T и V имеет вид $TV^{\gamma-1} = \text{const}$. Следовательно,

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \text{ откуда } T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}.$$

Подстановка числовых значений даст

$$T_2 = 273 \cdot 10^{0,4} = 686 \text{ К, соответственно } t_2 = 413 \text{ }^\circ\text{С.}$$

3. Идеальный газ расширяется изотермически от объема $V_1 = 0,100 \text{ м}^3$ до объема $V_2 = 0,300 \text{ м}^3$. Конечное давление газа $p_2 = 2,00 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Определить: а) приращение внутренней энергии газа ΔU , б) совершенную газом работу A , в) количество полученной газом теплоты Q .

Решение. а) Внутренняя энергия идеального газа пропорциональна термодинамической температуре. Температура газа не изменяется, поэтому $\Delta U = 0$.

б) Работа, совершаемая идеальным газом при изотермическом процессе, определяется формулой

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Согласно уравнению состояния множитель перед логарифмом равен произведению давления на объем. Поэтому можно написать, что

$$A = p_2 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = 2,00 \cdot 10^5 \cdot 0,300 \ln \frac{0,300}{0,100} = 66 \text{ кДж.}$$

в) В соответствии с первым началом термодинамики $Q = \Delta U + A$. Следовательно,

$$Q = A = 66 \text{ кДж.}$$

Глава 11. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 73. Функция распределения вероятности

Пусть имеется совокупность очень большого числа N одинаковых молекул (например, газ), находящаяся в равновесном состоянии. Предположим, что некоторая величина x , характеризующая молекулу (например, вращательная или колебательная энергия молекулы; см. § 72), может принимать ряд дискретных значений:

$$x_1, x_2, \dots, x_l, \dots$$

Если бы удалось измерить одновременно значение величины x у всех N молекул, то оказалось бы, что у N_1 молекул величина x имеет значение x_1 , у N_2 молекул — значение x_2, \dots , у N_l молекул — значение x_l и т. д.

Величина

$$P_i = \frac{N_i}{N} \quad (73.1)$$

называется вероятностью того, что величина x имеет значение x_i . Подчеркнем, что такое определение вероятности пригодно лишь в случае очень больших N .

Очевидно, что $\sum N_i = N$. Поэтому

$$\sum P_i = \sum \frac{N_i}{N} = 1. \quad (73.2)$$

Таким образом, *сумма вероятностей всех возможных значений величины x равна единице*.

Допустим, что молекулы характеризуются значениями двух величин x и y (например, колебательной и вращательной энергий), каждая из которых может принимать дискретные значения x_i и y_k . Согласно определению (73.1) вероятности этих значений равны

$$P(x_i) = \frac{N(x_i)}{N}, \quad P(y_k) = \frac{N(y_k)}{N} \quad (73.3)$$

Если значение одной из величин не зависит от того, какое значение имеет другая, то величины x и y называются статистически независимыми.

Найдем вероятность $P(x_i, y_k)$ того, что статистически независимые величины имеют одновременно значения x_i и y_k . Из (73.3) следует, что значение x_i имеют $N(x_i) = NP(x_i)$ молекул. Вследствие статистической независимости у этих $N(x_i)$ молекул значения y_k будут распределены в той же пропорции, что и у всех N молекул. Поэтому из числа $N(x_i)$ значения y_k будут иметь $N(x_i)P(y_k) = NP(x_i)P(y_k)$ молекул. Разделив это число на N , найдем искомую вероятность:

$$P(x_i, y_k) = P(x_i)P(y_k). \quad (73.4)$$

Мы пришли к теореме об умножении вероятностей, согласно которой *вероятность одновременного появления статистически независимых событий равна произведению вероятностей этих событий*. (В рассмотренном выше случае событием является то, что величина имеет данное значение.)

Если вероятность значения x_i величины x равна P_i , то согласно формуле (73.1) у $N_i = P_i N$ молекул

x имеет значение x_i . Сумма значений величины x у этих N_i молекул будет равна $N_i x_i = P_i N x_i$, а сумма значений x у всех N молекул определится выражением

$$\sum N_i x_i = \sum P_i N x_i.$$

Разделив эту сумму на N , найдем среднее (по молекулам) значение величины x :

$$\langle x \rangle = \sum P_i x_i. \quad (73.5)$$

Полученная нами формула позволяет, зная вероятности различных значений величины x , найти среднее значение этой величины.

Теперь рассмотрим случай, когда характеризующая молекулу величина x может принимать непрерывный ряд значений от $x = a$ до $x = b$ (в частности, a и b могут равняться $-\infty$ и $+\infty$). Примерами таких величин могут служить модуль поступательной скорости или кинетическая энергия молекулы. В этом случае число возможных значений x бесконечно велико, а количество молекул N хотя и очень велико, но конечно. Поэтому вопрос о том, какое количество молекул обладает точно заданным значением величины x , не имеет смысла — это количество равно нулю.

В рассматриваемом случае правомерным является вопрос о том, какова вероятность dP_x того, что величина имеет значения, заключенные в пределах малого интервала dx , расположенного в окрестности значения, равного x (данное значение x должно принадлежать интервалу dx). При малом dx эта вероятность будет пропорциональной dx . Кроме того, она зависит от того, в каком месте оси x расположен интервал dx , т. е. является функцией x : $f(x)$. Таким образом,

$$dP_x = f(x) dx \quad (73.6)$$

(индекс x при dP указывает значение x , в окрестности которого расположен dx). Функция $f(x)$ называется функцией распределения вероятности или плотностью вероятности.

Умножив dP_x на полное число молекул N , получим количество молекул dN_x , обладающих значениями x , заключенными в пределах данного

интервала dx :

$$dN_x = N dP_x = Nf(x) dx. \quad (73.7)$$

Интеграл от dN_x , взятый по всему интервалу возможных значений x (т. е. «сумма» dN_x), должен равняться полному числу молекул N :

$$\int dN_x = \int N dP_x = \int Nf(x) dx = N.$$

Отсюда следует, что

$$\int dP_x = \int f(x) dx = 1. \quad (73.8)$$

Формула (73.8) является аналогом формулы (73.2). Из условия (73.8) вытекает, что площадь, ограниченная графиком функции $f(x)$, равна единице.

Выражение $x dN_x$ дает сумму значений x , которыми обладают dN_x молекул, а «сумма» таких выражений, т. е.

$$\int x dN_x = \int xN dP_x = N \int x dP_x, \quad (73.9)$$

дает сумму значений x всех N молекул. Разделив эту сумму на N , получим среднее (по молекулам) значение величины x :

$$\langle x \rangle = \int x dP_x = \int xf(x) dx. \quad (73.10)$$

Эта формула является аналогом формулы (73.5).

Подставив в формулу (73.9) вместо x некоторую функцию этой величины $\varphi(x)$, придем к формуле

$$\langle \varphi(x) \rangle = \int \varphi(x) f(x) dx. \quad (73.11)$$

По этой формуле можно вычислить, например, среднее значение x^2 :

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 f(x) dx. \quad (73.12)$$

§ 74. Распределение Максвелла

В этом параграфе мы рассмотрим распределение молекул газа по скоростям. Состояние газа будем предполагать равновесным. Для наглядного представления скоростей молекул газа воспользуемся следующим приемом. Введем воображаемое простран-

ство скоростей (v -пространство), в котором будем откладывать вдоль прямоугольных координатных осей значения компонент скоростей v_x , v_y , v_z отдельных молекул. (рис. 74.1). Тогда каждой молекуле будет соответствовать в пространстве скоростей точка.

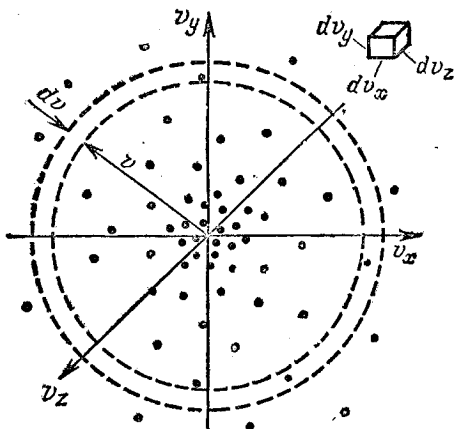


Рис. 74.1. Задание скоростей молекул газа с помощью m -точек в v -пространстве. Из-за столкновений между молекулами положение m -точек все время изменяется. Однако, поскольку газ находится в равновесном состоянии, плотность m -точек в каждой геометрической точке остается постоянной

Чтобы отличить эту точку от произвольной точки v -пространства, условимся называть точку, изображающую скорость молекулы, m -точкой, а произвольную точку v -пространства — геометрической точкой.

Поскольку газ находится в равновесии, все направления движения молекул равноправны, вследствие чего расположение m -точек относительно начала координат оказывается сферически-симметричным. Поэтому плотность m -точек (их число в единице объема v -пространства) является функцией расстояния от начала координат, т. е. функцией модуля скорости v .

Если увеличить количество молекул газа N в некоторое число раз, то во столько же раз возрастет всюду плотность m -точек. Следовательно, плотность m -точек пропорциональна N . В соответствии с этим

представим плотность m -точек в виде

$$Nf(v). \quad (74.1)$$

Зная вид функции $f(v)$, можно решить ряд задач. Например, найти число молекул dN_{v_x, v_y, v_z} компоненты скорости которых заключены в пределах интервалов dv_x, dv_y, dv_z , лежащих в окрестности геометрической точки с координатами v_x, v_y, v_z . Для этого нужно плотность m -точек в данной геометрической точке умножить на объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами dv_x, dv_y, dv_z (см. рис. 74.1). Таким образом,

$$dN_{v_x, v_y, v_z} = Nf(v) dv_x dv_y dv_z. \quad (74.2)$$

На рис. 74.1 изображен штриховой линией шаровой слой радиуса v и толщины dv . Молекулы, m -точки которых находятся в этом шаровом слое, обладают скоростями, модули которых лежат в интервале от v до $v + dv$. Чтобы найти число dN_v таких молекул, нужно умножить плотность m -точек (74.1), соответствующую данному значению v , на объем шарового слоя, равный $4\pi v^2 dv$:

$$dN_v = Nf(v) \cdot 4\pi v^2 dv. \quad (74.3)$$

Разделив это выражение на число молекул N , найдем вероятность dP_v того, что модуль скорости молекулы окажется в пределах от v до $v + dv$:

$$dP_v = f(v) \cdot 4\pi v^2 dv = F(v) dv. \quad (74.4)$$

Согласно формуле (73.6) выражение $F(v) = f(v) \cdot 4\pi v^2$ представляет собой функцию распределения вероятности значений v .

Функцию $F(v)$ получил теоретически Д. К. Максвелл (см. сноску на с. 183). Она имеет вид

$$F(v) = A \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v^2, \quad (74.5)$$

где m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура. Коэффициент пропорциональности A определяется из условия

$$\int_0^{\infty} F(v) dv = 1, \quad (74.6)$$

которое называется условием нормировки функции $F(v)$ (см. формулу (73.8)). По поводу верхнего предела интегрирования надо сделать следующее разъяснение. Значение модуля скорости молекул газа не может превысить некоторое хотя и очень большое, но конечное значение. Однако из-за экспоненциального множителя функция $F(v)$ убывает столь быстро, что при достаточно больших значениях v она практически не отличается от нуля. Поэтому расширение верхнего предела интегрирования до бесконечности не вносит ощутимой ошибки.

Соответствующий расчет дает для коэффициента пропорциональности A значение $(m/2\pi kT)^{3/2}$. Напишем с учетом этого окончательное выражение для функции распределения молекул газа по скоростям:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v^2. \quad (74.7)$$

Эта функция называется функцией распределения Максвелла.

Отметим, что под знаком экспоненты в формуле (74.7) стоит отношение кинетической энергии молекулы (отвечающей данному значению скорости v) к величине kT , характеризующей среднее (по молекулам) значение этой энергии.

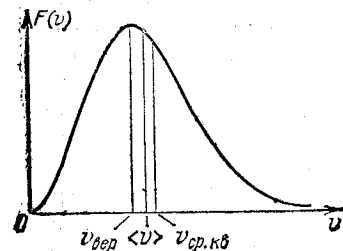


Рис. 74.2. График функции распределения Максвелла. Вертикальными линиями отмечены три характерные скорости: наиболее вероятная $v_{\text{вер}}$, средняя $\langle v \rangle$ и средняя квадратичная $v_{\text{ср. кв}}$

График функции (74.7) приведен на рис. 74.2. Наиболее вероятной будет, очевидно, скорость, отвечающая максимуму функции $F(v)$. Ее значение $v_{\text{вер}}$ можно найти, приравняв нулю производную dF/dv . Опустив в выражении (74.7) множители, не за-

висящие от v , получим для нахождения $v_{\text{вер}}$ соотношение

$$\frac{d}{dv} \left[\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 \right] = 0.$$

Осуществив дифференцирование, придем к уравнению

$$\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\left(2 - \frac{mv^2}{kT}\right)v = 0.$$

Первый сомножитель (экспонента) обращается в нуль при $v = \infty$, а третий сомножитель (v) при $v = 0$. Однако из графика видно, что значения $v = 0$ и $v = \infty$ соответствуют минимумам функции $F(v)$. Следовательно, значение v , отвечающее максимуму, получается из равенства нулю второй скобки: $(2 - mv^2/kT) = 0$. Отсюда

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (74.8)$$

Согласно формулам (73.10) и (73.12) среднее (по молекулам) значение модуля скорости v и среднее значение квадрата v определяются выражениями

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \int_0^{\infty} v F(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \\ \langle v^2 \rangle &= \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = \frac{3kT}{m} \end{aligned} \quad (74.9)$$

(не приводя вычислений, мы дали их результат).

Таким образом, средняя скорость молекул (ее называют также средней арифметической скоростью) имеет значение

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (74.10)$$

Квадратный корень из выражения (74.9) дает среднюю квадратичную скорость молекул:

$$v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (74.11)$$

Это выражение мы уже получили в § 64 (см. формулу (64.3)).

Умножив числитель и знаменатель подкоренных выражений в (74.8), (74.10) и (74.11) на постоянную Авогадро и учтя, что kN_A равно газовой постоянной R , а mN_A — молярной массе газа M , придем

к формулам

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (74.12)$$

Найдем среднюю скорость молекул азота ($M = 28$ г/моль $= 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) при комнатной температуре (293 K):

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 293}{3,14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 470 \text{ м/с.}$$

Для кислорода получается при той же температуре $\langle v \rangle = 440$ м/с, а для водорода $\langle v \rangle = 1760$ м/с. Таким образом, молекулы воздуха пробегают за секунду путь, равный почти 0,5 км.

Если имеется смесь газов, находящаяся в равновесии, то в пределах каждого сорта молекул имеет место распределение Максвелла со своим значением m . Соответственно более тяжелые молекулы движутся с меньшей средней скоростью, чем более легкие.

Согласно формуле (73.7) число молекул, скорости которых заключены в пределах от v до $v + dv$, равно

$$dN_v = NF(v) dv = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v^2 dv \quad (74.13)$$

(N — полное число молекул). Эта формула значительно упрощается, если перейти к относительной скорости

$$u = \frac{v}{v_{\text{вер}}}, \quad (74.14)$$

т. е. положить $v = uv_{\text{вер}} = u \sqrt{2kT/m}$. Тогда вместо v^2 нужно подставить в (74.13) $u^2 \cdot 2kT/m$, а вместо dv — выражение $\sqrt{2kT/m} du$. В результате получается формула

$$dN_u = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) u^2 du = f(u) du, \quad (74.15)$$

где dN_u — число молекул, относительные скорости которых заключены в пределах от u до $u + du$. Функция $f(u)$ есть функция распределения вероятности значений u , которая имеет вид

$$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) u^2. \quad (74.16)$$

Это выражение представляет собой функцию распределения Максвелла, написанную в переменной u .

Проинтегрировав выражение (74.15) в пределах от u_1 до u_2 , получим количество молекул ΔN , относительные скорости которых заключены в этих пределах:

$$\Delta N = N \int_{u_1}^{u_2} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) u^2 du. \quad (74.17)$$

В табл. 74.1 приведены относительные количества молекул $\Delta N/N$, вычисленные по формуле (74.17) для

Таблица 74.1. Относительная доля молекул, имеющих различную относительную скорость $u = v/v_{\text{вер}}$

u	$\frac{\Delta N}{N}$, %	u	$\frac{\Delta N}{N}$, %
0—0,5	8,1	2—3	4,6
0,5—1,5	70,7	> 3	0,04
1,5—2	16,6	> 5	$8 \cdot 10^{-9}$

различных интервалов скоростей. Из таблицы следует, что у 70,7 % молекул скорость v отличается от наиболее вероятной не более чем на 50 %. Скоростями, превышающими наиболее вероятную более чем в три раза, обладают лишь 0,04 % молекул, а скорости, превышающие наиболее вероятную более чем в пять раз, наблюдаются у одной из 12 миллиардов молекул. Эти данные подтверждают высказанное ранее утверждение о том, что скорости молекул в основном группируются вблизи наиболее вероятного (с тем же правом можно сказать — вблизи среднего) значения.

Согласно формулам (74.12)

$$v_{\text{вер}} : \langle v \rangle : v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{2} : \sqrt{8/\pi} : \sqrt{3} = 1 : 1,13 : 1,22 \quad (74.18)$$

(см. рис. 74.2). Таким образом, средняя и средняя квадратичная скорости превышают наиболее вероятную скорость на 13 и 22 % соответственно. Из (74.14)

и (74.18) следует, что $u_{\text{вер}} = 1$, $\langle u \rangle = 1,13$, $u_{\text{ср. кв}} = 1,22$.

На рис. 74.3 сопоставлены графики распределения Максвелла для двух значений температуры.

От распределения по скоростям можно перейти к распределению молекул по значениям кинетической энергии поступательного движения. Эта энергия ϵ

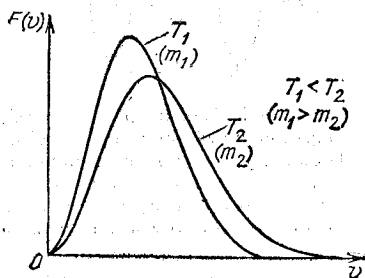


Рис. 74.3. Графики можно трактовать либо как соответствующие различным значениям температуры, либо как соответствующие различным значениям массы молекул. Площадь, охватываемая графиком, в обоих случаях равна единице

связана со скоростью v соотношением $\epsilon = mv^2/2$. Отсюда

$$v^2 = 2\epsilon/m, \quad v = \sqrt{2\epsilon/m}, \quad dv = \sqrt{1/2m\epsilon} d\epsilon.$$

Заменив в (74.13) v^2 и dv их выражениями через ϵ и $d\epsilon$, придем к формуле

$$dN_\epsilon = N \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\epsilon}{kT}\right) \sqrt{\epsilon} d\epsilon, \quad (74.19)$$

где dN_ϵ — число молекул, кинетическая энергия поступательного движения которых заключена в пределах от ϵ до $\epsilon + d\epsilon$.

Из (74.19) следует, что функция распределения молекул по значениям ϵ имеет вид

$$f(\epsilon) = A \exp\left(-\frac{\epsilon}{kT}\right) \sqrt{\epsilon}, \quad (74.20)$$

где A — нормировочный множитель, равный $(2/\sqrt{\pi})(kT)^{-3/2}$.

Распределение молекул по скоростям исследовалось экспериментально различными методами. Рассмотрим идею метода Ламмерта. Пучок молекул, выходящий из отверстия в сосуде, стенки которого поддерживались при заданной температуре, проходил через щель в первом диске (рис. 74.4). Через щель во

втором диске могли пройти лишь те молекулы, которые долетали до него в тот момент, когда на их пути оказывалась щель в этом диске. Более медленные молекулы достигнут второго диска слишком поздно, а более быстрые — слишком рано для того, чтобы пройти через щель. Следовательно, такое устройство (называемое селектором скоростей) выделяет из пучка молекулы, обладающие скоростями, заключенными в узком интервале Δv (ширина интервала определялась шириной щели).

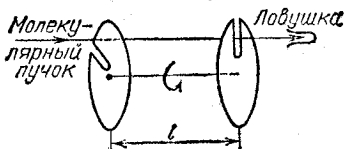


Рис. 74.4. Селектор скоростей, образованный двумя насаженными на общую ось вращающимися дисками с радиальными щелями, смещенными друг относительно друга на угол φ

Если диски вращаются с угловой скоростью ω , то они повернутся на угол φ между щелями за время $t = \varphi/\omega$. За это время достигнут второго диска и, следовательно, пройдут через его щель молекулы, скорость которых $v = l/t = l\omega/\varphi$. Это и есть средняя скорость молекул, прошедших через селектор. Изменяя скорость вращения дисков, можно было выделять из пучка молекулы, обладающие скоростями в различных интервалах Δv . Улавливая эти молекулы в течение некоторого времени, можно было определять их относительное количество.

Надо иметь в виду, что распределение по скоростям молекул, вышедших через отверстие в сосуде (т. е. молекул в пучке), отличается от распределения в закрытом сосуде. Это обусловлено тем, что более быстрые молекулы выходят из отверстия в относительно большем количестве, чем более медленные, в результате чего пучок оказывается обогащенным более быстрыми молекулами. Учет этого обстоятельства приводит к следующей функции распределения скоростей в пучке:

$$F_{\text{пуч}}(v) = A_1 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^3,$$

где A_1 — нормировочный множитель. Наиболее вероятная скорость в пучке $v_{\text{вер}} = \sqrt{3kT/m}$, а средняя скорость $\langle v \rangle = \sqrt{9\pi kT/8m}$.

Результаты всех экспериментов, осуществленных различными методами, оказались в полном согласии с распределением, полученным теоретически Максвеллом.

§ 75. Барометрическая формула

Известно, что атмосферное давление убывает с высотой. Попробуем найти функцию $p(h)$, описывающую зависимость давления от высоты.

Выделим мысленно в атмосфере вертикальный столб с площадью поперечного сечения S , равной единице (рис. 75.1). Атмосферное давление на высоте h

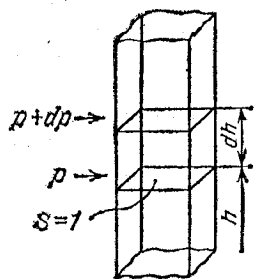


Рис. 75.1. Атмосферное давление уменьшается с высотой. Поэтому приращение высоты и давления имеют противоположные знаки: если $dh > 0$, то $dp < 0$, и наоборот

обусловлено весом столба воздуха, простирающегося от сечения, расположенного на данной высоте, до внешней границы атмосферы. Поэтому убыль давления $-dp$ ¹⁾ при переходе от высоты h к высоте $h + dh$ равна весу воздуха, заключенного в элементе столба высоты dh :

$$-dp = \rho g dh, \quad (75.1)$$

где ρ — плотность воздуха на высоте h .

При условиях, близких к нормальным (т. е. при давлениях порядка атмосферы и температурах, близких к 0°C), воздух довольно хорошо подчиняется уравнению состояния идеального газа. Из уравнения (62.6) следует, что плотность идеального газа, т. е. масса единицы объема, равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}. \quad (75.2)$$

¹⁾ Напомним, что dp означает приращение давления, которое отличается от убыли знаком,

Подстановка этого выражения в формулу (75.1) приводит к уравнению

$$dp = - \frac{Mpg}{RT} dh \quad (75.3)$$

(мы перенесли знак минус в правую часть равенства). Здесь под M подразумевается молярная масса воздуха, определенная с учетом относительного содержания в воздухе азота, кислорода и других газов. Разделив переменные, придем к дифференциальному уравнению

$$\frac{dp}{p} = - \frac{Mg}{RT} dh. \quad (75.4)$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение, нужно знать, как изменяется с высотой температура, т. е. определить вид функции $T(h)$ (зависимость g от h можно пренебречь).

Для изотермической атмосферы, т. е. для случая, когда температура с высотой не изменяется, интегрирование уравнения (75.4) приводит к соотношению

$$\ln p = - \frac{Mgh}{RT} + \ln C$$

(имея в виду дальнейшие преобразования, мы обозначили постоянную интегрирования через $\ln C$). Потенцируя это соотношение, придем к формуле

$$p = C \exp\left(- \frac{Mgh}{RT}\right).$$

Положив $h = 0$, получим, что $C = p_0$, где p_0 — атмосферное давление на высоте, принятой за начало отсчета.

