

572

И. В. Савельев

КУРС ФИЗИКИ

тот 2

электричество
• колебания
и волны
• волновая оптика

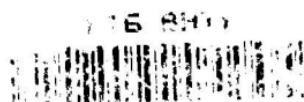
И. В. САВЕЛЬЕВ

КУРС ФИЗИКИ

ТОМ 2

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений



21/1-21/2

630.5

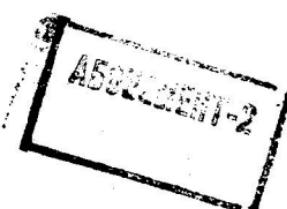
С 17

1989

Библиотека № 4
Государственного Университета
имени М.В.Ломоносова



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989



ББК 22.3

С12

УДК 53(075.8)

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра физики Московского авиационного института им. С. Орджоникидзе (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор Ф. А. Николаев);
доктор физико-математических наук, профессор А. Д. Гладун

САВЕЛЬЕВ И. В. Курс физики: Учеб.: В 3-х т. Т. 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 464 с. — ISBN 5-02-014431-2 (Т. 2).

Содержание и расположение материала соответствуют программе курса «Физика» для инженерно-технических специальностей вузов, утвержденной Учебно-методическим управлением по высшему образованию Минвуза СССР. Главное внимание обращено на разъяснение физических законов и их сознательное применение. Новый курс существенно отличается от «Курса общей физики» того же автора (М.: Наука, 1986—1988) отбором материала, уровнем и способом изложения.

Для студентов и преподавателей высших технических учебных заведений; может быть использован студентами других вузов.

Табл. 1. Ил. 261.

| | |
|-------------------|--------|
| НТБ СПИ | |
| г. ВИННИЦА | |
| S — 1604010000—04 | 101-89 |
| 053(02)-89 | |

©Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1989

ISBN 5-02-014431-2 (T.2)

ISBN 5-02-014052-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----------|
| Предисловие | 7 |
| ЧАСТЬ 1 | |
| ЭЛЕКТРИЧЕСТВО | |
| Г л а в а 1. Электрическое поле в вакууме | 9 |
| § 1. Электрический заряд | 9 |
| § 2. Закон Кулона | 11 |
| § 3. Рационализованная запись формул | 13 |
| § 4. Электрическое поле | 14 |
| § 5. Поток и дивергенция векторного поля | 17 |
| § 6. Теорема Гаусса | 27 |
| § 7. Применение теоремы Гаусса к расчету полей | 30 |
| § 8. Потенциал электростатического поля | 35 |
| § 9. Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом | 39 |
| § 10. Поле электрического диполя | 42 |
| § 11. Диполь во внешнем электростатическом поле | 48 |
| Примеры решения задач | 54 |
| Г л а в а 2. Электрическое поле в диэлектриках | 55 |
| § 12. Поляризация диэлектриков | 55 |
| § 13. Поверхностные и объемные связанные заряды | 58 |
| § 14. Электрическое смещение | 63 |
| § 15. Условия на границе раздела двух диэлектриков | 66 |
| § 16. Вычисление полей в диэлектриках | 69 |
| § 17. Сегнетоэлектрики | 73 |
| Примеры решения задач | 75 |
| Г л а в а 3. Проводники в электростатическом поле | 76 |
| § 18. Равновесие зарядов на проводнике | 76 |
| § 19. Электроемкость уединенного проводника | 80 |
| § 20. Конденсаторы | 82 |
| Примеры решения задач | 86 |
| Г л а в а 4. Энергия электрического поля | 88 |
| § 21. Энергия системы точечных зарядов | 88 |
| § 22. Энергия заряженных проводников | 90 |
| § 23. Энергия электрического поля | 91 |
| Примеры решения задач | 94 |

| | |
|---|-----|
| Глава 5. Постоянный электрический ток | 95 |
| § 24. Электрический ток | 95 |
| § 25. Электродвижущая сила | 97 |
| § 26. Закон Ома | 99 |
| § 27. Правила Кирхгофа | 103 |
| § 28. Закон Джоуля — Ленца | 105 |
| § 29. Природа носителей тока в металлах | 106 |
| § 30. Классическая теория электропроводности металлов | 108 |
| § 31. Электрический ток в газах | 112 |
| § 32. Процессы, приводящие к возникновению носителей тока при самостоятельном газовом разряде | 115 |
| § 33. Плазма | 118 |
| § 34. Самостоятельный газовый разряд | 121 |
| Примеры решения задач | 125 |
| Глава 6. Магнитное поле в вакууме | 127 |
| § 35. Магнитное поле. Магнитная индукция | 127 |
| § 36. Закон Био — Савара — Лапласа | 129 |
| § 37. Закон Ампера. Сила Лоренца | 135 |
| § 38. Поток и циркуляция вектора магнитной индукции | 139 |
| § 39. Поле соленоида и тороида | 142 |
| § 40. Контур с током в магнитном поле | 146 |
| § 41. Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле | 151 |
| § 42. Движение заряженных частиц в магнитном поле | 153 |
| § 43. Определение заряда и массы электрона. Масс-спектографы | 156 |
| § 44. Циклические ускорители заряженных частиц | 161 |
| § 45. Эффект Холла | 164 |
| § 46. Магнитогидродинамические генераторы | 166 |
| Примеры решения задач | 168 |
| Глава 7. Магнитное поле в веществе | 169 |
| § 47. Намагничивание вещества | 169 |
| § 48. Напряженность магнитного поля | 170 |
| § 49. Условия на границе двух магнетиков | 177 |
| § 50. Магнитные моменты атомов | 180 |
| § 51. Диа- и парамагнетизм | 186 |
| § 52. Ферромагнетизм | 189 |
| Примеры решения задач | 195 |
| Глава 8. Электромагнитная индукция | 196 |
| § 53. Явление электромагнитной индукции | 196 |
| § 54. Электродвижущая сила индукции | 199 |
| § 55. Явление самоиндукции | 203 |
| § 56. Ток при замыкании и размыкании цепи | 205 |
| § 57. Взаимная индукция | 209 |
| § 58. Энергия магнитного поля | 211 |
| Примеры решения задач | 214 |
| Глава 9. Уравнения Максвелла | 216 |
| § 59. Ротор векторного поля. Теорема Стокса | 216 |
| § 60. Вихревое электрическое поле | 225 |
| § 61. Ток смещения | 228 |
| § 62. Уравнения Максвелла | 233 |

ЧАСТЬ 2**КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

| | |
|---|------------|
| Глава 10. Колебательные процессы | 238 |
| § 63. Колебания в природе и технике | 238 |
| § 64. Гармонические колебания | 239 |
| § 65. Маятник | 246 |
| § 66. Электрический колебательный контур | 252 |
| § 67. Векторная диаграмма | 256 |
| § 68. Биения | 259 |
| § 69. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний | 260 |
| § 70. Затухающие колебания | 264 |
| § 71. Вынужденные колебания | 272 |
| Примеры решения задач | 285 |

| | |
|---|------------|
| Глава 11. Волновые процессы | 286 |
| § 72. Волны в упругой среде | 286 |
| § 73. Уравнение бегущей волны | 290 |
| § 74. Волновое уравнение | 295 |
| § 75. Фазовая скорость упругих волн в твердой среде | 297 |
| § 76. Энергия упругой волны | 299 |
| § 77. Звуковые волны | 305 |
| § 78. Стоячие волны | 313 |
| § 79. Волновой пакет. Групповая скорость | 318 |
| § 80. Электромагнитные волны | 320 |
| § 81. Энергия и импульс электромагнитной волны | 326 |
| § 82. Излучение диполя | 330 |
| § 83. Эффект Доплера для электромагнитных волн | 333 |
| Примеры решения задач | 336 |

ЧАСТЬ 3**ВОЛНОВАЯ ОПТИКА**

| | |
|--|------------|
| Глава 12. Интерференция света | 338 |
| § 84. Предварительные сведения | 338 |
| § 85. Когерентность | 345 |
| § 86. Интерференционная картина от двух источников | 350 |
| § 87. Интерференция света при отражении от тонких пленок | 357 |
| § 88. Многолучевая интерференция | 365 |
| § 89. Интерферометры | 370 |
| Примеры решения задач | 376 |

| | |
|---|------------|
| Глава 13. Дифракция света | 378 |
| § 90. Принцип Гюйгенса — Френеля | 378 |
| § 91. Зоны Френеля | 380 |
| § 92. Дифракция Френеля на простейших преградах | 386 |
| § 93. Дифракция Фраунгофера на щели | 392 |
| § 94. Дифракционная решетка | 397 |
| § 95. Разрешающая способность оптических приборов | 402 |
| § 96. Дифракция на пространственных структурах | 407 |
| § 97. Понятие о голограммии | 413 |
| Примеры решения задач | 418 |

| | |
|--|-----|
| Глава 14. Поляризация света | 419 |
| § 98. Естественный и поляризованный свет | 419 |
| § 99. Поляризация света при отражении и преломлении | 423 |
| § 100. Поляризация света при двойном лучепреломлении | 425 |
| § 101. Искусственная оптическая анизотропия | 432 |
| Примеры решения задач | 435 |
| Глава 15. Распространение света в веществе | 437 |
| § 102. Дисперсия света | 437 |
| § 103. Поглощение и рассеяние света | 441 |
| § 104. Эффект Вавилова — Черенкова | 445 |
| Примеры решения задач | 447 |
| Приложения | 449 |
| I. Гауссова система единиц | 449 |
| II. Единицы электрических и магнитных величин в СИ и в гауссовой системе | 450 |
| III. Основные формулы электромагнетизма в СИ и в гауссовой системе | 452 |
| Именной указатель | 458 |
| Предметный указатель | 460 |

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Курс физики» существенно отличается от «Курса общей физики» того же автора отбором материала, уровнем и способом изложения. Курс написан в соответствии с утвержденной Учебно-методическим управлением по высшему образованию Минвуза СССР программой курса ФИЗИКА для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений (индекс УМУ-9/1).

В данном томе излагаются три раздела программы: электричество, колебания и волны, а также волновая оптика.

В учебных пособиях по физике для втузов принято излагать учение об электромагнетизме в интегральной форме, избегая использования понятий дивергенции и ротора. На наш взгляд, это недопустимо. Физические поля имеют локальный (т. е. свойственный данной точке) характер. Поэтому, используя только интегральные соотношения (т. е. рассматривая лишь поля, усредненные по конечному объему), нельзя вскрыть подлинную природу полей, в частности выяснить роль зарядов и токов как источников поля.

Автору удалось разработать простой и наглядный способ введения понятий потока и дивергенции, основывающийся на представлении полей с помощью линий соответствующей векторной величины. При таком представлении дивергенция оказывается численно равной плотности точек (т. е. числу точек, приходящихся на единицу объема), в которых начинаются (или заканчиваются) линии поля. Такое определение весьма наглядно и вполне доступно студенту втуза.

По идеи Я.Б. Зельдовича и А.Д. Мышкиса (см. их книгу: Элементы прикладной математики. — М.: Наука, 1967. С. 425) циркуляция представлена как величина, порождаемая на поверхности, а ротор — как плотность порождения циркуляции. Автором найден простой и наглядный способ показать, что эта плотность обладает свойствами проекции вектора.

В таком виде и понятие ротора будет восприниматься студентами без большого труда.

В некоторых пособиях ограничиваются рассмотрением уравнений Максвелла только в интегральной форме. В этом случае изложение электромагнетизма оказывается незавершенным. По нашему мнению, называемые уравнениями Максвелла имеют право только дифференциальные соотношения. Называя уравнениями Максвелла интегральные соотношения, мы вводим в заблуждение и самих себя, и студентов. Подлинными уравнениями Максвелла являются лишь дифференциальные соотношения. Только из них вытекает вывод о возможности существования электромагнитного поля в виде волн, распространяющихся со скоростью света.

Как и предусмотрено программой, механические и электрические колебания излагаются совместно. Это позволяет более глубоко осмыслить сущность колебательных процессов, показать общие черты колебаний разной физической природы.

Раздел «Волновая оптика» мы сочли необходимым предварить не предусмотренной программой главой, в которой даются определения понятий и величин (светового потока, спектральной чувствительности человеческого глаза, некоторых фотометрических величин и др.), без которых изложение волновой оптики невозможно.

Рекомендации по поводу того, как следует работать над курсом, приведены в предисловии к первому тому.

Выражаю благодарность профессору Ф. А. Николаеву и профессору А. Д. Гладуну за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания.

Москва, май 1988 г.

И. В. Савельев

ЧАСТЬ 1

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Глава 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 1. Электрический заряд

Все тела способны электризоваться, т. е. приобретать электрический заряд. Существуют два вида электрических зарядов, условно называемых положительными и отрицательными. Заряды разных знаков притягиваются друг к другу, заряды одного знака отталкиваются.

Носителями зарядов являются элементарные частицы¹⁾. Заряд почти всех элементарных частиц (если он не равен нулю) одинаков по абсолютной величине²⁾ и представляет собой наименьший встречающийся в природе электрический заряд, называемый элементарным зарядом. Положительный элементарный заряд мы будем обозначать символом $+e$, отрицательный — символом $-e$. Экспериментально найдено, что

$$e = 1,602\,189\,2 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.} \quad (1.1)$$

В частности, элементарными частицами являются электрон (несущий заряд $-e$), протон (несущий заряд $+e$) и нейтрон (заряд которого равен нулю). Из этих частиц построены атомы любого вещества, поэтому электрические заряды входят в состав всех тел. Обычно электроны и протоны имеются в равных количествах и распределены в теле с одинаковой плотностью. В этом случае алгебраическая сумма зарядов в любом элементарном объеме тела равна нулю, вследствие чего каждый такой объем (и тело в

¹⁾ Элементарными частицами называются мельчайшие известные в настоящее время частицы материи.

²⁾ Некоторые частицы, называемые резонансами, имеют заряд, кратный e , например $2e$.

целом) оказывается нейтральным. Если создать в теле избыток частиц какого-либо знака, тело окажется заряженным. Можно также вызвать перераспределение частиц таким образом, что в одной части тела возникнет избыток зарядов одного знака, в другой — другого. Это можно осуществить, например, поднеся к незаряженному телу другое, заряженное тело.

Всякий заряд q образуется совокупностью элементарных зарядов, поэтому он является целым кратным e :

$$q = \pm Ne. \quad (1.2)$$

Если физическая величина может иметь только дискретные (т. е. разделенные конечными промежутками) значения, говорят, что эта величина квантуется. Факт, выражаемый формулой (1.2), означает, что **электрический заряд квантуется**.

Погрешность, с которой могут быть измерены макроскопические заряды (т. е. заряды, образованные огромной совокупностью элементарных зарядов), обычно значительно превышает величину элементарного заряда. Поэтому дискретность макроскопических зарядов не обнаруживается и они воспринимаются как изменяющиеся непрерывно.

Экспериментально установлено, что величина заряда не зависит от скорости, с которой он движется. Следовательно, **электрический заряд является релятивистски инвариантным**. Это означает, что величина заряда, измеренная в различных инерциальных системах отсчета, оказывается одинаковой.

Электрические заряды могут возникать и исчезать. Однако всегда возникают или исчезают одновременно два элементарных заряда разных знаков. Например, электрон и позитрон (положительный электрон) при встрече аннигилируют, т. е. превращаются в нейтральные частицы, называемые гамма-фотонами. При этом исчезают заряды $-e$ и $+e$. В ходе процесса, называемого рождением пары, гамма-фотон, пролетая вблизи атомного ядра, превращается в пару частиц — электрон и позитрон. В результате возникают заряды $-e$ и $+e$.

Таким образом, существует закон сохранения электрического заряда, который утвер-

ждает, что *суммарный заряд электрически изолированной системы¹⁾ не может изменяться.*

Отметим, что закон сохранения электрического заряда не мог бы иметь места, если бы электрические заряды не были релятивистски инвариантными. Действительно, если бы величина заряда зависела от его скорости, то, приведя в движение заряды одного какого-то знака, мы изменили бы суммарный заряд электрически изолированной системы.

§ 2. Закон Кулона

Если размерами заряженного тела можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других тел, то такое тело называется *точечным зарядом*. Закон взаимодействия точечных зарядов установил экспериментально Кулона²⁾ в 1785 г. с помощью изобретенных им крутильных весов (рис. 2.1). На закрепленной одним концом в головке прибора упругой нити был подвешен за середину горизонтально расположенный изолирующий стержень. На конце стержня был укреплен металлический шарик, уравновешенный противовесом на другом конце стержня. По закручиванию нити измерялась сила взаимодействия несущего заряд шарика на коромысле с точно таким неподвижным заряженным шариком. Поворотом головки можно было изменять расстояние между шариками. При проведении опыта Кулон исходил из того, что при касании к заряженному металлическому шарику точно такого же незаряженного шарика заряд распределяется между шариками поровну.

Закон Кулона гласит, что *сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов, находящихся в*

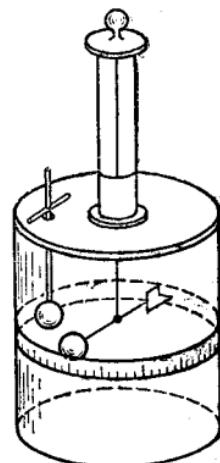


Рис. 2.1. Крутильные весы Кулона

¹⁾ Система называется *электрически изолированной*, если через ограничивающую ее поверхность не проникают заряженные частицы.

²⁾ Шарль Огюстен Кулон (1736—1806) — французский физик и военный инженер.

вакууме, пропорциональна величинам зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2.1)$$

(k — коэффициент пропорциональности). Направлена сила вдоль соединяющей заряды прямой.

Направление силы вдоль проходящей через заряды прямой вытекает из соображений симметрии. Пустое пространство предполагается однородным и изотропным. Поэтому единственным направлением, выделяемым в пространстве двумя неподвижными точечными зарядами, является направление от одного заряда к другому. Очевидно, что сила взаимодействия может быть направлена лишь вдоль этого выделенного направления.

Закон Кулона можно выразить в векторной форме:

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (2.2)$$

Здесь \mathbf{F} — сила, действующая на заряд, к которому обращен вектор \mathbf{r} , проведенный от одного заряда к

другому (рис. 2.2). Модуль этого вектора равен расстоянию между зарядами. Рис. 2.2 выполнен для одноименных зарядов (положительных или отрицательных). Подставив в (2.2) вектор \mathbf{r} , изобра-

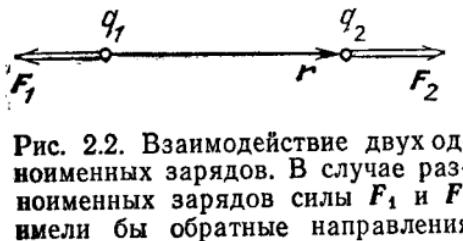


Рис. 2.2. Взаимодействие двух одноименных зарядов. В случае разноименных зарядов силы F_1 и F_2 имели бы обратные направления

женный на рисунке, получим силу F_2 (коэффициент пропорциональности k предполагается положительным). В случае одноименных зарядов эта сила направлена вдоль r . Если бы заряды были разноименными, векторы F_2 и r были бы направлены в противоположные стороны. Чтобы получить изображенную на рисунке силу F_1 , нужно подставить в (2.2) вектор, проведенный от q_2 к q_1 .

Легко убедиться в том, что определяемая формулой (2.1) величина F представляет собой проекцию вектора \mathbf{F} на направление вектора \mathbf{r} . В случае одноименных зарядов эта проекция положительна, в случае разноименных зарядов — отрицательна. Поэтому,

строго говоря, величину, стоящую в левой части формулы (2.1), надо было бы обозначить символом F_r . Чтобы получить модуль силы F , нужно написать в формуле (2.1) модуль произведения $q_1 q_2$.

Экспериментально установлено, что сила взаимодействия двух зарядов не изменяется, если вблизи них поместить еще какие-либо заряды. Пусть кроме заряда q имеются заряды q_1, q_2, \dots, q_N . Тогда результирующая сила F , с которой действуют на q все N зарядов q_i , определяется формулой

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad (2.3)$$

где \mathbf{F}_i — сила, с которой действует на q заряд q_i в отсутствие остальных $N - 1$ зарядов.

Указанное свойство сил позволяет с помощью закона Кулона вычислить силу взаимодействия между зарядами, сосредоточенными на телах конечных размеров. Для этого нужно разбить каждый из зарядов на столь малые заряды dq , чтобы их можно было считать точечными, вычислить по формуле (2.2) силы взаимодействия между зарядами dq_i одного тела и зарядами dq_k другого тела, взятыми попарно, и затем произвести векторное сложение этих сил.

§ 3. Рационализованная запись формул

При уже определенных единицах длины и силы надлежащим выбором единицы заряда можно было бы добиться того, чтобы коэффициент пропорциональности k в формуле закона Кулона оказался равным единице. Так поступали при построении гауссовой системы единиц, прежде широко применявшейся в физике. В ныне применяемой Международной системе единиц (СИ) единица заряда, называемая кулоном (Кл), определяется не из закона взаимодействия зарядов, а из закона взаимодействия проводников с током.

Поскольку единицы силы, заряда и длины устанавливаются независимо от закона Кулона, коэффициент k в формуле (2.1) должен быть определен экспериментально. Его значение оказалось равным

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2. \quad (3.1)$$

Соответственно (2.1) можно написать в виде

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (3.2)$$

Эта формула удобна для практических расчетов. Из нее, в частности, вытекает, что два заряда по одному кулону каждый, находясь друг от друга на расстоянии в один метр, взаимодействуют с силой, равной $9 \cdot 10^9$ ньютонов. Гравитационная сила такого же порядка действует вблизи поверхности Земли на тело массы $9 \cdot 10^8$ кг (900 тысяч тонн).