Таким образом, для изотермической атмосферы зависимость давления от высоты описывается формулой

$$p = p_0 \exp\left(- \frac{Mgh}{RT}\right), \quad (75.5)$$

которая называется барометрической формулой.

На самом деле температура атмосферы заметно изменяется с высотой, достигая на высоте 10 км значений, на несколько десятков кельвин меньших, чем на поверхности Земли. Однако относительное (по сравнению с температурой, равной примерно 300 К)

изменение температуры с высотой не очень велико, вследствие чего формула (75.5) позволяет определять довольно точно высоту, измеряя давление. Предназначенный для этой цели, проградуированный в значениях высоты барометр называется альтиметром. Такие высотомеры устанавливаются, в частности, на самолетах.

§ 76. Распределение Больцмана

Заменим в формуле (75.5) отношение M/R равным ему отношением m/k (m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана). Кроме того, представим p в виде nkT (см. уравнение (62.10)). В результате придем к соотношению

$$nkT = n_0 kT \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right). \quad (76.1)$$

Формула (75.5) получена для изотермической атмосферы. Поэтому значение T в обеих частях равенства (76.1) одно и то же, так что kT можно сократить. Таким образом,

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right). \quad (76.2)$$

Здесь n_0 — плотность молекул (т. е. их число в единице объема) при $h = 0$, n — плотность молекул на высоте h .

Формула (76.2) описывает распределение молекул по высоте в изотермической атмосфере. Из нее следует, что с понижением температуры плотность молекул на высотах, отличных от нуля, убывает, обращаясь в нуль при $T = 0$. Это означает, что при абсолютном нуле все молекулы расположились бы на поверхности Земли. С повышением температуры зависимость n от h становится все более слабой, так что молекулы оказываются распределенными по высоте почти равномерно. Такое поведение функции при изменении температуры объясняется тем, что она отражает «противоборство» двух тенденций: 1) притяжение молекул к Земле (характеризуемое силой mg) стремится расположить их на земной поверхности, 2) тепловое движение (характеризуемое энергией kT) стремится разбросать молекулы равномерно по всем высотам. При каждом конкретном распределении мо-

лекул по высоте (при каждом значении T) обе тенденции уравнивают друг друга.

Выражение mgh представляет собой потенциальную энергию молекулы ϵ_p . Поэтому формулу (76.2) можно написать следующим образом:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\epsilon_p}{kT}\right). \quad (76.3)$$

Здесь n_0 — плотность молекул в том месте, для которого ϵ_p принята равной нулю, n — плотность молекул в том месте, где потенциальная энергия молекулы равна ϵ_p .

Л. Больцман доказал, что формула (76.3) справедлива в случае потенциального силового поля любой природы для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения. В связи с этим функцию (76.3) называют распределением Больцмана. Таким образом, распределение (76.2) представляет собой частный случай более общего распределения (76.3).

Между распределениями Больцмана и Максвелла имеется большое сходство: и в том и в другом случае основным множителем является экспонента, под знаком которой стоит отношение энергии молекулы (в одном случае потенциальной, в другом кинетической) к величине kT , определяющей среднюю энергию теплового движения молекул.

Возьмем элементарный объем $dV = dx dy dz$, расположенный в точке с координатами x, y, z . Согласно формуле (76.3) в пределах этого объема находится число молекул

$$dN_{x,y,z} = n_0 \exp\left(-\frac{\epsilon_p(x,y,z)}{kT}\right) dx dy dz. \quad (76.4)$$

Эта формула обнаруживает еще большее сходство с распределением Максвелла, которое можно представить в виде

$$dN_{v_x, v_y, v_z} = N A' \exp\left(-\frac{mv^2/2}{kT}\right) dv_x dv_y dv_z \quad (76.5)$$

[см. формулу (74.2), в которой $f(v)$, как следует из (74.4) и (74.5), равна $A' \exp(-mv^2/2kT)$]. Чтобы еще больше подчеркнуть сходство формул (76.4) и (76.5), заметим, что кинетическая энергия $mv^2/2$ есть

функция компонент скорости:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

Распределения (76.4) и (76.5) можно объединить в один закон Максвелла — Больцмана, согласно которому число молекул, компоненты скоростей которых лежат в пределах от v_x, v_y, v_z до $v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$, а координаты — в пределах от x, y, z до $x + dx, y + dy, z + dz$, равно

$$dN_{v_x, v_y, v_z, x, y, z} = A \exp\left(-\frac{mv^2/2 + \varepsilon_p}{kT}\right) dv_x dv_y dv_z dx dy dz. \quad (76.6)$$

Здесь A — нормировочный множитель, равный $n_0(m/2\pi kT)^{3/2}$.

§ 77. Определение Перреном постоянной Авогадро

Распределение по высоте броуновских частиц было использовано Перреном¹⁾ для определения постоянной Авогадро. Напомним, что броуновскими частицами называются взвешенные в жидкости очень мелкие твердые частицы, совершающие беспорядочное (броуновское) движение. Это движение указывает на то, что достаточно малые частицы вовлекаются молекулами жидкости в тепловое движение. Участвуя в тепловом движении, броуновские частицы ведут себя подобно гигантским молекулам, и на них распространяются закономерности молекулярно-кинетической теории, в частности закон распределения Больцмана.

Роль броуновских частиц в опытах Перрена играли шарики из гуммигута (сгущенного молочного сока, получаемого из надрезов в коре некоторых видов деревьев, растущих в Южной Азии). Применяв многократное центрифугирование, Перрену удалось приготовить эмульсию из практически одинаковых шариков с радиусом порядка 0,1 мкм. Эмульсия помещалась в стеклянную кювету и рассматривалась в микроскоп (рис. 77.1). Перемещая тубус микроскопа в вертикальном направлении, можно было исследовать распределение шариков по высоте.

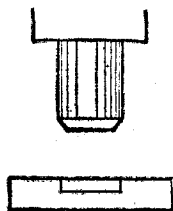
¹⁾ Жан Батист Перрен (1870—1942) — французский физик.

Согласно формуле (76.2) число шариков в единице объема на высоте h равно

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{p'h}{kT}\right),$$

где n_0 — плотность шариков на высоте $h = 0$. Для того чтобы при определении силы, действующей на шарик, учесть поправку на закон Архимеда, вместо

Рис. 77.1. Опыт Перрена. Слой эмульсии в кювете имел глубину 0,1 мм. Глубина поля зрения микроскопа была столь мала, что были видны лишь частицы, находившиеся в слое толщины примерно 1 мкм, что составляло несколько диаметров частицы



mg в формулу подставлялось выражение $p' = (\rho - \rho')Vg$, где V — объем шарика, ρ — плотность гуммигута, ρ' — плотность жидкости.

Число шариков ΔN , видимое в микроскоп на высоте h , было равно $n(h)S\Delta h$, где S — площадь, а Δh — глубина поля зрения микроскопа. Напишем отношение чисел частиц для двух высот:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} &= \frac{n(h_1)S\Delta h}{n(h_2)S\Delta h} = \frac{n(h_1)}{n(h_2)} = \\ &= \frac{\exp(-p'h_1/kT)}{\exp(-p'h_2/kT)} = \exp\frac{p'(h_2 - h_1)}{kT}. \end{aligned}$$

Взяв логарифм от обеих частей равенства, получим соотношение

$$\ln \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{p'(h_2 - h_1)}{kT},$$

откуда

$$k = \frac{p'(h_2 - h_1)}{T \ln(\Delta N_1/\Delta N_2)}. \quad (77.1)$$

Таким образом, зная p' и T , а также подсчитав ΔN для двух значений h , можно было по формуле (77.1) вычислить значение постоянной Больцмана k . Разделив затем газовую постоянную R на k , можно было определить постоянную Авогадро N_A .

Перрен получил на различных эмульсиях значения N_A , лежащие в пределах от $6,5 \cdot 10^{23}$ до $7,2 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Эти значения согласуются с погреш-

ностью 10—20 % с полученным более точными методами значением $6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Это доказывает применимость к броуновским частицам распределения Больцмана.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Напишите функцию распределения для случая, когда величина x с равной вероятностью может принимать значения от 0 до a (значения вне этого интервала невозможны).
2. Какая из скоростей молекул больше — средняя или наиболее вероятная?
3. Какой примерно путь проходят при комнатной температуре молекулы воздуха за одну секунду?
4. Термодинамическая температура газа изменилась на 1 %. На сколько процентов изменилась при этом средняя скорость молекул?
5. Как должна была бы изменяться с высотой термодинамическая температура для того, чтобы атмосферное давление не зависело от высоты?

Примеры решения задач

1. В запаянном стеклянном баллоне заключен моль одноатомного идеального газа при температуре $T = 293$ К. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы средняя скорость его молекул увеличилась на 1 %?

Решение. Средняя скорость молекул пропорциональна квадратному корню из термодинамической температуры. Поэтому отношение скоростей должно быть равно корню из отношения соответствующих температур:

$$1,01 = \sqrt{\frac{T + \Delta T}{T}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T}}.$$

Возведя обе части равенства в квадрат, получим

$$1,0201 = 1 + \frac{\Delta T}{T}, \quad \text{откуда} \quad \Delta T = 0,0201T.$$

Теплоемкость при постоянном объеме одноатомного идеального газа $C_V = \frac{3}{2}R$. Следовательно, требуемое количество теплоты равно

$$Q = C_V \Delta T = \frac{3}{2} R \cdot 0,0201T = 73 \text{ Дж.}$$

2. Полагая температуру воздуха и ускорение свободного падения не зависящими от высоты, определить, на какой высоте h над уровнем моря плотность воздуха в два раза меньше своего значения на уровне моря. Температуру воздуха считать равной 0°C .

Решение. При неизменной температуре плотность идеального газа пропорциональна давлению. Поэтому согласно барометрической формуле

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

Отсюда

$$h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{\rho_0}{\rho} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ м} = 5,5 \text{ км}$$

(для воздуха $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$).

Г л а в а 12. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

§ 78. Длина свободного пробега молекул

Молекулы газа при своем движении сталкиваются друг с другом. Термин «столкновение» применительно к молекулам не следует понимать буквально и представлять себе этот процесс подобным соударению твердых шаров. Под столкновением молекул подразумевается процесс их взаимодействия, в результате которого изменяются направление движения и модуль скорости молекул.

Взаимодействие между молекулами характеризуется их взаимной потенциальной энергией ϵ_p . На рис. 78.1 приведена кривая зависимости ϵ_p от расстояния r между центрами молекул. Эту кривую можно также трактовать как график зависимости потенциальной энергии второй молекулы в силовом поле неподвижной молекулы, помещающейся в начале координат. Из механики известно, что сила действует в направлении убывания потенциальной энергии ($F = -\nabla\epsilon_p$). Следовательно, на участке от r_0 до бесконечности между молекулами действует сила притяжения, которая при $r < r_0$ сменяется быстро возрастающей силой отталкивания.

Пусть вторая молекула начинает движение по направлению к первой из бесконечности, имея запас кинетической энергии ϵ_1 (ϵ_p на бесконечности равна

нулю). По мере приближения к первой молекуле кинетическая энергия второй молекулы возрастает (одновременно уменьшается потенциальная энергия ϵ_p , так что полная механическая энергия второй молекулы остается постоянной), достигает максимума при

$r = r_0$, после чего начинает быстро убывать. Когда потенциальная энергия молекулы становится равной началь-

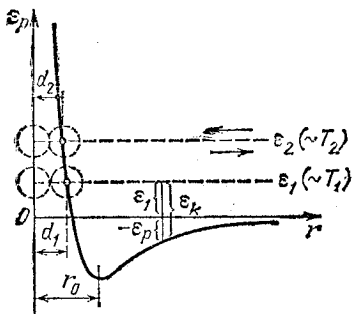


Рис. 78.1. Зависимость взаимной потенциальной энергии ϵ_p двух молекул от расстояния r между их центрами. Центр одной молекулы помещается в начале координат (в точке O), центр другой молекулы перемещается вдоль оси r . В скобках проставлена температура T , соответствующая начальной скорости молекулы

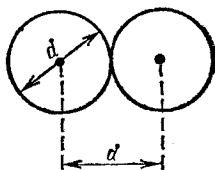


Рис. 78.2. Расстояние, на которое сближаются центры двух молекул, совпадает с «диаметром» молекулы d

ной энергии ϵ_1 , молекула останавливается. Затем молекула проделывает тот же путь в обратном направлении.

Расстояние d , на которое сближаются при столкновении центры молекул, называется эффективным диаметром молекулы (рис. 78.2). На рис. 78.1 видно, что, чем больше начальная кинетическая энергия молекулы (т. е. чем выше температура), тем меньше d . Следовательно, эффективный диаметр молекул уменьшается с повышением температуры.

Величина

$$\sigma = \pi d^2 \quad (78.1)$$

называется эффективным сечением молекулы. Диск такой площади окажется на пути точечных частиц, летящих параллельным пучком в направлении, перпендикулярном к диску.

Силы притяжения на участке от r_0 до бесконечности малы, а силы отталкивания при $r < r_0$, напротив, очень велики. Это дает основание рассматривать соударение молекул как столкновение не взаимодействующих на расстоянии твердых упругих шаров диаметра d . Такая модель процесса соударения молекул значительно упрощает рассмотрение ряда вопросов, а вносимые при этом погрешности оказываются не очень существенными. Воспользуемся моделью шаров для нахождения средней длины свободного пробега молекул, т. е. среднего расстояния λ , проходимого молекулой между двумя последовательными соударениями с другими молекулами.

Начнем с определения среднего числа ν столкновений, которые претерпевает в единицу времени данная молекула с другими молекулами. Вначале будем считать, что движется только выделенная нами молекула, а все остальные застыли неподвижно на своих местах. Ударившись об одну из неподвижных молекул, выделенная молекула будет лететь прямолинейно и равномерно до тех пор, пока не столкнется с

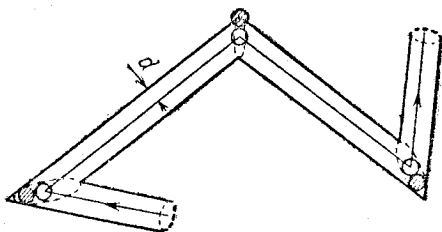


Рис. 78.3. При своем движении «незаштрихованная» молекула задевает все «заштрихованные» молекулы, центры которых попадают в пределы коленчатого цилиндра радиуса d

другой неподвижной молекулой (рис. 78.3). Это произойдет в том случае, если центр неподвижной молекулы окажется от прямой, вдоль которой летит молекула, на расстоянии, меньшем эффективного диаметра молекул d . В результате соударения молекула изменит направление своего движения, после чего опять будет двигаться прямолинейно и равномерно, пока на ее пути не встретится снова молекула, центр которой находится внутри показанного на рис. 78.3 коленчатого цилиндра радиуса d .

В единицу времени молекула проходит ломаный путь, равный в среднем $\langle v \rangle$. Число происходящих при этом столкновений с неподвижными молекулами равно количеству молекул, центры которых находятся внутри коленчатого цилиндра радиуса d и длины $\langle v \rangle$. В дальнейшем выяснится, что средняя длина свободного пробега λ много больше, чем эффективный диаметр молекул d . Поэтому при подсчете объема изломами цилиндра можно пренебречь и считать, что объем равен $\sigma \langle v \rangle = \pi d^2 \langle v \rangle$. Умножив объем на число n молекул в единице объема, найдем число v' столкновений в единицу времени движущейся молекулы с неподвижными:

$$v' = \pi d^2 \langle v \rangle n. \quad (78.2)$$

На самом деле все молекулы движутся, вследствие чего число столкновений определяется не средней скоростью $\langle v \rangle$ движения молекул относительно стенок сосуда, а средней скоростью $\langle v_{\text{отн}} \rangle$ движения молекул друг относительно друга. Относительная скорость двух произвольно взятых молекул равна

$$v_{\text{отн}} = v_2 - v_1.$$

Возведя это равенство в квадрат и учтя, что $v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha$, получим

$$\begin{aligned} v_{\text{отн}}^2 &= v_2^2 + v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha \\ &= v_2^2 + v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha, \end{aligned}$$

где α — угол между векторами v_1 и v_2 . Среднее значение суммы равно сумме средних значений слагаемых. Следовательно,

$$\langle v_{\text{отн}}^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle + \langle v_1^2 \rangle - 2 \langle v_1 v_2 \cos \alpha \rangle. \quad (78.3)$$

Усреднение производится по всем возможным парам молекул. Угол α между скоростями принимает с равной вероятностью все значения от 0 до π . Поэтому третье слагаемое в (78.3) при усреднении обращается в нуль. Среднее значение квадрата скорости у всех молекул одинаково, так что $\langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$. С учетом этого можно написать, что $\langle v_{\text{отн}}^2 \rangle = 2 \langle v^2 \rangle$, откуда $v_{\text{отн. ср. кв}} = \sqrt{2} v_{\text{ср. кв}}$. Средние квадратичные скорости пропорциональны средним арифметическим.

Отсюда следует, что

$$\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle.$$

Заменяя в формуле (78.2) $\langle v \rangle$ на $\langle v_{\text{отн}} \rangle$, получим для среднего числа соударений в единицу времени выражение

$$\nu = \sqrt{2} \pi d^2 \langle v \rangle n. \quad (78.4)$$

Наконец, разделив средний путь, проходимый молекулой за секунду, т. е. $\langle v \rangle$, на число столкновений ν , получим среднюю длину свободного пробега молекул:

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}. \quad (78.5)$$

Воспользовавшись соотношением (78.1), выразим длину свободного пробега через эффективное сечение молекулы:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}. \quad (78.6)$$

Эта формула имеет очевидный физический смысл: свободный пробег тем меньше, чем гуще расположены молекулы (т. е. чем больше n) и чем больше перекрываемая каждой молекулой площадь (т. е. чем больше σ).

При постоянной температуре плотность молекул n пропорциональна давлению газа. Следовательно, длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению:

$$\lambda \propto \frac{1}{p}. \quad (78.7)$$

Из-за уменьшения эффективного диаметра молекул длина свободного пробега при повышении температуры слабо растет.

Произведем оценку значений λ и ν при атмосферном давлении ($1,01 \cdot 10^5$ Па) и комнатной температуре (293 К). Согласно уравнению (62.10)

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1,01 \cdot 10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293} = 2,5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

По оценке, произведенной в § 61, диаметр молекул составляет десятые доли нанометра. Примем эффективный диаметр молекул равным $0,2 \text{ нм} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Подстановка значений n и d в формулу (78.5) дает

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (2 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 2,5 \cdot 10^{25}} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 200 \text{ нм.}$$

Теперь мы можем убедиться в том, что $\lambda \gg d$ (такое предположение было сделано при выводе формулы (78.2)). В соответствии с произведенной оценкой отношение λ к d составляет примерно $200 : 0,2 = 10^3$.

При давлении 0,1 Па (что соответствует 10^{-6} атм) λ составляет примерно 20 см. Следовательно, в сосуде, имеющем размеры порядка нескольких сантиметров (например, в пустотной электрической лампе), молекулы движутся от стенки к стенке практически без столкновений друг с другом.

Разделив среднюю скорость молекул на λ , получим число столкновений, претерпеваемых каждой молекулой в единицу времени:

$$\nu = \frac{\langle v \rangle}{\lambda}.$$

В § 74 мы получили для средней скорости молекул азота при комнатной температуре значение 470 м/с. Положив λ равной $2 \cdot 10^{-7}$ м, получим для ν значение, равное $470 : (2 \cdot 10^{-7}) \approx 2,5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Таким образом, при атмосферном давлении и комнатной температуре число столкновений каждой молекулы с другими молекулами составляет несколько миллиардов в секунду.

§ 79. Эмпирические уравнения явлений переноса

До сих пор мы изучали равновесные состояния и обратимые процессы. Теперь займемся рассмотрением процессов, возникающих при нарушениях равновесия в системе. Если после нарушения равновесия предоставить систему самой себе, возникает процесс релаксации, в результате которого система возвращается в равновесное состояние (см. § 60). Мы будем предполагать, что за счет воздействия извне неравновесное состояние системы сохраняется неизменным в течение неограниченного времени, вследствие чего возникшие в системе процессы будут стационарными

(т. е. не зависящими от времени). Кроме того, будем считать, что нарушения равновесия невелики.

Нарушение равновесия приводит к переносу из одних мест среды в другие либо вещества, либо энергии, либо импульса и т. п. Интенсивность процесса переноса характеризуется потоком соответствующей величины.

Потоком какой-либо величины (например, частиц, массы, энергии, импульса, электрического заряда) называется количество этой величины, проходящее в единицу времени через некоторую воображаемую поверхность. Примерами могут служить поток воды через поперечное сечение трубы, поток электрического заряда через поперечное сечение проводника (называемый силой тока) и т. п. Поверхность, через которую рассматривается поток, может иметь любую форму; в частности, эта поверхность может быть замкнутой.

Поток — скалярная алгебраическая величина, знак которой определяется выбором направления, вдоль которого поток считается положительным. Этот выбор совершенно произволен. В случае замкнутых поверхностей принято поток, вытекающий наружу, считать положительным, а втекающий внутрь поверхности, — отрицательным. Мы будем рассматривать потоки через плоские поверхности, перпендикулярные к оси z (с равным правом можно использовать для обозначения этой оси любую другую букву). Если поток данной величины (частиц, энергии, импульса) направлен вдоль оси z , мы будем считать его положительным, в противном случае — отрицательным.

В этой главе мы рассмотрим три явления переноса: диффузию (перенос частиц или массы), теплопроводность (перенос энергии) и внутреннее трение (перенос импульса). Вначале будут даны эмпирические (т. е. основывающиеся на опыте) уравнения этих процессов, применимые к любым средам (твердым, жидким и газообразным). В следующем параграфе будет изложена элементарная молекулярно-кинетическая теория трех указанных явлений переноса для газов.

Диффузия. Диффузией называется обусловленное тепловым движением выравнивание концентраций в смеси нескольких веществ. Этот процесс наблюдается

в газообразных, жидких и твердых средах. Мы ограничимся рассмотрением только двухкомпонентных смесей.

Пусть в единице объема смеси находится n_1 молекул одной компоненты и n_2 молекул другой компоненты. Число молекул в единице объема мы будем называть концентрацией данной компоненты.

Предположим, что концентрации n_1 и n_2 изменяются вдоль оси z (от координат x и y концентрации не зависят). Быстрота этого изменения характеризуется производными dn_1/dz и dn_2/dz . Производную dn/dz принято не совсем строго называть градиентом концентрации. (На самом деле градиент есть вектор.

Если n зависит только от z , то dn/dz представляет собой проекцию градиента концентрации на ось z .)

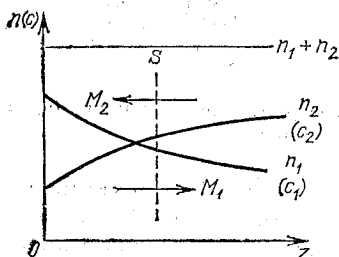


Рис. 79.1. Зависимость от z концентраций двухкомпонентной газовой смеси. Поскольку давление и температура всюду одинаковы, сумма $n_1 + n_2$ постоянна

Чтобы наблюдать процесс диффузии в чистом виде, будем считать давление в жидких и газообразных смесях не зависящим от z , так что гидродинамические потоки не возникают. В этом случае производные dn_1/dz и dn_2/dz имеют разные знаки (рис. 79.1).

Вследствие теплового движения возникает поток молекул каждой из компонент в направлении убывания ее концентрации. Экспериментально установлено, что поток молекул i -й компоненты через перпендикулярную к оси z поверхность S определяется уравнением

$$N_i = -D \frac{dn_i}{dz} S, \quad (79.1)$$

где D — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом диффузии. Таким образом, поток молекул пропорционален градиенту концентрации. Знак минус в уравнении (79.1) обусловлен тем, что поток направлен в сторону убывания концентрации (рис. 79.2).