Если писать закон Кулона в виде (3.2), во многие формулы электродинамики будет входить множитель 4π . Для того чтобы избавиться от него в практически наиболее важных формулах, коэффициент пропорциональности в законе Кулона представляют в виде $k = 1/4\pi\epsilon_0$. Тогда формула, выражаяющая закон Кулона, выглядит следующим образом:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (3.3)$$

Соответственно изменяются и другие формулы. Видоизмененная подобным образом запись формул называется рационализованной.

Величину ϵ_0 называют электрической постоянной¹). Из сравнения формул (3.2) и (3.3) следует, что $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$, откуда

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2) = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \Phi/\text{м}, \quad (3.4)$$

где Φ (фарад) — единица емкости, см. с. 82.

§ 4. Электрическое поле

Взаимодействие неподвижных зарядов осуществляется посредством электрического поля²). Всякий заряд возбуждает в окружающем его пространстве электрическое поле, которое проявляется себя в том, что на помещенный в какую-либо его точку заряд действует сила.

¹⁾ Не следует, как это делается в некоторых книгах, называть ϵ_0 диэлектрической проницаемостью вакуума. Такое название является физически бессмысленным.

²⁾ Взаимодействие движущихся зарядов осуществляется кроме электрического поля также посредством магнитного поля.

Чтобы установить наличие поля, надо поместить в соответствующую точку пространства заряд (так для краткости мы будем называть заряженное тело) и выяснить, испытывает ли он действие силы или нет. Величина силы, действующей на заряд, будет характеризовать «интенсивность» поля.

Таким образом, для обнаружения и исследования электрического поля можно использовать «пробный» заряд. Для того чтобы сила, действующая на пробный заряд, характеризовала поле «в данной точке», этот заряд должен быть точечным.

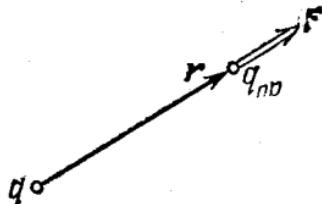
Исследуем с помощью точечного пробного заряда $q_{\text{пр}}$ поле неподвижного точечного заряда q . В точке, положение которой относительно заряда q определяется радиус-вектором r (рис. 4.1), на пробный заряд будет действовать сила

$$\mathbf{F} = q_{\text{пр}} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \right) \quad (4.1)$$

(см. формулу (3.3)).

Из формулы (4.1) следует, что отношение $\mathbf{F}/q_{\text{пр}}$ не зависит от величины пробного заряда. Это отношение зависит только от величин q и r , определяющих поле в данной точке. Поэтому его используют

Рис. 4.1. Пробный заряд $q_{\text{пр}}$ в поле точечного заряда q (рисунок выполнен для случая одноименных зарядов)



в качестве величины, характеризующей электрическое поле. Обозначив эту величину буквой E , напишем соотношение

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_{\text{пр}}. \quad (4.2)$$

Векторную величину E называют напряженностью электрического поля в данной точке.

Определение (4.2) распространяется на поля, создаваемые любой совокупностью неподвижных зарядов. Однако в этом случае надо сделать следующее уточнение. Расположение зарядов, возбуждающих

исследуемое поле, может измениться под воздействием пробного заряда. Это произойдет, например, если заряды, обусловившие поле, расположены на проводнике и могут свободно перемещаться в его пределах. Поэтому, чтобы не внести заметных изменений в исследуемое поле, пробный заряд нужно брать достаточно малым.

В соответствии с определением (4.2) напряженность электрического поля численно равна силе, действующей на единичный точечный заряд. Направление вектора E совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд.

Отметим, что формула (4.2) справедлива независимо от знака пробного заряда. Если пробный заряд отрицателен, векторы E и F имеют противоположные направления.

За единицу напряженности электрического поля принимается напряженность в такой точке, в которой на заряд в один кулон действует сила в один ньютон. Эта единица имеет название вольт на метр (В/м) (см. (9.1)).

Из формулы (4.1) следует, что напряженность поля точечного заряда определяется выражением

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} e_r, \quad (4.3)$$

где e_r — орт радиус-вектора r , проведенного из заряда в данную точку поля. Направлен вектор E вдоль радиальной прямой, определяемой ортом e_r , от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен.

Согласно (4.2) на точечный заряд в точке поля с напряженностью E действует сила

$$F = qE. \quad (4.4)$$

Если $q > 0$, направление силы совпадает с направлением вектора E ; если $q < 0$, направления векторов F и E противоположны.

(Во избежание недоразумений отметим, что в формуле (4.3) буквой q обозначен заряд, обусловивший поле, в то время как в формуле (4.4) буквой q обозначен заряд, на который в точке поля с напряженностью E действует сила F .)

Из формулы (2.3) вытекает, что напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напря-

женностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов в отдельности:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_t. \quad (4.5)$$

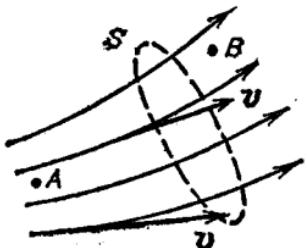
Поля складываются, не возмущая друг друга. Это утверждение носит название принципа суперпозиции (наложения) электрических полей.

Принцип суперпозиции позволяет вычислять напряженность поля любой системы зарядов. Разбив протяженные заряды на достаточно малые доли dq , их можно свести к совокупности точечных зарядов. Вклад каждого из таких зарядов в результирующее поле вычисляется по формуле (4.3).

§ 5. Поток и дивергенция векторного поля

В учении об электромагнетизме большую роль играют понятия потока и дивергенции векторного поля. Нагляднее всего эти понятия оказываются в случае поля вектора скорости частиц текущей жидкости. В § 39 1-го тома было показано, что течение жидкости можно представить с помощью линий тока (рис. 5.1). Эти линии удовлетворяют двум правилам:

Рис. 5.1. Линии тока в жидкости.
Модуль скорости частиц в точке А
больше, чем в точке В



1) скорость частицы¹⁾ жидкости, проходящей через данную точку пространства, направлена по касательной к линии в данной точке и 2) густота линий численно равна модулю скорости частиц в данном месте потока.

Рассмотрим стационарное (т. е. не изменяющееся со временем) течение несжимаемой жидкости. Поместим в поток воображаемую поверхность S (ограни-

¹⁾ Имеются в виду макроскопические частицы, состоящие из большого числа молекул.

чивающий ее контур изображен на рис. 5.1 штриховой линией). Потоком жидкости через поверхность S называется объем жидкости, проходящей через S в единицу времени.

Проще всего вычислить поток в случае, когда жидкость течет по цилиндрической трубе, причем скорость частиц жидкости во всех точках поперечного сечения трубы одинакова, т. е. поле вектора v однородно (рис. 5.2). Очевидно, что в единицу вре-

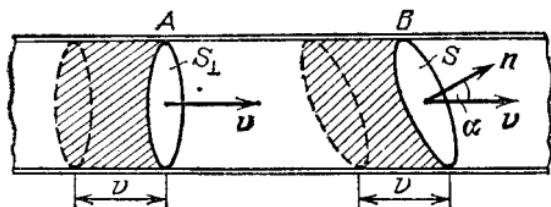


Рис. 5.2. Поток жидкости через сечения A и B одинаков и равен vS_{\perp}

мени через перпендикулярную к оси трубы поверхность S_{\perp} пройдет жидкость, заключенная в заштрихованном на рисунке цилиндре с основанием S_{\perp} и высотой v . Следовательно, обозначив поток жидкости символом $\Phi_{ж}$, можно написать, что

$$\Phi_{ж} = v S_{\perp}.$$

Аналогично через плоскую поверхность S , образующую с поверхностью S_{\perp} угол α , пройдет в единицу времени жидкость, заключенная в косом цилиндре с основанием S и высотой $v \cos \alpha$. Объем этого цилиндра равен $v \cos \alpha S$, где α — угол между вектором v и нормалью к поверхности n . Таким образом, поток через S равен

$$\Phi_{ж} = v \cos \alpha S = v_n S, \quad (5.1)$$

где v_n — проекция v на нормаль n .

Нормаль n можно направить как в одну, так и в другую сторону от плоскости, причем оба направления совершенно равноправны. В случае, изображенном на рис. 5.2, нормаль образует с v острый угол, вследствие чего v_n , а следовательно, и $\Phi_{ж}$ оказываются положительными. Однако если бы мы направили нормаль в противоположную сторону, v_n , а

следовательно, и $\Phi_{\mathbf{ж}}$ были бы отрицательными. Таким образом, поток (5.1) является величиной алгебраической; его знак зависит от выбора направления нормали к поверхности, через которую вычисляется поток.

Чтобы вычислить поток в случае, изображенном на рис. 5.1, нужно разбить поверхность на элементарные участки dS . Поток $d\Phi_{\mathbf{ж}}$ через такой участок можно вычислить по формуле (5.1):

$$d\Phi_{\mathbf{ж}} = v \cos \alpha dS, \quad (5.2)$$

где v — модуль скорости в том месте, где расположена площадка dS (рис. 5.3).

Введем вектор $d\mathbf{S}$, модуль которого равен dS , а направление совпадает с направлением нормали \mathbf{n} к площадке dS : $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$. Поскольку направление нормали выбирается условно, $d\mathbf{S}$ является псевдовектором. Угол α между векторами v и n (рис. 5.3) является также углом между векторами v и $d\mathbf{S}$. Поэтому формулу (5.2) можно написать в виде скалярного произведения векторов v и $d\mathbf{S}$:

$$d\Phi_{\mathbf{ж}} = v d\mathbf{S}. \quad (5.3)$$

Просуммировав выражение (5.3) по всей поверхности S , получим поток жидкости через эту поверхность:

$$\Phi_{\mathbf{ж}} = \int_S v d\mathbf{S}. \quad (5.4)$$

Выражение (5.4) получено для поля вектора скорости частиц жидкости. Аналогичное выражение, написанное для произвольного векторного поля $a(x, y, z)$, называется потоком вектора a через поверхность S :

$$\Phi_a = \int_S a d\mathbf{S} = \int_S a_n dS \quad (5.5)$$

(a_n — проекция вектора a на нормаль n к площадке).

Мы будем обозначать поток буквой Φ , дополняя ее индексом, указывающим, поток какого вектора имеется в виду: Φ_a — поток вектора a , Φ_E — поток вектора E и т. д. В соответствии с этим поток (5.4) следует считать потоком вектора v . Таким образом, поток жидкости $\Phi_{\mathbf{ж}}$ совпадает с потоком Φ_v вектора v .

Представив векторное поле \mathbf{a} с помощью линий, подобных линиям тока, потоку Φ_a можно дать наглядную геометрическую интерпретацию. Напомним, что направление вектора \mathbf{a} должно совпадать с направлением касательной к линии, изображающей поле, а густота линий должна равняться модулю вектора \mathbf{a} в данном месте пространства. Обозначив на рис. 5.1 векторы символом \mathbf{a} вместо v , мы получим картину поля вектора \mathbf{a} .

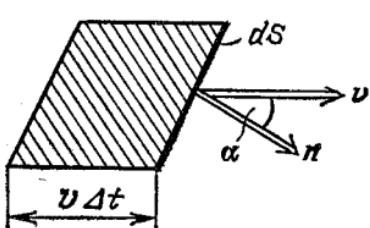


Рис. 5.3. За время Δt через dS пройдет объем жидкости, равный $v \Delta t \cos \alpha dS$. В единицу времени — объем $v \cos \alpha dS$

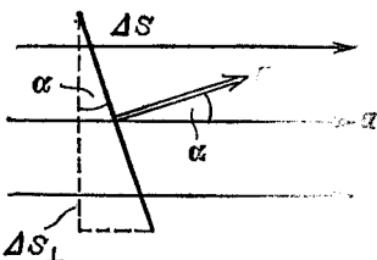


Рис. 5.4. Густота линий равна a . Число пересечений равно $a \Delta S \cos \alpha$

На рис. 5.4 показаны линии вектора \mathbf{a} в окрестности площадки ΔS . Число линий, пронизывающих площадку ΔS , равно густоте линий, умноженной на ΔS_\perp . На рис. 5.4 видно, что $\Delta S_\perp = \Delta S \cos \alpha$. Следовательно, число ΔN пересечений линиями поля площадки ΔS определяется выражением

$$\Delta N = \text{густота линий} \cdot \Delta S \cos \alpha.$$

По условию построения линий их густота численно равна a (модулю вектора \mathbf{a}). Поэтому можно написать, что

$$\Delta N (=) a \Delta S \cos \alpha = a \Delta S.$$

Размерности ΔN и $a \Delta S$ не совпадают. Поэтому речь идет лишь о численном равенстве. Чтобы указать это, знак равенства взят в скобки. Согласно (5.5) $a \Delta S = \Delta \Phi_a$. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\Delta \Phi_a (=) \Delta N. \quad (5.6)$$

Поток есть величина алгебраическая. Например, при указанном на рис. 5.5 направлении нормали (это

направление во всех точках поверхности должно выбираться одинаково) для площадки в точке A $\Delta\Phi_a < 0$, а для площадки в точке B $\Delta\Phi_a > 0$. Следовательно, и ΔN надо считать алгебраической величиной: тем пересечениям, у которых угол α между направлением линии поля и нормалью к площадке является острый (пересечение B на рис. 5.5), надо приписывать знак плюс, а тем, у которых угол α тупой (пересечение A на рис. 5.5), надо приписывать знак минус.

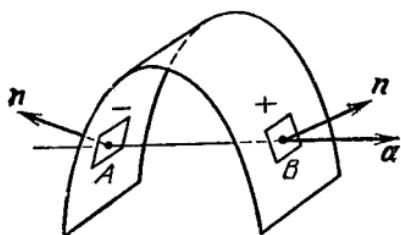


Рис. 5.5. Поток через площадку A отрицательный, через площадку B положительный. Соответственно пересечение в A отрицательное, а в B положительное

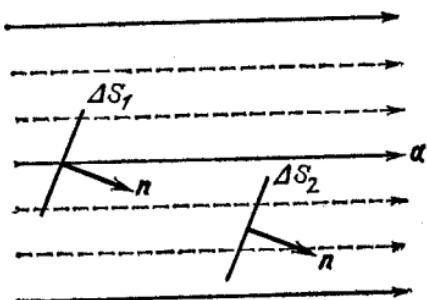


Рис. 5.6. У площадки ΔS_1 имеется одно пересечение с основной линией, у площадки ΔS_2 пересечений с основными линиями нет

Просуммировав соотношение (5.6) по всей воображаемой поверхности, придем к формуле

$$\Phi_a (=) \sum \Delta N = N_+ - N_- \quad (5.7)$$

Здесь N_+ — полное число положительных пересечений линий поля с поверхностью S , а N_- — полное число отрицательных пересечений.

При пользовании формулами (5.6) и (5.7) нужно иметь в виду, что поток, как правило, выражается нецелым числом. Соответственно и число пересечений также будет нецелым. Это не должно нас смущать, поскольку линии поля представляют собой чисто условный вспомогательный образ. Чтобы понять, что означает нецелое число пересечений, рассмотрим рис. 5.6, на котором изображены две одинаковые площадки ΔS , помещенные в разные точки однородного поля. Очевидно, что поток $\Delta\Phi_a$ через обе плащадки одинаков. Однако если судить чисто формально,

поток через площадку ΔS_1 равен +1, а через ΔS_2 — нулю (на штриховые линии пока не надо обращать внимания). Чтобы устранить это противоречие, проведем дополнительно к каждой основной линии (они изображены на рис. 5.6 сплошными) девять дополнительных (дополнительные линии, лежащие в плоскости рисунка, изображены штрихами). Тогда густота линий будет в 10 раз больше, но «цена» каждой линии станет равной 0,1.

Допустим, что теперь площадку ΔS_1 пересекают три линии, а площадку ΔS_2 две линии. Это означает, что поток через ΔS_1 равен приблизительно 0,3, а через ΔS_2 — примерно 0,2. Проведя опять дополнительные линии, увеличим густоту линий еще в 10 раз. Пусть площадку ΔS_1 теперь пересекают 28 линий, а площадку ΔS_2 — 27 линий. Следовательно, для ΔS_1 будет получено значение потока, равное 0,28, а для ΔS_2 — равное 0,27. Продолжая процесс увеличения густоты линий, можно получить дробное число пересечений со сколь угодно большой точностью. При этом разность чисел пересечений для площадок ΔS_1 и ΔS_2 будет стремиться к нулю.

Заметим, что практически подсчитывать числа пересечений нам не придется. Мы будем использовать понятия линий поля и числа их пересечений с поверхностями как наглядный и удобный прием получения формул и соотношений теории векторных полей, а затем используем эти формулы для практических расчетов.

В случае замкнутых поверхностей условились из двух возможных направлений нормали выбирать всегда направление наружу, т. е. использовать внешнюю нормаль (рис. 5.7). Поэтому пересечения при выходе линий наружу будут положительными, а пересечения при входе линий внутрь — отрицательными. В соответствии с этим поток, выходящий из ограниченного поверхностью объема наружу, оказывается положительным, а поток, входящий внутрь, — отрицательным.

На рис. 5.7 видно, что в случае, когда линии поля проходят внутри замкнутой поверхности не прерываясь, каждая линия, пересекая поверхность, входит внутрь и выходит наружу одинаковое число раз. В итоге полное число положительных пересечений бу-

дет равно полному числу отрицательных пересечений и поток вектора через поверхность оказывается равным нулю (см. формулу (5.7)).

Из рис. 5.8 следует, что линия, начинающаяся внутри замкнутой поверхности, вносит в поток вклад, равный +1, а линия, оканчивающаяся внутри поверхности, — вклад, равный —1. Отсюда заключаем, что

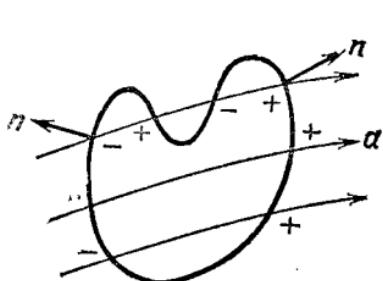


Рис. 5.7. Если линии непрерывны, число положительных пересечений равно числу отрицательных пересечений

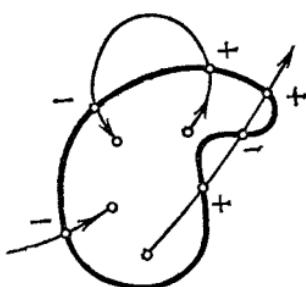


Рис. 5.8. Пересечения линий, начинающихся либо оканчивающихся внутри замкнутой поверхности

поток вектора через замкнутую поверхность численно равен разности числа линий, начинающихся внутри поверхности ($N_{\text{нач}}$), и числа линий, оканчивающихся внутри поверхности ($N_{\text{оканч}}$):

$$\Phi_a (=) N_{\text{нач}} - N_{\text{оканч}}. \quad (5.8)$$

Отметим, что линии, начинающиеся и оканчивающиеся внутри замкнутой поверхности, вклада в поток не вносят (см. рис. 5.8).

Рассмотрим точку P , в окрестности которой начинаются (рис. 5.9а) либо оканчиваются (рис. 5.9б) линии поля. Назовем дивергенцией (от латинского *divergentia* — расхождение) векторного поля в точке P величину, численно равную плотности точек (т. е. количеству точек, приходящихся на единицу объема), в которых начинаются либо оканчиваются линии поля. В первом случае будем считать дивергенцию положительной, во втором — отрицательной (схождение линий равнозначно отрицательному расхождению). Дивергенцию векторного поля a обозначают символом $\text{div } a$ либо $\nabla \cdot a$ (см. формулы (5.14)).

Выделим в окрестности точки P объем V очень малых линейных размеров. Если внутрь этого объема попадет $N_{\text{нач}}$ точек, в которых начинаются линии поля, либо $N_{\text{оканч}}$ точек, в которых оканчиваются линии поля, то дивергенция будет равна

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{N_{\text{нач}}}{V} \quad \text{в первом случае,} \\ \operatorname{div} \mathbf{a} &= -\frac{N_{\text{оканч}}}{V} \quad \text{во втором случае} \end{aligned} \quad (5.9)$$

($N_{\text{оканч}}$ — положительное число).

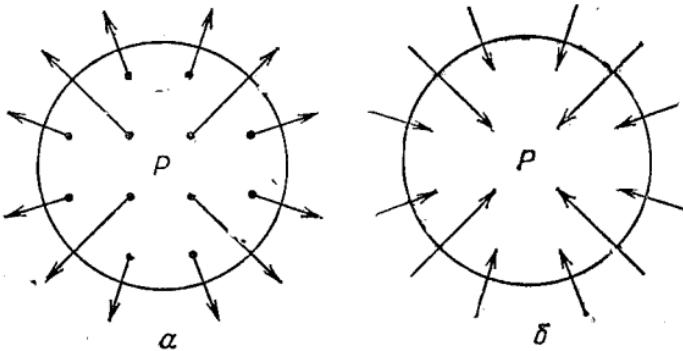


Рис. 5.9. Дивергенция равна плотности точек, в которых начинаются (a) либо оканчиваются (б) линии поля

Согласно формуле (5.8) $N_{\text{нач}}$ в первом случае и $-N_{\text{оканч}}$ во втором случае численно равны потоку вектора \mathbf{a} через ограничивающую объем V поверхность S . Поэтому оба соотношения (5.9) можно представить одной формулой

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\Phi_a}{V} \quad (5.10)$$

(в этой формуле левая и правая части имеют одинаковую размерность, поэтому знак равенства не взят в скобки).

Если точки, в которых начинаются или оканчиваются линии поля, распределены в пространстве неравномерно, то для получения значения дивергенции в точке P нужно взять предел выражения (5.10) при условии, что V стремится к нулю, стягиваясь к точке P . Заменив в дополнение к этому Φ_a согласно (5.5),

придем к строгому математическому определению дивергенции:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.11)$$

(S — поверхность, ограничивающая объем V). Дивергенция — скалярная величина, которая может быть как положительной, так и отрицательной.