Умножив обе части формулы (79.1) на массу молекулы i -й компоненты m_i , получим уравнение диффузии для потока массы i -й компоненты:

$$M_i = -D \frac{d\rho_i}{dz} S. \quad (79.2)$$

Здесь $\rho_i = n_i m_i$ — парциальная плотность i -й компоненты (ее называют также абсолютной концентрацией).

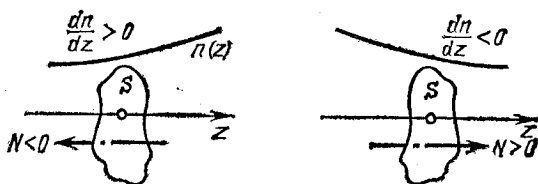


Рис. 79.2. Поток молекул N и градиент концентрации dn/dz имеют разные знаки

Поток массы M измеряется в кг/с, парциальная плотность ρ — в кг/м³, поверхность S — в м², координата z — в метрах. Следовательно, коэффициент диффузии D измеряется в м²/с, т. е. имеет размерность квадрата длины, деленного на время.

Эмпирическое уравнение диффузии называют законом Фика¹⁾.

Теплопроводность. Если в некоторой среде создать вдоль оси z градиент температуры, то возникает тепловой поток, удовлетворяющий уравнению

$$q = -\kappa \frac{dT}{dz} S. \quad (79.3)$$

Здесь q — тепловой поток через поверхность S , перпендикулярную к оси z , dT/dz — градиент температуры (точнее, проекция градиента температуры на ось z), κ — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды и называемый теплопроводностью (прежнее название: коэффициент теплопроводности). Знак минус в уравнении (79.3) отражает тот факт, что теплота течет в направлении убы-

¹⁾ Адольф Фик (1829—1901) — немецкий ученый. Закон открыт им в 1885 г.

вания температуры, в связи с чем знаки q и dT/dz противоположны.

Поскольку единицей теплового потока q является джоуль в секунду, т. е. ватт, q измеряется в ваттах на метр-кельвин ($\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$).

Уравнение (79.3) представляет собой аналитическую формулировку закона, установленного Фурье¹⁾ в 1822 г. и носящего его имя.

Внутреннее трение. Формула (42.1), определяющая силу внутреннего трения в жидкостях, справедлива также и для газов. Напишем эту формулу, заменив обозначение v на u :

$$F = \eta \left| \frac{du}{dz} \right| S \quad (79.4)$$

(замена v на u вызвана тем, что буквой v мы будем обозначать скорость молекул газа). В этой формуле η — коэффициент пропорциональности, называемый вязкостью (прежнее название: коэффициент вязкости), S — площадь лежащей на границе между слоями поверхности, по которой действует сила F , du/dz — величина, показывающая, как быстро изменяется скорость течения жидкости или газа в направлении z , перпендикулярном к направлению движения слоев (градиент u).

Уравнение (79.4) было установлено Ньютоном в 1687 г. и называется законом Ньютона.

Согласно второму закону Ньютона сила равна производной импульса по времени. Поэтому уравнение (79.4) можно представить в виде

$$K = -\eta \frac{du}{dz} S, \quad (79.5)$$

где K — импульс, передаваемый от слоя к слою, т. е. поток импульса через поверхность S . Знак минус в этой формуле обусловлен тем обстоятельством, что импульс «течет» в направлении убывания скорости u . Поэтому знаки потока импульса и производной du/dz противоположны.

В формуле (79.4) минус писать нельзя, потому что она определяет одинаковый модуль двух противоположно направленных сил, с которыми слои действуют

¹⁾ Жан Батист Жозеф Фурье (1768—1830) — французский математик и физик.

друг на друга. Кроме того, нужно брать модуль производной du/dz , так как производная может иметь любой знак, а модуль силы — положительная величина.

Вязкость измеряется в килограммах на метр-секунду ($\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$) или, что то же самое, в паскаль-секундах ($\text{Па}\cdot\text{с}$).

§ 80. Молекулярно-кинетическая теория явлений переноса в газах

В этом параграфе мы изложим элементарную молекулярно-кинетическую теорию явлений переноса в газах. Для простоты будем предполагать (как это было сделано в § 63), что молекулы газа движутся только в трех взаимно перпендикулярных направлениях. В соответствии с этим количество молекул, пролетающих через единичную воображаемую площадку в единицу времени, будем вычислять не по точной формуле (63.7), а по приближенной формуле (63.4), согласно которой это количество равно

$$v = \frac{1}{6} n \langle v \rangle. \quad (80.1)$$

Будем предполагать, что нарушения равновесия, приводящие к возникновению процессов переноса, невелики. Это означает, что изменение соответствующей величины на длине свободного пробега молекул λ много меньше значения этой величины: $\frac{df}{d\lambda} \lambda \ll f$ (под f подразумевается n , либо T , либо u).

Диффузия. Чтобы упростить задачу, будем считать, что молекулы обеих компонент мало отличаются по массе ($m_1 \approx m_2 \approx m$) и имеют практически одинаковые эффективные сечения ($\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma$). При этих условиях молекулам обеих компонент можно приписывать одинаковую среднюю скорость теплового движения $\langle v \rangle$, а среднюю длину свободного пробега вычислять по формуле

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}, \quad \text{где } n = n_1 + n_2. \quad (80.2)$$

Очевидно, что процесс диффузии будет происходить тем интенсивнее, чем быстрее движутся моле-

кулы (чем больше $\langle v \rangle$) и чем реже сталкиваются они друг с другом (т. е. чем больше λ). Следовательно, можно предполагать, что коэффициент диффузии D пропорционален произведению $\langle v \rangle \lambda$. Это согласуется с тем, что, как было выяснено в предыдущем параграфе, D имеет размерность квадрата длины, деленного на время.

Пусть изменение концентрации первой компоненты вдоль оси z описывается функцией $n_1(z)$ (рис. 80.1).

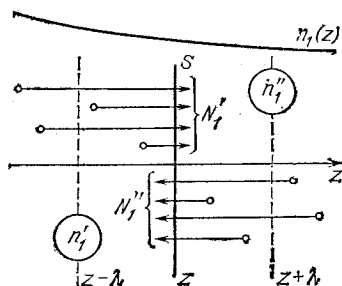


Рис. 80.1. Зависимость концентрации первой компоненты n_1 от z . Молекулы N'_1 изображены летящими через верхнюю, а молекулы N''_1 — через нижнюю половину площадки S . В действительности обе группы молекул распределены равномерно по всей поверхности S

Обозначим число молекул первой компоненты, пролетающих в единицу времени сквозь воображаемую поверхность S в направлении оси z , через N'_1 ; то же число для противоположного направления — через N''_1 . Разность этих чисел даст поток N_1 молекул первой компоненты через поверхность S :

$$N_1 = N'_1 - N''_1. \quad (80.3)$$

Согласно формуле (80.1)

$$N'_1 = \frac{1}{6} n'_1 \langle v \rangle S, \quad N''_1 = \frac{1}{6} n''_1 \langle v \rangle S, \quad (80.4)$$

где n'_1 — «эффективная» концентрация молекул первой компоненты слева от S , а n''_1 — «эффективная» концентрация молекул первой компоненты справа от S .

Через поверхность S пролетают молекулы, претерпевшие последнее соударение на различных расстояниях от этой поверхности. Однако в среднем последнее соударение происходит на расстоянии от S , равном средней длине свободного пробега λ . Поэтому в качестве n'_1 естественно взять значение $n_1(z - \lambda)$, а в качестве n''_1 — значение $n_1(z + \lambda)$. Тогда, приняв

во внимание формулы (80.3) и (80.4), можно написать, что

$$N_1 = \frac{1}{6} \langle v \rangle S [n_1(z - \lambda) - n_1(z + \lambda)]. \quad (80.5)$$

Согласно оценке, произведенной в § 78, при атмосферном давлении λ имеет значение порядка 10^{-7} м, т. е. очень мала. Поэтому разность значений функции $n_1(z)$ в формуле (80.5) можно представить в виде

$$n_1(z - \lambda) - n_1(z + \lambda) = - \frac{dn_1}{dz} \cdot 2\lambda. \quad (80.6)$$

Подставив это выражение в формулу (80.5), получим, что

$$N_1 = - \left(\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \right) \frac{dn_1}{dz} S. \quad (80.7)$$

Мы не только пришли к уравнению (79.1), но и получили выражение для коэффициента диффузии:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda. \quad (80.8)$$

Более строгий расчет приводит к такой же формуле, но с несколько отличным числовым коэффициентом. Как мы и предполагали, коэффициент диффузии оказался пропорциональным $\langle v \rangle$ и λ .

Проведя аналогичные вычисления для второй компоненты газовой смеси, мы придем к такому же выражению, как (80.7), с заменой n_1 на n_2 . Следовательно, коэффициент диффузии имеет одинаковое значение для обеих компонент смеси.

Мы предположили, что молекулы обеих компонент одинаковы по массе и эффективному сечению. Поэтому выражение (80.8) определяет коэффициент самодиффузии, т. е. диффузии молекул некоторого газа в среде молекул того же газа. Явление самодиффузии можно наблюдать, пометив каким-то способом часть молекул однородного газа. Это можно сделать, применив метод меченых атомов, который состоит в использовании смеси изотопов, т. е. разновидностей атомов, отличающихся друг от друга тем, что одна из них радиоактивна, а другая стабильна.

Теплопроводность. Если температура газа в разных местах различна, то и средняя энергия молекул также будет различной. Перемещаясь вследствие теплового движения из одних мест в другие, молекулы

переносят запасенную ими энергию, что и обуславливает процесс теплопроводности.

Легко сообразить, что кроме факторов, определяющих скорость диффузии, т. е. средней скорости молекул $\langle v \rangle$ и длины свободного пробега λ , количество переносимой молекулами энергии должно зависеть от способности молекул запасать энергию, т. е. от теплоемкости газа. Поскольку поток молекул определяется

их числом в единице объема, то и теплоемкость должна относиться к единице объема.

Пусть в газе каким-то способом поддерживается градиент температуры вдоль направления z . Представим мысленно поверхность S , перпендикулярную к этому направлению (рис. 80.2). Количество молекул, пролетающих в единицу времени через поверхность S в каждом из направлений

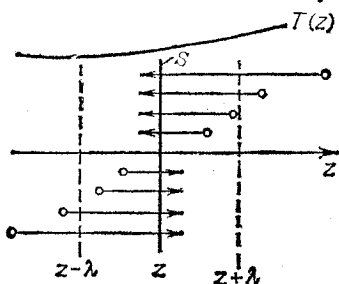


Рис. 80.2. Зависимость температуры T от z . В действительности молекулы, летящие в обоих направлениях, распределены равномерно по всей поверхности S

(слева направо и справа налево), будем считать равным

$$N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S. \quad (80.9)$$

При постоянном давлении n зависит от температуры ($p = nkT$), $\langle v \rangle$ также изменяется с температурой. Поэтому, казалось бы, следует для нахождения числа молекул, летящих через поверхность S в одном направлении, подставлять в формулу (80.9) значения n и $\langle v \rangle$, отвечающие одной температуре, а для молекул, летящих в другом направлении, — значения n и $\langle v \rangle$, отвечающие другой температуре. Однако числа молекул, летящих через поверхность S во встречных направлениях, не могут быть различными. Если бы они оказались неодинаковыми, то, кроме теплового потока через поверхность S , имел бы место поток массы — происходило бы перемещение газа вдоль оси z . Мы же предполагаем, что никаких процессов, кроме переноса теплоты, в газе не происходит. По-

этому число молекул, пролетающих через поверхность S в каждом из направлений, мы будем вычислять по формуле (80.9), приняв для n и $\langle v \rangle$ их значения в сечении S .

Поскольку n пропорционально p/T , а $\langle v \rangle$ пропорциональна \sqrt{T} , постоянство произведения $n\langle v \rangle$ означает постоянство выражения

$$\frac{p}{T} \sqrt{T} = \frac{p}{\sqrt{T}}.$$

Следовательно, для того чтобы при наличии градиента температуры не было потока массы, давление должно изменяться вдоль оси z пропорционально \sqrt{T} . Если представить себе газ, заключенный в плоскую коробку, дно и крышка которой поддерживаются при неодинаковых температурах, то вначале в коробке возникнет, наряду с тепловым потоком, поток массы, и только после того, как давление в коробке станет пропорциональным \sqrt{T} , будет наблюдаться тепловой поток в чистом виде.

Приступим к вычислению теплового потока. Предположим, что каждая молекула имеет энергию $\varepsilon = \frac{i}{2} kT$, соответствующую температуре в том месте, где произошло ее столкновение с другой молекулой. В среднем это столкновение происходит на расстоянии от S , равном длине свободного пробега λ (см. рис. 80.2). Поэтому молекулам, летящим слева направо, надо приписывать среднюю энергию $\langle \varepsilon_1 \rangle$, соответствующую температуре $T_1 = T(z - \lambda)$, т. е. температуре в плоскости $z - \lambda$, молекулам же, летящим справа налево, — среднюю энергию $\langle \varepsilon_2 \rangle$, соответствующую температуре $T_2 = T(z + \lambda)$.

Таким образом, для теплового потока q через поверхность S получается выражение

$$q = N(\langle \varepsilon_1 \rangle - \langle \varepsilon_2 \rangle),$$

где N определяется формулой (80.9) (напомним, что положительным считается поток в направлении оси z). Подстановка значений N , $\langle \varepsilon_1 \rangle$ и $\langle \varepsilon_2 \rangle$ приводит к формуле

$$q = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \left(\frac{i}{2} kT_1 - \frac{i}{2} kT_2 \right) = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \frac{i}{2} k (T_1 - T_2). \quad (80.10)$$

Вследствие малости λ разность $T_1 - T_2$ можно представить в виде

$$T(z - \lambda) - T(z + \lambda) = -\frac{dT}{dz} \cdot 2\lambda, \quad (80.11)$$

где dT/dz — производная T по z в том месте, где расположена поверхность S . Подстановка выражения для разности температур в (80.11) приводит к формуле

$$q = -\frac{1}{6} n \langle v \rangle S \frac{i}{2} k \frac{dT}{dz} \cdot 2\lambda = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \left(\frac{i}{2} kn \right) \frac{dT}{dz} S.$$

Полученная формула совпадает с эмпирическим уравнением (79.3), если положить теплопроводность равной

$$\kappa = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \left(\frac{i}{2} kn \right). \quad (80.12)$$

Величина $\frac{i}{2} R = \frac{i}{2} k N_A$ есть теплоемкость при постоянном объеме моля газа, т. е. количества газа, содержащего N_A молекул. Следовательно, выражение $\frac{i}{2} kn$ представляет собой теплоемкость при постоянном объеме количества газа, содержащего n молекул, т. е. теплоемкость единицы объема газа. Эту теплоемкость можно получить, умножив теплоемкость единицы массы (т. е. удельную теплоемкость c_V) на массу единицы объема (т. е. на плотность газа ρ). Следовательно,

$$\frac{i}{2} kn = \rho c_V.$$

Подставив это значение в формулу (80.11), получим для теплопроводности газа выражение

$$\kappa = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho c_V. \quad (80.13)$$

Более строгий расчет приводит к такому же выражению, но с немного отличным числовым коэффициентом.

Как мы и предполагали, теплопроводность оказалась пропорциональной $\langle v \rangle$, λ и теплоемкости единицы объема газа.

Согласно формуле (78.7) длина свободного пробега λ обратно пропорциональна давлению, плотность же молекул n , напротив, прямо пропорциональ-

на давлению. Следовательно, из формулы (80.12) вытекает, что теплопроводность κ не зависит от давления. Это справедливо лишь до тех пор, пока λ остается малой по сравнению с расстоянием между поверхностями, обменивающимися теплотой (например, по сравнению с зазором между внешней и внутренней колбами термоса). По мере того как перестает выполняться это условие, теплопроводность начинает все больше зависеть от давления, уменьшаясь с его понижением. При λ , превышающей зазор между поверхностями, пробег молекул определяется этим зазором и перестает зависеть от давления. Число же молекул в единице объема при понижении давления продолжает убывать, вследствие чего уменьшается и κ .

Внутреннее трение. В потоке газа молекулы участвуют одновременно в двух движениях: хаотическом тепловом, средняя скорость которого равна $\langle v \rangle$, и упорядоченном движении со скоростью потока u . Скорость u намного меньше, чем $\langle v \rangle$. Даже при сильном урагане тепловая скорость молекул (примерно 500 м/с) на порядок больше скорости ветра (35 и более метров в секунду).

В неподвижном газе средний импульс молекулы равен нулю. Молекула в потоке газа обладает средним импульсом mu . При рассмотрении внутреннего трения нас будет интересовать именно этот импульс.

Предположим, что имеются два соприкасающихся слоя газа, движущихся параллельно друг другу с различными скоростями u_1 и u_2 (рис. 80.3). Пусть в некоторый момент времени слои обладают импульсами K_1 и K_2 . Если никакого внешнего воздействия на слои нет, их импульсы не могут оставаться неизменными, так как вследствие теплового движения происходит непрерывный переход молекул из одного слоя в другой. Попав в другой слой, молекула претерпевает столкновения с молекулами этого слоя, в результате чего она либо отдает избыток своего импульса другим молекулам (если она прилетела из слоя, движущегося

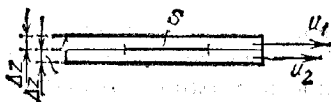


Рис. 80.3. Выделенные мысленно в потоке газа слои, движущиеся с различными скоростями. Скорость u на границе слоев изменяется скачком, а в пределах каждого слоя всюду одинакова

быстрее), либо увеличивает свой импульс за счет других молекул (если она прилетела из слоя, движущегося медленнее). В итоге импульс слоя, движущегося быстрее, убывает, а слоя, движущегося медленнее, возрастает. Следовательно, слои ведут себя так, как если бы к слою, скорость которого больше, была приложена сила, тормозящая его движение, а к слою, скорость которого меньше, — такая же по модулю сила, ускоряющая его движение. Таков механизм возникновения сил внутреннего трения.

Через поверхность S , лежащую на границе раздела изображенных на рис. 80.3 слоев, переходит в единицу времени из одного слоя в другой количество молекул, определяемое выражением

$$N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S$$

(на среднюю скорость молекул в направлении, перпендикулярном к слоям, движение слоев со скоростью u не оказывает влияния). В результате возникает в направлении от более быстрого слоя к более медленному поток импульса через поверхность S , равный

$$\begin{aligned} K &= Nm(u_1 - u_2) = \\ &= \frac{1}{6} n \langle v \rangle S m (u_1 - u_2). \end{aligned} \quad (80.14)$$

Рис. 80.4. Зависимость скорости u воздушного потока от z . В действительности молекулы, летящие в обоих направлениях, распределены равномерно по всей поверхности S

В реальном потоке газа скорость при переходе через воображаемую границу двух слоев изменяется не скачком, а непрерывно по закону $u = u(z)$.

(рис. 80.4). Будем считать, что каждая молекула, пролетающая через поверхность S , несет с собой импульс mu , определяемый скоростью u в том месте, где произошло последнее столкновение молекулы. Это столкновение происходит на различных расстояниях от S . В среднем последнее столкновение происходит на расстоянии, равном длине свободного пробега λ .

Поэтому молекулам, летящим в направлении оси z , припишем значение скорости $u_1 = u(z - \lambda)$, а молекулам, летящим в противоположном направлении, — значение скорости $u_2 = u(z + \lambda)$. Подстановка этих значений в формулу (80.14) дает для потока импульса через поверхность S в направлении оси z выражение

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{6} n \langle v \rangle S m [u(z - \lambda) - u(z + \lambda)] = \\ &= -\frac{1}{6} n \langle v \rangle S m \frac{du}{dz} \cdot 2\lambda \end{aligned}$$

(ср. с формулами (80.6) и (80.11)). Произведение nm равно плотности газа ρ . Поэтому можно написать, что

$$K = -\left(\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho\right) \frac{du}{dz} S.$$

Сравнение с эмпирическим уравнением (79.5) дает для вязкости выражение

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho. \quad (80.15)$$

Более строгий расчет приводит к такому же выражению, но с несколько отличным числовым коэффициентом.

Подобно D и κ , вязкость пропорциональна $\langle v \rangle$ и λ . Кроме того, она пропорциональна плотности газа ρ , т. е. величине, характеризующей способность молекул газа «накапливать» импульс — при данной скорости u импульс единицы объема газа тем больше, чем больше ρ (теплопроводность пропорциональна теплоемкости единицы объема газа; в обоих случаях фигурирует характеристика единицы объема газа).

Из сопоставления выражений (80.8), (80.13) и (80.15) следует, что коэффициенты явлений переноса связаны соотношениями

$$\eta \approx D\rho, \quad \kappa \approx \eta c_V \approx D\rho c_V.$$

Вместо точного поставлен знак приближенного равенства в связи с тем, что числовые коэффициенты в перечисленных формулах, равные $1/3$, являются приближенными.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. При неизменной температуре давление газа увеличилось на 1%. Как изменилась при этом средняя длина свободного пробега молекул?
2. Какова размерность коэффициента диффузии?
3. Почему при небольшом разрежении газа теплопроводность не зависит от давления?
4. Как связаны друг с другом коэффициенты явлений переноса?

Примеры решения задач

1. Кислород находится при температуре 300 К и давлении $1,00 \cdot 10^5$ Па. Определить среднюю длину свободного пробега молекул. Эффективный диаметр молекул кислорода $d = 0,35$ нм.

Решение. Средняя длина свободного пробега определяется по формуле

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2},$$

где n — число молекул в единице объема. Из соотношения $p = nkT$ следует, что $n = p/kT$. Подстановка этого значения n в формулу для λ дает:

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2} p \pi d^2} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{\sqrt{2} \cdot 1,00 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot (0,35 \cdot 10^{-9})^2} = 76 \text{ нм.}$$

2. Вычислить теплопроводность азота (N_2) при $T = 300$ К и $p = 1,00 \cdot 10^5$ Па. Эффективный диаметр молекул азота $d = 0,37$ нм. При данной температуре колебательные степени свободы молекул не возбуждаются.

Решение. Теплопроводность вычисляется по формуле

$$\kappa = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \rho c_V.$$

Средняя скорость молекул $\langle v \rangle = \sqrt{8RT/\pi M}$. Молярная теплоемкость двухатомных жестких молекул $C_V = 5/2 R$. Произведение ρc_V представляет собой теплоемкость единицы объема и, следовательно, равно $C_V/V_m = 5R/2V_m$ (V_m — молярный объем). Для λ возьмем выражение, полученное в предыдущей задаче. Подстановка всех этих выражений в формулу для κ дает

$$\kappa = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \frac{kT}{\sqrt{2} p \pi d^2} \cdot \frac{5R}{2V_m}.$$

Произведя преобразования с учетом того, что $pV_m = RT$, получим окончательную формулу

$$\kappa = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{RT}{\pi M} \frac{k}{\pi d^2}} = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{8,31 \cdot 300}{3,14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{3,14 \cdot (0,37 \cdot 10^{-9})^2}} = 0,90 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{К}).$$

Глава 13. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 81. Микро- и макросостояния. Статистический вес

Казалось бы, что в изолированной термодинамической системе возможны любые процессы, в ходе которых сохраняется внутренняя энергия системы. Однако это не так. Дело в том, что различные состояния, отвечающие одной и той же энергии, обладают разной вероятностью. Естественно, что изолированная система будет самопроизвольно переходить из менее вероятных в более вероятные состояния либо пребывать преимущественно в состоянии, вероятность которого максимальна.

Пусть, например, изолированная система состоит из двух тел, температура которых в начальный момент неодинакова. В такой системе будет протекать процесс теплопередачи, приводящий к выравниванию температуры. После того как температура обоих тел станет одинаковой, система будет оставаться в таком состоянии неограниченно долго. В изолированной системе невозможен процесс, в результате которого температура одного из одинаково нагретых тел стала бы больше или меньше другого.

Рассмотрим еще один пример. Допустим, что в одной из половин разделенного перегородкой сосуда имеется газ, а в другой половине сосуда — вакуум. Если убрать перегородку, газ распространится на весь сосуд. Обратный процесс, в результате которого газ самопроизвольно собрался бы в одной из половин сосуда, невозможен. Это обусловлено тем, что вероятность состояния, при котором молекулы газа распределены поровну между обеими половинами сосуда, очень велика, а вероятность состояния, при котором все молекулы газа находились бы в одной из половин

не разделенного перегородкой сосуда, практически равна нулю. В литре воздуха при нормальных условиях содержится примерно $3 \cdot 10^{22}$ молекул. Вероятность того, что они распределены между половинами сосуда поровну, в $10^{10^{22}}$ раз превышает вероятность того, что все молекулы соберутся в одной из половин сосуда.

Заметим, что оба процесса — переход теплоты от горячего тела к холодному и распространение газа на весь объем — являются необратимыми. Следовательно, природа необратимости состоит в том, что необратимым является процесс, обратный которому крайне маловероятен.

Из сказанного выше следует, что для того, чтобы определить, какие процессы могут протекать в изолированной термодинамической системе, нужно знать вероятность различных состояний этой системы. Величина, которая служит для характеристики вероятности состояний, получила название энтропии. Эта величина является, подобно внутренней энергии, функцией состояния системы. Чтобы дать определение энтропии, нужно ввести понятия микро- и макросостояний термодинамической системы.

В идеале самым детальным описанием состояния системы было бы задание координат и импульсов (или скоростей) всех частиц, из которых образована система. Однако абсолютно точное одновременное определение координат и импульсов частиц невозможно в силу принципа неопределенности, согласно которому произведение неопределенностей координаты и соответствующей компоненты импульса не может быть меньше величины порядка постоянной Планка h :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \approx h, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \approx h \quad (81.1)$$

(см. формулу (54.1)).

Таким образом, самое детальное описание состояния системы может состоять в том, чтобы задать координаты и импульсы частиц с допусками, определяемыми соотношениями (81.1). С этой целью введем в дополнение к обычному пространству, в котором задаются координаты x, y, z , p -пространство (пространство импульсов), по осям которого будем откладывать значения компонент импульса p_x, p_y, p_z (ср.

с пространством скоростей, введенным в § 74). Разобьем пространство координат на одинаковые кубические ячейки объема $\Delta x \Delta y \Delta z$, а пространство импульсов — на одинаковые кубические ячейки объема $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$. Размеры ячеек выберем так, чтобы произведение объема ячейки одного пространства на объем ячейки другого пространства, т. е. выражение $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$, было равно h^3 . Тогда в соответствии с (81.1) наиболее точное задание состояния частицы заключается в указании ячеек обоих пространств (по одной ячейке в каждом пространстве), соответствующих данной частице.

Указание ячеек обоих пространств, соответствующих всем частицам, образующим систему, представляет собой самое точное возможное описание термодинамической системы. Столь детально охарактеризованное состояние системы называется микросостоянием.

Состояние термодинамической системы может быть также задано с помощью макроскопических (т. е. характеризующих все тело в целом) параметров: объема, давления, температуры и т. п. Охарактеризованное таким способом состояние называется макросостоянием.

Если система находится в равновесии, то параметры будут постоянными, а макросостояние — не изменяющимся. Вместе с тем частицы, образующие систему, все время перемещаются и изменяют свой импульс в результате соударений. В соответствии с этим микросостояние системы все время изменяется. Отсюда следует, что всякое макросостояние осуществляется различными способами, каждому из которых соответствует некоторое микросостояние системы. Число различных микросостояний, посредством которых осуществляется данное макросостояние, называется статистическим весом макросостояния. Мы будем обозначать его буквой Ω .

Статистический вес обычно выражается огромными числами. Так, например, для моля кислорода при атмосферном давлении и комнатной температуре $\Omega = 10^{6,5 \cdot 10^{24}}$. Представить себе это число совершенно невозможно.

В основе статистической физики лежит гипотеза, согласно которой все микросостояния данной термо-

динамической системы равновероятны. Отсюда следует, что вероятность макросостояния пропорциональна его статистическому весу.

§ 82. Энтропия

В предыдущем параграфе мы выяснили, что вероятность макросостояния (в дальнейшем мы будем называть его просто состоянием) пропорциональна его статистическому весу Ω . Поэтому в качестве величины, определяющей вероятность состояния, можно было бы взять сам статистический вес. Однако это неудобно по следующим причинам. Во-первых, как мы видели, статистический вес выражается огромными числами, работать с которыми было бы чрезвычайно затруднительно. Во-вторых, что важнее, статистический вес не обладает свойством аддитивности. Чтобы убедиться в этом, разобьем данную систему на две практически не взаимодействующие подсистемы. Предположим, что эти подсистемы находятся в состояниях со статистическими весами Ω_1 и Ω_2 . Каждое из Ω_1 микросостояний первой подсистемы может реализоваться совместно с каждым из Ω_2 микросостояний второй подсистемы. Всего возможно $\Omega_1\Omega_2$ различных комбинаций микросостояний подсистем, каждая из которых является микросостоянием системы. Следовательно, статистический вес состояния системы

$$\Omega = \Omega_1\Omega_2. \quad (82.1)$$

Отсюда следует, что статистический вес не является аддитивной величиной — Ω не равен сумме Ω_1 и Ω_2 .

Взяв логарифм от обеих частей равенства (82.1), получим соотношение

$$\ln \Omega = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2, \quad (82.2)$$

из которого следует, что логарифм статистического веса — аддитивная величина. Иметь дело с аддитивными величинами много проще и удобнее. В связи с этим в качестве характеристики вероятности состояния системы принимается величина

$$\sigma = \ln \Omega, \quad (82.3)$$

называемая энтропией системы. Определенная

так энтропия используется в теоретической физике; где обычно не приходится иметь дело с числовыми значениями величин. Ниже мы дадим немного отличное определение энтропии, применяемое в экспериментальных работах.

Энтропия, как уже отмечалось, является функцией состояния термодинамической системы. Следовательно, она может быть представлена в виде функции параметров состояния, таких как p , V , T и т. п. Методами статистической физики можно доказать, что из определения (82.3) вытекает следующее соотношение:

$$d\sigma = \frac{d'Q}{kT}. \quad (82.4)$$

Здесь $d\sigma$ — приращение энтропии, обусловленное получением системой в ходе обратимого процесса количества теплоты $d'Q$ (напомним, что $d'Q$ — алгебраическая величина), k — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура системы. Подчеркнем, что формула справедлива только для обратимых процессов.

Чтобы избавиться в формуле (82.4) от постоянной Больцмана k , а заодно сделать числовые значения энтропии более удобными, в экспериментальной (а иногда и в теоретической) физике от величины σ переходят к величине $S = k\sigma$, которая также называется энтропией. В соответствии с (82.3)

$$S = k \ln \Omega. \quad (82.5)$$

Определенная таким образом энтропия измеряется в джоулях на кельвин (Дж/К).

Выше было приведено числовое значение Ω для моля кислорода при комнатной температуре и атмосферном давлении. Этому значению соответствуют $\sigma = 1,5 \cdot 10^{25}$ и $S = 200$ Дж/К.

В дальнейшем мы будем пользоваться энтропией S , определяемой формулой (82.5). Соотношение (82.4) применительно к S имеет вид

$$dS = \frac{d'Q}{T} \quad (\text{обратимый процесс}). \quad (82.6)$$

Это соотношение лежит в основе термодинамических применений энтропии,

Из определения S как величины, характеризующей вероятность состояния термодинамической системы, вытекают следующие свойства энтропии:

1. В ходе необратимого процесса энтропия изолированной системы возрастает. Действительно, изолированная (т. е. предоставленная самой себе) система переходит из менее вероятных в более вероятные состояния, что сопровождается увеличением статистического веса, а следовательно, и функции (82.5).

2. Энтропия изолированной системы, находящейся в равновесном состоянии, максимальна.

Утверждение о том, что энтропия изолированной термодинамической системы может только возрастать либо по достижении максимального значения оставаться постоянной (иными словами, не может убывать), носит название закона возрастания энтропии или второго начала термодинамики.

В случае изолированной системы $d'Q = 0$. Из формулы (82.6), справедливой только для обратимых процессов, вытекает, что в этом случае $dS = 0$, а следовательно $S = \text{const}$. Таким образом, в ходе обратимого процесса, протекающего в изолированной системе, энтропия остается постоянной.

Протекание в изолированной системе (т. е. при $d'Q = 0$) необратимого процесса сопровождается ростом энтропии. Поэтому

$$dS > 0. \quad (82.7)$$

Если системе сообщается количество теплоты $d'Q$ в ходе необратимого процесса, то энтропия получает, кроме приращения $d'Q/T$ (знак которого совпадает со знаком $d'Q$), положительное приращение, обусловленное необратимостью процесса. В итоге

$$dS > \frac{d'Q}{T} \quad (\text{необратимый процесс}). \quad (82.8)$$

Под T в этой формуле подразумевается температура теплового резервуара, от которого данная система получает количество теплоты $d'Q$. Температура системы при необратимом процессе может не иметь определенного значения, потому что состояния системы не являются равновесными. При $d'Q = 0$ формула (82.8) переходит в неравенство (82.7).

Из формулы (82.8) следует, что при протекании необратимого процесса в системе, отдающей теплоту внешней среде (при $d'Q < 0$), энтропия может не только возрастать, но и убывать. Это будет иметь место в том случае, когда $\left| \frac{d'Q}{T} \right|$ больше той доли приращения энтропии, которая обусловлена необратимостью процесса.

Формулы (82.6) и (82.8) можно объединить в одну формулу:

$$dS \geq \frac{d'Q}{T}, \quad (82.9)$$

в которой знак равенства относится к обратимым, а знак неравенства — к необратимым процессам.

Отметим, что при протекании обратимого процесса в неизолированной системе энтропия может как возрастать (если $d'Q > 0$), так и убывать (если $d'Q < 0$).

Состояние, осуществляемое небольшим числом способов, называется упорядоченным или неслучайным. Состояние, осуществляемое многими способами, называется беспорядочным или случайным. Следовательно, энтропия является мерой степени беспорядка в системе. Это обстоятельство поясняет смысл соотношения (82.6). Сообщение системе теплоты приводит к усилению хаотического движения молекул и, следовательно, увеличивает степень беспорядка в системе. Чем выше температура, т. е. чем больше внутренняя энергия системы, тем меньшим оказывается относительное возрастание беспорядка, обусловленное сообщением системе данного количества теплоты $d'Q$ (тем меньше dS , соответствующее данному $d'Q$).

При абсолютном нуле температуры всякое тело, как правило, находится в состоянии, статистический вес которого равен единице. Согласно формуле (82.5) энтропия в этом случае равна нулю. Отсюда следует, что энтропия любого тела стремится к нулю при стремлении к нулю температуры:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (82.10)$$

Это утверждение называют теоремой Нернста¹⁾ или третьим началом термодинамики.

¹⁾ Вальтер Нернст (1864—1941) — немецкий физико-химик.

§ 83. Энтропия идеального газа

В соответствии с формулой (82.6) количество теплоты $d'Q$, получаемое термодинамической системой в ходе обратимого процесса, может быть представлено в виде

$$d'Q = T dS. \quad (83.1)$$

Эта формула аналогична формуле $d'A = p dV$ (см. (66.1)), которая также справедлива только для обратимого процесса (иначе параметр состояния p не

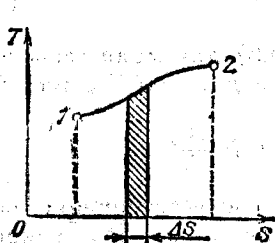


Рис. 83.1. Элементарное количество теплоты численно равно площади заштрихованной полоски (ср. с рис. 66.3)

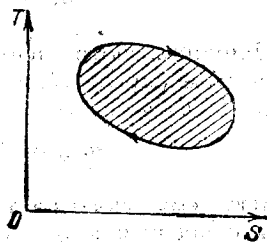


Рис. 83.2. Площадь цикла численно равна количеству теплоты Q , полученному телом за цикл. Q положительно, если цикл совершается по часовой стрелке, и отрицательно, если цикл совершается против часовой стрелки

имел бы определенного значения). Кривая на рис. 83.1 изображает обратимый процесс на диаграмме T, S . Подобно тому как площадь под кривой на диаграмме p, V численно равна работе A_{12} , площадь под кривой на диаграмме T, S численно равна количеству теплоты Q_{12} , полученному телом в ходе процесса 1—2:

$$Q_{12} = \int_1^2 T dS. \quad (83.2)$$

В случае изотермического процесса формула (83.2) упрощается следующим образом:

$$Q_{12} = T(S_2 - S_1) \quad (83.3)$$

(ср. с формулой (71.2)).

В случае кругового процесса (рис. 83.2) количество полученной телом теплоты численно равно площади цикла (ср. с рис. 66.4).

Представив в уравнении (67.3) первого начала термодинамики $d'Q$ в виде TdS , а $d'A$ в виде $p dV$, придем к формуле

$$T dS = dU + p dV, \quad (83.4)$$

из которой следует, что

$$dS = \frac{dU + p dV}{T}. \quad (83.5)$$

Напишем соотношение (83.5) для моля газа, учтя, что в этом случае $U_m = C_v T$, а $p/T = R/V_m$ (см. формулы (68.4) и (62.4)):

$$dS_m = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV_m}{V_m}$$

(индекс «м» указывает, что соответствующие величины относятся к одному молю газа). Интегрирование этого уравнения дает, что

$$S_m = C_v \ln T + R \ln V_m + S_0, \quad (83.6)$$

где S_0 — постоянная интегрирования. Мы получили выражение для энтропии моля идеального газа в переменных T и V .

В соотношения, с которыми обычно приходится иметь дело на практике, входят либо изменение (т. е. приращение или убыль) энтропии, либо производные энтропии по параметрам состояния. Постоянная S_0 в эти соотношения не входит.

Воспользовавшись уравнением $pV_m = RT$, можно перейти к выражениям для энтропии в других переменных. Подставив в (83.6) вместо V_m выражение RT/p , придем к формуле

$$S_m = C_v \ln T + R \ln R + R \ln T - R \ln p + S_0.$$

Учтя, что для идеального газа $C_v + R = C_p$ и введя обозначение $R \ln R + S_0 = S'_0$, получим окончательное выражение:

$$S_m = C_p \ln T - R \ln p + S'_0. \quad (83.7)$$

Чтобы перейти к переменным p и V , заменим в (83.6) T через pV_m/R :

$$S_m = C_v \ln p + C_v \ln V - C_v \ln R + R \ln V + S_0.$$

Объединив члены с $\ln V$ и введя обозначение $C_V \ln R + S_0 = S_0''$, приходим к формуле

$$S_m = C_V \ln p + C_p \ln V + S_0'' \quad (83.8)$$

Поскольку энтропия аддитивна, выражение для энтропии массы m газа можно получить, умножив любое выражение для S_m на отношение m/M (M — молярная масса газа).

В рассмотренном ранее процессе распространения газа после удаления перегородки на весь сосуд газ не получает теплоты и не совершает работы. Поэтому внутренняя энергия, а следовательно, и температура газа остаются постоянными. Объем же газа увеличивается в два раза. Следовательно, согласно формуле (83.6) приращение энтропии идеального газа в этом случае равно

$$\Delta S = R (\ln 2V - \ln V) = R \ln 2$$

(мы предполагали, что в сосуде находится один моль газа). Процесс распространения газа на весь сосуд необратим, вследствие чего энтропия газа увеличилась.

§ 84. Второе начало термодинамики

Кроме приведенной в § 82 формулировки, заключающейся в том, что энтропия изолированной системы не может убывать,

$$\Delta S \geq 0, \quad (84.1)$$

имеются и другие формулировки второго начала термодинамики. Все формулировки эквивалентны — любая из них может быть получена из других путем логических рассуждений.

Клаузиус¹⁾ сформулировал второе начало термодинамики следующим образом: *невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых был бы переход некоторого количества теплоты от тела менее нагретого к телу более нагретому.* Иными словами, теплота не может самопроизвольно переходить от холодных тел к горячим. Не следует

¹⁾ Рудольф Юлиус Эмануэль Клаузиус (1822—1888) — немецкий физик.

представлять дело так, что второе начало вообще запрещает переход теплоты от тела менее нагретого к телу более нагретому. Например, в домашнем холодильнике как раз происходит такой переход. Однако этот переход не является единственным результатом процесса. Он сопровождается изменениями в окружающих телах, связанными с совершением компрессором работы над рабочей жидкостью холодильника.

У. Томсону¹⁾ принадлежит еще одна формулировка второго начала: *невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых явилось бы отнятие от какого-то тела некоторого количества теплоты и превращение этой теплоты полностью в работу.*

На первый взгляд может показаться, что формулировке Томсона противоречит, например, процесс изотермического расширения идеального газа. Действительно, в ходе этого процесса все полученное идеальным газом от некоторого тела количество теплоты превращается полностью в работу. Однако получение теплоты и превращение ее в работу не является единственным конечным результатом процесса; кроме того происходит изменение объема газа.

Утверждение, содержащееся в формулировке Томсона, логически вытекает из утверждения, высказанного в формулировке Клаузиуса. Действительно, работа может быть полностью превращена в теплоту, например при посредстве трения. Поэтому, превратив с помощью процесса, запрещенного формулировкой Томсона, теплоту, отнятую от какого-либо тела, полностью в работу, а затем превратив эту работу посредством трения в теплоту, сообщаемую другому телу с более высокой температурой, мы осуществили бы процесс, невозможный согласно формулировке Клаузиуса.

Используя процессы, запрещаемые вторым началом термодинамики, можно было бы создать двигатель, совершающий работу за счет теплоты, получаемой от такого, например, практически неисчерпаемого источника энергии, как океан. По сути, такой двигатель был бы равнозначен вечному двигателю:

¹⁾ Уильям Томсон (с 1892 г. за научные заслуги лорд Кельвин) (1824—1907) — английский физик.

Поэтому второе начало термодинамики иногда формулируют следующим образом: *невозможен перпетуум мобиле (вечный двигатель) второго рода, т. е. такой периодически действующий двигатель, который получал бы теплоту от одного резервуара и превращал ее полностью в работу.*

§ 85. Коэффициент полезного действия тепловой машины

Термодинамика возникла как наука о превращении теплоты в работу. В задачу этой науки входило создание наиболее эффективных тепловых машин.

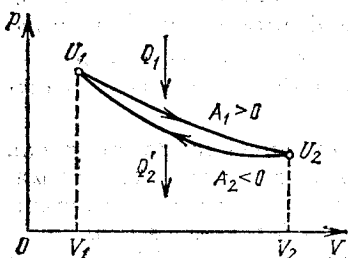


Рис. 85.1. Многократно повторяемый цикл, в ходе которого совершается работа $A = Q_1 - Q_2'$

Тепловой машиной называется периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет получаемого извне количества теплоты. На рис. 85.1 изображен цикл, в ходе которого рабочее тело (например, газ) сначала расширяется до объема V_2 , а затем снова сжимается до первоначального объема V_1 . Для того чтобы работа, совершаемая за цикл, была больше нуля, давление (а следовательно, и температура) при расширении должно быть больше, чем при сжатии. Для этого рабочему телу нужно в ходе расширения сообщать теплоту, а в ходе сжатия отнимать от него теплоту. Следовательно, должно быть два внешних тела, от одного из которых (мы будем называть его нагревателем) рабочее тело получает теплоту, а другому (назовем его холодильником) рабочее тело отдает теплоту.

По завершении цикла рабочее тело возвращается в исходное состояние. Поэтому изменение его внутренней энергии за цикл равно нулю. При расширении рабочему телу сообщается теплота Q_1 , а при сжатии отнимается теплота Q_2' , так что в итоге рабочее тело получает за цикл количество теплоты, равное $Q_1 - Q_2'$. Поскольку изменение внутренней энер-

гии рабочего тела равно нулю, вся полученная теплота затрачивается на совершение телом работы: ..

$$A = Q_1 - Q'_2. \quad (85.1)$$

Из высказанных выше соображений следует, что для того, чтобы машина работала повторными циклами, часть полученной от нагревателя теплоты должна быть отдана холодильнику. Это согласуется с требованием второго начала термодинамики, согласно которому невозможен периодически действующий двигатель, который превращал бы полученную от некоторого резервуара теплоту полностью в работу. Таким образом, теплота Q'_2 в формуле (85.1) в принципе не может равняться нулю и должен существовать отличный от нуля нижний предел возможных значений Q'_2 .

Очевидно, что чем полнее превращает тепловая машина полученную ею теплоту в работу, тем эта машина выгоднее. Эффективность тепловой машины принято характеризовать коэффициентом полезного действия (сокращенно КПД), который определяется как отношение совершаемой за цикл работы A к получаемому от нагревателя за цикл количеству теплоты Q_1 :

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \quad (85.2)$$

С учетом соотношения (85.1) выражение для КПД можно написать в виде

$$\eta = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1}. \quad (85.3)$$

Из определения КПД следует, что он не может быть больше единицы.

Если обратить цикл, изображенный на рис. 85.1 (т. е. совершать его против часовой стрелки), получится цикл холодильной машины. Такая машина отбирает от тела с меньшей температурой количество теплоты Q_2 и отдает телу с более высокой температурой количество теплоты Q'_1 , большее Q_2 . Над машиной должна быть совершена за цикл работа A' . Эффективность холодильной машины характеризуется ее холодильным коэффициентом, который определяется как отношение отнятого от охлаждаемого тела

количества теплоты Q_2 к работе A' , затрачиваемой на приведение машины в действие:

$$\text{холодильный коэффициент} = \frac{Q_2}{A'} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}.$$

Коэффициент полезного действия необратимой тепловой машины всегда меньше, чем обратимой машины, работающей в аналогичных условиях (т. е. с теми же нагревателем и холодильником). Это вытекает из следующих соображений. Допустим, что машина состоит (как это обычно бывает) из закрытого подвижным поршнем цилиндрического сосуда, в котором находится газ (рабочее тело). Получая теплоту Q_1 от нагревателя, газ расширяется и, толкая поршень, совершает положительную работу A_+ . Затем газ сжимается, отдавая холодильнику теплоту Q_2 и совершая отрицательную работу, модуль которой равен A_- . Работа за цикл равна $A = A_+ - A_-$. Для того чтобы процессы расширения и сжатия были обратимыми, они должны протекать бесконечно медленно (практически очень медленно). Кроме того, должно отсутствовать трение между поршнем и стенками сосуда, потому что трение является типичным необратимым процессом — оно всегда сопровождается превращением работы в теплоту, обратный процесс превращения за счет трения теплоты в работу невозможен.

Пусть работа, совершаемая за цикл обратимой машиной, равна $A_{\text{обр}}$. Теперь осуществим тот же цикл быстро и при наличии трения. При быстром расширении газа давление его в непосредственной близости к поршню будет меньше, чем при медленном расширении (создавшееся под поршнем разрежение не сразу распространяется на весь объем). Поэтому положительная работа газа при необратимом расширении будет меньше, чем при обратимом: $(A_+)_{\text{необр}} < (A_+)_{\text{обр}}$. При быстром сжатии давление в непосредственной близости к поршню будет больше, чем при медленном сжатии (возникающая под поршнем область повышенного давления не сразу распространяется на весь объем). Поэтому модуль отрицательной работы газа при необратимом сжатии будет больше, чем при обратимом: $(A_-)_{\text{необр}} > (A_-)_{\text{обр}}$. В результате работа $A = A_+ - A_-$, совершаемая за

цикл рабочим телом (газом) необратимой машины за счет полученной от нагревателя теплоты Q_1 , будет меньше, чем работа, совершаемая за счет такого же количества теплоты рабочим телом обратимой машины: $A_{\text{необр}} < A_{\text{обр}}$. Трение, существующее в необратимой машине, приводит к превращению части совершенной рабочим телом работы в теплоту, что также снижает КПД машины.

Таким образом, из физических соображений можно заключить, что КПД у необратимой тепловой машины меньше, чем у обратимой машины, работающей в тех же условиях. В следующем параграфе мы докажем это, основываясь на втором начале термодинамики.