Точки, в которых начинаются линии поля, естественно называть источниками поля. Тогда дивергенцию можно трактовать как мощность источников поля, отнесенную к единице объема a . Точки, в которых оканчиваются линии поля, называются стоками поля или источниками с отрицательной мощностью.

Согласно формуле (5.9) выражение $\operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV$ дает $dN_{\text{нач}}$, т. е. число линий поля, начинающихся в объеме dV , либо $-dN_{\text{оканч}}$, т. е. взятое со знаком минус число линий поля, оканчивающихся в объеме dV . Следовательно,

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV (=) \int_V dN_{\text{нач}} - \int_V dN_{\text{оканч}} = N_{\text{нач}} - N_{\text{оканч}},$$

где все три интеграла берутся по одному и тому же конечному объему V . (Мы предполагаем, что дивергенция изменяется при переходе от одной точки поля к другой плавно, без скачков. Тогда в тех элементах объема dV , в которых $dN_{\text{нач}}$ отлично от нуля, $dN_{\text{оканч}}$ будет равно нулю, и наоборот.)

Из формулы (5.9) следует, что правая часть полученного нами соотношения представляет собой поток вектора \mathbf{a} через замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V . Таким образом,

$$\oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV. \quad (5.12)$$

Это соотношение называют теоремой Остроградского — Гаусса¹⁾.

¹⁾ Михаил Васильевич Остроградский (1801—1862) — русский математик.

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) — немецкий математик, астроном и физик.

Практически векторное поле $\mathbf{a}(x, y, z)$ определяют путем задания трех функций $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$ и $a_z(x, y, z)$, которые являются компонентами вектора \mathbf{a} . Очевидно, что, зная эти функции, можно вычислить $\operatorname{div} \mathbf{a}$ как функцию координат x , y , z . Попытаемся выяснить, как связана дивергенция с функциями a_x , a_y , a_z , задающими поле.

Однородное поле ($\mathbf{a} = \text{const}$) изображается параллельными равноотстоящими прямыми линиями, которые нигде не прерываются. Следовательно, дивергенция такого поля всюду равна нулю. Отсюда заключаем, что для отличия дивергенции от нуля необходимо, чтобы функции a_x , a_y и a_z изменялись при переходе от точки к точке. Ясно также, что чем быстрее происходит это изменение, тем больше должна быть дивергенция. Отсюда вытекает, что дивергенция должна определяться производными функций a_x , a_y и a_z по координатам.

Рассмотрим частный случай, когда $a_x = f(x)$, а a_y и a_z тождественно равны нулю. Примерная картина линий поля показана на рис. 5.10. Найдем поток вектора \mathbf{a} через цилиндрическую поверхность с основаниями S_1 и S_2 ($S_1 = S_2 = S$) и высотой dx .

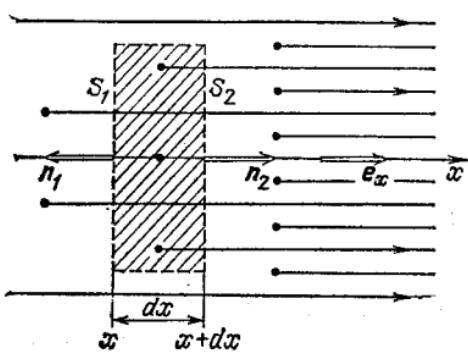


Рис. 5.10. К вычислению дивергенции поля $\mathbf{a} = f(x) \mathbf{e}_x$. Рисунок выполнен в предположении, что $df/dx > 0$

Нормаль n_1 к поверхности S_1 направлена против оси x . Поэтому $a_{n1} = -a_x = -f(x)$, а поток равен $-f(x)S$. Поток через боковую поверхность равен нулю. Таким образом, поток через поверхность цилиндра

$$d\Phi_a = [f(x + dx) - f(x)] S = \frac{df}{dx} dx S = \frac{df}{dx} dV,$$

найдем поток вектора \mathbf{a} через цилиндрическую поверхность с основаниями S_1 и S_2 ($S_1 = S_2 = S$) и высотой dx . Для вычисления воспользуемся формулой (5.5). Нормаль n_2 к поверхности S_2 совпадает по направлению с осью x . Поэтому $a_{n2} = a_x = f(x + dx)$, а поток равен $a_{n2}S = f(x + dx)S$. Нормаль n_1 к поверхности S_1 направлена против оси x . Поэтому $a_{n1} = -a_x = -f(x)$, а поток равен $-f(x)S$. Поток через боковую поверхность равен нулю. Таким образом, поток через поверхность цилиндра

где $dV = S dx$ — объем цилиндра. Подставив значения $d\Phi_a$ и dV в формулу (5.10), найдем дивергенцию:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = df/dx = da_x/dx.$$

Как мы и предполагали, дивергенция оказалась равной производной компоненты вектора по координате.

Можно показать, что в общем случае, когда все три функции a_x , a_y и a_z зависят от всех трех координат x , y и z , выражение для дивергенции имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \partial a_x / \partial x + \partial a_y / \partial y + \partial a_z / \partial z. \quad (5.13)$$

Это выражение можно рассматривать как скалярное произведение вектора \mathbf{a} и вектора с компонентами $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, т. е. векторного дифференциального оператора ∇ (набла) (см. формулу (22.10) 1-го тома). Таким образом можно написать, что

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv \nabla \cdot \mathbf{a}. \quad (5.14)$$

Итак, существуют два способа обозначения дивергенции: $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\nabla \cdot \mathbf{a}$. Мы будем применять обозначение $\operatorname{div} \mathbf{a}$.

§ 6. Теорема Гаусса

Напряженность поля точечного заряда определяется выражением

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (6.1)$$

(см. формулу (4.3)). Легко сообразить, что линии поля в этом случае представляют собой центрально-симметричную систему радиальных прямых, направленных от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен.

Рассмотрим воображаемую сферическую поверхность радиуса r , в центре которой помещается положительный точечный заряд q (рис. 6.1). В соответствии с формулой (6.1) в каждой точке этой поверхности $E_n = (1/4\pi\epsilon_0) q/r^2$. Следовательно, поток вектора \mathbf{E} через поверхность равен

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = E_n S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (6.2)$$

Выражение (6.2) не зависит от радиуса поверхности r . Это означает, что число линий поля на любом расстоянии от заряда одно и то же. Отсюда вытекает, что линии нигде, кроме заряда, не начинаются и не оканчиваются; начавшись на заряде, они уходят в бесконечность.

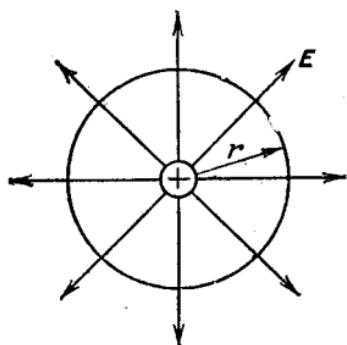


Рис. 6.1. Картина линий поля положительного точечного заряда

Согласно формуле (5.7) выражение (6.2) дает число пересечений поверхности линиями поля, т. е. число линий, начинающихся на положительном заряде q :

$$N_{\text{нач}} = q/\epsilon_0 \quad (q > 0). \quad (6.3)$$

Для отрицательного точечного заряда q ($q < 0$) картина, изображенная на рис. 6.1, отличается лишь

направлением линий поля — линии, прида из бесконечности, оканчиваются на заряде. Число линий, оканчивающихся на отрицательном заряде q , равно

$$N_{\text{оканч}} = -q/\epsilon_0 \quad (q < 0) \quad (6.4)$$

(подчеркнем, что число линий отрицательным быть не может: $N_{\text{оканч}} > 0$, в то время как $q < 0$).

Полученные нами результаты означают, что источниками электростатического поля могут служить только заряды, причем мощность этих источников равна q/ϵ_0 .

Предположим, что внутри замкнутой поверхности S произвольной формы находятся N_1 положительных точечных зарядов q_i ($i = 1, 2, \dots, N_1$) и N_2 отрицательных точечных зарядов q_k ($k = 1, 2, \dots, N_2$). В соответствии с формулой (6.3) на положительных зарядах будет начинаться число линий $N_{\text{нач}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N_1} q_i$.

В соответствии с формулой (6.4) на отрицательных зарядах будет оканчиваться число линий $N_{\text{оканч}} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_2} q_k$. Подставив полученные числа в фор-

мулу (5.8), найдем поток вектора E через поверхность S :

$$\Phi_E = N_{\text{нач}} - N_{\text{оканч}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N_1} q_i + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_2} q_k = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q.$$

Здесь Σq есть алгебраическая сумма всех находящихся внутри поверхности S зарядов (число слагаемых в этой сумме равно $N_1 + N_2$).

Итак, мы доказали, что

$$\Phi_E = \oint_S E \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q. \quad (6.5)$$

Доказанное нами утверждение носит название теоремы Гаусса. Эта теорема гласит, что поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ϵ_0 .

При рассмотрении полей, создаваемых макроскопическими зарядами (т. е. зарядами, состоящими из огромного числа точечных элементарных зарядов), отвлекаются от дискретной (прерывистой) структуры этих зарядов и считают их распределенными в пространстве непрерывным образом с конечной всюду плотностью.

Объемная плотность заряда ρ определяется как отношение заряда dq к физически бесконечно малому объему dV , в котором заключен этот заряд:

$$\rho = dq/dV \quad (6.6)$$

(ср. с определением плотности массы). Под физически бесконечно малым объемом в данном случае подразумевается такой объем, который достаточно велик для того, чтобы не могла проявиться дискретность заряда, и вместе с тем достаточно мал для того, чтобы плотность зарядов в его пределах можно было считать одинаковой.

В соответствии с формулой (6.6) в объеме dV заключен заряд ρdV . Если $\rho > 0$, этот заряд положителен и в пределах dV будут начинаться $dN_{\text{нач}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho dV$ линий поля. Разделив $dN_{\text{нач}}$ на dV , полу-

Чим плотность точек, в которых начинаются линии поля, т. е. дивергенцию вектора \mathbf{E} : $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ (см. формулу (5.9)). Если $\rho < 0$, заряд ρdV отрицательный и в объеме dV будут оканчиваться $dN_{\text{оканч}} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho dV$ линий. Следовательно, и в этом случае $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. Таким образом, независимо от знака ρ мы приходим к формуле

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (6.7)$$

которая выражает теорему Гаусса в дифференциальной форме: дивергенция вектора \mathbf{E} в некоторой точке электростатического поля равна объемной плотности заряда в той же точке, деленной на ϵ_0 . Смысл этого утверждения состоит в том, что в единице объема начинается (если $\rho > 0$) либо оканчивается (если $\rho < 0$) число линий, равное $|\rho|/\epsilon_0$.

§ 7. Применение теоремы Гаусса к расчету полей

В случае симметричного распределения зарядов и соответственно симметричных полей теорема Гаусса позволяет найти напряженность поля сравнительно простым способом. Приведем несколько типичных примеров.

Поле бесконечной однородно заряженной плоскости. Когда заряд сосредоточен в тонком поверхностном слое тела, распределение заряда характеризуется с помощью поверхностной плотности σ , которая определяется выражением

$$\sigma = dq/dS. \quad (7.1)$$

Под dS подразумевается физически бесконечно малый участок поверхности, dq — заряд, находящийся на этом участке.

Пусть плоскость бесконечных размеров заряжена с одинаковой всюду поверхностной плотностью σ (рис. 7.1). Относительно любой точки (например, точки A на рисунке) плоскость простирается во все стороны одинаково. Отсюда следует, что напряженность поля может быть направлена только по нормали к плоскости. Поэтому линии поля представляют собой перпендикулярные к плоскости прямые линии, густо-

та которых вследствие однородного распределения заряда всюду одна и та же. На участке ΔS поверхности сосредоточен заряд, равный $\sigma \Delta S$. Согласно формуле (6.3) на этом заряде начинаются $\Delta N = \sigma \Delta S / \epsilon_0$

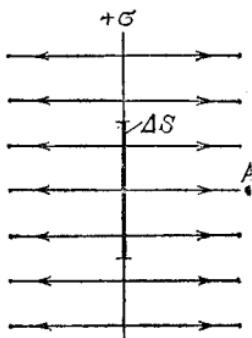


Рис. 7.1. На площадке ΔS начинаются (если $\sigma > 0$) либо оканчиваются (если $\sigma < 0$) $|\sigma| \Delta S / \epsilon_0$ линий поля

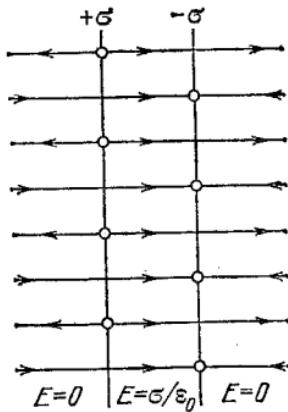


Рис. 7.2. Поле разноименно заряженных плоскостей. Линии полей, создаваемых плоскостями, сдвинуты друг относительно друга. Кружками обозначены точки, в которых начинаются или оканчиваются линии E

линий, половина которых идет в одну сторону от плоскости и половина — в другую. Следовательно, густота линий, а значит и напряженность поля, равна $\Delta N / 2\Delta S = \sigma / 2\epsilon_0$:

$$E = \sigma / 2\epsilon_0. \quad (7.2)$$

Поле двух разноименно заряженных бесконечных плоскостей. Пусть две параллельные бесконечные плоскости заряжены однородно с одинаковой поверхностью плотностью $+σ$ и $-σ$ (рис. 7.2). Каждая из плоскостей создает однородное поле с напряженностью, определяемой формулой (7.2). На рис. 7.2 видно, что вне плоскостей результирующая напряженность поля равна нулю. В пространстве между плоскостями поля имеют одинаковое направление,

вследствие чего

$$E = \sigma/\epsilon_0. \quad (7.3)$$

Таким образом, поле однородно и сосредоточено в зазоре между плоскостями.

Поле однородно заряженного бесконечного цилиндра. Если заряд сосредоточен на очень тонком «нитевидном» проводнике, распределение заряда по нити характеризуют с помощью линейной плотности λ , определяемой выражением

$$\lambda = dq/dl, \quad (7.4)$$

где dl — физически бесконечно малый отрезок нити, dq — заряд, находящийся на этом отрезке. С помощью линейной плотности можно характеризовать и распределение заряда на цилиндрическом проводнике при условии, что в каждом сечении этого проводника заряд распределен однородно.

Найдем поле бесконечной цилиндрической поверхности радиуса R , заряженной однородно с линейной плотностью λ (рис. 7.3). Из соображений симметрии

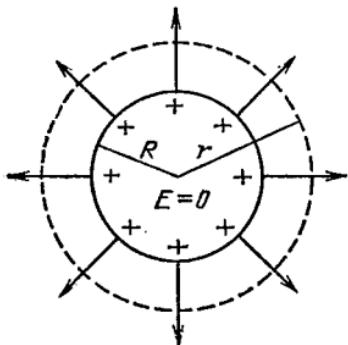


Рис. 7.3. Поперечное сечение цилиндрической поверхности радиуса R , заряженной с линейной плотностью λ . Эта поверхность окружена коаксиальной с ней воображаемой поверхностью радиуса r

ясно, что линиями поля будут равномерно распределенные вокруг цилиндра радиальные прямые, начинающиеся (если $\lambda > 0$) либо оканчивающиеся (если $\lambda < 0$) на поверхности цилиндра. Внутри поверхности линии идти не могут, так как там нет зарядов, на которых они могли бы начинаться или оканчиваться. На отрезке цилиндра длины Δl находится заряд $\lambda\Delta l$, на котором начинаются $\Delta N = \lambda\Delta l/\epsilon_0$ линий поля. Их густота на расстоянии r от оси цилиндра равна $\Delta N/2\pi r\Delta l = \lambda/2\pi r\epsilon_0$. Следовательно, внутри поверхности поле отсутствует, а вне цилиндра напряжен-

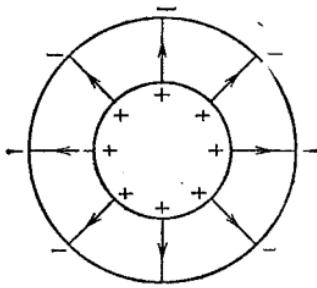
ность поля определяется формулой

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad (r > R). \quad (7.5)$$

Из полученной формулы следует, что, уменьшая радиус цилиндра, можно (при неизменной λ) получить вблизи поверхности цилиндра поле очень большой напряженности.

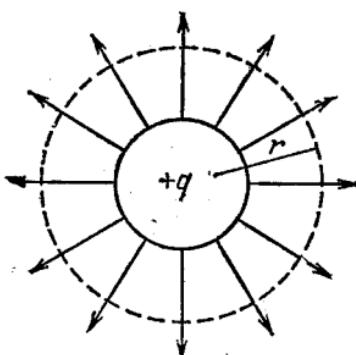
Пусть одна из двух коаксиальных цилиндрических поверхностей заряжена однородно с линейной плотностью $+\lambda$, а другая — с линейной плотностью $-\lambda$ (рис. 7.4). Все линии поля, начавшись на одной из

Рис. 7.4. Поперечное сечение двух коаксиальных цилиндрических поверхностей, заряженных с одинаковой по модулю линейной плотностью. Поле сосредоточено в зазоре между поверхностями



поверхностей, окончается на другой. Поле будет сосредоточено в зазоре между поверхностями. Напряженность поля в зазоре определяется формулой (7.5), где r — расстояние от общей оси цилиндров.

Рис. 7.5. Поле сферической поверхности, по которой распределен однородно заряд $+q$. Густота линий убывает как $1/r^2$



Поле однородно заряженной сферы. Предположим, что заряд q распределен однородно по сферической поверхности радиуса R (рис. 7.5). На этой поверхности начинаются $N = q/\epsilon_0$ линий. Их густота на расстоянии r от центра сферы равна $N/4\pi r^2 = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Следовательно, напряженность поля

определяется выражением

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r > R), \quad (7.6)$$

совпадающим с выражением для напряженности поля точечного заряда q , помещенного в центре сферы.

Легко убедиться в том, что в случае двух концентрических сферических поверхностей, по одной из которых однородно распределен заряд $+q$, а по другой заряд $-q$, поле сосредоточено в зазоре между поверхностями. Напряженность поля определяется формулой (7.6), где r — расстояние от общего центра сфер.

Поле объемно заряженного шара. Допустим, что заряд q однородно распределен по объему шара радиуса R (рис. 7.6). Внутренняя часть шара, ограниченная сферой радиуса r , содержит заряд, равный

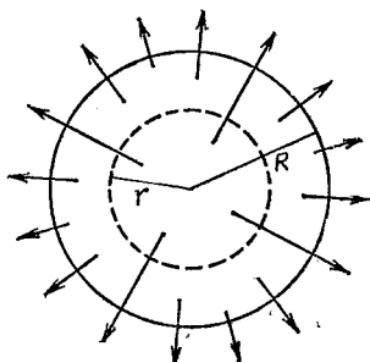


Рис. 7.6. Поле объемно заряженного шара. Внутри воображаемой сферы радиуса r заключен заряд, равный qr^3/R^3

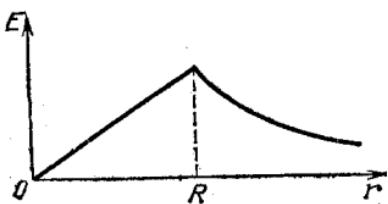


Рис. 7.7. Поле объемно заряженного шара радиуса R : E — модуль напряженности, r — расстояние от центра шара. Внутри шара поле растет по линейному закону, вне шара убывает по закону $1/r^2$

qr^3/R^3 . В ней берут начало $N = qr^3/R^3\epsilon_0$ линий поля. Густота этих линий на расстоянии r от центра равна $N/4\pi r^2 = (q/4\pi\epsilon_0)r/R^3$. Следовательно, напряженность поля внутри шара определяется формулой

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3} \quad (r \leq R). \quad (7.7)$$

Вне шара поле тождественно с полем, которое создавал бы точечный заряд q , помещенный в центр шара.

На рис. 7.7 изображен график, показывающий изменение напряженности поля с расстоянием от центра шара.

§ 8. Потенциал электростатического поля

Пусть точечный заряд q' , находящийся в поле неподвижного точечного заряда q , переместился вдоль изображенной на рис. 8.1 траектории из положения 1 в положение 2. Найдем работу A_{12} , совершающую при этом над зарядом q' силами поля, в котором он находится. На заряд q' действует кулоновская сила

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \mathbf{e}_r = q'E, \quad (8.1)$$

где E — напряженность поля, созданного зарядом q (направление силы на рис. 8.1 соответствует одноименным зарядам q и q'). Эта сила является центральной — ее направление в любом месте проходит через неподвижный центр (заряд q), а модуль зависит (при заданных q и q') только от расстояния r до силового центра. Элементарная работа силы (8.1) равна

$$dA = \mathbf{F} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \mathbf{e}_r dl,$$

где dl — перемещение заряда q' . На рис. 8.1 видно, что $\mathbf{e}_r dl$ равно¹⁾ dr — приращению расстояния между q и q' (в точке A обе величины $\mathbf{e}_r dl$ и dr положительны, в точке B они отрицательны). С учетом этого для

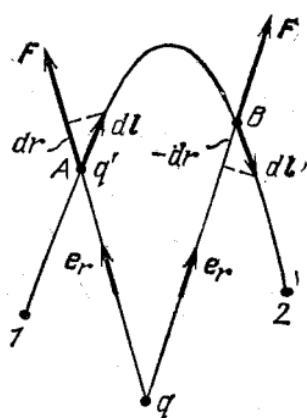


Рис. 8.1. Движение заряда q' в поле, созданном неподвижным зарядом q

¹⁾ С точностью до бесконечно малой высшего порядка по сравнению с dr (см. § 19 1-го тома).