§ 86. Цикл Карно

Рабочий цикл обратимой тепловой машины содержит участки, в ходе которых рабочее тело машины обменивается теплотой с нагревателем и холодильником. Выясним, при каких условиях процесс теплообмена будет обратимым.

Предположим, что какое-то тело обменивается теплотой с другим телом, которое мы будем называть тепловым резервуаром. Пусть теплоемкость резервуара бесконечно велика. Это означает, что получение или отдача резервуаром конечного количества теплоты не изменяет его температуры. Процесс теплообмена тела с резервуаром может быть обратимым только при условии, что в ходе этого процесса температура тела будет равна температуре резервуара. Действительно, допустим, что тело получает теплоту от резервуара с температурой T , имея температуру, меньшую T . При протекании того же процесса в обратном направлении тело сможет вернуть резервуару полученную от него теплоту только в том случае, если его температура будет во всяком случае не ниже, чем T . Следовательно, при прямом и при обратном ходе процесса температура тела будет различной — тело проходит в обоих случаях через различные последовательности состояний, и процесс будет необратимым.

Таким образом, процесс теплообмена может быть обратимым лишь в том случае, если, получая теп-

лоту и возвращая ее при обратном ходе резервуару, тело имеет одну и ту же температуру, равную температуре резервуара. Точнее, при получении теплоты температура тела должна быть на бесконечно малую величину меньше температуры резервуара (иначе теплота не потечет от резервуара к телу), а при отдаче теплоты температура тела должна быть на бесконечно малую величину больше температуры резервуара.

Итак, единственным обратимым процессом, сопровождающимся теплообменом с резервуаром, температура которого остается неизменной, является изотермический процесс, протекающий при температуре резервуара.

Для работы тепловой машины необходимо наличие двух тепловых резервуаров — нагревателя и холодильника. Допустим, что теплоемкость резервуаров бесконечно велика. Выясним, какой обратимый цикл может совершать рабочее тело машины в этих условиях. Этот цикл, очевидно, должен состоять как из процессов, в ходе которых тело обменивается теплотой с нагревателем и холодильником, так и из процессов, не сопровождающихся теплообменом с внешней средой, т. е. адиабатических процессов. Выше мы установили, что единственным обратимым процессом, сопровождающимся теплообменом с резервуаром, температура которого остается неизменной, является изотермический процесс, протекающий при температуре резервуара.

Таким образом, мы приходим к выводу, что обратимый цикл, совершаемый в тепловой машине рабочим телом, вступающим в теплообмен с двумя резервуарами бесконечно большой теплоемкости (нагревателем и холодильником), может состоять только из двух изотерм (при температурах резервуаров) и двух адиабат. Такой цикл был впервые введен в рассмотрение С. Карно¹⁾ и носит название цикла Карно. Отметим, что цикл Карно по определению обратимый. Поэтому встречающийся иногда термин «обратимый цикл Карно» неправилен (необратимого цикла Карно не существует).

¹⁾ Никола́ Леонар Сади Карно (1796—1832) — французский физик и инженер.

При адиабатическом процессе $d'Q = 0$. Поэтому согласно формуле (82.6) при обратимом адиабатическом процессе $dS = 0$ и, следовательно, энтропия остается постоянной. В связи с этим обратимый адиабатический процесс называют **изэнтропическим**.

Мы установили, что цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат (изэнтроп). На рис. 86.1 показано, как выглядит цикл

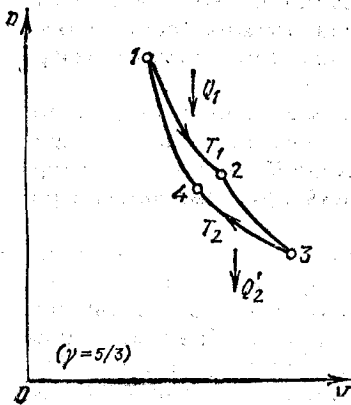


Рис. 86.1. Цикл Карно для идеального газа. Адиабаты построены для $\gamma = 5/3$

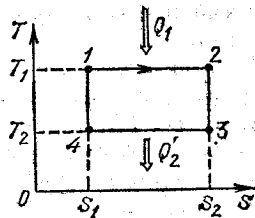


Рис. 86.2. Цикл Карно на диаграмме T, S . Площадь прямоугольника $S_1 - 1 - 2 - S_2$ численно равна Q_1 , площадь прямоугольника $S_1 - 4 - 3 - S_2$ численно равна Q'_2

Карно на диаграмме p, V в случае, когда рабочим телом является идеальный газ. Предельно просто выглядит цикл Карно на диаграмме T, S (рис. 86.2), причем не только для идеального газа, но и для веществ с какими угодно свойствами. На участке $1-2$ рабочее тело получает от нагревателя с температурой T_1 количество теплоты Q_1 . Согласно формуле (83.3) это количество теплоты можно представить в виде

$$Q_1 = T_1(S_2 - S_1).$$

На участке $3-4$ тело отдает холодильнику с температурой T_2 количество теплоты Q'_2 , что эквивалентно получению телом количества теплоты $-Q'_2$. Это количество теплоты можно представить в виде

$$-Q'_2 = T_2(S_1 - S_2)$$

(для процесса 3—4 приращение энтропии равно $S_1 - S_2$, а количество полученной рабочим телом теплоты равно $-Q'_2$).

Подставив найденные значения Q_1 и Q'_2 в формулу (85.3), придем к равенству

$$\eta = \frac{T_1(S_2 - S_1) + T_2(S_1 - S_2)}{T_1(S_2 - S_1)},$$

из которого следует, что коэффициент полезного действия цикла Карно определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (86.1)$$

При выводе формулы (86.1) мы не делали никаких предположений о свойствах рабочего тела и устройстве тепловой машины. Следовательно, можно утверждать, что коэффициент полезного действия всех обратимых машин, работающих в идентичных условиях (т. е. при одной и той же температуре нагревателя и холодильника), одинаков и определяется только температурами нагревателя и холодильника. Это утверждение носит название теоремы Карно.

Предположим, что в машине, работавшей по циклу Карно, появилась необратимость на адиабатиче-

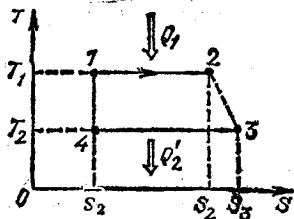


Рис. 86.3. Цикл, у которого адиабатический процесс 2—3 необратимый. Состояния 1, 2 и 4 те же, что на рис. 86.2. Площадь прямоугольника $S_1-4-3-S_2$, численно равная Q'_2 , больше, чем площадь прямоугольника $S_1-4-3-S_2$ на рис. 86.2

ском участке 2—3 (рис. 86.3; напомним, что необратимые процессы условно изображаются на диаграммах штриховыми линиями). Состояния 2 и 3 будем считать равновесными. При необратимом адиабатическом процессе энтропия возрастает, поэтому состояние 3 окажется на диаграмме правее состояния 3 на рис. 86.2. В результате обратимый изотермический процесс 3—4 станет «длиннее» и площадь прямоугольника, численно равная Q'_2 , увеличится. Таким образом, появление необратимости на участке 2—3 привело к увеличению количества теплоты, отдаваемого

холодильнику, и, следовательно, к уменьшению КПД тепловой машины. В ходе рассуждений мы не делали никаких предположений о свойствах рабочего тела, характере необратимости и устройстве машины. Поэтому результат, к которому мы пришли, имеет общий характер: *КПД любой необратимой машины всегда меньше, чем КПД обратимой машины, работающей в тех же условиях.*

Из всего сказанного в этом параграфе вытекает, что значение КПД, определяемое формулой (86.1), является предельным, допустимым вторым началом термодинамики. Никакими ухищрениями нельзя получить КПД, превышающий это значение.

Подсчитаем КПД тепловой машины с температурами нагревателя и холодильника 100 и 0 °С:

$$\eta = \frac{373 - 273}{373} = 0,27 = 27 \%$$

КПД реальных машин бывает намного меньше значений, даваемых формулой (86.1).

Эффективным способом увеличения КПД является повышение температуры нагревателя. С этой целью, например, делают паровые котлы высокого давления, в которых температура пара достигает нескольких сотен градусов Цельсия. При $T_1 = 500^\circ\text{C}$ и $T_2 = 0^\circ\text{C}$

$$\eta = \frac{773 - 273}{773} = 0,65 = 65 \%$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое вечный двигатель второго рода?
2. Какие вы знаете формулировки второго начала термодинамики?
3. Может ли энтропия убывать в ходе необратимого процесса?
4. Температура нагревателя и холодильника обратимой тепловой машины равна соответственно 227 и 27 °С. Чему равен КПД машины?

Примеры решения задач

1. В ходе обратимого изотермического процесса, протекающего при $T = 350\text{ К}$, тело совершило работу $A = 80\text{ Дж}$, а внутренняя энергия тела получила приращение $\Delta U = 7,5\text{ Дж}$. Найти приращение энтропии тела.

Решение. Из первого начала термодинамики вытекает, что в ходе процесса тело получило количество теплоты $Q = \Delta U + A$. С учетом того, что температура постоянна,

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int dQ = \frac{Q}{T} = \frac{\Delta U + A}{T} = \frac{7,5 + 80}{350} = 0,25 \text{ Дж/К.}$$

2. Найти приращение энтропии ΔS_m моля одноатомного идеального газа при обратимом изобарическом нагревании его от 0 до 273 °С.

Решение. Приняв во внимание, что в данном случае $dQ = C_p dT$, получим для приращения энтропии выражение

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = \\ &= \frac{5}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{2} 8,314 \ln \frac{546}{273} = 14,4 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}. \end{aligned}$$

3. В ходе цикла Карно рабочее вещество получает от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 300$ кДж. Температура нагревателя и холодильника равна соответственно $T_1 = 450$ К и $T_2 = 280$ К. Вычислить работу A , совершаемую рабочим веществом за цикл.

Решение. По определению КПД тепловой машины $\eta = A/Q_1$. КПД цикла Карно $\eta_K = (T_1 - T_2)/T_1$. Приравняв оба выражения, получим, что

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

откуда

$$A = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 300 \cdot 10^3 \cdot \frac{450 - 280}{450} = 113 \text{ кДж.}$$

Глава 14. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

§ 87. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Поведение таких газов, как гелий, водород, азот, кислород, хорошо описывается уравнением состояния идеального газа

$$pV_m = RT \quad (87.1)$$

лишь до тех пор, пока суммарный объем молекул пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда, в котором заключен газ. Это условие соблюдается при обычных условиях (т. е. атмосферном давлении

и комнатной температуре). При повышении давления возрастает плотность газа, вследствие чего возникают заметные отклонения от уравнения (87.1). Во втором столбце табл. 87.1 даны относительные значения произведения pV для некоторой массы азота при 0°C

Таблица 87.1. Экспериментальные данные, полученные для азота при 0°C

p , атм	pV	$(p + \frac{a'}{V^2})(V - b')$
1	1,000	1,000
100	0,994	1,000
200	1,048	1,009
500	1,390	1,014
1000	2,069	0,893

(значение pV при давлении в одну атмосферу принято за единицу).

Если бы азот строго подчинялся уравнению (87.1), произведение pV не зависело бы от давления (при постоянной температуре). Из таблицы же видно, что это произведение сначала немного уменьшается, а затем начинает расти, достигая при 1000 атм в два раза большего значения, чем при 1 атм.

В § 78 мы выяснили, что соударения молекул можно рассматривать как столкновения твердых шаров диаметра d . Положив эффективный радиус молекул равным $0,1 \text{ нм} = 10^{-10} \text{ м}$ (см. § 61), получим для «объема» одной молекулы значение $\frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4r^3 = 4 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$. При 0°C и давлении в одну атмосферу в кубическом метре газа содержится приблизительно $3 \cdot 10^{25}$ молекул. Их суммарный объем составляет $4 \cdot 10^{-30} \cdot 3 \cdot 10^{25} \approx 10^{-4} \text{ м}^3$. Таким образом, при указанных условиях на долю молекул приходится всего лишь одна десятитысячная часть всего объема газа. Если бы газ подчинялся уравнению (87.1) и при больших плотностях, то при $p = 5000 \text{ атм}$ его объем был бы равен $2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$. Следовательно, на долю молекул приходилась бы половина занимаемого газом объема. Очевидно, что в этом случае обратная пропорциональность объема давлению должна нарушаться.

При увеличении плотности газов начинают играть все возрастающую роль объем молекул и взаимодействие между ними на расстоянии. Поэтому модель идеального газа и уравнение (87.1) становятся неприменимыми.

Для описания поведения реальных газов было предложено много различных уравнений. Самым простым из них и вместе с тем дающим достаточно хорошие результаты оказалось уравнение, предложенное Ван-дер-Ваальсом ¹⁾ в 1873 г. Это уравнение было получено путем внесения поправок в уравнение (87.1) и имеет вид

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT. \quad (87.2)$$

Здесь p — давление, оказываемое на газ извне (равное давлению газа на стенки сосуда), a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса, имеющие для разных газов различные значения, определяемые экспериментально. Постоянная a измеряется в Па·м⁶/моль², постоянная b — в м³/моль.

Поправка a/V_m^2 характеризует добавку к внешнему давлению, обусловленную взаимодействием между молекулами. Из-за притяжения молекул друг к другу газ как бы сжимает сам себя. Если бы взаимодействие между молекулами вдруг прекратилось, то для того, чтобы удержать газ в пределах того же объема, понадобилось бы увеличить внешнее давление на величину, равную a/V_m^2 . Обратная пропорциональность поправки квадрату объема объясняется следующим образом. Вследствие быстрого убывания сил притяжения между молекулами с увеличением расстояния r между ними (проследите за изменением производной кривой на рис. 78.1 справа от точки r_0) заметное воздействие молекул друг на друга осуществляется в пределах небольшого расстояния $r_{м. д.}$, называемого радиусом молекулярного действия. Сфера радиуса $r_{м. д.}$ называется сферой молекулярного действия. Представим себе в газе воображаемую плоскость. Молекулы, находящиеся по обе стороны от плоскости в слоях толщины

¹⁾ Ян Дидерик Ван-дер-Ваальс (1837—1923) — нидерландский физик.

$r_{м. д.}$ притягивают друг друга с силой, пропорциональной как числу молекул в одном слое, так и числу молекул в другом слое. Оба эти числа пропорциональны количеству молекул в единице объема n , которое в свою очередь обратно пропорционально объему газа. Таким образом, давление, самосжимающее газ, оказывается прямо пропорциональным n^2 или обратно пропорциональным V^2 .

Поправка к объему b характеризует ту часть объема сосуда, которая недоступна для движения молекул. Ее можно оценить, исходя из следующих соображений. Пусть в сосуде находятся только две молекулы. Центр любой из этих молекул не может приблизиться к центру другой молекулы на расстояние, меньшее диаметра молекулы d (см. рис. 78.2). Следовательно, для центров обеих молекул не доступен сферический объем радиуса d , т. е. объем, равный восьми объемам молекулы. В расчете на одну молекулу недоступным оказывается объем, равный учетверенному объему молекулы. Поскольку молекулы, как правило, сталкиваются попарно (столкновения трех и более молекул маловероятны), полученный нами результат справедлив для любой пары молекул. Отсюда следует, что в расчете на каждую из молекул газа недоступным будет объем, равный четырем объемам одной молекулы, а для всех молекул — объем b , равный учетверенному суммарному объему молекул газа. Полученный нами результат следует рассматривать не как абсолютно строгий, а лишь как оценочный.

От уравнения (87.2), написанного для одного моля газа, легко перейти к уравнению для произвольной массы газа m , т. е. для количества вещества ν ($\nu = m/M$, где M — молярная масса). Для этого нужно учесть, что ν молей газа занимают при тех же условиях объем V в ν раз больший, чем объем моля: $V = \nu V_m$. Заменив в (87.2) V_m через V/ν , получим

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right) \left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT.$$

Умножим обе части этого уравнения на ν и введем обозначения

$$a' = \nu^2 a, \quad b' = \nu b. \quad (87.3)$$

В результате приходим к уравнению Ван-дер-Ваальса для ν молей газа:

$$\left(p + \frac{a'}{V^2}\right)(V - b') = \nu RT. \quad (87.4)$$

Постоянная a' измеряется в Па·м⁶, а b' — в м³.

Насколько уравнение Ван-дер-Ваальса лучше описывает поведение газов, чем уравнение (87.1), можно судить по данным, приведенным в табл. 87.1. В третьем столбце этой таблицы даны значения выражения $(p + a'/V^2)(V - b')$ для той же массы азота, для которой даны во втором столбце значения pV (значение этого выражения для $p = 1$ атм принято за единицу). Из таблицы видно, что уравнение Ван-дер-Ваальса гораздо лучше описывает экспериментальные данные, чем уравнение (87.1).

Сувеличением V роль поправок в уравнении (87.2) становится все менее существенной и в пределе это уравнение переходит в уравнение (87.1). Это согласуется с тем фактом, что реальные газы при уменьшении плотности приближаются по своим свойствам к идеальному газу.

Реальные газы следуют уравнению Ван-дер-Ваальса лишь приближенно. Воображаемый газ, строго подчиняющийся уравнению (87.2), называется ван-дер-ваальсовским.

Найдем внутреннюю энергию ван-дер-ваальсовского газа. Она включает в себя, кроме кинетической энергии молекул E_k , потенциальную энергию взаимодействия между молекулами E_p . Представим себе, что моль газа заключен в упругую адиабатическую (т. е. не проводящую теплоты) оболочку, причем давление газа на оболочку изнутри уравнивается давлением извне. Немного ослабив внешнее давление, позволим газу растянуть оболочку, совершив при этом работу $p dV_m$. Поскольку притока теплоты нет, эта работа равна убыли внутренней энергии газа:

$$p dV_m = -d(E_k + E_p). \quad (87.5)$$

Теперь допустим, что такое же расширение газа осуществляется при условии, что взаимодействие между молекулами каким-то способом устранено. В этом случае давление на оболочку равно $p + a/V_m^2$, а E_p

равна нулю. Следовательно,

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) dV_m = -dE_k. \quad (87.6)$$

Взяв разность уравнений (87.6) и (87.5), получим, что

$$\frac{a}{V_m^2} dV_m = dE_p.$$

Интегрирование этого уравнения приводит к выражению

$$E_p = -\frac{a}{V_m} + \text{const.}$$

Интегрирование осуществлялось по объему. Поэтому константа может зависеть от температуры. Таким образом,

$$E_p = f(T) - \frac{a}{V_m}.$$

Это выражение при стремлении объема к бесконечности должно переходить в выражение для внутренней энергии идеального газа. Отсюда заключаем, что $f(T) = C_v T$ (см. формулу (68.4)).

Итак, внутренняя энергия моля ван-дер-ваальсовского газа определяется выражением

$$U_m = C_v T - \frac{a}{V_m}. \quad (87.7)$$

Внутренняя энергия ν молей будет в ν раз больше.

По формуле (87.7) можно приближенно вычислять внутреннюю энергию реальных газов.

Перейдем к исследованию уравнения (87.2). Раскрыв скобки и умножив получившееся соотношение на V^2 , уравнение Ван-дер-Ваальса можно привести к виду

$$pV^3 - (b'p + \nu RT)V^2 + a'V = a'b'. \quad (87.8)$$

Получилось кубическое уравнение относительно V , коэффициенты которого зависят от параметров p и T . Это уравнение имеет три решения, причем в зависимости от значений коэффициентов либо все три решения являются вещественными, либо одно решение — вещественным, а два — комплексными. Объем может определяться только вещественным числом, поэтому

комплексные решения не имеют физического смысла и должны быть отброшены.

На рис. 87.1 изображены изотермы Ван-дер-Ваальса для нескольких значений температуры. При температуре T' и значениях объема в пределах от V'_1 до V'_3

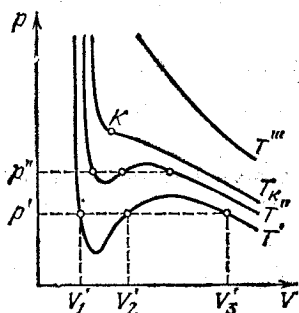


Рис. 87.1. Изотермы Ван-дер-Ваальса ($T' < T'' < T'''$). K — критическая точка

коэффициенты уравнения (87.8) таковы, что все три решения уравнения оказываются вещественными; при давлениях вне указанного промежутка вещественным оказывается только одно решение. С повышением температуры различие между тремя вещественными решениями уменьшается (ср. изотермы для температур T' и T''). Начиная с некоторой, своей для каждого газа, температуры T_k при любом давлении вещественным оказывается только

одно решение. Эта температура называется критической.

При повышении температуры точки, соответствующие значениям объема V'_1 , V'_2 и V'_3 , все больше сближаются и в конце концов сливаются при критической температуре в одну точку K , называемую критической точкой (см. рис. 87.1). Для критической изотермы K является точкой перегиба. Ей соответствуют три совпадающих решения уравнения (87.8). Касательная к изотерме в точке K является пределом, к которому стремятся секущие p' , p'' и т. д. при приближении температуры к критической. Следовательно, эта касательная, как и все секущие, параллельна оси V , так что производная dp/dV в точке K равна нулю. Кроме того, в точке перегиба должна быть равна нулю вторая производная d^2p/d^2V .

Решим уравнение (87.2) относительно p :

$$p = \frac{RT}{V_M - b} - \frac{a}{V_M^2}. \quad (87.9)$$

Продифференцировав это выражение по V_m , получим

$$\frac{dp}{dV_m} = -\frac{RT}{(V_m - b)^2} + \frac{2a}{V_m^3}, \quad \frac{d^2p}{dV_m^2} = \frac{2RT}{(V_m - b)^3} - \frac{6a}{V_m^4}.$$

Положив $T = T_k$ и $V_m = V_{m,k}$, найдем значения производных в критической точке, которые должны быть равны нулю:

$$-\frac{RT_k}{(V_{m,k} - b)^2} + \frac{2a}{V_{m,k}^3} = 0, \quad \frac{2RT_k}{(V_{m,k} - b)^3} - \frac{6a}{V_{m,k}^4} = 0. \quad (87.10)$$

В дополнение к этим двум уравнениям напишем уравнение (87.9) для критической точки:

$$p_k = \frac{RT_k}{V_{m,k} - b} - \frac{a}{V_{m,k}^2}. \quad (87.11)$$

Решение системы уравнений (87.10) и (87.11) дает значения параметров в критической точке:

$$V_{m,k} = 3b, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}, \quad T_k = \frac{8a}{27bR}. \quad (87.12)$$

Таким образом, зная постоянные Ван-дер-Ваальса a и b , можно найти $V_{m,k}$, p_k и T_k , которые называются критическими величинами. И, наоборот, по известным значениям критических величин могут быть найдены значения постоянных Ван-дер-Ваальса.

Из формул (87.12) следует, что

$$p_k V_{m,k} = \frac{3}{8} RT_k,$$

в то время как согласно уравнению состояния идеального газа должно было бы иметь место соотношение

$$p_k V_{m,k} = RT_k.$$

§ 88. Экспериментальные изотермы

У изотерм Ван-дер-Ваальса, соответствующих температурам ниже критической (см. рис. 87.1), имеется область, в которой вещество ведет себя противоестественным образом. В этой области, простирающейся от «дна» впадины до «вершины» горба, увеличение объема сопровождается ростом давления. Однородного вещества с такими свойствами быть не

может. Поэтому приходится заключить, что в указанной области вещество становится неоднородным, т. е., как говорят, расслаивается на две фазы.

В термодинамике фазой называется совокупность однородных, одинаковых по своим свойствам частей системы. Если, например, в закрытом сосуде находится вода, в которой плавают кусочки льда, то жидкая вода представляет собой одну фазу, все кусочки льда — вторую, а смесь паров воды и воздуха над жидкостью — третью фазу термодинамической системы.

Чтобы получить изотерму опытным путем, нужно поместить газ в соединенный с манометром термостатированный сосуд, закрытый перемещающимся поршнем (термостатом называется устройство для поддержания постоянной температуры). Затем, вдвигая медленно поршень, делать одновременные отсчеты давления и объема.