работы на пути 1—2 получается выражение

$$A_{12} = \int_1^2 \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r_2}. \quad (8.2)$$

Полученный нами результат означает, что работа силы (8.1) не зависит от пути, по которому переместился заряд q' , а зависит лишь от начального и конечного положений заряда (от r_1 и r_2). Этот результат можно было предвидеть, поскольку, как было показано в § 21 1-го тома, центральные силы являются консервативными.

Из механики известно, что работа консервативных сил на любом замкнутом пути равна нулю. В случае электростатического поля эта работа определяется интегралом $\oint q\mathbf{E} d\mathbf{l}$ (кружок у знака интеграла указывает на то, что интегрирование производится по замкнутому контуру). Приравняв этот интеграл нулю и сократив на q , приедем к соотношению

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0, \quad (8.3)$$

которое должно выполняться для любого замкнутого контура.

Выражение вида $\oint \mathbf{a} d\mathbf{l}$ называется циркуляцией вектора \mathbf{a} по данному контуру. Таким образом, характерным для электростатического поля является то, что циркуляция вектора \mathbf{E} по любому замкнутому контуру равна нулю.

Надо иметь в виду, что условие (8.3) справедливо только для электростатического поля. В дальнейшем будет показано, что для поля движущихся зарядов (т. е. поля, изменяющегося со временем) условие (8.3) не выполняется.

Работа консервативных сил может быть представлена как убыль потенциальной энергии:

$$A_{12} = W_1 - W_2.$$

Сопоставление этого соотношения с формулой (8.2) дает для потенциальной энергии, которой обладает

заряд q' в поле заряда q , выражение

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + \text{const.}$$

Значение константы обычно выбирается так, чтобы при удалении заряда q' от заряда q на бесконечность (т. е. при $r = \infty$) потенциальная энергия обращалась в нуль. При этом условии

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}. \quad (8.4)$$

Заметим, что это выражение можно трактовать как взаимную потенциальную энергию зарядов q и q' .

Скалярная величина

$$\Phi = \frac{W}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (8.5)$$

не зависит от величины заряда q' и может быть использована для характеристики поля заряда q . Эта величина называется потенциалом поля в данной точке.

Из сказанного выше следует, что потенциал поля точечного заряда q определяется выражением

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (8.6)$$

где r — расстояние от заряда до данной точки поля.

Согласно формуле (8.5) заряд q , находящийся в точке поля с потенциалом Φ , обладает потенциальной энергией

$$W = q\Phi. \quad (8.7)$$

(В формуле (8.5) буквой q обозначен заряд, обуславивший поле; в формуле (8.7) буквой q обозначен заряд, находящийся в поле, характеризуемом потенциалом Φ .) Следовательно, работу сил поля над зарядом q можно выразить через разность потенциалов:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = q(\Phi_1 - \Phi_2). \quad (8.8)$$

Таким образом, работа, совершаемая над зарядом силами поля, равна произведению заряда на убыль потенциала.

Если заряд q из точки с потенциалом Φ удаляется на бесконечность (где по условию потенциал

равен нулю), работа сил поля равна

$$A_{\infty} = q\varphi.$$

Отсюда следует, что потенциал *численно равен работе, совершающей силами поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность*.

Согласно принципу суперпозиции, выражаемому формулой (4.5), работа, совершаемая над зарядом q силами поля, создаваемого системой зарядов q_i , равна

$$A_{12} = \int_1^2 q \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_1^2 q \left(\sum \mathbf{E}_i \right) d\mathbf{l} = \sum \int_1^2 q \mathbf{E}_i d\mathbf{l} = \sum (A_{12})_i, \quad (8.9)$$

где $(A_{12})_i$ — работа, которую совершили бы над зарядом q силы поля, создаваемого одним лишь зарядом q_i .

В соответствии с формулой (8.7) работу A_{12} можно представить в виде $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, где φ — потенциал результирующего поля. Работа $(A_{12})_i = q(\varphi_{ii} - \varphi_{i2})$, где φ_i — потенциал поля, которое создавал бы заряд q_i . Подставив эти выражения в формулу (8.9), придем к соотношению

$$q(\varphi_1 - \varphi_2) = \sum q (\varphi_{ii} - \varphi_{i2}) = q \left(\sum \varphi_{ii} - \sum \varphi_{i2} \right),$$

из которого вытекает, что

$$\varphi = \sum \varphi_i. \quad (8.10)$$

Таким образом, потенциал поля, созданного системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. В то время как напряженности поля складываются при наложении полей векторно, потенциалы складываются алгебраически. По этой причине вычисление потенциалов обычно оказывается значительно проще, чем вычисление напряженностей полей.

За единицу потенциала, называемую вольтом¹⁾, (сокращенное обозначение В), принимается потен-

¹⁾ В честь Алессандро Вольта (1745—1827) — итальянского физика и физиолога, одного из основателей учения об электричестве.

циал в такой точке, для перемещения в которую из бесконечности заряда, равного одному кулону, нужно совершить работу в один джоуль: $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В}$. Отсюда

$$1 \text{ В} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}}. \quad (8.11)$$

В физике часто пользуются единицей работы и энергии, называемой электронвольтом (эВ) и равной работе, совершаемой силами поля над элементарным зарядом e при прохождении им разности потенциалов в один вольт:

$$1 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}. \quad (8.12)$$

Используются также кратные электронвольту единицы:

$$1 \text{ кэВ (килоэлектронвольт)} = 10^3 \text{ эВ},$$

$$1 \text{ МэВ (мегаэлектронвольт)} = 10^6 \text{ эВ},$$

$$1 \text{ ГэВ (гигаэлектронвольт)} = 10^9 \text{ эВ}.$$

§ 9. Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом

Электростатическое поле можно описать либо с помощью векторной величины \mathbf{E} , либо с помощью скалярной величины ϕ . Очевидно, что эти величины должны быть как-то связаны друг с другом.

Выберем в пространстве, в котором имеется электростатическое поле, произвольное направление l (рис. 9.1). При перемещении точечного заряда q вдоль этого направления на отрезок dl силы поля совершают над ним работу $dA = q\mathbf{E}dl = qE_l dl$ (здесь E_l — проекция \mathbf{E} на направление l). Согласно формуле (8.7) эту работу можно выразить через убыль потенциала: $dA = -qd\phi = -q(\partial\phi/\partial l)dl$ (мы написали частную производную, поскольку ϕ , вообще говоря, изменяется не только при перемещении вдоль направления l , но также и при перемещениях в других направлениях). Приравняв оба выражения для работы, получим соотношение $qE_l dl = -q(\partial\phi/\partial l)dl$, откуда после сокращения на q следует, что

$$E_l = -\partial\phi/\partial l. \quad (9.1)$$

Таким образом, проекция вектора E на направление l равна скорости убывания потенциала при перемещении вдоль этого направления.

Взяв в качестве направления l координатные оси x, y, z , получим выражения для компонент вектора E :

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (9.2)$$

Соответственно выражение для E имеет вид

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z\right).$$

Величина, стоящая в скобках, представляет собой градиент функции Φ . Следовательно, мы приходим к формуле

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi, \quad (9.3)$$

согласно которой напряженность электростатического поля равна градиенту потенциала, взятому с обратным знаком. Этот результат можно было получить, используя известное из механики соотношение между потенциальной энергией и силой:

$$\mathbf{F} = -\nabla W \quad (9.4)$$

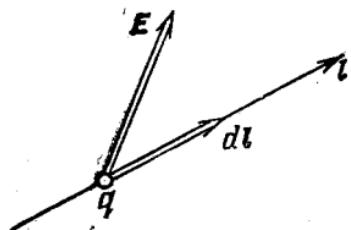


Рис. 9.1. Перемещение заряда q в поле с напряженностью E на отрезок dl

(см. формулу (22.11) 1-го тома). В рассматриваемом случае $F = qE$, $W = q\Phi$. Подставив эти выражения в формулу (9.4) и сократив на q , придем к формуле (9.3).

С помощью (9.3) можно, зная функцию $\Phi(x, y, z)$, найти напряженность поля в каждой точке поля. Можно решить и обратную задачу — зная функцию $E(x, y, z)$, найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Для этого воспользуемся тем, что работа A_{12} , совершаемая силами поля над зарядом q при перемещении его по произвольной траектории из точки 1 в точку 2, определяется интегралом

$$\int_1^2 qE dl. \quad \text{Вместе с тем в соответствии с (8.7)}$$

эту работу можно представить в виде $q(\Phi_1 - \Phi_2)$. Приравняв оба выражения и сократив на q , придем

к соотношению

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} dl. \quad (9.5)$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющей точки 1 и 2, ибо работа сил электростатического поля не зависит от пути.

Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется поверхностью равного потенциала или эквипотенциальной поверхностью. Ее уравнение имеет вид

$$\Phi(x, y, z) = \text{const.} \quad (9.6)$$

При перемещении по касательной к эквипотенциальной поверхности на отрезок dl потенциал не изменяется ($d\Phi = 0$). Согласно формуле (9.1) проекция вектора \mathbf{E} на касательную к поверхности равна нулю. Отсюда следует, что вектор \mathbf{E} направлен по нормали к поверхности. Приняв во внимание, что вектор \mathbf{E} направлен по касательной к линии E , заключаем, что линии напряженности в каждой точке ортогональны к эквипотенциальным поверхностям.

Эквипотенциальную поверхность можно провести через любую точку поля. Однако целесообразно проводить поверхности так, чтобы разность потенциалов между соседними поверхностями была всюду одна и

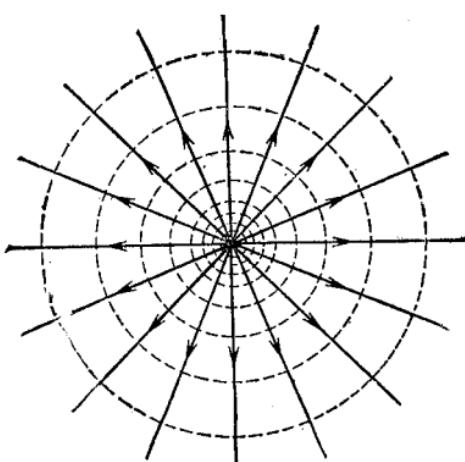


Рис. 9.2. Линии \mathbf{E} (сплошные) и эквипотенциальные поверхности (штриховые) точечного заряда

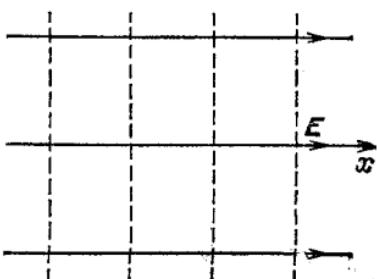


Рис. 9.3. Линии \mathbf{E} (сплошные) и эквипотенциальные поверхности (штриховые) однородного поля

та же (например, 1 В). Тогда по густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о модуле напряженности поля — там, где поверхности гуще, потенциал изменяется вдоль линии поля быстрее и, следовательно, напряженность поля больше; там, где поверхности реже, напряженность поля меньше.

На рис. 9.2 изображены линии E (сплошные) и линии пересечения эквипотенциальных поверхностей с плоскостью чертежа (штриховые) для поля точечного заряда. На рис. 9.3 изображена аналогичная картина для однородного поля.

Легко сообразить, что потенциал однородного поля с напряженностью Ee_x имеет вид

$$\varphi = -Ex + \text{const.} \quad (9.7)$$

Константу в этом выражении нельзя выбрать так, чтобы потенциал на бесконечности обращался в нуль. Такой выбор возможен только в том случае, если напряженность поля убывает с расстоянием до

столько быстро для того, чтобы $\int_1^{\infty} E dl$ был конечным (l — произвольная точка поля).

§ 10. Поле электрического диполя

Электрическим диполем называется система двух отличающихся только знаком точечных зарядов $+q$ и $-q$, расстояние l между которыми мало по сравнению с расстояниями до тех точек, в которых рассматривается поле системы. Прямая, проходящая через оба заряда, называется осью диполя. Ориентацию оси диполя в пространстве можно задать с помощью вектора l , проведенного от заряда $-q$ к заряду $+q$.

Очевидно, что поле электрического диполя симметрично относительно его оси. Вычислим потенциал поля в точке, положение которой относительно центра диполя O определяется полярными координатами r и ϑ (рис. 10.1). Поскольку $l \ll r$ (на рисунке это условие не соблюдено), можно считать с большой сте-

пенью точности, что

$$r_+ = r - (l/2) \cos \vartheta, \quad r_- = r + (l/2) \cos \vartheta.$$

Тогда для потенциала в рассматриваемой точке получится выражение

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r - (l/2) \cos \vartheta} - \frac{q}{r + (l/2) \cos \vartheta} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \vartheta}{r^2 - (l/2)^2 \cos^2 \vartheta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \vartheta}{r^2} \end{aligned} \quad (10.1)$$

(ввиду малости l по сравнению с r мы пренебрегли в знаменателе вторым слагаемым).

При $\vartheta = \pi/2$ выражение (10.1) обращается в нуль. Таким образом, плоскость, перпендикулярная к оси диполя и проходящая через его центр, является экви-потенциальной поверхностью. Это следует также из того, что точки этой плоскости находятся на одинаковом расстоянии от обоих зарядов.

Из выражения (10.1) вытекает, что потенциал поля диполя определяется модулем векторной величины

$$p = ql, \quad (10.2)$$

которую называют электрическим моментом диполя или дипольным моментом. Для вычисления поля диполя нет необходимости знать q и l в отдельности; достаточно знать их произведение, т. е. электрический момент диполя.

На рис. 10.1 видно, что ϑ есть угол между вектором l , т. е. моментом диполя p , и радиус-вектором r , определяющим положение данной точки относительно центра диполя. Поэтому формуле (10.1) можно придать вид

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pr}{r^3}. \quad (10.3)$$

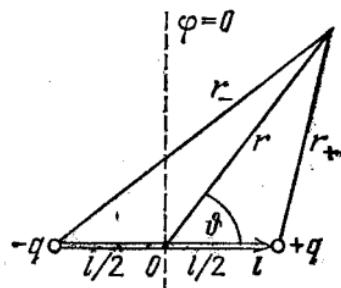


Рис. 10.1. К вычислению потенциала поля диполя

Эту формулу легко восстановить в памяти с помощью следующих рассуждений. Даны момент диполя p и радиус-вектор r точки, в которой вычисляется поле. Из

этих векторов (и, возможно, их модулей) нужно «сконструировать» скаляр ϕ . Самое простое, что можно для этого сделать, это перемножить векторы скалярно. Однако произведение pr не обладает нужной размерностью. В случае точечного заряда потенциал (без учета размерности множителя $1/4\pi\epsilon_0$) имеет размерность заряда, деленного на длину (q/r). Произведение $pr = qlr$ имеет размерность заряда, умноженного на квадрат длины. Чтобы получить требуемую размерность, нужно разделить pr на r^3 . В итоге получится формула (10.3).

Отметим, что, в то время как потенциал поля точечного заряда убывает как $1/r$, потенциал поля диполя убывает с расстоянием как $1/r^2$, т. е. гораздо быстрее.

Для вычисления напряженности E представим формулу (10.3) в виде

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

Рис. 10.2. К вычислению напряженности поля диполя: $dl_1 = dr$; $dl_2 = rd\theta$

и напишем соотношение (9.1) для двух направлений, одно из которых l_1 совпадает с направлением радиус-вектора r , а другое l_2 лежит в одной плоскости с осью диполя и направлено перпендикулярно к r в сторону возрастания угла θ (рис. 10.2).

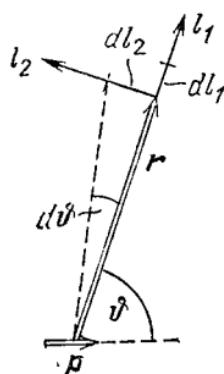
Учтя, что $dl_1 = dr$, получим для проекции вектора E на направление r выражение

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial l_1} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}. \quad (10.4)$$

При возрастании угла θ на $d\theta$ конец радиус-вектора перемещается на отрезок $dl_2 = rd\theta$. Поэтому проекция вектора E на направление l_2 (обозначим ее E_θ) равна

$$E_\theta = -\frac{\partial \Phi}{\partial l_2} = -\frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}. \quad (10.5)$$

Вследствие осевой симметрии поля вектор E лежит в плоскости, проходящей через ось диполя. Поэтому квадрат его модуля равен сумме квадратов проекций



на направления l_1 и l_2 :

$$\begin{aligned} E^2 = E_r^2 + E_\theta^2 &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{p}{r^3}\right)^2 (4 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{p}{r^3}\right)^2 (1 + 3 \cos^2 \vartheta). \end{aligned}$$

Отсюда

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}. \quad (10.6)$$

Найдем напряженности E_{\parallel} для точек оси диполя и E_{\perp} для точек плоскости, перпендикулярной к оси диполя и проходящей через его центр (рис. 10.3). Согласно формуле (10.5) при ϑ , равном нулю или π ,

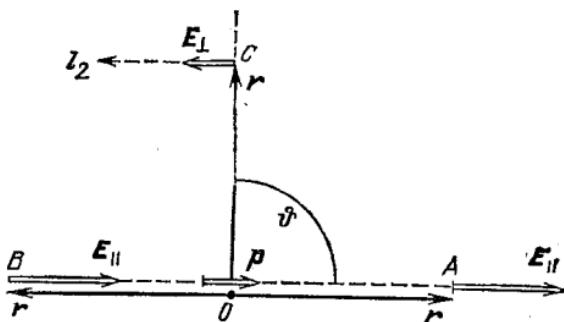


Рис. 10.3. В точке A проекция E_{\parallel} на направление r , т. е. E_r , положительна, в точке B — отрицательна. В точке C проекция E_{\perp} на направление l_2 , т. е. E_{θ} , положительна. Радиус-векторы точек A и B смещены на рисунке относительно оси диполя. На самом деле они лежат на этой оси

$E_{\theta} = 0$. Это означает, что на оси диполя вектор E направлен вдоль этой оси. Согласно формуле (10.4) $E_r > 0$ при $\vartheta = 0$ и $E_r < 0$ при $\vartheta = \pi$. Отсюда следует, что в обоих случаях направление вектора E_{\parallel} совпадает с направлением электрического момента диполя p (см. рис. 10.3). Для модуля напряженности поля на оси диполя по формуле (10.6) получается значение

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}. \quad (10.7)$$

Согласно формулам (10.4) и (10.5) при ϑ , равном $\pi/2$, $E_r = 0$, а $E_{\theta} > 0$. Это означает, что вектор E_{\perp} антипараллелен вектору p (см. рис. 10.3). Для модуля

вектора E_{\perp} формула (10.6) дает значение

$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \quad (10.8)$$

(ср. с (10.7)).

Отметим, что, в то время как напряженность поля точечного заряда убывает как $1/r^2$, напряженность поля диполя убывает как $1/r^3$, т. е. гораздо быстрее.

На рис. 10.4 показаны линии поля диполя. В соответствии с определением электрического диполя

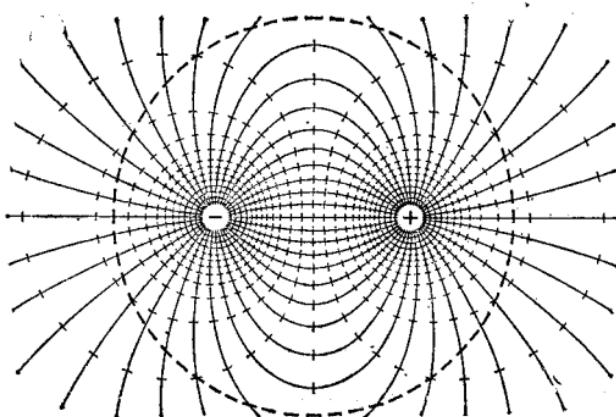


Рис. 10.4. Участки линий, лежащие вне показанной штриховой линией сферы, изображают поле диполя. Радиус сферы r , расстояние между зарядами l

изображенное поле можно считать полем диполя лишь за пределами сферы, показанной штриховой линией (радиус этой сферы $r \gg l$). Поле внутри сферы есть просто поле двух разноименных зарядов. Между полем диполя и полем разноименных зарядов нет четкой границы. Чем больше отношение r/l , тем точнее описывается поле за пределами сферы формулами, полученными в данном параграфе.

Рассмотрим электронейтральную систему N точечных зарядов, в которой имеется N_1 положительных зарядов q_i ($q_i > 0$), помещающихся в точках с радиус-векторами r_i , и N_2 отрицательных зарядов q_k ($q_k < 0$), помещающихся в точках с радиус-векторами r_k (N_1 не обязательно равно N_2). Электронейтральность системы означает, что $\sum q_i + \sum q_k = 0$,

т. е. $q_+ = \sum q_j$ отличается от $q_- = \sum q_k$ только знаком ($q_+ = -q_-$).

По аналогии с центром масс назовем «центром положительных зарядов» точку с радиус-вектором

$$\mathbf{r}_+ = \frac{\sum q_j \mathbf{r}_j}{\sum q_j} = \frac{\sum q_j \mathbf{r}_j}{q_+}, \quad (10.9)$$

а «центром отрицательных зарядов» — точку с радиус-вектором

$$\mathbf{r}_- = \frac{\sum q_k \mathbf{r}_k}{\sum q_k} = \frac{\sum q_k \mathbf{r}_k}{q_-} = -\frac{\sum q_k \mathbf{r}_k}{q_+}. \quad (10.10)$$

Естественно предположить, что поле, создаваемое системой на больших по сравнению с ее размерами расстояниях, сходно с полем, которое создавал бы диполь, образованный зарядами q_+ и q_- , помещенными в центры соответствующих зарядов. Электрический момент такого диполя равен

$$\mathbf{p} = q_+ (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \quad (10.11)$$

($\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-$ есть вектор, проведенный из центра отрицательных зарядов в центр положительных зарядов). Соответствующий расчет подтверждает правильность такого предположения.

Подставив в (10.11) вместо радиус-векторов их значения (10.9) и (10.10), получим, что

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^{N_1} q_j \mathbf{r}_j + \sum_{k=1}^{N_2} q_k \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \\ (N = N_1 + N_2).$$

Выражение

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \quad (10.12)$$

называется дипольным моментом системы N точечных зарядов (N может иметь любое значение, начиная с двух). Потенциал и напряженность поля, создаваемого такой системой, можно вычислять по формулам (10.3) — (10.6), подставляя в них выражение (10.12) для \mathbf{p} .

Можно показать, что величина (10.12) не зависит от выбора точки, из которой проводятся радиус-векторы r_i , и, следовательно, зависит лишь от взаимного расположения (от конфигурации) зарядов.

В частном случае $N = 2$ формула (10.12) переходит в формулу (10.2) для электрического момента диполя: $p = q(r_+ - r_-) = ql$.

Примером электронейтральной системы может служить неионизованная молекула. Дипольный момент представляет собой важную характеристику молекулы.

§ 11. Диполь во внешнем электростатическом поле

Если диполь находится в однородном электрическом поле, на его заряды действуют равные по модулю, противоположные направленные силы $+qE$ и

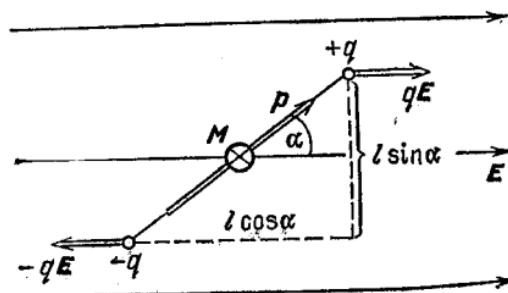


Рис. 11.1. Диполь в однородном электрическом поле. Вектор M направлен за чертеж

$-qE$ (рис. 11.1). Эти силы образуют пару, плечо которой равно $l \sin \alpha$. Модуль момента пары сил равен произведению силы на плечо:

$$M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha, \quad (11.1)$$

где $p = ql$ — модуль электрического момента диполя. Вращающий момент M перпендикулярен к векторам p и E ; α есть угол между векторами p и E . Поэтому можно написать, что

$$M = [p E]. \quad (11.2)$$

Таким образом, однородное электрическое поле оказывает на диполь ориентирующее действие, стремясь установить его по полю.

В соответствии с формулой (8.8) диполь обладает в электростатическом поле энергией $W = q\varphi_+ - q\varphi_-$, где φ_+ и φ_- — значения потенциала поля в точках, в которых находятся заряды $+q$ и $-q$. Потенциал однородного поля определяется выражением

$$\varphi = -Ex + \text{const},$$

где x — ось, вдоль которой направлен вектор E (см. формулу (9.7)). Следовательно, энергия диполя в электростатическом поле равна

$$W = q\varphi_+ - q\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-) = -qE(x_+ - x_-).$$

Здесь $x_+ - x_-$ есть разность координат точек, в которых находятся заряды $+q$ и $-q$. Из рис. 11.1 заключаем, что эта разность равна $l \cos \alpha$. Таким образом,

$$W = -qEl \cos \alpha = -pE \cos \alpha.$$

Полученное выражение представляет собой скалярное произведение векторов p и E , так что мы приходим к формуле

$$W = -pE, \quad (11.3)$$

которая определяет потенциальную энергию диполя с моментом p , находящегося в поле с напряженностью E . Эта формула справедлива как для однородного, так и для неоднородного поля.

Выражение (11.3) не включает в себя энергию самого диполя, т. е. ту работу, которую нужно совершить, чтобы сблизить заряды $+q$ и $-q$ до расстояния l .

По поводу формул (11.2) и (11.3) можно заметить следующее. Как вращающий момент, так и энергия должны определяться свойствами диполя (его моментом p) и свойствами поля (напряженностью E). Самый простой и «естественный» способ, каким можно «сконструировать» из двух векторов третий, — перемножить их векторно. В результате получится выражение (11.2). Самый «естественный» способ, каким можно получить из двух векторов скаляр, — перемножить их скалярно. В результате получится выражение (11.3). Легко проверить, что с размерностью в обоих случаях все обстоит благополучно.

В неоднородном электрическом поле на диполь кроме вращающего момента (11.2) действует сила, стремящаяся сообщить ему поступательное движение,

На рис. 11.2 изображен диполь, находящийся в поле точечного заряда. Видно, что диполь, ориентированный по полю, втягивается в область более сильного поля (для краткости мы будем говорить: «втягивается в поле»). Диполь, ориентированный против поля, выталкивается из поля. Ниже мы докажем (см.

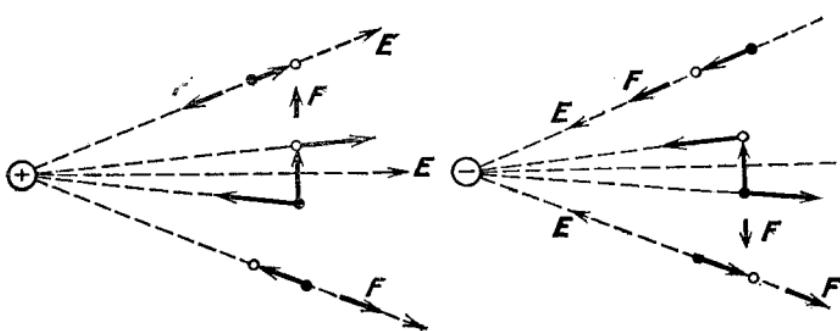


Рис. 11.2. Диполь в поле точечного заряда: белый кружок — положительный заряд диполя, черный кружок — отрицательный заряд. Диполь, ориентированный по полю, втягивается в поле; диполь, ориентированный против поля, выталкивается из поля; на диполь, перпендикулярный к полю, действует сила, коллинеарная с моментом диполя

формулу (11.8)), что модуль силы, действующей на диполь в этих двух случаях, равен $p|dE/dx|$, где dE/dx — производная модуля напряженности поля в том месте, где находится диполь (x — расстояние от заряда, создающего поле).

На диполь, перпендикулярный к полю, действует сила, направленная по оси диполя. Модуль этой силы

в два раза меньше, чем в случае, когда диполь ориентирован по полю (см. формулу (11.9)).

Поле, изображенное на рис. 11.3, наблюдается у краев плоского конденсатора. И здесь диполь, ориентированный по полю,

втягивается в поле. Легко убедиться в том, что диполь, ориентированный против поля, выталкивался бы из поля.

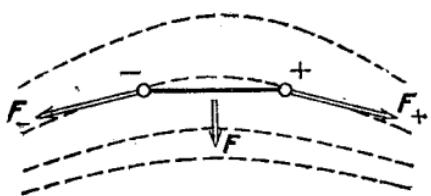


Рис. 11.3. Диполь, ориентированный по полю, втягивается в поле

Рассмотрим случай, когда диполь, находящийся в поле точечного заряда q' , ориентирован под произвольным углом α к полю (см. рис. 11.4, выполненный в предположении, что $q' > 0$). Сила \mathbf{F} равна сумме сил, действующих на заряды диполя: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_-$

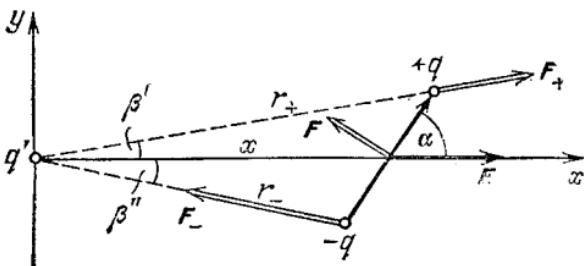


Рис. 11.4. Диполь в поле точечного заряда q' . Расстояние r_+ больше, чем r_- , на «длину» l диполя, умноженную на $\cos \alpha$. Вследствие того что $l \ll r$, углы, обозначенные буквой β , практически равны друг другу

Найдем проекции этой силы на оси x и y . Из рисунка следует, что

$$F_x = F_+ \cos \beta + F_- \cos(\pi - \beta) = (F_+ - F_-) \cos \beta,$$

где F_+ и F_- — модули соответствующих сил. Поскольку «длина» диполя мала по сравнению с расстоянием x от q' до диполя, угол β очень мал и $\cos \beta$ можно положить равным единице. Синус же этого угла можно считать равным самому углу:

$$\sin \beta = \beta = \frac{(l/2) \sin \alpha}{x}. \quad (11.4)$$

Кроме того, можно считать, что

$$\begin{aligned} r_+^2 &= [x + (l/2) \cos \alpha]^2 = x^2 + xl \cos \alpha, \\ r_-^2 &= [x - (l/2) \cos \alpha]^2 = x^2 - xl \cos \alpha \end{aligned} \quad (11.5)$$

(мы пренебрегли слагаемым $(l/2)^2 \cos^2 \alpha$). Тогда

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq'}{r_+^2} - \frac{qq'}{r_-^2} \right) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x^2 + xl \cos \alpha} - \frac{1}{x^2 - xl \cos \alpha} \right).$$

После приведения выражения в скобках к общему знаменателю приедем к формуле

$$F_x = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{2xl \cos \alpha}{x^4 - x^2 l^2 \cos^2 \alpha} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{2xl \cos \alpha}{x^4}$$

(слагаемое $x^2 l^2 \cos^2 \alpha$ много меньше x^4 , и им можно пренебречь).

Приняв во внимание, что ql равно модулю момента диполя p , напишем полученное выражение следующим образом:

$$F_x = p \cos \alpha \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q'}{x^3} \right) = p \cos \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{x^2} \right) = \\ = p \cos \alpha \frac{dE}{dx},$$

где E — модуль напряженности поля, создаваемого зарядом q' в центре диполя. Таким образом, мы пришли к формуле

$$F_x = p \cos \alpha \frac{dE}{dx}. \quad (11.6)$$

Напомним, что α — угол между векторами p и E , а ось x имеет направление, совпадающее с направлением вектора E .

Производная dE/dx отрицательна. Поэтому, если угол α острый, $F_x < 0$. Это означает, что направления силы и оси x противоположны — диполь втягивается в поле. Если угол α тупой, диполь выталкивается из поля.

Из рис. 11.4 следует, что проекция силы F на ось y

$$F_y = (F_+ + F_-) \sin \beta.$$

Подстановка значений модулей сил дает

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq'}{r_+^2} + \frac{qq'}{r_-^2} \right) \sin \beta = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_-^2 + r_+^2}{r_+^2 r_-^2} \sin \beta.$$

Положив $r_+^2 r_-^2$ равным x^4 и приняв во внимание формулы (11.4) и (11.5), получим

$$F_y = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{2x^2}{x^4} \frac{(l/2) \sin \alpha}{x} = p \sin \alpha \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 x^3} = \\ = -\frac{1}{2} p \sin \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{x^2} \right).$$

Выражение в скобках есть модуль вектора E . Следовательно,

$$F_y = -\frac{1}{2} p \sin \alpha \frac{dE}{dx}. \quad (11.7)$$

Поскольку производная dE/dx отрицательна, $F_y > 0$ (см. рис. 11.4).

Применим формулы (11.6) и (11.7) к трем частным случаям.

1. Если $\alpha = 0$, $F_y = 0$, $F_x = p(dE/dx)$. Модуль силы

$$F = p \left| \frac{dE}{dx} \right|. \quad (11.8)$$

2. Если $\alpha = \pi/2$, $F_x = 0$, $F_y = -(1/2)p(dE/dx)$. Модуль силы

$$F = \frac{1}{2}p \left| \frac{dE}{dx} \right|. \quad (11.9)$$

3. Если $\alpha = 45^\circ$, модуль составляющей силы, параллельной полю ($F_{\parallel} = |F_x|$), в два раза превышает модуль составляющей, перпендикулярной к полю ($F_{\perp} = |F_y|$):

$$F_{\parallel} = 2F_{\perp}. \quad (11.10)$$

Мы получили формулу (11.6) для случая поля точечного заряда. Однако она справедлива независимо от того, какая система зарядов создает поле E , при условии, что в том месте, где находится диполь, производные $\partial E/\partial y$ и $\partial E/\partial z$ равны нулю (напомним, что ось x направлена по полю, так что $E = E_x$).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Может ли быть отличным от нуля поле вне двух разноименно заряженных бесконечных плоскостей?
2. Какую работу нужно совершить, чтобы переместить заряд q' из бесконечности в точку, лежащую посередине между зарядами $+q$ и $-q$?
3. При какой взаимной ориентации диполя p и электрического поля E врачающий момент, действующий на диполь, будет максимальным?
4. При некоторой ориентации диполя его энергия в однородном электрическом поле равна W . Что произойдет с энергией в результате изменения направления диполя на противоположное?
5. Электрический диполь помещен на некотором расстоянии от точечного заряда. Как будет вести себя диполь после того, как будет предоставлен самому себе?

Примеры решения задач

1. Заряд $q = 1,00 \text{ мККл}$ распределен равномерно по объему шара радиуса $R = 10,0 \text{ мм}$. Найти потенциал φ и напряженность поля E в центре шара.

Решение. Разобьем шар на слои радиуса r и толщины dr . В таком слое содержится заряд

$$dq = q \frac{dV}{V} = q \frac{4\pi r^2 dr}{4\pi R^3/3} = q \frac{3r^2 dr}{R^3}$$

(dV — объем слоя, V — объем шара). Все заряды, входящие в dq , находятся от центра шара на одинаковом расстоянии r и, следовательно, создают в центре потенциал

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} \cdot 3r dr.$$

Проинтегрировав это выражение по r от 0 до R , получим потенциал в центре шара:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{R^3} \int_0^R r dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{R^3} \frac{R^2}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{2R} = \\ &= 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 1,00 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10,0 \cdot 10^{-3}} = 1,35 \cdot 10^6 \text{ В.} \end{aligned}$$

Вследствие сферически-симметричного распределения зарядов $E = 0$.

2. Потенциал некоторого электростатического поля имеет вид

$$\varphi = a(x^2 + y^2 + z^2),$$

где a — константа. Найти модуль напряженности поля в точке x, y, z .

Решение. Напряженность поля связана с потенциалом соотношением $E = -\operatorname{grad} \varphi$. Приравняв компоненты векторов, стоящих в обеих частях равенства, получим, что

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2ax, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -2az.$$

Квадрат вектора равен сумме квадратов его компонент:

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 = 4a^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Отсюда

$$E = 2a \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2ar,$$

где r — расстояние от начала координат.

Глава 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

§ 12. Поляризация диэлектриков

Диэлектриками (или изоляторами) называются вещества, не способные проводить электрический ток. Это определение не следует понимать буквально. Все вещества хотя бы в крайне малой степени проводят ток. Однако вещества, называемые диэлектриками, проводят ток в 10^{15} — 10^{20} раз хуже, чем вещества, называемые проводниками. Например, проводимость кварцевого стекла в 10^{25} раз меньше проводимости меди.

Атомы и молекулы состоят из положительно заряженных ядер и движущихся вокруг них отрицательно заряженных электронов. У диэлектриков заряды, входящие в состав молекулы, прочно связаны друг с другом и могут быть разъединены только при воздействии на них очень сильного поля. Поэтому заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются связанными. Под действием внешнего поля связанные заряды разных знаков лишь немного смещаются в противоположные стороны; покинуть пределы молекулы, в состав которой они входят, связанные заряды не могут.

Внутри или на поверхности диэлектрика могут находиться заряды, которые не входят в состав его молекул. Такие заряды, а также заряды, расположенные за пределами диэлектрика, мы будем называть сторонними¹⁾.

В зависимости от взаимного расположения зарядов наблюдаются два типа молекул. У молекул одного типа центры положительных и отрицательных зарядов смещены друг относительно друга, вследствие чего молекула обладает собственным дипольным моментом (см. формулу (9.12)). Такие молекулы называются полярными. Примерами могут служить молекулы HCl, H₂O и т. п. У молекул другого типа, называемых неполярными, дипольный момент равен нулю. Таковы молекулы H₂, N₂, O₂ и т. д., у которых вследствие их симметрии центры положительных и отрицательных зарядов совпадают.

¹⁾ Во многих книгах такие заряды называются свободными.

Под действием внешнего электрического поля молекулы различных типов ведут себя по-разному. На полярные молекулы поле в основном оказывает ориентирующее действие, стремясь установить их дипольными моментами по полю. Величину дипольного момента полярной молекулы поле существенно не изменяет. Ориентирующему действию поля на полярные молекулы противится тепловое движение, которое стремится разбросать моменты молекул равномерно по всем направлениям. В результате противоборства этих двух тенденций устанавливается преимущественная ориентация дипольных моментов по полю, тем большая, чем сильнее поле и чем ниже температура. Это приводит к тому, что вещество в целом приобретает электрический дипольный момент или, как говорят, поляризуется. Такой вид поляризации называется ориентационной поляризацией.

Действие поля на неполярную молекулу приводит к тому, что центр положительных зарядов смещается в направлении поля, а центр отрицательных зарядов — в противоположную сторону. В результате неполярная молекула приобретает индуцированный (наведенный) дипольный момент, точно ориентированный по полю. Такая поляризация называется электронной. Экспериментально установлено, что взаимное смещение центров зарядов, а следовательно, и дипольный момент пропорциональны напряженности поля, т. е. силе, действующей на заряды. В этом отношении неполярная молекула сходна с пружиной, удлинение которой пропорционально приложенной к ней силе. По этой причине неполярные молекулы называют упругими диполями. Соответственно полярные молекулы называют жесткими диполями.

Независимо от типа молекул диэлектрики под действием внешнего поля приобретают дипольный момент. Это явление называется поляризацией диэлектрика.

В качестве количественной характеристики поляризации естественно взять дипольный момент единицы объема диэлектрика, который называется поляризованностью диэлектрика и обозначается буквой P . Если диэлектрик поляризован однородно, поляризованность равна сумме дипольных моментов

молекул, содержащихся в единице объема вещества:

$$\mathbf{P} = \sum_{V=1} \mathbf{p} \quad (12.1)$$

(\mathbf{p} — дипольный момент отдельной молекулы; суммирование производится по объему V , равному единице).

В случае неоднородной поляризации для нахождения поляризованности в какой-либо точке диэлектрика нужно выделить в окрестности этой точки физически бесконечно малый объем ΔV , определить суммарный дипольный момент молекул в этом объеме и взять отношение его к ΔV :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}. \quad (12.2)$$

Поляризованный диэлектрик становится источником электрического поля \mathbf{E}' , которое накладывается на поле сторонних зарядов \mathbf{E}_0 . В итоге возникает поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'. \quad (12.3)$$

Поле, возбуждаемое зарядами молекул диэлектрика (микрополе), очень сильно изменяется как внутри молекул, так и в промежутках между ними. Под \mathbf{E}' в (12.3) подразумевается макрополе, получаемое усреднением микрополя по физически бесконечно малому объему.

Молекулы испытывают действие суммарного поля \mathbf{E} . Поэтому и поляризованность диэлектрика определяется этим полем. Опыт дает, что независимо от типа молекул поляризованность большинства изотропных диэлектриков (исключение составляют сегнетоэлектрики; см. § 17) пропорциональна напряженности поля в той же точке:

$$\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (12.4)$$

где κ — не зависящая от \mathbf{E} характеристика диэлектрика, называемая диэлектрической восприимчивостью.

Электрическая постоянная ϵ_0 введена в формулу (12.4) для того, чтобы сделать диэлектрическую восприимчивость безразмерной величиной. Размерность \mathbf{P} равна размерности дипольного момента $\mathbf{p} = ql$,

деленной на размерность объема, т. е. $[q]/L^2$. Согласно формуле (4.3) такую же размерность имеет произведение $\epsilon_0 E$.

В ионных кристаллах молекулы утрачивают свою обособленность. Весь кристалл представляет собой как бы одну гигантскую молекулу. Решетку ионного кристалла можно рассматривать как две вставленные друг в друга решетки, одна из которых образована положительными, а другая отрицательными ионами. Под действием внешнего поля обе решетки сдвигаются в противоположные стороны, что приводит к поляризации диэлектрика. Такая поляризация называется ионной. Поляризованность и в этом случае связана с напряженностью поля соотношением (12.4).

Отметим, что линейная зависимость между P и E наблюдается в не слишком сильных полях.

§ 13. Поверхностные и объемные связанные заряды

На рис. 13.1 изображен схематически поляризованный диэлектрик. Если нормальная составляющая

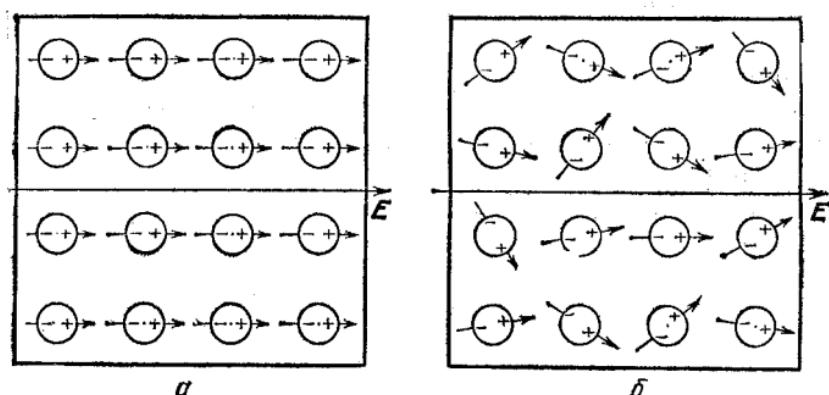


Рис. 13.1. Поляризованный диэлектрик с неполярным (а) и полярными (б) молекулами

напряженности поля E для данной поверхности отлична от нуля, то под действием поля заряды одного знака уходят внутрь, а другого знака выходят наружу. В результате в тонком поверхностном слое диэлектрика возникает избыток связанных зарядов одного знака.