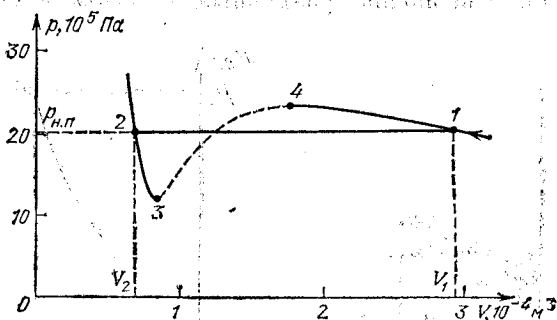


Рис. 88.1. Изотерма Ван-дер-Ваальса для азота при 110 К (критическая температура 126 К). $p_{н.п.}$ — давление насыщенного пара.

На рис. 88.1 изображены результаты подобного опыта для азота. Вначале с уменьшением объема давление газа растет, причем ход изотермы довольно хорошо описывается уравнением Ван-дер-Ваальса. Однако, начиная с объема V_1 , давление в сосуде перестает изменяться. Вместо завитка 1—4—3—2 на экспериментальной изотерме получается прямолинейный участок 1—2. Вещество при этом расслаивается на две фазы: жидкую и газообразную (в этом можно убедиться, сделав стенки сосуда прозрачными). По

мере уменьшения объема конденсируется (т. е. переходит в жидкую фазу) все большая часть вещества, причем процесс конденсации происходит при постоянном давлении $p_{н.п.}$

При значении объема V_2 процесс конденсации заканчивается и вещество снова становится однородным (но жидким). Дальнейшее уменьшение объема сопровождается быстрым ростом давления, причем ход изотермы снова примерно следует уравнению Ван-дер-Ваальса.

Таким образом, уравнение Ван-дер-Ваальса описывает не только газообразное состояние вещества, но охватывает также переход вещества в жидкое состояние и процесс сжатия жидкости.

Из сопоставления экспериментальной изотермы с изотермой Ван-дер-Ваальса видно, что эти изотермы довольно хорошо совпадают на участках, соответствующих однородным состояниям вещества, но ведут себя совершенно различным образом в области

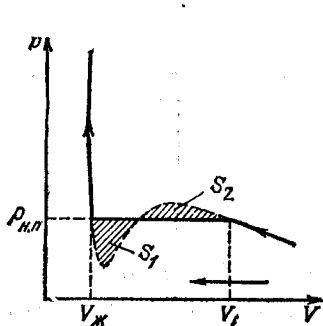


Рис. 88.2. Заштрихованные площади одинаковы: $S_1 = S_2$. V_r — минимальный объем газа, V_l — максимальный объем жидкости

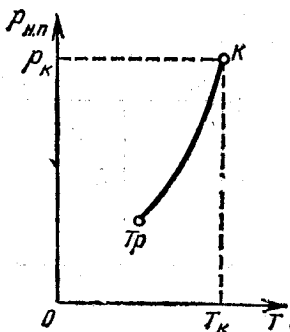


Рис. 88.3. Зависимость давления насыщенного пара от температуры: K — критическая точка, T_p — тройная точка

расслоения на две фазы. Вместо S -образного участка изотермы Ван-дер-Ваальса у экспериментальной изотермы имеется в этой области прямолинейный горизонтальный участок. Основываясь на законах термодинамики, можно доказать, что охватываемые впадиной и горбом площади S_1 и S_2 на рис. 88.2 одинаковы.

В состояниях, соответствующих горизонтальному участку экспериментальной изотермы, наблюдается равновесие между жидкой и газообразной фазами вещества. Газ, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется насыщенным паром. Давление $p_{н.п.}$, при котором осуществляется равновесие при данной температуре, называется давлением насыщенного пара. Это давление растет с температурой (рис. 88.3).

На рис. 88.4 изображены экспериментальные изотермы для ряда значений температуры. На рисунке

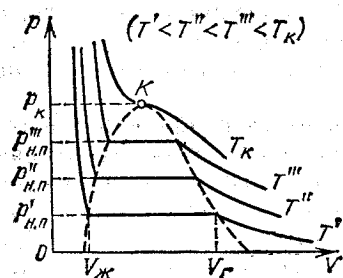


Рис. 88.4. Совокупность экспериментальных изотерм, отвечающих различным температурам. Область под колоколообразной штриховой кривой есть область двухфазных состояний вещества

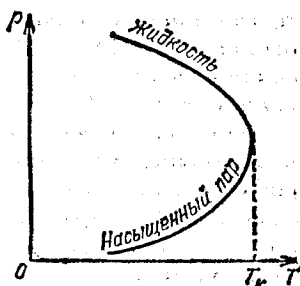


Рис. 88.5. Зависимость плотности ρ жидкости и насыщенного пара от температуры

видно, что с повышением температуры горизонтальный участок изотермы сокращается и стягивается в точку K при критической температуре. Соответственно уменьшается различие в плотностях жидкости и насыщенного пара (рис. 88.5). При критической температуре это различие полностью исчезает и вещество становится однородным. Из рис. 88.4 следует, что насыщенный пар может существовать лишь при температурах ниже критической. Поэтому график зависимости $p_{н.п.}$ от T на рис. 88.3 заканчивается в критической точке.

Выделим мысленно часть газа, заключенную в небольшом объеме ΔV . Когда газ находится в обычном (некритическом) состоянии, увеличение ΔV приводит

к уменьшению в нем давления, вследствие чего окружающий объем ΔV газ поджимает его до первоначального значения. Уменьшение ΔV сопровождается увеличением в нем давления, вследствие чего объем ΔV , «потеснив» свое окружение, снова принимает прежнее значение. Таким способом устраняются заметные неоднородности газа.

Иначе обстоит дело в случае, когда вещество находится в критическом состоянии. Поскольку в критической точке $dp/dV = 0$, случайное увеличение (или уменьшение) объема ΔV не сопровождается уменьшением (соответственно возрастанием) давления, так что отклонения значений ΔV от среднего могут быть довольно большими. Этим объясняется тот факт, что вещество в критическом состоянии оказывается очень неоднородным.

Проведенная на рис. 88.4 через крайние точки горизонтальных участков колоколообразная штриховая кривая ограничивает область двухфазных состояний вещества. При температурах выше критической вещество при любом давлении остается однородным. При таких температурах никаким сжатием не может быть осуществлен переход вещества в жидкое состояние.

Понятие критической температуры было впервые введено Д. И. Менделеевым¹⁾ в 1860 г. Менделеев назвал ее температурой абсолютного кипения жидкости и рассматривал как ту температуру, при которой исчезают силы сцепления между молекулами и жидкость превращается в пар, независимо от давления и занимаемого ею объема.

Колоколообразная кривая и участок критической изотермы, лежащий слева от точки K , делят диаграмму p, V на три области (рис. 88.6). Наклонной штриховкой обозначена область однородных жидких состояний вещества. Горизонтальной штриховкой помечена область двухфазных состояний. Справа от колоколообразной кривой и верхней ветви критической изотермы располагается область однородных газообразных состояний. В ней иногда выделяют обозначенную буквой «п» часть, называемую областью пара. Любое состояние в этой области отличается от состоя-

¹⁾ Дмитрий Иванович Менделеев (1834—1907) — русский химик.

ний, лежащих в области «г», в том отношении, что при изотермическом сжатии вещество, находившееся первоначально в таком состоянии, претерпевает процесс ожигения. При температурах выше критической, как

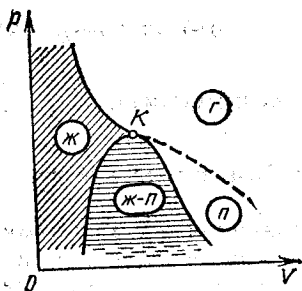


Рис. 88.6. Области равновесных состояний вещества на диаграмме p, V .

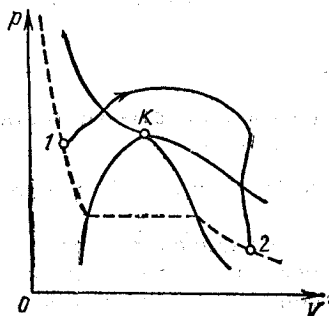


Рис. 88.7. Осуществив процесс, идущий в обход двухфазной области, можно превратить жидкость в газ без расслоения на две фазы

уже отмечалось, вещество не может быть ожигено никаким сжатием.

На рис. 88.7 показан процесс, посредством которого можно осуществить переход из жидкого состояния в газообразное (или обратно) без расслаивания вещества на две фазы. В ходе такого процесса вещество все время остается однородным.

На участках 1—4 и 2—3 на рис. 88.1 вещество в отношении зависимости давления от объема ведет себя нормально. Поэтому, казалось бы, эти участки могли бы реализоваться. Действительно, при известных условиях состояния, соответствующие этим участкам, могут осуществляться. Однако эти состояния не вполне устойчивы: достаточно, например, попадания в пар или жидкость пылинки для того, чтобы вещество распалось на две фазы. Подобные не вполне устойчивые состояния называются метастабильными. Вещество в состояниях 1—4 называется пересыщенным паром, а в состояниях 2—3 — перегретой жидкостью.

При достаточно низкой температуре участок изотермы 2—3 (см. рис. 88.1) «ныряет» под ось V , т. е. значения p становятся отрицательными. Вещество под

отрицательным давлением находится в состоянии не сжатия, а растяжения. Такие состояния также могут быть реализованы. Можно, например, получить растянутую ртуть. Для этого нужно погрузить в ртуть запаянную с одного конца длинную стеклянную трубку и, повернув ее запаянным концом вверх, осторожно вытаскивать наружу. В такой трубке можно получить столб ртути, значительно превышающий 760 мм. Ртуть в трубке будет находиться в состоянии растяжения, т. е. под отрицательным давлением.

§ 89. Фазовые превращения

Разные фазы одного и того же вещества могут находиться в равновесии, соприкасаясь друг с другом. Такое равновесие наблюдается лишь в ограниченном интервале температур, причем каждому значению температуры T соответствует свое значение давления p , при котором возможно равновесие. Совокупность состояний равновесия двух фаз изображается на диаграмме p, T линией

$$p = f(T). \quad (89.1)$$

Примером может служить кривая на рис. 88.3.

На диаграмме p, V совокупность равновесных состояний изображается отрезком горизонтальной прямой, причем каждой паре значений p и T соответствует свой отрезок (см. рис. 88.4). Состояния, отвечающие различным точкам отрезка, отличаются распределением вещества между фазами. Концам отрезка соответствуют однофазные состояния. При переходе вещества из одной фазы в другую точка, изображающая состояние на диаграмме p, V , перемещается вдоль отрезка. Вся совокупность состояний, изображаемая на диаграмме p, V горизонтальным отрезком прямой, на диаграмме p, T изображается одной точкой, определяющей значения p и T , при которых осуществляется переход.

Переход вещества из одной фазы в другую обычно сопровождается поглощением или выделением некоторого количества теплоты, которая называется теплотой фазового превращения. Например, при таянии льда поглощается теплота плавления.

ния, при замерзании воды выделяется такое же количество теплоты.

Переходы, сопровождающиеся поглощением или выделением теплоты, называются фазовыми превращениями и первого рода. Существуют превращения одной кристаллической модификации (разновидности) вещества в другую, которые не связаны с поглощением или выделением теплоты. Их называют фазовыми превращениями второго рода.

При фазовых превращениях второго рода плотность вещества не изменяется. Претерпевают скачкообразное изменение удельная теплоемкость и некоторые другие величины. Примером превращения второго рода может служить переход железа из ферромагнитного состояния в парамагнитное, который происходит при температуре, называемой точкой Кюри¹⁾.

К числу фазовых превращений второго рода принадлежат также переход в сверхпроводящее состояние, совершаемый в отсутствие магнитного поля, и переход между двумя жидкими фазами гелия, называемыми гелием-I и гелием-II.

Три фазы одного и того же вещества (твердая, жидкая и газообразная, или жидкая и две твердые, или, наконец, три твердые) могут находиться в равновесии только при единственных значениях температуры и давления, которым на диаграмме p, T соответствует точка, называемая тройной.

В термодинамике доказывается, что равновесие более чем трех фаз одного и того же вещества невозможно. Это утверждение подтверждается опытом.

В тройной точке сходятся три кривые равновесия фаз, взятых попарно (рис. 89.1). Кривая испарения нам уже известна (см. рис. 88.3). Кривая плавления определяет условия равновесия между твердой и жидкой фазами вещества (например, между жидкой водой и льдом); эта кривая уходит в бесконечность. Сублимацией (или возгонкой) называется непосредственный (без плавления) переход из кристаллического состояния в газообразное. Кривая сублимации определяет условия равновесия между твер-

¹⁾ Пьер Кюри (1859—1906) — французский физик.

дой (кристаллической) и газообразной фазами вещества.

Диаграммы, подобные изображенной на рис. 89.1, называются диаграммами состояния вещества. Они определяют равновесные состояния, т. е. такие состояния, в которых вещество при неизменных внешних условиях пребывает сколь угодно долго. Строятся диаграммы состояния на основе экспериментальных данных.

Кривые плавления, испарения и сублимации разбивают координатную плоскость p, T на три области. Слева от кривых сублимации и плавления лежит область твердой фазы, между кривыми плавления и испарения заключена область жидких состояний, и, на-

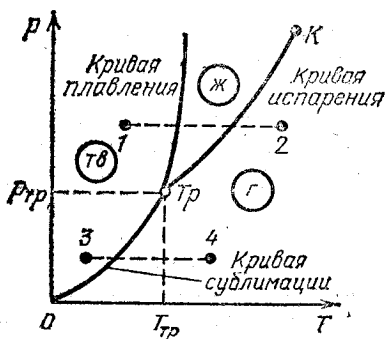


Рис. 89.1. Диаграмма состояния вещества

конец, справа от кривых испарения и сублимации простирается область газообразных состояний. Всякая точка в одной из этих областей изображает соответствующее однофазное состояние вещества. Любая точка, лежащая на одной из разграничивающих области кривых, определяет условия равновесия двух соответствующих фаз вещества. Тройная точка изображает состояние равновесия всех трех фаз.

Диаграмма состояния позволяет определить, какие превращения будет претерпевать вещество при различных процессах. Например, если взять вещество в состоянии, изображаемом точкой 1 на рис. 89.1, и подвергнуть его изобарическому нагреванию, то вещество будет проходить изображенную штриховой прямой 1—2 последовательность состояний: кристаллы — жидкость — газ. Если же взять вещество в состоянии, изображаемом точкой 3, и также подвергнуть изобарическому нагреванию, то последовательность состояний 3—4 будет иной: кристаллы превращаются непосредственно в газ, минуя жидкую фазу.

Из рис. 89.1 следует, что жидкая фаза может находиться в равновесии только при давлениях не меньших, чем давление в тройной точке $p_{тр}$. У большинства обычных веществ давление в тройной точке значительно меньше атмосферного, вследствие чего переход этих веществ из твердого состояния в газообразное осуществляется через промежуточную жидкую фазу. Например, у воды $p_{тр} = 6,10 \text{ гПа}$ (4,58 мм рт. ст.). В случае углекислоты (CO_2) $p_{тр} = 5,11 \text{ атм}$. Поэтому при атмосферном давлении углекислота может существовать только в твердом и газообразном состояниях. Твердая углекислота (называемая сухим льдом) на воздухе сублимирует, а не тает.

Наклон кривой плавления зависит от того, как ведет себя при плавлении плотность вещества. Если плотность жидкости больше, чем плотность кристаллов, кривая плавления наклонена вправо, как на рис. 89.1. Если при плавлении плотность вещества уменьшается (так ведет себя, например, вода), то

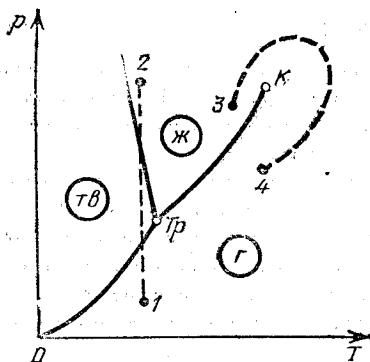


Рис. 89.2. Диаграмма состояния вещества, плотность которого при плавлении уменьшается

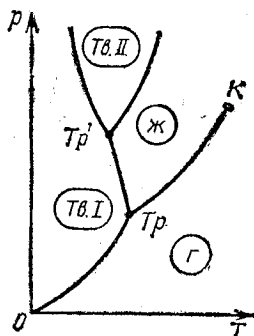


Рис. 89.3. Диаграмма состояния вещества, имеющего две кристаллические модификации

кривая плавления наклонена влево (рис. 89.2). В последнем случае поведение вещества при некоторых процессах может оказаться весьма своеобразным. Если взять подобное вещество в состоянии, изображенном на рис. 89.2 точкой 1, и подвергнуть его изотермическому сжатию (штриховая прямая 1—2), то в ходе сжатия газообразное вещество сначала затвер-

деет, а затем станет жидким. Это происходит только при температурах ниже критической.

Кривая испарения заканчивается в критической точке K . Поэтому возможен процесс, совершающийся в обход критической точки K (см. штриховую линию 3—4 на рис. 89.2). В этом случае переход из жидкого состояния в газообразное совершается непрерывно, через последовательность однородных состояний. На рис. 88.7 подобный переход изображен сплошной линией 1—2.

Для вещества, имеющего несколько кристаллических модификаций, диаграмма состояния имеет более сложный характер. На рис. 89.3 изображена диаграмма для случая двух кристаллических модификаций. В этом случае имеются две тройные точки. В точке Tr в равновесии находятся газ, жидкость и первая кристаллическая модификация, в точке Tr' — жидкость и обе кристаллические модификации. У воды имеется семь различных модификаций льда. Соответственно имеется ряд тройных точек.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие величины, которыми пренебрегают, рассматривая идеальные газы, учитывает уравнение Ван-дер-Ваальса?
2. От каких параметров состояния зависит внутренняя энергия ван-дер-ваальсовского газа?
8. Можно ли, не охлаждая вещество ниже критической температуры, перевести его в жидкое состояние?
4. Каким способом можно получить пересыщенный пар?
5. Могут ли существовать в равновесии жидкая вода, ее пар и две кристаллические модификации льда?
6. В какой точке заканчивается кривая испарения на диаграмме T, p ?
7. В какой точке заканчивается кривая сублимации?
8. Почему применяемый для охлаждения продуктов сухой лед (твердая углекислота) на воздухе не плавится (т. е. не превращается в жидкость)?

Примеры решения задач

1. Моль азота охлаждается до -100°C . Определить давление, оказываемое газом на стенки сосуда, если занимаемый газом объем $V = 0,100$ л. Сравнить p с давлением $p_{ид}$, которое имел бы азот, если бы сохранил при рассматриваемых условиях

свойства идеального газа. Постоянные Ван-дер-Ваальса для азота имеют значения: $a = 0,135 \text{ Па} \cdot \text{м}^6/\text{моль}^2$, $b = 3,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$

Решение. Из уравнения Ван-дер-Ваальса следует, что

$$p = \frac{RT}{V_M - b} - \frac{a}{V_M^2} = \frac{8,31 \cdot 173}{(10,0 - 3,9) \cdot 10^{-5}} - \frac{0,135}{(1,00 \cdot 10^{-4})^2} = 1,00 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Для идеального газа

$$p_{\text{ид}} = \frac{RT}{V_M} = \frac{8,31 \cdot 173}{0,100 \cdot 10^{-3}} = 1,44 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Таким образом, $p = 0,70 p_{\text{ид}}$.

2. Моль кислорода расширяется адиабатически в пустоту, в результате чего объем газа увеличивается от значения $V_1 = 1,00 \text{ л}$ до $V_2 = 10,0 \text{ л}$. Определить приращение температуры газа ΔT . Для кислорода постоянная Ван-дер-Ваальса $a = 0,136 \text{ Па} \cdot \text{м}^6/\text{моль}^2$.

Решение. Расширяясь в пустоту, газ работы не совершает ($A = 0$). При адиабатическом процессе $Q = 0$. Поэтому согласно первому началу термодинамики $\Delta U = 0$. Внутренняя энергия моля ван-дер-ваальсовского газа с двухатомными жесткими молекулами определяется выражением

$$U = C_V T - \frac{a}{V} = \frac{5}{2} RT - \frac{a}{V}.$$

Приравняв значения этого выражения для начального и конечного состояний газа, получим, что

$$\frac{5}{2} RT_1 - \frac{a}{V_1} = \frac{5}{2} RT_2 - \frac{a}{V_2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta T = T_2 - T_1 &= \frac{2a}{5R} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = \\ &= \frac{2 \cdot 0,136}{5 \cdot 8,31} \left(\frac{1}{10,0 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{1,00 \cdot 10^{-3}} \right) = -5,9 \text{ К.} \end{aligned}$$

Газ охладился на 5,9 К.

Глава 15. ТВЕРДОЕ И ЖИДКОЕ СОСТОЯНИЯ

§ 90. Отличительные черты кристаллического состояния

Большинство твердых тел имеет кристаллическое строение. Почти все минералы и все металлы в твердом состоянии являются кристаллами.

Характерная особенность кристаллического состояния, отличающая его от жидкого и газообразного состояний, заключается в наличии анизотропии, т. е. зависимости ряда свойств (механических, тепловых, электрических, оптических) от направления. Тела, свойства которых одинаковы по всем направлениям, называются изотропными. Изотропны кроме газов и, за отдельными исключениями, всех жидкостей также аморфные твердые тела, которые представляют собой переохлажденные жидкости. Типичным примером аморфных тел является стекло.

Анизотропия кристаллов обусловлена упорядоченным расположением частиц (атомов, ионов, молекул), из которых они построены. Упорядоченное расположение частиц проявляется во внешней огранке кристаллов. Кристаллические тела ограничены плоскими гранями, пересекающимися под некоторыми, определенными для каждого вида кристаллов, углами.

Правильность внешней огранки и анизотропия кристаллов обычно не проявляются из-за того, что кристаллические тела встречаются, как правило, в виде поликристаллов, т. е. конгломератов множества сросшихся, беспорядочно ориентированных мелких кристалликов. В поликристаллах анизотропия наблюдается только в пределах каждого отдельно взятого кристаллика, тело же в целом вследствие беспорядочной ориентации кристалликов анизотропии не обнаруживает. Создав специальные условия кристаллизации из расплава или раствора, можно вырастить большие одиночные кристаллы — монокристаллы любого вещества. Монокристаллы некоторых минералов встречаются в природе в естественном состоянии.

Структурные элементы кристалла (атомы, ионы, молекулы) размещаются в узлах геометрически правильной пространственной решетки. Весь кристалл может быть получен путем многократного повторения в трех различных направлениях элементарной кристаллической ячейки (рис. 90.1). Длины ребер a , b , c ячейки называются периодами идентичности кристалла.

Кристаллическая ячейка представляет собой параллелепипед, построенный на векторах a , b , c , модули которых равны периодам идентичности. Кроме ребер a , b , c , ячейка характеризуется также углами

α , β , γ между ребрами (рис. 90.1). Величины a , b , c , α , β , γ определяют элементарную ячейку и называются ее параметрами.

Кристаллическая решетка может обладать различными видами симметрии. Под симметрией кристаллической решетки понимается свойство решетки

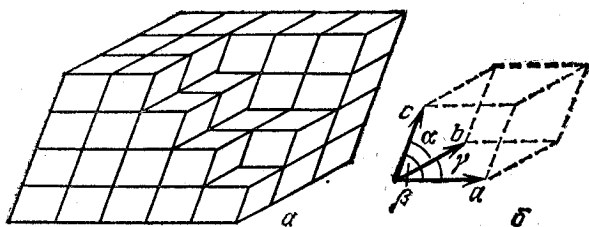


Рис. 90.1. а — Построение кристалла из ячеек. б — Элементарная кристаллическая ячейка

совпадать с самой собой при некоторых пространственных перемещениях. Всякая решетка обладает прежде всего трансляционной симметрией, т. е. совпадает сама с собой при перемещении (трансляции) на величину периода идентичности. К числу других видов симметрии относятся симметрия по отношению к поворотам вокруг некоторых осей, симметрия по отношению к зеркальному отражению относительно определенных плоскостей и некоторые другие симметрии. Различные виды симметрии называются элементами симметрии.