На поверхности тела могут располагаться не только связанные, но и сторонние заряды. Чтобы отличить эти два случая, мы будем поверхностную плотность сторонних зарядов обозначать через σ , а плотность связанных зарядов — символом σ' . Так же мы будем поступать и в случае объемной плотности заряда ρ , определяемой выражением (6.6): ρ' будет означать объемную плотность связанных зарядов.

Чтобы найти связь между σ' и поляризованностью P , рассмотрим бесконечную плоскопараллельную пластину из однородного и изотропного диэлектрика, помещенную в однородное электрическое поле (рис. 13.2).

В случае, когда внешнее поле E_0 образует с нормалью n к пластине угол, отличный от нуля, направление поля E (см. (12.3)) в диэлектрике будет иным. Однако можно быть уверенным в том, что поле в диэлектрике также будет однородным. Поляризованность P будет совпадать по направлению с этим полем. Выделим мысленно в пластине объем в виде очень тонкого косого цилиндра с образующими, параллельными вектору P , и с основаниями площади ΔS , совпадающими с поверхностями пластины¹⁾. Этот объем равен

$$\Delta V = l \Delta S \cos \alpha,$$

где l — расстояние между основаниями цилиндра, α — угол между вектором P и внешней нормалью к положительно заряженной поверхности пластины.

Выделенный объем имеет дипольный электрический момент, модуль которого равен

$$P \Delta V = Pl \Delta S \cos \alpha$$

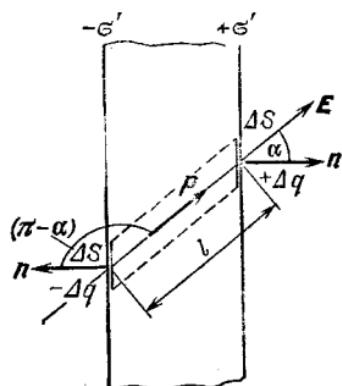


Рис. 13.2. К нахождению связи между σ' и P . Объем выделенного косого цилиндра $\Delta V = \Delta S l \cos \alpha$

¹⁾ Нельзя взять вместо стержня, выделенного мысленно из бесконечной пластины, тело в виде такого стержня, потому что это тело во внешнем поле будет поляризовано неоднородно.

(P — модуль поляризованности). Объемная плотность связанных зарядов внутри пластины равна нулю. Поэтому рассматриваемый объем эквивалентен диполю, образованному зарядами $+σ'ΔS$ и $-σ'ΔS$, находящимся на расстоянии l друг от друга. Следовательно, его дипольный момент можно представить в виде $σ'ΔSl$. Приравняв оба выражения для момента, получим, что

$$PlΔS \cos α = σ'ΔSl,$$

откуда

$$σ' = P \cos α = P_n. \quad (13.1)$$

Здесь P_n — проекция поляризованности на внешнюю нормаль к поверхности пластины. Для правой поверхности на рис. 13.2 P_n и $σ'$ положительны, для левой — отрицательны.

Формула (13.1) справедлива и тогда, когда неоднородный диэлектрик произвольной формы находится в неоднородном электрическом поле. В этом случае $σ'$ определяется нормальной составляющей \mathbf{P} в непосредственной близости к данному элементу поверхности.

Подставив в (13.1) выражение (12.4) для P , придем к формуле

$$σ' = κε_0 E_n, \quad (13.2)$$

где E_n — проекция на внешнюю нормаль напряженности поля внутри диэлектрика.

Теперь обратимся к нахождению объемной плотности связанных зарядов, возникающих при поляризации неоднородного диэлектрика (рис. 13.3). Допустим, что диэлектрик образован неполярными молекулами двух сортов: 1) молекулами со связанными зарядами $+e'$ и $-e'$ (их центры изображены белыми и черными кружками), 2) молекулами со связанными зарядами $+2e'$ и $-2e'$ (белые кружки с точкой внутри и черные кружки с ободком). Неоднородность заключается в том, что концентрация молекул обоих сортов в разных местах диэлектрика неодинакова.

На рис. 13.3 изображено расположение центров связанных зарядов после включения внешнего поля, направленного вдоль оси x . До включения поля центры зарядов совпадали и находились в точках, отме-

ченных крестиками. При включении поля из объема, ограниченного штриховой линией, выходят суммарные заряды $+7e'$ и $-5e'$. В результате в этом объеме возникает избыточный связанный заряд, равный $-2e'$, и ρ' будет отрицательной.

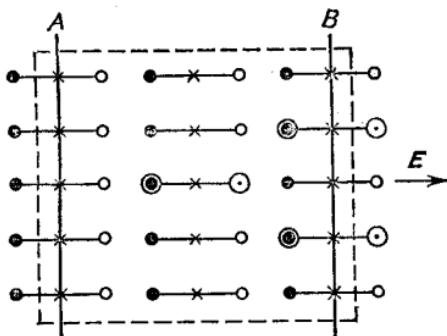


Рис. 13.3. Поляризация неоднородного диэлектрика: белые кружки — заряды $+e'$, черные кружки — заряды $-e'$, белые кружки с точкой внутри — заряды $+2e'$, черные кружки с ободком — заряды $-2e'$

Очевидно, что поляризованность в сечении **B** больше, чем в сечении **A**. Следовательно, $dP_x/dx > 0$ (в рассматриваемом случае $P_x = P$). Это означает, что дивергенция вектора **P** положительна (см. формулу (5.13)). (Отметим, что знак дивергенции не зависит от выбора направления оси x : если бы мы направили ось влево, изменился бы знак и у P_x , и у dx , так что знак их отношения остался бы прежним.) Если бы мы поменяли местами молекулы, расположенные в сечениях **A** и **B** (рис. 13.3), ρ' стала бы положительной, а $\operatorname{div} \mathbf{P}$ отрицательной.

Рассмотренный нами пример показывает, что объемная плотность связанных зарядов как-то связана с дивергенцией вектора **P**. Чтобы установить вид этой связи, рассмотрим в диэлектрике с неполярными молекулами воображаемую малую площадку dS (рис. 13.4). В небольшой окрестности этой площадки поле **E** и диэлектрик можно считать однородными.

Для простоты предположим, что при включении поля отрицательные связанные заряды остаются на месте, а положительные заряды смещаются по полулю на расстояние l . При этом через площадку dS пройдут положительные связанные заряды молекул,

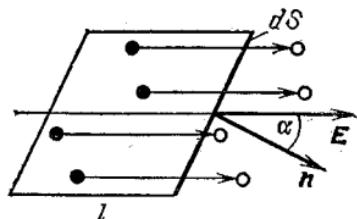


Рис. 13.4. Смещение центров положительных связанных зарядов (белые кружки) относительно центров отрицательных зарядов (черные кружки)

заключенных в косом цилиндре объема $dV = l \cos \alpha dS$. Если число молекул в единице объема равно n , а положительный связанный заряд молекулы равен $+e'$, то через dS пройдет положительный заряд

$$dq' = e'n dV = e'n l \cos \alpha dS.$$

Приняв во внимание, что $e'l$ есть дипольный момент молекулы, а $e'l n$ — модуль момента единицы объема, т. е. P , можно написать, что

$$dq' = P dS \cos \alpha = \mathbf{P} d\mathbf{S},$$

где $d\mathbf{S}$ — вектор элементарной площадки.

Представим себе внутри диэлектрика замкнутую поверхность S . При включении поля через эту поверхность выйдет наружу связанный заряд

$$q'_{\text{выш}} = \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV$$

(см. формулу (5.12)). В результате в объеме V , ограниченном поверхностью S , возникает избыточный связанный заряд

$$q'_{\text{изб}} = -q'_{\text{выш}} = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV.$$

Введя объемную плотность связанных зарядов ρ' , можно написать равенство

$$q'_{\text{изб}} = \int_V \rho' dV = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV. \quad (13.3)$$

Это равенство должно выполняться для любого произвольным образом выбранного объема, что возможно лишь в том случае, если в каждой точке диэлектрика выполняется соотношение

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (13.4)$$

Таким образом, объемная плотность связанных зарядов равна дивергенции поляризованности \mathbf{P} , взятой с обратным знаком. Формула (13.4) справедлива для диэлектриков как с неполярными, так и с полярными молекулами.

Соотношению (13.4) можно дать наглядную интерпретацию. Молекулы выстраиваются дипольными моментами вдоль линий вектора \mathbf{P} . Поэтому в области, где начинаются линии \mathbf{P} (и, следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{P}$ положительна), образуется избыток отрицательных

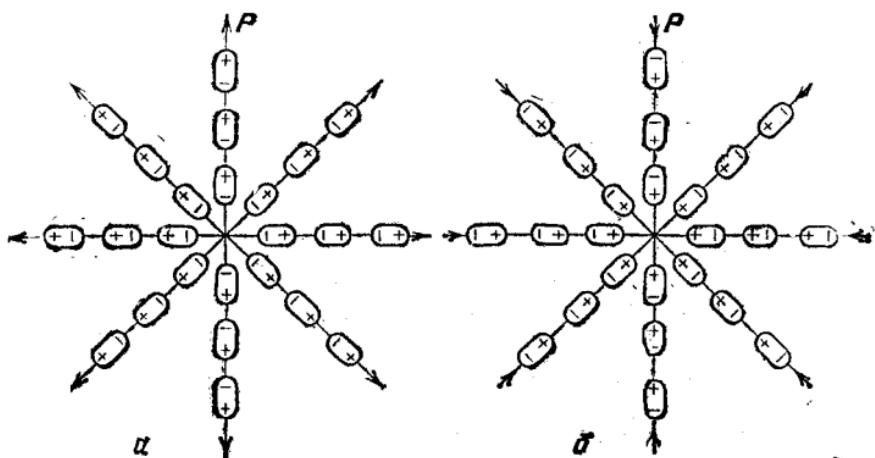


Рис. 13.5. а — В точках с положительной $\operatorname{div} \mathbf{P}$ образуется отрицательный связанный заряд. б — В точках с отрицательной $\operatorname{div} \mathbf{P}$ образуется положительный связанный заряд

связанных зарядов (рис. 13.5а), а в области, в которой оканчиваются линии \mathbf{P} (и, следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{P}$ отрицательна), образуется избыток положительных связанных зарядов (рис. 13.5б).

§ 14. Электрическое смещение

Связанные заряды, как и любые другие электрические заряды, являются источниками электрического поля. Поэтому при вычислении поля в диэлектриках, наряду с плотностью ρ сторонних зарядов, нужно учитывать плотность ρ' связанных зарядов. Следовательно, при наличии диэлектриков формула (6.7) должна быть написана в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho'), \quad (14.1)$$

Эта формула малопригодна для нахождения вектора \mathbf{E} , так как она выражает дивергенцию искомой величины \mathbf{E} через плотность ρ' , которая в свою очередь определяется напряженностью \mathbf{E} . Получается «заколдованный круг» — чтобы найти \mathbf{E} , нужно знать ρ' , а чтобы найти ρ' , нужно знать \mathbf{E} .

Указанное затруднение удается обойти, если ввести вспомогательную величину, источниками которой являются только сторонние заряды. Для нахождения этой величины подставим в формулу (14.1) выражение (13.4) для ρ' :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}).$$

Напишем это соотношение следующим образом:

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \quad (14.2)$$

(постоянную величину ϵ_0 мы внесли под знак div). Выражение

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (14.3)$$

и есть интересующая нас вспомогательная величина. Ее дивергенция определяется плотностью только сторонних зарядов. Называют величину (14.3) электрическим смещением поля (прежнее название: электрическая индукция).

В конечном счете нас интересует не \mathbf{D} , а \mathbf{E} . Поэтому от \mathbf{D} было бы мало прока, если бы не существовало простой связи между величинами \mathbf{E} и \mathbf{D} . Для установления этой связи подставим в (14.3) выражение (12.4) для \mathbf{P} :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \kappa \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \kappa) \mathbf{E} \quad (14.4)$$

(напомним, что κ есть диэлектрическая восприимчивость вещества).

Безразмерную величину

$$\epsilon = 1 + \kappa \quad (14.5)$$

называют относительной диэлектрической проницаемостью или просто диэлектрической проницаемостью вещества¹). Ее определяют экспериментально. В вакууме $\epsilon = 1$.

¹⁾ В электротехнике вводят так называемую абсолютную диэлектрическую проницаемость $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon$. Однако эта величина физического смысла не имеет, и мы ею пользоваться не будем.

С учетом (14.5) формулу (14.4) можно представить в виде

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}. \quad (14.6)$$

Таким образом, вектор \mathbf{D} пропорционален вектору \mathbf{E} . Для вакуума формула (14.6) упрощается следующим образом:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (14.7)$$

Согласно формулам (4.3) и (14.7) электрическое смещение поля точечного заряда в вакууме определяется выражением

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (14.8)$$

Отсюда следует, что единицей электрического смещения является кулон на квадратный метр ($\text{Кл}/\text{м}^2$).

Поскольку связанные заряды не являются источниками поля вектора \mathbf{D} , формула (14.8) справедлива и для поля точечного заряда в однородной и изотропной диэлектрической среде.

Согласно (14.2)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (14.9)$$

Эта формула выражает теорему Гаусса для вектора \mathbf{D} в дифференциальной форме: *дивергенция вектора \mathbf{D} равна объемной плотности сторонних зарядов.*

Чтобы получить теорему Гаусса для \mathbf{D} в интегральной форме, проинтегрируем соотношение (14.9) по произвольному объему V :

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Преобразуем левую часть по теореме Остроградского — Гаусса (см. формулу (5.12)):

$$\oint_S \mathbf{D} dS = \int_V \rho dV. \quad (14.10)$$

Слева стоит поток Φ_D вектора \mathbf{D} через замкнутую поверхность S , справа — суммарный сторонний заряд, заключенный внутри этой поверхности. Если этот

заряд образован дискретными точечными зарядами q_i , равенство (14.10) можно написать в виде

$$\Phi_D = \sum q_i. \quad (14.11)$$

Справа стоит алгебраическая сумма сторонних зарядов, заключенных внутри поверхности S .

Формулы (14.10) и (14.11) выражают теорему Гаусса для вектора D в интегральной форме: поток электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, заключенных внутри этой поверхности.

В соответствии с формулой (14.11) единицей потока вектора D является кулон (Кл). Заряд в 1 Кл создает через охватывающую его поверхность поток смещения в 1 Кл. Это означает, что на заряде q начинается (если $q > 0$) либо оканчивается (если $q < 0$) количество линий D , численно равное $|q|$.

Поле вектора D , как и всякое векторное поле, можно изобразить с помощью линий электрического смещения, которые строятся по правилам, описанным в § 5. В отличие от линий вектора E , которые могут начинаться и оканчиваться как на сторонних, так и на связанных зарядах, линии вектора D могут начинаться и оканчиваться только на сторонних зарядах. Через точки, в которых помещаются связанные заряды, линии смещения проходят, не прерываясь.

§ 15. Условия на границе раздела двух диэлектриков

Найдем условия, которым должны удовлетворять векторы E и D на границе раздела двух однородных и изотропных диэлектрических сред. Для простоты границу раздела будем считать плоской. Величины, характеризующие поле в первой среде, будем отмечать индексом 1, во второй среде — индексом 2.

Поскольку среды изотропны, из соображений симметрии следует, что векторы E_1 и E_2 лежат в одной плоскости. Действительно, допустим, что вектор E_2 отклоняется от перпендикулярной к границе раздела плоскости, в которой лежит вектор E_1 , в какую-то сторону. Однако с тем же правом он мог бы отклониться и в противоположную сторону. Это противоречие устраняется только в том случае, если вектор E_2

лежит в одной плоскости с вектором E_1 . То же самое справедливо и для вектора D .

Линии вектора D могут начинаться или оканчиваться только на сторонних зарядах. Поэтому, если на границе раздела таких зарядов нет, линии D проходят через границу, не прерываясь (рис. 15.1). Согласно (5.5) поток вектора D через элементарную площадку ΔS равен $D_n \Delta S$ (D_n — проекция D на нормаль к площадке). Этот поток численно равен количеству линий D , пересекающих площадку ΔS (см. (5.6)). Из рис. 15.1 вытекает, что потоки векторов D_1 и D_2 через ΔS одинаковы. Следовательно,

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (15.1)$$

Это означает, что нормальная составляющая вектора D в обоих диэлектриках одна и та же. (Имеется в виду значение D в непосредственной близости к границе раздела.)

Перейдя в соответствии с (14.6) от D к E , получим, что

$$\epsilon_0 \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_{2n},$$

откуда

$$E_{1n}/E_{2n} = \epsilon_2/\epsilon_1. \quad (15.2)$$

Теперь воспользуемся тем, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю (см. формулу (8.3)). Пусть в средах с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 создано однородное поле, напряженность которого в первом диэлектрике равна E_1 , а во втором E_2 . Возьмем в плоскости, в которой лежат векторы E_1 и E_2 , небольшой прямоугольный контур (рис. 15.2) и вычислим для него циркуляцию вектора E . Ширину контура b возьмем настолько малой, чтобы вкладом в

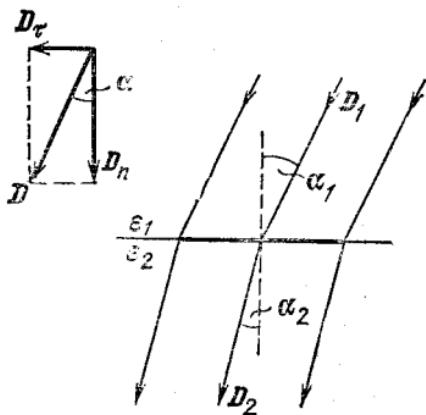


Рис. 15.1. Преломление линий D на границе раздела двух диэлектриков. Слева вверху изображено разложение вектора D на нормальную D_n и тангенциальную D_τ составляющие

циркуляцию сторон, перпендикулярных к границе раздела, можно было пренебречь. Тогда для циркуляции получится выражение

$$\oint E_t dl = (E_{2\tau} - E_{1\tau}) a,$$

где E_τ — модуль тангенциальной составляющей вектора E (т. е. составляющей, параллельной поверхно-

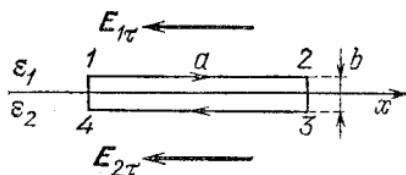


Рис. 15.2. Контур длины a и ширины b на границе раздела двух диэлектриков. Плоскость контура перпендикулярна к плоскости, разделяющей среды

сти раздела). Циркуляция должна быть равна нулю, поэтому

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (15.3)$$

Перейдя в равенстве (15.3) от E к D , получим, что

$$D_{1\tau}/\epsilon_0 \epsilon_1 = D_{2\tau}/\epsilon_0 \epsilon_2,$$

откуда

$$D_{1\tau}/D_{2\tau} = \epsilon_1/\epsilon_2. \quad (15.4)$$

Соотношения (15.1), (15.2), (15.3) и (15.4) определяют условия, которым удовлетворяют векторы E и D на границе раздела двух диэлектриков. Из этих условий вытекает, что тангенциальная составляющая вектора E и нормальная составляющая вектора D при переходе через границу раздела изменяются непрерывно. Нормальная же составляющая вектора E и тангенциальная составляющая вектора D при переходе через границу раздела изменяются скачком, т. е. претерпевают разрыв.

Из схемы, изображенной на рис. 15.1 слева вверху, следует, что $\operatorname{tg} \alpha = D_\tau/D_n$. Поэтому

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{D_{1\tau}/D_{1n}}{D_{2\tau}/D_{2n}} = \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (15.5)$$

(см. формулы (15.1) и (15.4)). Соотношение (15.5) выражает закон преломления линий электрического смещения. Это соотношение справедливо также и для линий напряженности поля.

Из (15.5) вытекает, что в случае, изображенном на рис. 15.1, $\epsilon_1 > \epsilon_2$. В среде с большей диэлектрической проницаемостью линии смещения гуще (т. е. D больше), чем в среде с меньшей ϵ .

§ 16. Вычисление полей в диэлектриках

Для выяснения смысла величин D и ϵ рассмотрим несколько примеров полей в диэлектриках. Во всех примерах диэлектрик предполагается однородным и изотропным.

Поле внутри пластины, перпендикулярной к направлению поля. Предположим, что имеется однородное поле, создаваемое двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными с поверхностью плотностью $+\sigma$ и $-\sigma$ (рис. 16.1). Напряженность поля в отсутствие диэлектриков равна E_0 , а смещение

$$\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0. \quad (16.1)$$

Внесем в это поле пластину из диэлектрика, расположив ее так, как показано на рисунке. Под действием поля диэлектрик поляризуется и на поверхностях пластины появятся связанные заряды плотности $+\sigma'$ и $-\sigma'$.

В § 14 было выяснено, что линии вектора \mathbf{D} могут начинаться и оканчиваться только на сторонних зарядах. Через точки, в которых помещаются связанные заряды, линии \mathbf{D} проходят, не прерываясь. Поэтому картина линий \mathbf{D} после внесения в поле пластины останется прежней — и внутри, и вне пластины электрическое смещение будет равно \mathbf{D}_0 :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0. \quad (16.2)$$

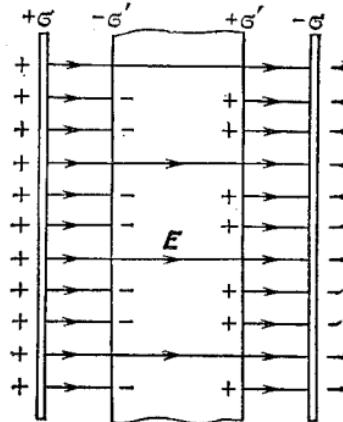


Рис. 16.1. Поле внутри пластины из диэлектрика, помещенной в однородное внешнее поле. Рисунок выполнен в предположении, что $\epsilon = 3$

Таким образом, электрическое смещение внутри пластины совпадает с электрическим смещением внеш-

нега поля и, следовательно, не зависит от ϵ диэлектрика.

Разделив согласно формуле (14.6) D на $\epsilon\epsilon_0$, получим напряженность поля в пластине:

$$E = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{D_0}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (16.3)$$

(см. формулу (16.1)). Следовательно, в рассматриваемом случае диэлектрическая проницаемость ϵ показывает, во сколько раз ослабляется поле в диэлектрике.

В соответствии с формулой (7.3) $E_0 = \sigma/\epsilon_0$. Подставив это значение E_0 в соотношение (16.1), написанное для модулей векторов, получим, что

$$D_0 = \sigma. \quad (16.4)$$

Этот результат согласуется с тем, что на заряде σ начинается (или оканчивается) количество линий вектора D , численно равное $|\sigma|$.

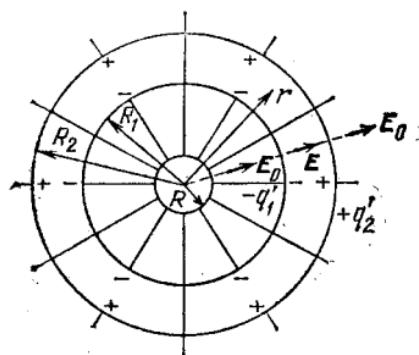


Рис. 16.2. Шаровой слой из диэлектрика в центрально-симметричном электрическом поле

внутри слоя будет равно смещению D_0 , которое наблюдалось бы в отсутствие слоя.

Согласно формуле (14.8)

$$D = D_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}, \quad (16.5)$$

(r — расстояние от центра слоя). Разделив D на $\epsilon\epsilon_0$, получим напряженность поля в диэлектрике:

$$E = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (16.6)$$

Здесь E_0 — напряженность поля в отсутствие диэлектрика. Таким образом, и в этом случае ϵ показывает, во сколько раз ослабляется поле в диэлектрике.

Формула (16.5), а следовательно, и формула (16.6) справедливы и внутри, и вне слоя (вне слоя нужно положить $\epsilon = 1$). Это означает, что часть линий E , начавшихся на заряженной сфере, обрывается на внутренней поверхности слоя (оканчивается на заряде $-q'_1$) и затем возобновляется на внешней поверхности слоя (начинается на заряде $+q'_2$). Отсюда следует, что заряды $-q'_1$ и $+q'_2$ равны по модулю.

Положив внутренний радиус слоя R_1 равным радиусу R заряженной сферы, а внешний радиус R_2 равным бесконечности, придем к случаю заряженной сферы, погруженной в безграничный однородный и изотропный диэлектрик. Согласно (16.6) напряженность поля вне такой сферы

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2}. \quad (16.7)$$

Такова же будет напряженность поля, создаваемого в безграничном диэлектрике точечным зарядом q .

Для обоих рассмотренных примеров характерно то, что диэлектрик был однородным и изотропным, а ограничивающие его поверхности совпадали с экви-потенциальными поверхностями поля сторонних зарядов. Полученный нами в этих случаях результат является общим. *Если однородный и изотропный диэлектрик полностью заполняет объем, ограниченный экви-потенциальными поверхностями поля сторонних зарядов, то оказываются справедливыми равенства (16.2) и (16.3).*

Если упомянутые условия не соблюдаются, то D является функцией не только E_0 , но также и ϵ , т. е. зависит от свойств диэлектрика. Это приводит к тому, что равенства (16.2) и (16.3) не выполняются. Поясним это следующими примерами.

Поле внутри пластины, расположенной косо по отношению к линиям поля. На рис. 16.3а изображена бесконечная пластина из диэлектрика, расположенная косо по отношению к внешнему полю E_0 . Разложим это поле на две составляющие: $E_{0\parallel}$, направленную параллельно пластине, и $E_{0\perp}$, перпендикулярную

к пластине. Диэлектрик поляризуется, в результате чего возникнет поле E' , которое ослабит составляющую $E_{0\perp}$ в ϵ раз. Поэтому перпендикулярная составляющая поля в диэлектрике будет равна $E_\perp = E_{0\perp}/\epsilon$. Составляющая $E_{0\parallel}$ останется без изменений: $E_\parallel =$

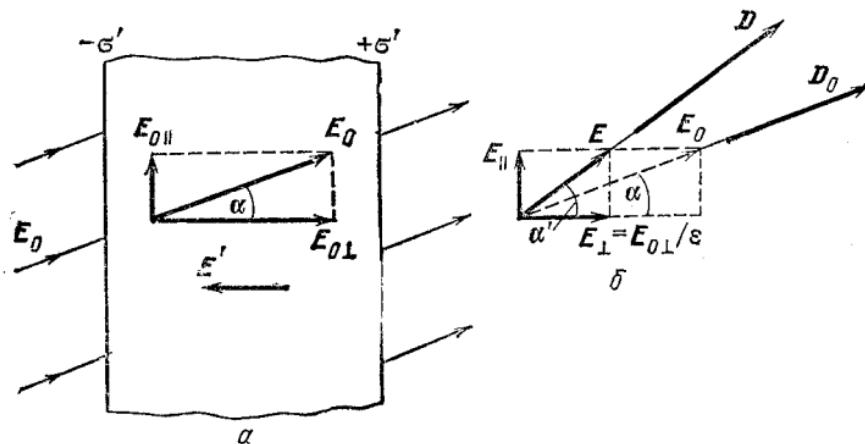


Рис. 16.3. В пластине, расположенной косо по отношению к направлению поля, $D \neq D_0$ и $E \neq E_0/\epsilon$. Рисунок выполнен для случая, когда $\epsilon = 2$

$= E_{0\parallel}$. В итоге поле E в диэлектрике не будет совпадать по направлению с полем E_0 (рис. 16.3б). Соответственно вектор D не будет совпадать с D_0 , причем угол ($\alpha' - \alpha$) между векторами D_0 и D возрастает с увеличением ϵ .

Стержень из диэлектрика, расположенный вдоль линий поля. Внесем в однородное поле напряженности E_0 тонкий, очень длинный стержень из диэлектрика (рис. 16.4). Поскольку длина стержня много больше его диаметра, при рассмотрении поля вблизи середины стержня длину стержня можно полагать бесконечной. Согласно условию (15.3) напряженность поля внутри стержня совпадает с напряженностью внешнего поля:

$$E = E_0. \quad (16.8)$$

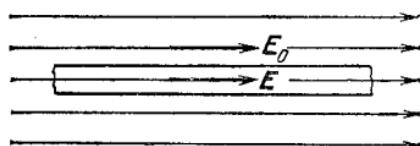
Соответственно

$$D = \epsilon D_0. \quad (16.9)$$

Таким образом, D зависит от ϵ , т. е. от свойств диэлектрика.

Итак, оказалось, что формулы (16.2) и (16.3) в двух последних случаях не соблюдаются. Отсюда следует неправомерность широко распространенного определения, согласно которому \mathbf{D} будто бы является

Рис. 16.4. В стержне, расположеннем вдоль линий поля, напряженность E совпадает с напряженностью E_0 внешнего поля



характеристикой поля, не зависящей от свойств диэлектрика.

Электрическое смещение есть применяемая для расчета электрических полей вспомогательная величина, дивергенция которой определяется плотностью только сторонних зарядов.

§ 17. Сегнетоэлектрики

Существуют кристаллические диэлектрики, обладающие в определенном интервале температур спонтанной (самопроизвольной) поляризованностью. Первоначально это явление было открыто для сегнетовой соли, в связи с чем подобные вещества получили название сегнетоэлектриков. Первое фундаментальное исследование электрических свойств сегнетовой соли было выполнено советскими учеными И. В. Курчатовым и П. П. Кобеко.

Отличие сегнетоэлектриков от остальных диэлектриков состоит в следующем.

1. В то время как у обычных диэлектриков ϵ бывает порядка нескольких единиц, достигая в виде исключения нескольких десятков (у воды, например, $\epsilon = 81$), диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков бывает порядка нескольких тысяч.

2. Зависимость поляризованности P от напряженности поля E не является линейной (см. выходящий из начала координат участок I кривой на рис. 17.1). Следовательно, диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности поля.

3. При изменениях поля значения поляризованности P (а следовательно, и смещения D) отстают от напряженности поля E , в результате чего P и D определяются не только значением E в данный момент,

но и предшествующими значениями E , т. е. зависят от предыстории сегнетоэлектрика. Это явление называется гистерезисом (от греческого «гистерезис» — запаздывание). При циклических изменениях поля зависимость P от E следует изображенной на рис. 17.1 кривой, называемой петлей гистерезиса. Первоначально поляризованность растет с увеличением E

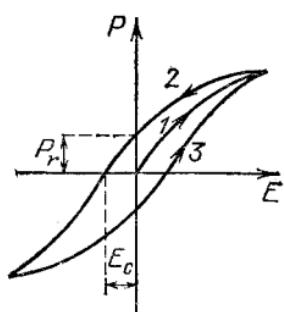


Рис. 17.1. Зависимость поляризованности сегнетоэлектрика от напряженности электрического поля

в соответствии с ветвью 1 кривой. Уменьшение P происходит по ветви 2. При обращении E в нуль сегнетоэлектрик сохраняет значение поляризованности P_r , называемое остаточной поляризованностью. Только под действием противоположного поля напряженности E_c поляризованность становится равной нулю. Это значение напряженности называется коэрцитивной силой. При дальнейшем изменении E получается ветвь 3 петли гистерезиса, затем снова ветвь 2 и т. д.

Свойства и поведение сегнетоэлектриков имеют следующее объяснение. Взаимодействие частиц в кристалле сегнетоэлектрика приводит к тому, что их дипольные моменты спонтанно устанавливаются параллельно друг другу. В исключительных случаях однаковая ориентация дипольных моментов распространяется на весь кристалл. Обычно же в кристалле возникают называемые доменами области, в пределах каждой из которых дипольные моменты параллельны друг другу. Однако направления поляризации разных доменов бывают различными, так что результирующий момент всего кристалла может быть равен нулю. При включении поля вначале происходит смещение границ между доменами, в результате чего происходит увеличение тех доменов, моменты которых составляют с E меньший угол, за счет доменов, у которых угол между P и E больше. На следующей стадии происходит поворот моментов доменов в направлении поля.

У каждого сегнетоэлектрика имеется температура, при которой он утрачивает необычные свойства и ста-

новится нормальным диэлектриком. Эта температура называется точкой Кюри. Сегнетова соль имеет две точки Кюри: -15°C и $+22,5^{\circ}\text{C}$, причем она ведет себя как сегнетоэлектрик лишь в температурном интервале, ограниченном указанными значениями. При температуре ниже -15°C и выше $+22,5^{\circ}\text{C}$ электрические свойства сегнетовой соли обычны.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое поляризованность диэлектрика?
2. Могут ли быть в ориентационно поляризованном диэлектрике молекулы, дипольные моменты которых образуют с направлением поля углы, близкие к $\pi/2$?
3. Какова размерность диэлектрической восприимчивости?
4. В некоторой точке изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ смещение имеет значение D . Чему равна поляризованность P в этой точке?
5. Что происходит с нормальной составляющей электрического смещения при переходе через границу раздела двух диэлектриков?

Примеры решения задач

1. В однородное электрическое поле с напряженностью $E_0 = 100 \text{ В/м}$ помещена бесконечная плоскопараллельная пластина из однородного и изотропного диэлектрика с проницаемостью $\epsilon = 2,00$. Пластина расположена перпендикулярно направлению поля. Определить:

- а) модули напряженности поля E и электрического смещения D внутри пластины,
- б) модуль поляризованности диэлектрика P ,
- в) поверхностную плотность связанных зарядов σ' .

Решение. а) Вне пластины электрическое смещение $D_0 = \epsilon_0 E_0$. Поскольку смещение перпендикулярно к пластине, при переходе через ее границу оно не изменяется и имеет в пластине то же значение, что и вне ее:

$$D = D_0 = \epsilon_0 E_0.$$

Такое же соотношение имеет место для модулей векторов:

$$D = \epsilon_0 E_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 100 = 0,88 \text{ нКл/м}^2.$$

Смещение и напряженность поля связаны соотношением $D = \epsilon_0 \epsilon E$. Следовательно, напряженность поля в пластине

$$E = D/\epsilon_0 \epsilon = \epsilon_0 E_0 / \epsilon_0 \epsilon = E_0 / \epsilon.$$

Соответственно

$$E = E_0/\epsilon = 100/2,00 = 50 \text{ В/м.}$$

б) Поляризованность $P = \kappa\epsilon_0 E = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E$. Подставив значение напряженности $E = E_0/\epsilon$, получим, что

$$P = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \epsilon_0 E_0.$$

Отсюда

$$P = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \epsilon_0 E_0 = \frac{2,00 - 1}{2,00} \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} 100 = 0,44 \text{ нКл/м}^2.$$

в) Поляризованность перпендикулярна к границам диэлектрика. Поэтому $P_n = \pm P$. Следовательно,

$$\sigma' = P_n = \pm P = \pm 0,44 \text{ нКл/м}^2.$$

2. Два однородных и изотропных диэлектрика с проницаемостями $\epsilon_1 = 2,00$ и $\epsilon_2 = 3,00$ разделены плоской границей. Напряженность поля в первом диэлектрике образует с нормалью к границе раздела угол $\alpha_1 = 20,0^\circ$. Чему равен угол α_2 между нормалью к границе раздела и направлением поля во втором диэлектрике?

Решение. Углы α_1 и α_2 связаны с проницаемостями диэлектриков соотношением $\operatorname{tg} \alpha_1 / \operatorname{tg} \alpha_2 = \epsilon_1 / \epsilon_2$. Отсюда

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{3,00}{2,00} \operatorname{tg} 20,0^\circ \right) = 28,6^\circ.$$

Г л а в а 3. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 18. Равновесие зарядов на проводнике

Носители заряда в проводниках приходят в движение под действием сколь угодно малой силы. Поэтому для равновесия зарядов на проводнике необходимо выполнение двух условий:

1. Напряженность поля внутри проводника должна быть равна нулю:

$$E = 0. \quad (18.1)$$

2. Напряженность поля на поверхности проводника должна в каждой точке быть направлена по нормали к поверхности:

$$E = E_n. \quad (18.2)$$

Первое условие означает, что потенциал внутри проводника должен быть постоянным (см. формулу

(9.3)). Из второго условия получается, что в случае равновесия зарядов поверхность проводника является эквипотенциальной.

Сообщенный проводнику заряд распределяется по поверхности проводника. Это вытекает из следующих соображений. Мы знаем, что заряды являются источниками поля (на них начинаются или оканчиваются линии вектора E). Поэтому, если хотя бы небольшая часть сообщенного заряда оказалась внутри проводника, на ней начинались бы (или оканчивались) линии E и поле внутри было отлично от нуля.

В случае полого проводника избыточный заряд также распределяется по внешней поверхности. Линиям поля, начавшимся (окончившимся) на заряде, находящемся на поверхности полости, не на чем было бы окончиться (начаться) — в теле проводника линий поля нет, а внутри полости нет зарядов противоположного знака. (Предполагается, что внутри полости нет заряженных тел.)

Вывод о том, что избыточный заряд распределяется на внешней поверхности проводника, вытекает также из того, что одноименные элементарные заряды, образующие данный заряд, взаимно отталкиваются и, следовательно, стремятся расположиться на наибольших расстояниях друг от друга.

Рассмотрим элемент ΔS поверхности заряженного проводника (рис. 18.1). Если поверхностная плотность заряда в данном месте равна σ , то на элементе

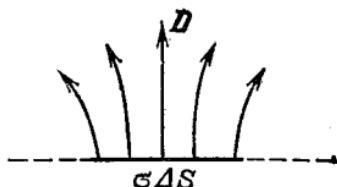


Рис. 18.1. Картина линий D вблизи элемента ΔS , несущего положительный заряд $\sigma \Delta S$

ΔS сосредоточен заряд $\sigma \Delta S$ (рисунок выполнен в предположении, что $\sigma > 0$). На этом заряде начинаются $\sigma \Delta S$ линий D ¹⁾. В силу условия (18.2) в непосредственной близости к поверхности линии идут по нормали. Поэтому их густота равна числу линий

1) В дальнейшем мы будем для краткости говорить, что на заряде q начинается (оканчивается) q линий D , подразумевая, что количество линий численно равно $|q|$.

$\sigma \Delta S$, деленному на ΔS , т. е. σ . Густота линий равна модулю вектора D . Следовательно, можно написать, что

$$D = \sigma. \quad (18.3)$$

Отсюда получается, что в непосредственной близости к поверхности заряженного проводника

$$E = \sigma / \epsilon_0 \epsilon, \quad (18.4)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник.

Рассмотрим поле, создаваемое изображенным на рис. 18.2 заряженным проводником. На больших расстояниях от проводника эквипотенциальные поверхности имеют характерную для поля точечного заряда

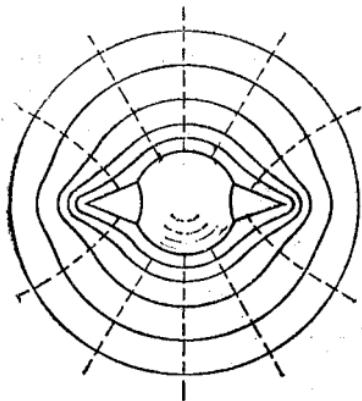


Рис. 18.2. Эквипотенциальные поверхности (сплошные линии) и линии напряженности поля (штриховые линии) заряженного проводника

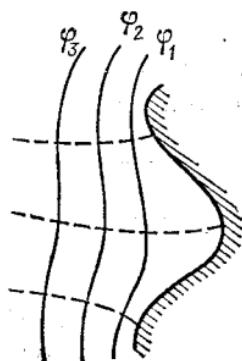


Рис. 18.3. Эквипотенциальные поверхности (сплошные линии) и линии напряженности поля (штриховые линии) вблизи впадины в заряженном проводнике

форму сферы (на рисунке из-за недостатка места сферическая поверхность изображена на небольшом расстоянии от проводника; штриховыми линиями показаны линии напряженности поля). По мере приближения к проводнику эквипотенциальные поверхности становятся все более сходными с поверхностью проводника, которая является эквипотенциальной. Вблизи выступов эквипотенциальные поверхности располагаются гуще, значит, и напряженность поля здесь больше. Отсюда следует, что плотность заряда на вы-

ступах особенно велика (см. формулу (18.4)). К такому же выводу можно прийти, учитя, что вследствие взаимного отталкивания заряды стремятся расположиться как можно дальше друг от друга.

Вблизи углублений в проводнике эквипотенциальные поверхности располагаются реже (рис. 18.3). Соответственно напряженность поля и плотность заряда в этих местах будут меньше. Вообще, плотность заряда зависит от кривизны поверхности — она растет с увеличением положительной кривизны (выпуклости) и убывает с увеличением отрицательной кривизны (вогнутости). Особенно велика бывает плотность заряда на остриях. Поэтому напряженность поля вблизи остриев может быть очень большой.

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда приходят в движение: положительные в направлении вектора E , отрицательные — в противоположную сторону. В результате на концах проводника возникают заряды противоположного знака, называемые индуцированными зарядами (рис. 8.4; штриховыми линиями).

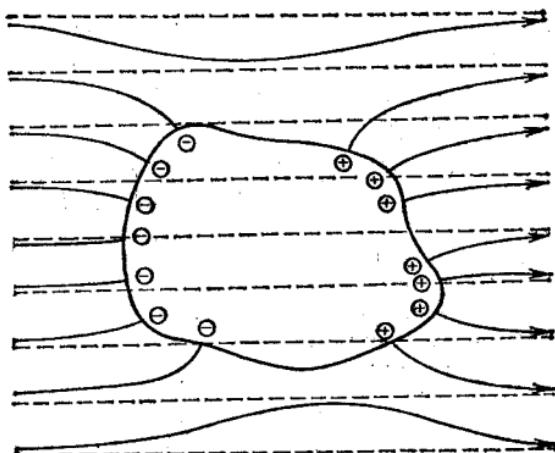


Рис. 18.4. Картина линий напряженности поля, в которое внесен незаряженный проводник

показаны линии напряженности внешнего поля до внесения в него проводника). Поле этих зарядов направлено противоположно внешнему полю. Следовательно, накапливание зарядов на концах проводника приводит к ослаблению в нем поля. Перераспределение

ние носителей заряда происходит до тех пор, пока не окажутся выполненными условия (18.1) и (18.2), т. е. пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника — нормальными к его поверхности (см. рис. 18.4).

Таким образом, незаряженный проводник, внесенный в электрическое поле, разрывает часть линий напряженности — они оканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных.

Индуцированные заряды располагаются на внешней поверхности проводника. Если внутри проводника имеется полость, то при равновесном распределении индуцированных зарядов поле внутри ее равно нулю. На этом основывается электростатическая защита. Когда какой-то прибор хотят защитить от воздействия внешних полей, его окружают проводящим экраном. Внешнее поле компенсируется внутри экрана возникающими на его поверхности индуцированными зарядами. Подобный экран действует хорошо и в том случае, если его сделать не сплошным, а в виде густой сетки.

§ 19. Электроемкость уединенного проводника

Сообщим некоторому проводящему телу (проводнику) заряд q . Этот заряд распределится по поверхности проводника так, чтобы выполнялись условия (18.1) и (18.2). Если сообщить проводнику еще такую же порцию заряда q , она распределится по поверхности точно так же, как первая. Любая последующая порция заряда распределится по поверхности подобно предыдущим, иначе условия (18.1) и (18.2) будут нарушены. Это утверждение справедливо только для уединенного (т. е. удаленного от других тел) проводника.