В зависимости от формы элементарной ячейки все кристаллы делятся на семь кристаллографических систем (или сингоний), каждая из которых характеризуется своей совокупностью элементов симметрии.

Самой низкой симметрией обладает триклинная система. У нее все ребра и все углы разные: $a \neq b \neq c$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Элементарная ячейка имеет форму косоугольного параллелепипеда.

Самой высокой симметрией обладает кубическая система. У нее все ребра одинаковые, а углы прямые: $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Элементарная ячейка имеет форму куба. Высокая симметрия решетки приводит к тому, что в отношении многих фи-

зических свойств кристаллы кубической системы ведут себя как изотропные тела.

Остальные кристаллографические системы мы характеризовать не будем.

§ 91. Физические типы кристаллов

В зависимости от вида частиц, помещающихся в узлах кристаллической решетки, и от характера сил взаимодействия между частицами различают четыре типа кристаллических решеток и соответственно четыре типа кристаллов: ионные, атомные, металлические и молекулярные.

Ионные кристаллы. В узлах кристаллической решетки помещаются ионы разных знаков. Силы взаимодействия между ними являются электростатическими (кулоновскими). Связь, обусловленная электростатическими силами притяжения между разноименно заряженными ионами, называется гетерополярной или ионной.

Типичным примером ионной решетки может служить изображенная на рис. 91.1 решетка каменной соли (NaCl). Эта решетка принадлежит к кубической системе. На рисунке видно, что ближайшими соседями иона данного знака являются ионы противоположного знака. В газообразном состоянии NaCl состоит из молекул, в которых объединены попарно ионы натрия с ионами хлора. В кристалле молекулы утрачивают обособленное существование. Ионный кристалл состоит не из молекул, а из ионов. Весь кристалл в целом можно рассматривать как одну гигантскую молекулу.

Атомные кристаллы. В узлах кристаллической решетки помещаются нейтральные атомы. Связь, объединяющая в кристалле (а также и в молекуле) нейтральные атомы, называется гомеополярной или ковалентной. Силы взаимодействия при такой

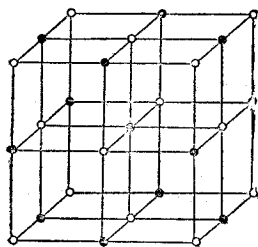


Рис. 91.1. Решетка каменной соли. Белые кружки — ионы натрия, черные кружки — ионы хлора

связи имеют также электрический (но не кулоновский) характер. Объяснение этих сил может быть дано только на основе квантовой механики.

Гомеополлярная связь осуществляется электронными парами. Это означает, что в осуществлении связи между двумя атомами участвуют по одному электрону от каждого атома. Поэтому гомеополлярная связь имеет направленный характер. В случае гетерополярной связи каждый ион воздействует на все достаточно близкие к нему ионы. При гомеополлярной связи воздействие направлено на тот атом, с которым у данного атома имеется совместная электронная пара. Гомеополлярная связь может осуществляться только валентными, т. е. наименее связанными с атомом, электронами. Поскольку каждый электрон может обеспечить связь только с одним атомом, число связей, в которых может участвовать данный атом (число соседей, с которыми он может быть связан), равно его валентности.

Примерами атомных кристаллов могут служить алмаз и графит. Эти кристаллы тождественны по химической природе (они построены из атомов углерода), но отличаются типом решетки (рис. 91.2). На

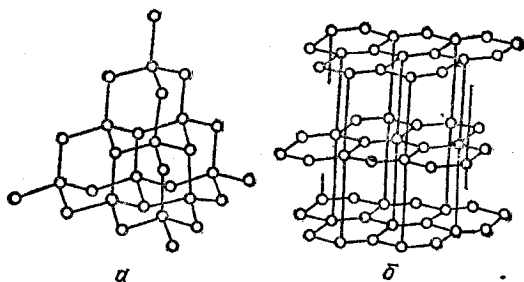


Рис. 91.2. Решетки алмаза (а) и графита (б)

этом примере отчетливо видно влияние кристаллической структуры на свойства вещества: алмаз — самый твердый минерал, графит, напротив, мягок и легко крошится.

Такую же решетку, как у алмаза (решетку типа алмаза), имеют типичные полупроводники — германий и кремний. Для этой решетки характерно то, что каждый атом окружен четырьмя равноотстоящими от

него соседями, расположенными в вершинах правильного тетраэдра. Каждый из четырех валентных электронов входит в электронную пару, связывающую данный атом с одним из соседей.

Металлические кристаллы. В узлах кристаллической решетки помещаются положительные ионы металла. Между ними беспорядочно, подобно молекулам газа, движутся электроны, отщепившиеся от атомов при образовании кристалла. Эти электроны играют роль «цемента», удерживая вместе положительные ионы; иначе решетка распалась бы под действием сил отталкивания между ионами. Вместе с тем и электроны удерживаются ионами в пределах кристаллической решетки и не могут ее покинуть.

Молекулярные кристаллы. В узлах кристаллической решетки помещаются определенным образом ориентированные молекулы. Силы связи между молекулами в кристалле имеют ту же природу, что и силы притяжения между молекулами, приводящие к отклонению газов от идеальности, в связи с чем их называют в а н - д е р - в а а л ь с о в с к и м и с и л а м и. Молекулярные решетки образуют, например, вода (H_2O), углекислота (CO_2), азот (N_2), кислород (O_2) и водород (H_2). Таким образом, обычный лед, а также сухой лед (твердая углекислота) представляют собой молекулярные кристаллы.

§ 92. Строение жидкостей

Жидкости, занимая промежуточное положение между газами и кристаллами, сочетают в себе черты обоих этих видов тел. В частности, для жидкостей, как и для кристаллов, характерно наличие определенного объема, и вместе с тем жидкость, подобно газу, принимает форму того сосуда, в котором она находится. Далее, для кристаллов характерно упорядоченное расположение частиц, в газах в этом смысле царит полный хаос. Согласно рентгенографическим исследованиям, в отношении характера расположения молекул жидкости также занимают промежуточное положение: в жидкостях наблюдается ближний порядок. Это означает, что по отношению к любой частице расположение ближайших к ней соседей является упорядоченным. Однако по мере удаления от

данной частицы расположение по отношению к ней других частиц становится все менее упорядоченным, и порядок: упорядоченное расположение частиц полностью исчезает. В кристаллах имеет место дальний порядок: упорядоченное расположение частиц по отношению к любой частице наблюдается в пределах значительного объема.

В связи с наличием в жидкостях ближнего порядка структуру жидкостей называют квазикристаллической (кристаллоподобной).

Из-за отсутствия дальнего порядка жидкости, за немногими исключениями, не обнаруживают анизотропии, характерной для кристаллов. В жидкостях с удлинёнными молекулами наблюдается одинаковая ориентация молекул в пределах значительного объема, чем обуславливается анизотропия оптических и некоторых других свойств. Такие жидкости получили название жидких кристаллов. У них упорядочена только ориентация молекул, взаимное же расположение молекул, как и в обычных жидкостях, дальнего порядка не обнаруживает.

Тепловое движение молекул в жидкостях имеет следующий характер. Каждая молекула в течение некоторого времени колеблется около определенного положения равновесия. Время от времени молекула скачком перемещается в новое положение равновесия, отстоящее от предыдущего на расстояние порядка размеров самих молекул. Этим объясняется текучесть жидкостей. С повышением температуры частота таких скачкообразных перемещений возрастает, вследствие чего вязкость жидкостей уменьшается. Отметим, что вязкость газов возрастает с повышением температуры.

§ 93. Поверхностное натяжение

Молекулы жидкости располагаются так близко друг к другу, что силы притяжения между ними имеют ощутимую величину. В § 87 отмечалось, что заметное воздействие молекул друг на друга наблюдается в пределах радиуса молекулярного действия (в этом параграфе мы будем обозначать его просто r), равного нескольким эффективным

диаметрам молекулы. Сфера радиуса r называется сферой молекулярного действия.

Таким образом, каждая молекула испытывает притяжение со стороны всех молекул, находящихся внутри сферы молекулярного действия, центр которой совпадает с центром данной молекулы. Для молекулы, находящейся от поверхности жидкости на расстоянии, превышающем r , результирующая сила притяжения к соседним молекулам в среднем равна нулю

(рис. 93.1). Иначе обстоит дело, если молекула находится на расстоянии от поверхности, меньшем r . Так как плотность газообразной среды над поверхностью жидкости во много раз меньше плотности жидкости, в выступающей за пределы жидкости части сферы молекулярного действия молекулы практически будут отсутствовать.

Поэтому на молекулу, находящуюся в поверхностном слое толщины r , действует сила F , направленная внутрь жидкости. Модуль этой силы растет при переходе от внутренней к наружной границе слоя.

При переходе молекулы из глубины жидкости в поверхностный слой над молекулой совершается действующими на нее в этом слое силами отрицательная работа. В результате кинетическая энергия молекулы уменьшается, превращаясь в потенциальную энергию. Подобно этому сила земного тяготения совершает над летящим вверх телом отрицательную работу, что приводит к превращению кинетической энергии тела в потенциальную. Таким образом, молекулы в поверхностном слое обладают дополнительной потенциальной энергией. Поверхностный слой в целом обладает дополнительной энергией, которая входит составной частью во внутреннюю энергию жидкости.

Положение равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии. Поэтому в отсутствие внешних сил жидкость принимает форму с минимальной поверхностью, т. е. форму шара. Обычно мы наблюда-

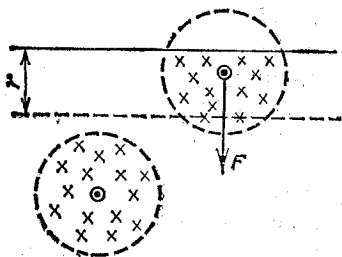


Рис. 93.1. Молекула в глубине жидкости (слева) и в поверхностном слое (справа), r — радиус молекулярного действия

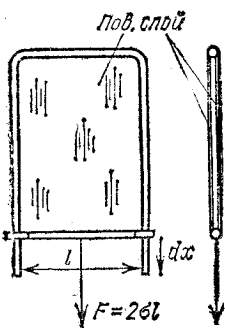
даем жидкости, подверженные действию сил земного тяготения. В этом случае жидкость принимает форму, соответствующую минимуму суммарной энергии — потенциальной энергии в поле сил тяготения и поверхностной энергии.

Наличие поверхностной энергии обуславливает стремление жидкости к сокращению своей поверхности. Жидкость ведет себя так, как если бы она была заключена в упругую растянутую пленку, стремящуюся сжаться. На самом деле никакой пленки, ограничивающей жидкость снаружи, нет. Поверхностный слой состоит из тех же молекул, что и вся жидкость, и взаимодействие между молекулами имеет в поверхностном слое такой же характер, как и внутри жидкости.

Выделим мысленно участок поверхности жидкости, ограниченный замкнутым контуром. Стремление этого участка к сокращению приводит к тому, что он действует на остальную часть поверхности с касательными к поверхности силами, перпендикулярными в каждом месте к соответствующему элементу контура. Эти силы называют силами поверхностного натяжения.

Сила, приходящаяся на единицу длины контура, называется поверхностным натяжением и обозначается буквой σ . Измеряют ее в ньютонах на метр (Н/м).

Рис. 93.2. Рамка с подвижной перемычкой, затянута жидкой пленкой. Сила поверхностного натяжения, действующая на перемычку, уравнивается внешней силой F



Пусть имеется рамка с подвижной «невесомой» перемычкой, затянута жидкой пленкой (рис. 93.2). Пленка ограничена с двух сторон поверхностным слоем, поэтому слой граничит с перемычкой по контуру длины $2l$ и, следовательно, действует на перемычку с силой, равной $2l\sigma$. Для того чтобы перемычка не перемещалась, к ней нужно приложить внешнюю силу F , уравнивающую силу поверхностного натяжения. Увеличив внешнюю силу F на пренебрежимо малую величину, сместим перемычку

с силой, равной $2l\sigma$. Для того чтобы перемычка не перемещалась, к ней нужно приложить внешнюю силу F , уравнивающую силу поверхностного натяжения. Увеличив внешнюю силу F на пренебрежимо малую величину, сместим перемычку

вниз на расстояние dx , При этом перемычка совершит над жидкой пленкой работу

$$d'A = F dx = 2l\sigma dx = \sigma dS, \quad (93.1)$$

где dS — приращение площади поверхностного слоя пленки.

Результатом совершения работы (93.1) являются увеличение площади поверхностного слоя на dS и, следовательно, возрастание поверхностной энергии на $dE_{\text{пов}}$

$$d'A = dE_{\text{пов}} = \epsilon_{\text{пов}} dS \quad (93.2)$$

($\epsilon_{\text{пов}}$ — дополнительная энергия единицы площади поверхностного слоя).

Из сравнения выражений (93.1) и (93.2) вытекает, что поверхностное натяжение σ представляет собой дополнительную энергию, которой обладает единица площади поверхностного слоя. В соответствии с этим σ можно измерять не только в ньютонах на метр, но также и в джоулях на квадратный метр ($\text{Дж}/\text{м}^2$).

Особые условия, в которых находятся молекулы поверхностного слоя, имеются и в твердых телах. Следовательно, твердые тела также обладают поверхностным натяжением.

До сих пор мы рассматривали поверхностную энергию одной среды — жидкой или твердой. На самом деле нужно учитывать суммарную поверхностную энергию σ_{12} двух граничащих друг с другом веществ (рис. 93.3). Только если одно из веществ газообразное, химически не реагирует с другим веществом и мало в нем растворяется, можно говорить о поверхностном натяжении (или о поверхностной энергии) второго жидкого или твердого вещества.

Когда граничат друг с другом сразу три вещества — твердое, жидкое и газообразное (рис. 93.4), жидкое тело принимает такую конфигурацию, при которой сумма потенциальной энергии жидкости в

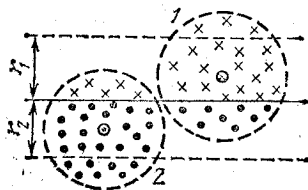


Рис. 93.3. Граница раздела двух сред: r_1 и r_2 — радиусы молекулярного действия соответствующих сред

поле сил тяжести и поверхностной энергии всех тел минимальна. В частности, контур, по которому граничат все три вещества, располагается на поверхности твердого тела так, чтобы сумма проекций трех приложенных к каждому элементу контура сил поверхностного натяжения на направление, в котором

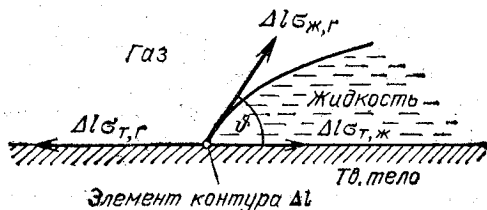


Рис. 93.4. По контуру, лежащему на поверхности твердого тела, граничат сразу три вещества. Элемент контура Δl перпендикулярен к плоскости рисунка. Сумма проекций трех сил поверхностного натяжения на границу раздела жидкости и твердого тела равна нулю. ϕ — краевой угол

элемент контура может перемещаться (т. е. на направление касательной к поверхности твердого тела), равнялась нулю.

Отсчитываемый внутри жидкости угол ϕ между касательными к поверхностям твердого тела и жидкости называется краевым углом.

Обозначим поверхностное натяжение на границе твердого тела и жидкости через $\sigma_{т, ж}$, на границе твердого тела и газа — через $\sigma_{т, г}$ и на границе жидкости и газа — через $\sigma_{ж, г}$. В зависимости от соотношения между этими величинами краевой угол может принимать значения от 0 до π . Если $\sigma_{т, г} > \sigma_{т, ж}$, угол ϕ оказывается острым, если $\sigma_{т, г} < \sigma_{т, ж}$, угол ϕ тупой. В первом случае говорят о частичном смачивании, а во втором — о частичном несмачивании жидкостью твердого тела (рис. 93.5).

Если $\sigma_{т, г} > (\sigma_{т, ж} + \sigma_{ж, г})$, оказывается энергетически выгодной замена поверхности твердое тело — газ двумя поверхностями: твердое тело — жидкость и жидкость — газ. В этом случае краевой угол равен нулю и жидкость неограниченно растекается по поверхности твердого тела — имеет место полное смачивание. Если $\sigma_{т, ж} > (\sigma_{т, г} + \sigma_{ж, г})$, энергетически выгодна замена поверхности твердое тело —

жидкость двумя поверхностями: твердое тело — газ и жидкость — газ. В этом случае краевой угол равен π и жидкость полностью отделяется от поверхности твердого тела, касаясь ее в одной только точке — имеет место полное несмачивание.

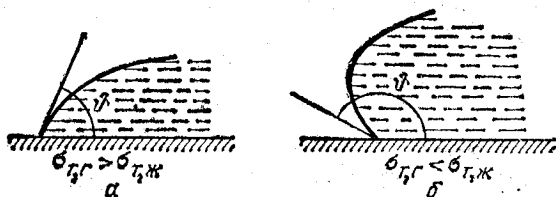


Рис. 93.5. Краевой угол ϕ при частичном смачивании (а) и несмачивании (б)

На различии в смачиваемости мелких твердых частиц (главным образом минералов) основывается процесс их разделения, называемый флотацией.

§ 94. Капиллярные явления

Стремление поверхности жидкости к сокращению приводит к тому, что давление под искривленной поверхностью жидкости оказывается иным, чем под плоской поверхностью. Под выпуклой поверхностью давление больше, а под вогнутой меньше, чем под

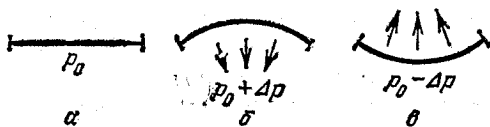


Рис. 94.1. Давление под плоской (а), выпуклой (б) и вогнутой (в) поверхностью жидкости

плоской (рис. 94.1). В случае вогнутой поверхности поверхностный слой, стремясь сократиться, растягивает жидкость.

Добавочное давление, обусловленное искривлением поверхности, очевидно, должно быть пропорциональным поверхностному натяжению σ и кривизне поверхности. Вычислим добавочное давление для сферической поверхности жидкости. Рассечем мысленно сферическую каплю жидкости радиуса R плоскостью

на два полушария (рис. 94.2). Из-за поверхностного натяжения поверхностные слои полушарий притягиваются друг к другу с силой

$$F = 2\pi R\sigma.$$

Эта сила прижимает полушария друг к другу по поверхности площади $S = \pi R^2$ и, следовательно, обуславливает дополнительное давление

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\pi R\sigma}{\pi R^2} = \frac{2\sigma}{R}. \quad (94.1)$$

Кривизна сферической поверхности всюду одинакова и принимается равной $1/R$. Для характеристики

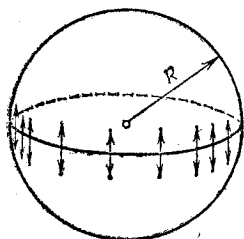


Рис. 94.2. Два полушария, на которые мысленно рассечена круглая капля жидкости, прижимаются друг к другу силами поверхностного натяжения

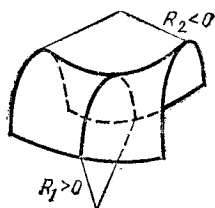


Рис. 94.3. Радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений седловидной поверхности имеют противоположные знаки

произвольной поверхности вводится понятие средней кривизны, которая определяется через кривизну нормальных сечений. Нормальным сечением поверхности в некоторой точке называется линия пересечения этой поверхности с плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в рассматриваемой точке. Для сферы любое нормальное сечение представляет собой окружность. В общем случае разные нормальные сечения, проходящие через одну и ту же точку, имеют различный радиус кривизны. В геометрии доказывается, что полусумма обратных радиусов кривизны

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (94.2)$$

для любой пары взаимно перпендикулярных нормальных сечений имеет одно и то же значение. Эта величина и есть средняя кривизна поверхности в

данной точке. Легко сообразить, что средняя кривизна цилиндра в два раза меньше кривизны сферы того же радиуса.

Радиусы R_1 и R_2 в формуле (94.2) являются алгебраическими величинами. Если центр кривизны нормального сечения находится под поверхностью, радиус кривизны считается положительным. Если же центр кривизны нормального сечения находится над поверхностью, радиус кривизны считается отрицательным (рис. 94.3). Таким образом, неплоская поверхность может иметь среднюю кривизну, равную нулю. Для этого нужно, чтобы радиусы кривизны R_1 и R_2 были одинаковы по модулю и противоположны по знаку.

У сферы $R_1 = R_2 = R$, поэтому $H = 1/R$. Заменяя в выражении (94.1) $1/R$ через H , приходим к формуле

$$\Delta p = 2H\sigma. \quad (94.3)$$

Лаплас¹⁾ доказал, что формула (94.3) справедлива для поверхности любой формы, если под H понимать среднюю кривизну поверхности в той точке, под которой определяется давление. Таким образом, в общем случае

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (94.4)$$

Эта формула называется формулой Лапласа.

Поверхностное натяжение приводит к тому, что вблизи стенок сосуда поверхность жидкости искривляется (касательная к поверхности жидкости образует со стенкой угол, равный краевому углу, который, как правило, отличен от $\pi/2$). В узкой круглой трубке, называемой капилляром (лат. *capillus* означает волос), или в узком зазоре между двумя стенками искривленной оказывается вся поверхность (рис. 94.4). Изогнутые поверхности жидкости в капиллярах называются менисками. Если жидкость смачивает стенки капилляра, мениск имеет вогнутую форму, если не смачивает — выпуклую форму.

Когда капилляр погружен одним концом в жидкость, налитую в широкий сосуд, давление под мениском отличается от давления под плоской поверх-

¹⁾ Пьер Симон Лаплас (1749—1827) — французский астроном, математик и физик.

ностью в широком сосуде на величину Δp , определяемую формулой (94.1). В результате уровень жидкости в капилляре при смачивании будет выше, чем в сосуде, а при несмачивании — ниже.

Поднимание или опускание уровня жидкости в узких трубках получило название капиллярности.

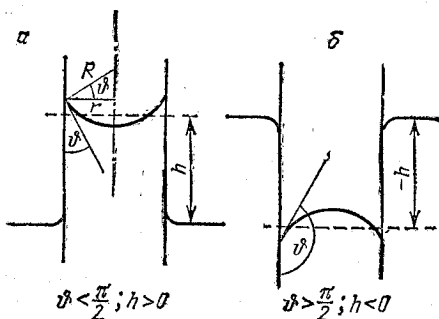


Рис. 94.4. Жидкость в капилляре в случае смачивания (а) и несмачивания (б)

В широком смысле под капиллярными явлениями понимают все явления, обусловленные поверхностным натяжением. В частности, определяемое формулой (94.4) давление называется капиллярным давлением.

Между жидкостью в капилляре и в широком сосуде устанавливается разность уровней h , при которой капиллярное давление Δp уравнивается гидростатическим давлением ρgh :

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho gh. \quad (94.5)$$

Здесь R — радиус кривизны мениска. На рис. 94.4 видно, что радиус кривизны мениска и радиус капилляра связаны соотношением $R = r/\cos \varphi$. Подставив это значение R в (94.3) и разрешив получившееся равенство относительно h , придем к формуле

$$h = \frac{2\sigma \cos \varphi}{\rho gr}, \quad (94.6)$$

где σ — поверхностное натяжение на границе жидкость — газ, φ — краевой угол, ρ — плотность жидко-

сти, g — ускорение свободного падения, r — радиус капилляра.

Если жидкость смачивает стенки капилляра, угол θ острый, соответственно $\cos \theta$, а следовательно, и h положительны (жидкость поднимается в капилляре). Если жидкость не смачивает стенки капилляра, угол θ тупой, соответственно $\cos \theta$, а значит, и h отрицательны (жидкость опускается в капилляре).

Капиллярностью объясняются многие явления, например впитывание жидкостей промокательной бумагой и тканями (полотенцами), поднятие керосина по фитилю, подъем грунтовых вод в почве и др.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Может ли: а) неоднородное тело быть изотропным, б) анизотропное тело быть однородным?
2. Какие вы знаете физические типы кристаллов?
3. Почему структуру жидкостей называют квазикристаллической?
4. Чем обусловлено стремление жидкостей к сокращению своей поверхности?
5. Что такое капиллярное давление?

Примеры решения задач

1. Используя закон Дюлонга и Пти, определить удельную теплоемкость c меди.

Решение. Согласно закону Дюлонга и Пти моль химически простых веществ в кристаллическом состоянии имеет теплоемкость $C = 3R$. Удельная теплоемкость $c = C/M$, где M — молярная масса вещества. Относительная молекулярная масса меди равна 63,5, следовательно, $M = 63,5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. С учетом этих данных

$$c = \frac{3R}{M} = \frac{3 \cdot 8,31}{63,5 \cdot 10^{-3}} = 0,39 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

2. В стеклянную трубку с внутренним диаметром $d_1 = 20,00$ мм вставлена коаксиально стеклянная палочка диаметра $d_2 = 19,00$ мм. Считая смачивание полным, определить высоту h капиллярного поднятия воды в кольцевом зазоре между трубкой и палочкой. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 0,073$ Н/м.

Решение. Поскольку ширина зазора $(d_1 - d_2)/2 = 0,500$ мм в 40 раз меньше диаметра трубки, среднюю кривизну поверхно-

ети воды в зазоре можно считать равной $H = 4/(d_1 - d_2)$. Подстановка этого значения в формулу Лапласа дает, что

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{d_1 - d_2}.$$

Капиллярное давление Δp уравнивается гидростатическим давлением ρgh (для воды $\rho = 1,00 \cdot 10^3$ кг/м³). Следовательно,

$$\frac{4\sigma}{d_1 - d_2} = \rho gh,$$

откуда

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g (d_1 - d_2)} = \frac{4 \cdot 0,073}{1,00 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot (20,00 - 19,00) \cdot 10^{-3}} = 0,030 \text{ м} = 30 \text{ мм.}$$

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Авогадро 213

Бернулли 136

Больцман 217, 265

Большой 199

Броун 211.

Ван-дер-Ваальс 310

Гагарин 195

Галилей 35

Гаусс 199

Гейзенберг 184

Гук 47

Даламбер 147

Джоуль 67

Доплер 204

Жуковский 151

Кавендиш 190

Карно 304

Кельвин (У. Томсон) 299

Клаузиус 298

Кориолис 125

Кюри 322

Лаплас 339

Лебедев 183

Ленин 7, 9

Лобачевский 199

Ломоносов 212

Лоренц 156

Любимов 182

Майкельсон 156

Максвелл 183, 255

Менделеев 319

Морли 156

Нерст 295

Ньютон 8, 12, 35, 37, 41, 183,
187

Паскаль 50

Паунд 202

Перрен 266, 267

Пито 136

Планк 8, 182

Прандтль 138

Пуазейль 145

Пуассон 239

Рибка 202

Рейнольдс 146

Риман 199

Стокс 150

Торричелли 139

Уатт 67

Фарадей 9

Фик 277

Фридман 203

Фуко 129

Фурье 278

Хаббл 204

Циолковский 140

Шварцшильд 200

Штейнер 106

Эйнштейн 8, 122, 156, 195, 199

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютно твердое тело 12, 223
Абсолютный нуль температуры 215, 295
Альтиметр 264
Аморфные тела 327
Анизотропия 327
Атомная единица массы 212
— электростанция 181
Атомное ядро 181
- Базис координатной системы 20
Барометрическая формула 263
Безразмерная величина 42
Броуновское движение 211, 266
- Ватт 67
Вектор 15
— единичный 19
—, проекция на ось 19
— свободный 16
— связанный 16
— скользящий 16
—, умножение на скаляр 18
Вектора квадрат 62
— компоненты 20, 21, 62
— модуль 15—18
— приращение 17
— составляющие 20
Векторов произведение векторное 85, 86
— — —, дистрибутивность 86
— — — скалярное 61, 62
— — —, дистрибутивность 61
— — —, коммутативность 61
— разность 17
— сумма 16
Векторы коллинеарные 16
— компланарные 16
Вероятность 251, 289
— состояния 290, 292
Вес 45, 46, 262
— атомный 212
— молекулярный 212
- Вечный двигатель второго рода 300
— — первого рода 233
Вещество 7, 212, 213, 275
Возгонка 322
Волчок 112
Вращающий момент 86
Вращение перигелия планетных орбит 200
Время 7, 157, 169, 201
— абсолютное 13
—, однородность 80
— релаксации 209, 210
— собственное 166, 167, 169, 170, 175
Вселенная 203, 204, 207
Вязкость 140, 142, 278, 287
— газов 332
— динамическая 147, 150
— жидкостей 332
— кинематическая 147
- Газ ван-дер-ваальсовский 312, 313
— идеальный 215, 236, 305
— реальный 312
Газовая постоянная 216, 217, 237, 267
Галактики 204
Гармонические колебания 225
Гармонический осциллятор 225
Геодезическая линия 197, 199
Геометрия неевклидова 199
— риманова 199
Гидродинамика 12
Гипотеза 8
Гирскоп 112
Гирскопический эффект 113
Гравитационная постоянная 44, 187, 190
Гравитационное красное смещение 201, 202
Гравитация 187, 203
Градиент 74, 75, 193, 276

- Градус Кельвина 215
 — Цельсия 215
- Давление 208, 217, 220, 221, 228, 238
 — динамическое 137
 — капиллярное 340
 — насыщенного пара 317, 318
 — полное 137
 — световое 183
 — статическое 137
- Движение 7, 11
 — вращательное 94, 110
 — колебательное 226, 227
 — механическое 11
 — плоское 97, 98, 110
 — поступательное 31, 32, 97, 110, 223
 — прямолинейное 28
 — равномерное 21, 24, 29
 — тепловое 211
- Деформация 12, 47
 — пластическая 47
 — упругая 47
- Джоуль 67, 232
- Диаграмма состояния 323—325
- Динамика 12
- Диссипация энергии 81, 134
- Диффузия 275, 276, 279
- Единица времени 40
 — вязкости 279
 — давления 50
 — длины 40
 — количества вещества 40, 213
 — массы 40
 — мощности 67
 — напряжения 50
 — работы 66, 67
 — силы 41
 — — света 40
 — — тока 40
 — термодинамической температуры 40, 215
 — угловой скорости 95
- Единицы физических величин 39
 — — — основные 40
 — — — производные 40
- Жесткость пружины 48, 49
- Жидкость идеальная 134, 140, 148
 —, квазикристаллическая структура 332
 — несжимаемая 133, 134
- Жидкость перегретая 320
 — переохлажденная 327
 — растянутая 321
- Закон Авогадро 216
 — Архимеда 267
 — взаимосвязи массы и энергии 180
 — возрастания энтропии 294
 — всемирного тяготения 187, 203
 — Гука 47, 50
 — Дюлонга и Пти 341
 — инерции 35
 — Ньютона 278
 — — второй 36, 38, 104, 176, 193, 278
 — — первый 35, 39
 — — третий 43, 58, 75, 120, 139, 220, 231
 — равномерного распределения энергии молекулы по степеням свободы 222, 225, 226
 — сложения скоростей 154, 173
 — сохранения импульса 57, 58, 173, 175
 — — момента импульса 57, 92
 — — энергии 57, 73, 80, 81, 178, 194, 232
 — Фика 277
 — Фурье 278
 — Хаббла 204
- Законы Ньютона 12
 — сохранения 56, 57, 173, 178
 — физические 7
- Земля 11, 123, 129, 191—195, 198, 200, 201, 204
- Зонд 137, 138
- Изотерма Ван-дер-Ваальса 314—317
 — экспериментальная 316—318
- Импульс 37, 56, 174, 176, 179, 203, 220, 275
 — релятивистский 175
- Инвариант 167—170, 175, 179
- Инвариантные величины 155
 — уравнения 155
- Интеграл 26
- Интервал 168—170
 — времениподобный 170
 — пространственноподобный 171
- Искривление световых лучей в гравитационном поле 200

- Искусственный спутник Земли 193, 195
- Калория 232
- Капилляр 339, 341
- Капиллярные явления 340
- Квazar 201
- Кельвин 40, 215
- Килограмм 40, 41
- Кинематика 12, 94
- Количество движения 37
- теплоты 232, 293, 295, 296
- Концентрация 276
- абсолютная 277
- Коэффициент вязкости 278
- диффузии 276, 280, 281
- полезного действия тепловой машины 301—303, 307
- — цикла Карно 306
- самодиффузии 281
- теплопроводности 277
- трения 53
- Краевой угол 336, 339, 340
- Кривизна линии 30
- поверхности 337, 338
- пространства 197
- Кристаллическая решетка 327
- ячейка 327
- Кристаллографические системы 328
- Кристаллы атомные 329, 330
- ионные 329
- жидкие 332
- металлические 329, 331
- молекулярные 329, 331
- Критические величины 315
- Крутильные весы 191
- Крыло самолета 151
- Линии тока 132, 136, 148
- Лобовое сопротивление 147—149, 151
- Лоренцево сокращение 165
- Лощадиная сила 67
- Макроскопическое тело 12, 207
- Макросостояние 290—292
- Масса 36, 37, 47, 104, 108, 110, 177, 179, 180
- атома 213
- инвариантная 175
- молекулы 213
- молярная 213, 295
- покоя 175
- релятивистская 175
- Материальная точка 11, 187, 192, 223, 225
- Материя 7, 9
- Маятник Фуко 129
- Международная система единиц 40
- Мениск 339, 340
- Метод меченых атомов 281
- Метр 40
- Механика жидкостей 12, 131
- квантовая 184, 247
- классическая 8, 12, 185
- материальной точки 11, 34
- ньютоновская 8, 12, 13, 38, 153, 154, 157, 173, 175—179, 182—185
- релятивистская 8, 12, 176—179, 182, 185
- сплошной среды 11, 12
- твердого тела 11, 94
- Микросостояние 290—292
- Микрочастицы 183
- Мировая линия 158
- точка 158, 168, 170
- Модуль сдвига 51
- Юнга 50
- Молекулы 211
- Моль 40, 213
- Молярная газовая постоянная 216
- Молярный объем 216
- Момент импульса относительно оси 89, 90
- — — точки 56, 88, 90, 91, 101, 102
- инерции 103—105, 107, 108, 110
- пары сил 88
- силы относительно оси 87, 90
- — — точки 84, 85, 90, 102, 104, 110
- Монокристалл 327
- Мощность 66, 109, 110
- Мысленный эксперимент 36
- Направление вертикальное 124
- отвеса 124
- Напряжение нормальное 49
- тангенциальное 51
- Напряженность гравитационного поля 191, 193
- — — Земли 192
- Начала термодинамики 208

- Начало термодинамики второе 294, 298—301, 303, 307
 — — первое 232, 233
 — — третье 295
 Нейтрино 167, 182
 Несмачивание полное 337
 — частичное 336
 Нормальные условия 216
 Ньютон 41
- Общая теория относительности** 13, 122, 195, 196, 200—204
Объем 208, 238
Одновременность событий 157
Оператор Гамильтона 74
 — набла 74
Опыт 8
 — Кавендиша 190
 — Ламмерта 260, 261
 — Лебедева 183
 — Майкельсона и Морли 156
 — Паунда и Ребки 202
 — Перрена 266, 267
Орт 19
Основное уравнение релятивистской динамики 177
Ось вращения 94
 — — мгновенная 98
Относительная атомная масса 212
 — молекулярная масса 212
Отношение теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме 237, 245
- Пар** 319, 320
 — насыщенный 318
 — пересыщенный 320
Пара сил 87
Парадокс Даламбера 147
Параметры состояния 209, 214, 293
Паскаль 50
Паскаль-секунда 279
Перемещение 14, 23
Перигелий 200
Перпетуум мобиле второго рода 300
 — — первого рода 233
Плечо импульса 89
 — пары сил 88
 — силы 85
Плотность 99, 100, 105
 — вероятности 252
 — идеального газа 262
- Поверхностное натяжение** 331—336, 340
Пограничный слой 149
Подъемная сила 147, 148, 151
Показатель политропы 242
 — размерности 42
Поле 7
 — вектора скорости 132
 — гравитационное 191, 196, 200, 201
 — — Земли 191
 — сил однородное 59, 68
 — — стационарное 68
 — — тяжести 59, 69, 72, 73
 — — центральное 69
 — силовое 67
 — физическое 67
Поликристалл 327
Полный дифференциал 234
Порядок ближний 331, 332
 — дальний 332
Постоянная Авогадро 213, 214, 216, 245, 266, 267
 — Больцмана 217, 255, 267, 293
 — Планка 182, 184, 203, 290
 — Хаббля 204
Постоянные Ван-дер-Ваальса 310, 315
Потенциал гравитационного поля 192, 193, 202
Поток 275
 — импульса 278, 286, 287
 — массы 277, 282
 — теплоты 277, 282
Предел упругости 47
Преобразование скоростей 154, 172
Преобразования Галилея 153, 156
 — Лоренца 161, 163, 172, 173, 178
Прецессия гироскопа 113
Принцип детального равновесия 220
 — неопределенности 290
 — относительности Галилея 153, 155, 156
 — — Эйнштейна 156
 — постоянства скорости света 156, 160
 — эквивалентности 122, 196
Приращение 17, 22, 220, 232, 233

- Производная функции 22—24
 — частная 74
 Пространство 7, 13, 169
 — абсолютное 13
 — евклидово 169, 197
 —, изотропия 92
 — импульсов 291
 — неевклидово 198
 —, однородность 58
 — плоское 197, 198
 — псевдоевклидово 169
 — скоростей 254, 291
 — сферическое 197, 198
 — четырехмерное 13, 158, 198, 199
 Пространство-время 13, 158, 168, 197
 Процесс адиабатический 239, 240, 243—245, 304
 — изобарический 238, 243
 — изотермический 238, 243, 244, 296, 304
 — изохорический 238, 243
 — изэнтропический 305
 — квазистатический 210
 — круговой 211, 231, 296, 297
 — необратимый 290, 294, 302
 — обратимый 211, 231, 293, 296, 304
 — политропический 241—243
 — равновесный 210
 — релаксации 209, 210, 274
 — термодинамический 210
 Путь 14, 21, 25, 26
 Работа 60, 64, 65, 108—110, 177, 228, 230—233, 243
 Радиус молекулярного действия 310, 332
 Радиус-вектор 21
 Размерность физической величины 42
 Распределение Больцмана 265, 266
 — Максвелла 253, 256, 258, 260, 262, 265
 — Максвелла — Больцмана 266
 Реактивный двигатель 140
 Реакция вытекающей струи 139
 Релаксация 209
 Решетка типа алмаза 330
 Связь гетерополярная 329
 — гомеополярная 329, 330
 Связь ионная 329
 — ковалентная 329
 Сдвиг 50, 51
 Секунда 41
 Селектор скоростей 261
 Сила 36, 110, 177, 192
 — внутреннего трения 142, 278, 286
 — гравитационная 44, 75, 88, 121, 199
 — инерции центробежная 123, 126, 191
 — кориолисова 125—129
 — кулоновская 75, 88
 — сопротивления среды 53, 81
 — трения 44, 54, 81
 — — покоя 52
 — тяжести 45, 46
 — упругая 44, 48
 Силы ван-дер-ваальсовские 331
 — внешние 56, 102, 104
 — внутренние 56, 58
 — диссипативные 81
 — инерции 120—122
 — консервативные 67—69, 75
 — поверхностного натяжения 334
 — тяготения 122, 196, 197
 — фундаментальные 44
 — электромагнитные 44
 Сингонии 328
 Система механическая 56
 — — замкнутая 56, 60
 — — изолированная 56
 — отсчета 13
 — — гелиоцентрическая 35
 — — инерциальная 34, 39, 43, 154, 167, 173, 196
 — — лабораторная 60
 — — неинерциальная 118, 196
 — — центра масс 60
 — термодинамическая 209
 — — замкнутая 209
 — — изолированная 209, 289, 294
 Скаляр 15
 Скорость 22—24
 — звука 134
 —, компоненты 24, 25
 — космическая вторая 194
 — — первая 193
 — — третья 195
 — линейная 96, 108, 110
 — молекул наиболее вероятная 256, 257, 259, 261

- Скорость молекул средняя 256, 257, 259, 261, 272
 — — — квадратичная 222, 256, 257, 259
 — предельная 157
 — света в вакууме 12, 157, 170, 173, 175, 183
 —, среднее значение 27
 — угловая 94, 95, 97, 108, 110
 — — прецессии гироскопа 115
 Смачивание полное 336
 — частичное 336
 Солнце 195, 201, 203, 205
 Соотношение неопределенностей Гейзенберга 184, 208
 Состояние беспорядочное 295
 — метастабильное 320
 — невесомости 46, 47
 — неравновесное 209
 — неслучайное 295
 — равновесное 209, 211
 — случайное 295
 — упорядоченное 295
 Специальная теория относительности 8, 12, 13, 38, 156
 Среднее значение величины 252, 253
 — — функции 27
 Средняя длина свободного пробега молекул 271—273, 279, 280, 283, 286
 Степени свободы молекулы вращательные 223, 225, 226
 — — — колебательные 224—226
 — — поступательные 223, 225, 226
 Сублимация 322
 Сфера молекулярного действия 310, 333
 Температура 208, 214
 — абсолютная 215
 — критическая 314, 318, 319
 — по шкале Цельсия 214, 215
 — термодинамическая 215, 222, 255, 293
 Теорема Бернулли 136, 138, 148
 — Карно 306
 — Нернста 295
 — о неразрывности струи 134
 — об умножении вероятностей 251
 — Штейнера 106
 Теория тяготения Ньютона 203
 Тепловая машина 300, 301
 Теплоемкость 234, 242, 243, 282
 — идеального газа 236, 237, 246, 247
 — молярная 233
 — при постоянном давлении 235, 236, 245
 — — — объеме 235, 236, 245, 284
 — удельная 233, 284
 Теплопередача 231, 232
 Теплопроводность 275, 277, 281, 284, 285, 287
 Теплота 231—233
 — фазового превращения 321
 Термодинамика 208, 209, 300
 Термостат 316
 Течение жидкости ламинарное 141, 142, 144—146
 — — слоистое 141
 — — стационарное 132—134, 142, 145
 — — турбулентное 144—146
 Точка критическая 314, 325
 — Кюри 322
 — тройная 322, 323, 325
 Траектория 14, 184, 185
 Трение 302
 — внешнее 51
 — внутреннее 51, 140, 275, 278, 285
 — вязкое 53
 — жидкое 52, 53
 — качения 52
 — покоя 51
 — скольжения 51, 52
 — сухое 52
 Трубка Пито 136—138
 — Пито — Прандтля 138
 — тока 133, 134, 138
 Тяготение 187, 199
 Удар абсолютно неупругий 81, 82, 174, 176, 180
 — — упругий 81, 82, 84
 — центральный 82, 84, 174
 Уравнение адиабаты 239—241, 243
 — Бернулли 136
 — Ван-дер-Ваальса 310, 312, 313, 317
 — движения 38, 110, 120
 — — центра масс 60

- Уравнение динамики вращательного движения 102, 104
 — диффузии 277
 — изобары 242
 — изотермы 239, 243
 — изохоры 243
 — политропы 242
 — Пуассона 239
 — состояния идеального газа 215—217, 308
 — — термодинамической системы 214, 238
 Уравнения Эйнштейна 199, 200, 203
 Ускорение 27—29, 177
 —, компоненты 28
 — линейное 96, 104, 110
 — нормальное 30, 31, 97
 — свободного падения 44, 123, 125, 191
 — — —, стандартное значение 125
 — тангенциальное 31, 97
 — угловое 95, 104, 110
 Условие нормировки функции 256
- Фаза термодинамическая 316 321
 Фазовое превращение второго рода 322
 — — первого рода 322
 Физика 7
 — квантовая 8
 — классическая 8
 — статистическая 207—209, 292, 293
 Физически бесконечно малый объем 100
 Фицджеральдово сокращение 165
 Флотация 337
 Формула Лапласа 339
 — Пуазейля 145
 — размерности 42
 — Стокса 150
 — Торричелли 139
 Фотон 182, 183, 197, 203
 Функция распределения вероятности 252, 255
 — — Максвелла 256, 259
 — состояния 228, 233, 234, 290, 293
- Холодильная машина 301
 Холодильный коэффициент 301
- Центр масс 59, 60, 98—101, 179, 190, 223
 — тяжести 50
 Цикл 211, 230, 296, 300
 — Карно 303—305
- Частица 11
 Число Рейнольдса 146, 147, 150
 — степеней свободы 222
 — — — молекулы 245
 — ударов молекул 218, 219, 221
- Элементарная кристаллическая ячейка 327, 328
 Элементарные частицы 11, 163, 167, 178, 184
 Энергия 56, 60, 203, 275
 — внутренняя 61, 227, 228, 231—233
 — — ван-дер-ваальсовского газа 313
 — — идеального газа 236, 238
 — кинетическая 61, 63, 64, 67, 72, 110, 112, 177, 178, 180, 226, 227
 — — вращающегося тела 108
 — механическая 61
 — покоя 179, 180
 — полная 72, 81, 179
 — потенциальная 61, 71, 72, 76, 179, 192, 226, 227
 — — гравитационного взаимодействия 77
 — — деформированной пружины 79
 — связи 181
 — электромагнитная 61
 Энтропия 290, 292—295, 298
 — идеального газа 297
 Эффект Доплера 204
 Эффективное сечение молекулы 270, 273
 Эффективный диаметр молекулы 270—273
- Явления переноса 275, 287

Учебное издание

САВЕЛЬЕВ Игорь Владимирович

КУРС ФИЗИКИ

Том 1

Механика. Молекулярная физика

Заведующий редакцией *Л. И. Гладнева*

Редактор *Н. А. Михалина*

Младший редактор *В. А. Кузнецова*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *Л. В. Лихачева*

Корректоры *Б. Ю. Рычагова, М. Л. Медведская,*
Л. С. Сомова

ИБ № 32577

Сдано в набор 22.04.88. Подписано к печати 09.11.88.
Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литера-
турная. Печать высокая. Усл. печ. л. 18,48. Усл. кр.-отт.
18,69. Уч.-изд. л. 18,14. Тираж 250 000 экз. Заказ № 1052.
Цена 80 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени

издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие
ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского
объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколо-
вой Союзполиграфпрома при Государственном коми-
тете СССР по делам издательств, полиграфии и книж-
ной торговли.
198062 Ленинград Л-52, Измайловский проспект, 29.

NAUKA PUBLISHERS

Main Editorial Board for Literature
on Physics and Mathematics

15, Leninski prospect, Moscow W-71, 117071, USSR

PHYSICS

The Textbook for general engineering colleges

VOLUMES 1—3

Igor V. SAVELYEV, D. Sc. (*Phys. & Math.*)

Moscow Institute of Engineering Physics

VOLUME 1

1989, 352 pages. ISBN 5-02-014052-X : 5-02-014430-4

READERSHIP: Higher school students

THE BOOK: The accent is placed not on imparting information, but on the formation of physical thinking by students and on their mastering the ideas and methods of the science of physics. Methodically more improved ways of treating a number of questions have been found. This has made the expounding of the material stricter, and the same time simpler and easier to understand.

CONTENTS: Preface. **Physical Fundamentals of Classical Mechanics:** Kinematics of a Point Particle. Dynamics of a Point Particle. Laws of Conservation. Mechanics of a Rigid Body. Non-Inertial Reference Frames. Fluid Mechanics. Elements of Special Theory of Relativity. Gravitation. **Fundamentals of Molecular Physics and Thermodynamics:** Molecular-Kinetic Theory. The First Law of Thermodynamics. Statistical Distributions. Transport Phenomena. The Second Law of Thermodynamics. The Real Gases. The Solid and Liquid States.

THE AUTHOR: Igor V. Savelyev has been head of Department of General Physics at the Moscow Institute of Engineering Physics for over 25 years, after devoting a few years to experimental physics. He is the author of three-volumed textbook «Physics, a General Course» (intended for higher schools with an extended syllabus in physics), two-volumeed textbook «Fundamentals of Theoretical Physics» and textbook «Questions and Problems in General Physics». Professor Savelyev holds the title of Honoured Scientist of the RSFSR and is a USSR State Prize winner.