Из сказанного вытекает, что различные по величине заряды распределяются по поверхности уединенного проводника подобным образом: отношение плотностей заряда в двух произвольно взятых точках поверхности при любой величине заряда будет одним и тем же. Отсюда следует, что потенциал уединенного проводника пропорционален находящемуся на

нем заряду. Действительно, вследствие подобия в распределении зарядов увеличение в некоторое число раз заряда приводит к увеличению в такое же число раз напряженности поля в каждой точке окружающего проводник пространства. Соответственно в такое же число раз возрастает работа переноса единичного положительного заряда из бесконечности на поверхность проводника, т. е. потенциал проводника.

Итак, потенциал φ уединенного проводника пропорционален находящемуся на проводнике заряду q :

$$q = C\varphi. \quad (19.1)$$

Коэффициент пропорциональности C называется **электроемкостью** (или просто **емкостью**) уединенного проводника. Согласно (19.1)

$$C = q/\varphi. \quad (19.2)$$

В соответствии с (19.2) **электроемкость уединенного проводника численно равна заряду, сообщение которого повышает потенциал проводника на единицу**.

Найдем емкость шара радиуса R , погруженного в безграничный однородный и изотропный диэлектрик с проницаемостью ϵ . Воспользовавшись формулой (9.5), вычислим потенциал φ , который приобретает шар после сообщения ему заряда q :

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_\infty &= \int_R^\infty \mathbf{E} dr = \int_R^\infty E_r dr = \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} dr = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R}. \end{aligned}$$

Положив потенциал на бесконечности φ_∞ равным нулю, получим для потенциала шара выражение

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R}.$$

Отсюда

$$C = q/\varphi = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (19.3)$$

Итак, емкость уединенного шара пропорциональна его радиусу и диэлектрической проницаемости окружающей шар среды.

За единицу емкости принимается емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл. Эта единица называется фарадом (Φ).

Емкостью в 1 Φ обладал бы уединенный шар радиуса $9 \cdot 10^9$ м, т. е. радиуса, в 1500 раз большего радиуса Земли. Следовательно, фарад — очень большая величина. Поэтому на практике используют дольные единицы: миллифарад ($1 \text{ м}\Phi = 10^{-3} \Phi$), микрофарад ($1 \text{ мк}\Phi = 10^{-6} \Phi$), нанофарад ($1 \text{ н}\Phi = 10^{-9} \Phi$) и пикофарад ($1 \text{ п}\Phi = 10^{-12} \Phi$).

§ 20. Конденсаторы

Емкость уединенных проводников невелика. Например, шар таких размеров, как Земля, обладает емкостью всего лишь 700 мкФ. Вместе с тем бывают нужны устройства, которые при небольшом потенциале накапливали бы на себе («конденсировали») большие заряды. В основу таких устройств, называемых конденсаторами, положен тот факт, что емкость проводника возрастает при приближении к нему другого проводника. Это вызвано тем, что под действием поля, создаваемого заряженным проводником, на находящемся поблизости незаряженном проводящем теле возникают индуцированные заряды. Индуцированный заряд иного знака, чем заряд q на проводнике, располагается ближе к проводнику, чем одноименный с q индуцированный заряд, и, следовательно, оказывает большее влияние на его потенциал. Поэтому при поднесении к заряженному проводнику незаряженного проводящего тела потенциал проводника уменьшается. Согласно формуле (19.3) это означает увеличение емкости проводника.

Конденсаторы делают в виде двух проводников (называемых обкладками), помещенных близко друг к другу. Для того чтобы внешние тела не влияли на емкость конденсатора, обкладкам придают такую форму и так располагают их друг относительно друга, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми на них зарядами, было сосредоточено внутри конденсатора. Этому условию удовлетворяют две пластинки, расположенные близко друг к другу, два коаксиальных ци-

линдра и две концентрические сферы (см. § 7). Соответственно бывают плоские, цилиндрические и сферические конденсаторы. Поскольку поле заключено внутри конденсатора, линии электрического смещения начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. Следовательно, сторонние заряды, сооб-щаляемые обкладкам, имеют одинаковую величину и различны по знаку.

Емкостью конденсатора называют величину C , пропорциональную заряду q , находящемуся на одной из обкладок (на другой находится заряд $-q$), и обратно пропорциональную разности потенциалов между обкладками:

$$C = q/(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (20.1)$$

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ называют напряжением между соответствующими точками. Поэтому формулу (20.1) можно представить в виде

$$C = q/U, \quad (20.2)$$

где U — напряжение между обкладками.

Емкость конденсаторов измеряется в тех же единицах, что и емкость уединенных проводников (см. § 19).

Найдем емкость плоского конденсатора. Пусть площадь обкладки равна S , а расстояние между обкладками d . Зазор между обкладками предполагается заполненным диэлектриком с проницаемостью ϵ . Если d много меньше линейных размеров обкладок, в подавляющей части объема поле будет таким, как поле двух бесконечных разноименно заряженных плоскостей (см. § 7). Только вблизи краев обкладок поле будет постепенно ослабляться (рассеиваться). Поэтому мы не внесем существенной погрешности, если будем поле во всем объеме конденсатора вычислять по формуле (7.3), подставив вместо σ отношение заряда q , находящегося на обкладке, к площади обкладки S . Приняв во внимание, что диэлектрик ослабляет поле в ϵ раз (см. формулу (16.3)), получим для напряженности поля в диэлектрике выражение

$$E = \sigma/\epsilon_0\epsilon = q/\epsilon_0\epsilon S.$$

Согласно формуле (9.5) напряжение между обкладками

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S} \int_0^d dx = \frac{qd}{\epsilon_0 \epsilon S}$$

(ось x перпендикулярна к обкладкам). Отсюда для емкости плоского конденсатора получается формула

$$C = q/U = \epsilon_0 \epsilon S/d. \quad (20.3)$$

Отметим, что практически во всем объеме плоского конденсатора поле является однородным.

Если длина l обкладок цилиндрического конденсатора много больше зазора $d = R_2 - R_1$ между обкладками, рассеянием поля вблизи краев обкладок можно пренебречь и вычислять поле в зазоре по формуле

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{er} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{erl}$$

(см. (7.5) и (16.3)). Напряжение между обкладками

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{erl} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 erl} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Следовательно, емкость цилиндрического конденсатора определяется выражением

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 erl}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (20.4)$$

Предположив, что $d = (R_2 - R_1) \ll R_1$, преобразуем знаменатель выражения (20.4) по формуле $\ln(1 + x) \approx x$, справедливой для $x \ll 1$:

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) = \ln \left(1 + \frac{d}{R_1} \right) \approx \frac{d}{R_1}.$$

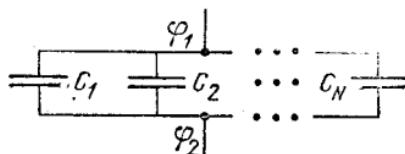
Подставив приближенное значение логарифма в (20.4) и учитя, что $2\pi R_1 l$ равно площади обкладки S , придем к формуле

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 erl R_1}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d},$$

совпадающей с формулой (20.3) для емкости плоского конденсатора.

Из выражений (20.3) и (20.4) ясно, почему введение между обкладками прослойки из сегнетоэлектрика позволяет получить при небольших размерах конденсатора значительную емкость.

Рис. 20.1. Параллельное соединение конденсаторов



Кроме емкости, конденсатор характеризуется предельным напряжением U_{\max} , которое можно прикладывать к обкладкам конденсатора, не опасаясь его пробоя. При превышении этого напряжения между обкладками проскаивает искра, в результате чего разрушается диэлектрик и конденсатор выходит из строя.

Располагая некоторым набором конденсаторов, можно получить много различных значений емкости, если применить соединение конденсаторов в батареи.

При параллельном соединении (рис. 20.1) одна из обкладок каждого конденсатора имеет потенциал φ_1 , а другая φ_2 . Поэтому на соединенных вместе обладках накапливается суммарный заряд

$$q = \sum q_k = \sum C_k (\varphi_1 - \varphi_2) = \\ = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum C_k.$$

Разделив этот заряд на приложенное к батарее напряжение $U = \varphi_1 - \varphi_2$, найдем емкость батареи:

$$C = \sum C_k. \quad (20.5)$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов емкости складываются.

При последовательном соединении (рис. 20.2) первая обкладка каждого следующего конденсатора образует со второй обкладкой предыдущего единый проводник, на котором при подключении напряжения возникают индуцированные заряды $-q$ и $+q$ такой же величины, как заряд $+q$ на первой обкладке

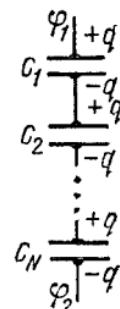


Рис. 20.2. Последовательное соединение конденсаторов

первого конденсатора и заряд $-q$ на второй обкладке последнего конденсатора. Поэтому напряжение на каждом из конденсаторов $U_k = q/C_k$. Сумма этих напряжений равна напряжению U , приложенному к батарее:

$$U = \sum U_k = \sum \frac{q}{C_k} = q \sum \frac{1}{C_k}.$$

Отношение U к q дает величину, обратную емкости батареи C . Следовательно,

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_k} \quad (20.6)$$

При последовательном соединении конденсаторов складываются величины, обратные емкости.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. При соблюдении каких условий заряды на проводнике будут находиться в равновесии?
2. Отношение напряженностей поля в двух точках в непосредственной близости к поверхности заряженного проводника равно двум. Что можно сказать о плотности заряда вблизи этих точек?
3. Чем определяется емкость конденсатора?
4. N конденсаторов емкости C каждый соединены последовательно. Чему равна емкость образованной батареи конденсаторов?

Примеры решения задач

1. Площадь каждой обкладки плоского конденсатора $S = 1,00 \text{ м}^2$, расстояние между обкладками $d = 5,00 \text{ мм}$. Зазор между обкладками заполнен изотропным диэлектриком, проницаемость которого изменяется в направлении, перпендикулярном к обкладкам, по линейному закону от значения $\epsilon_1 = 2,00$ вблизи одной обкладки до $\epsilon_2 = 5,44$ вблизи другой. Определить емкость C конденсатора.

Решение. Емкость конденсатора $C = q/(\varphi_1 - \varphi_2)$, где q — заряд на одной из обкладок, $\varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов между обкладками. Возьмем перпендикулярную к обкладкам ось x , направленную от положительно заряженной (левой) к отрицательно заряженной (правой) обкладке; начало оси совместим с левой обкладкой. В этом случае напряженность поля E имеет только одну компоненту E_x , равную

модулю вектора E . Поэтому соотношение $E = -\text{grad } \varphi$ упрощается следующим образом:

$$E = E_x = -d\varphi/dx, \text{ откуда } d\varphi = -E dx \quad (1)$$

(φ зависит только от координаты x).

Электрическое смещение в зазоре $D = \sigma = q/S$. По условию

$$\epsilon = \epsilon_1 + kx, \text{ где } k = (\epsilon_2 - \epsilon_1)/d \quad (0 \leq x \leq d).$$

Следовательно, напряженность поля в зазоре изменяется по закону

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{q}{S \epsilon_0 (\epsilon_1 + kx)}.$$

Согласно формуле (1)

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= - \int_2^1 d\varphi = \int_1^2 d\varphi = \int_0^d E dx = \frac{q}{S \epsilon_0} \int_0^d \frac{dx}{\epsilon_1 + kx} = \\ &= \frac{q}{S \epsilon_0 k} \ln(\epsilon_1 + kx) \Big|_0^d = \frac{qd}{S \epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1)} \ln(\epsilon_2/\epsilon_1) = \\ &= \frac{1,00(5,44 - 2,00)}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \ln(5,44/2,00) \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 6,1 \text{ нФ}. \end{aligned}$$

2. На два последовательно соединенных конденсатора, имеющих емкости $C_1 = 100 \text{ пФ}$ и $C_2 = 200 \text{ пФ}$, подано постоянное напряжение $U = 300 \text{ В}$. Определить напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах и заряд q на их обкладках.

Решение. Обозначим буквой q модуль зарядов, возникших на обкладках конденсаторов. Тогда можно написать, что

$$U_1 = q/C_1, \quad U_2 = q/C_2.$$

Отсюда следует равенство

$$C_1 U_1 = C_2 U_2. \quad (2)$$

Кроме того,

$$U = U_1 + U_2. \quad (3)$$

Решив совместно уравнения (2) и (3), найдем, что

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = \frac{200}{100 + 200} 300 = 200 \text{ В},$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = \frac{100}{100 + 200} 300 = 100 \text{ В}.$$

$$\begin{aligned} q = C_1 U_1 = C_2 U_2 &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = \frac{100 \cdot 200}{100 + 200} 10^{-12} \cdot 300 = \\ &= 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}. \end{aligned}$$

Глава 4. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

§ 21. Энергия системы точечных зарядов

В § 8 было показано, что кулоновские силы консервативны. Следовательно, система точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n обладает взаимной потенциальной энергией. Чтобы найти выражение для этой энергии, предположим, что заряды последовательно перемещаются из бесконечности в соответствующие точки поля (рис. 21.1). Начнем с заряда q_1 .

Перенесение его из бесконечности в точку 1 не требует совершения работы, поскольку остальные заряды удалены от него на бесконечность и с ним не взаимодействуют ($A_1 = 0$).

Для перенесения заряда q_2 из бесконечности в точку 2 нужно совершить работу против сил поля, созданного зарядом q_1 ¹). Согласно формуле (8.10) эта работа равна произведению q_2 на потенциал φ_2 поля, созданного зарядом q_1 в точке 2:

$$A_2 = q_2 \varphi_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

(см. формулу (8.6)).

Для перенесения заряда q_3 из бесконечности в точку 3 надо совершить работу, равную произведению q_3 на потенциал φ_3 поля, созданного зарядами q_1 и q_2 в точке 3:

$$A_3 = q_3 \varphi_3 = q_3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right).$$

¹⁾ Казалось бы, что в случае разноименных зарядов они могут сближаться «сами по себе», без каких-либо внешних сил. Однако, сближаясь, заряды будут приобретать скорость. Для того чтобы они оказались неподвижными на расстоянии r_{12} друг от друга, необходимо совершить над ними работу A_2 , которая в случае разноименных зарядов будет отрицательной.

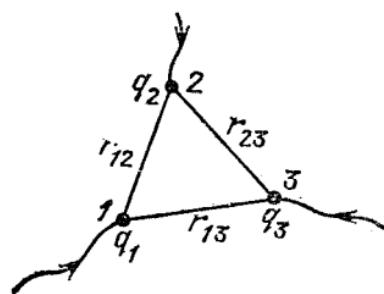


Рис. 21.1. Последовательное перенесение зарядов из бесконечности в соответствующие точки пространства

нного зарядом q_1 ¹). Согласно формуле (8.10) эта работа равна произведению q_2 на потенциал φ_2 поля, созданного зарядом q_1 в точке 2:

Сумма работ даст энергию системы трех зарядов:

$$W = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right).$$

Учтя, что, например, $q_1 q_2 / r_{12} = q_2 q_1 / r_{21}$, полученной формуле можно придать симметричный вид:

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_3 q_2}{r_{32}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, k=1 \\ (i \neq k)}}^3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}.$$

При суммировании индексы i и k пробегают независимо друг от друга значения 1, 2, 3; слагаемые, у которых $i = k$, исключаются.

Отметим, что полученное нами выражение для W не зависит от того, в какой последовательности переносятся заряды из бесконечности в соответствующие точки пространства.

Можно убедиться в том, что аналогичная формула получается для системы любого числа N точечных зарядов с тем лишь отличием, что индексы i и k пробегают при суммировании значения 1, 2, ..., N :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, k=1 \\ (i \neq k)}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}. \quad (21.1)$$

Подчеркнем, что выражение (21.1) определяет работу, которую нужно совершить, чтобы находившиеся первоначально на бесконечно больших расстояниях друг от друга заряды разместить в заданных точках пространства. Эта работа зависит от расстояний r_{ik} между зарядами, т. е. от конфигурации системы зарядов.

Формуле (21.1) можно придать вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i,$$

где

$$\Phi_i = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_{ik}} \quad (21.2)$$

есть потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i , в той точке, где находится заряд q_i .

Таким образом, энергия взаимодействия N точечных зарядов определяется формулой

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i. \quad (21.3)$$

§ 22. Энергия заряженных проводников

Заряд q , находящийся на некотором проводнике, можно рассматривать как систему точечных зарядов Δq . Поверхность проводника является эквипотенциальной. Поэтому потенциал точек, в которых находятся точечные заряды Δq , одинаков и равен потенциалу Φ проводника. Воспользовавшись формулой (21.3), получим для энергии заряженного проводника выражение

$$W = \frac{1}{2} \sum \Phi \Delta q = \frac{1}{2} \Phi \sum \Delta q = \frac{1}{2} \Phi q.$$

Приняв во внимание формулу (19.2), можно написать, что

$$W = \frac{\Phi q}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\Phi^2}{2}. \quad (22.1)$$

Любое из этих выражений определяет энергию заряженного проводника.

Найдем энергию заряженного конденсатора. Предположим, что потенциал обкладки, на которой находится заряд $+q$, равен Φ_1 , а потенциал обкладки, на которой находится заряд $-q$, равен Φ_2 . Тогда каждый из элементарных зарядов $+\Delta q$, на которые можно разделить заряд $+q$, находится в точке с потенциалом Φ_1 , а каждый из зарядов $-\Delta q$, на которые можно разделить заряд $-q$, — в точке с потенциалом Φ_2 . Согласно формуле (21.3) энергия такой системы зарядов равна

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \left[\sum (+\Delta q) \Phi_1 + \sum (-\Delta q) \Phi_2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} [(+q) \Phi_1 + (-q) \Phi_2] = \frac{1}{2} q (\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{2} q U. \end{aligned}$$

Приняв во внимание формулу (20.2), можно получить для энергии заряженного конденсатора три выражения:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (22.2)$$

Формулы (22.2) отличаются от формул (22.1) только заменой ϕ на U .

Выражение для энергии конденсатора можно использовать для определения силы, с которой пластины плоского конденсатора притягивают друг друга. Проведем ось x , начало которой совместим с левой пластиной (рис. 22.1). Тогда координата x правой пластины будет определять зазор d между пластинами.

Согласно формулам (22.2) и (20.3) энергия конденсатора

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon S} x.$$

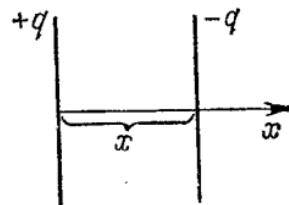


Рис. 22.1. Плоский конденсатор, зазор между обкладками которого может изменяться

Продифференцируем это выражение по x , полагая q неизменным (конденсатор отключен от источника напряжения). В результате получим проекцию на ось x силы F , действующей на правую пластину:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon S}. \quad (22.3)$$

Знак минус указывает на то, что сила F направлена противоположно оси x , т. е. к левой пластине. Модуль выражения (22.3) дает модуль силы, с которой обкладки притягивают друг друга:

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon S}. \quad (22.4)$$

§ 23. Энергия электрического поля

Выразим энергию заряженного плоского конденсатора через характеристики поля в зазоре между обкладками. Подстановка выражения (20.3) для емкости конденсатора в формулу $W = CU^2/2$ (см. (22.2))

приводит к соотношению

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S U^2}{2d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \left(\frac{U}{d} \right)^2 S d.$$

Отношение U/d дает напряженность E поля между обкладками конденсатора; произведение Sd равно объему V конденсатора, т. е. объему, в котором сосредоточено поле. Следовательно,

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V. \quad (23.1)$$

В плоском конденсаторе поле однородно. Поэтому энергия распределена по объему конденсатора равномерно. Следовательно, в единице объема поля содержится энергия

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}.$$

С учетом соотношения (14.6) полученную формулу можно представить в виде

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon}. \quad (23.2)$$

Выражения (23.2) определяют плотность энергии электрического поля.

Мы получили формулы (23.2) для случая, когда поле однородно. Однако эти формулы справедливы для любого электрического поля. Если поле неоднородно, то плотность энергии в некоторой точке P определяется по формулам (23.2) подстановкой значений E (или D) и ϵ в точке P .

Формула $W = q^2/2C$ связывает энергию конденсатора с зарядами на его обкладках, формула (23.1) — с напряженностью поля, порождаемого зарядами. Возникает вопрос, где же локализована (т. е. сосредоточена) энергия, что является носителем энергии — заряды или поле? В рамках электростатики, которая изучает постоянные во времени поля неподвижных зарядов, дать ответ на этот вопрос невозможно. Постоянные поля и обусловившие их заряды не могут существовать обособленно друг от друга. Однако изменяющиеся во времени поля могут существовать независимо от возбудивших их зарядов и распространяются в пространстве в виде электромагнитных волн. Опыт показывает, что электромагнитные волны пере-

носят энергию. В частности, энергия доставляется на Землю от Солнца электромагнитными волнами. Следовательно, носителем энергии являются не заряды, а поля.

Зная плотность энергии в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в любом объеме V . Для этого нужно вычислить интеграл

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} dV. \quad (23.3)$$

В качестве примера вычислим энергию поля заряженного проводящего шара радиуса R , помещенного в однородный безграничный диэлектрик. Напряженность поля в этом случае является функцией только r :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2}.$$

Разобьем окружающее шар пространство на концентрические шаровые слои толщины dr . Объем слоя равен $dV = 4\pi r^2 dr$. В нем заключена энергия

$$dW = w dV = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \frac{dr}{r^2}.$$

Энергия поля равна

$$W = \int dW = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R} = \frac{q^2}{2C}$$

(согласно (19.3) $4\pi\epsilon_0 \epsilon R$ есть емкость шара).

Полученное нами выражение совпадает с выражением для энергии проводника, обладающего емкостью C и несущего на себе заряд q (см. формулу (22.1)).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Имеется система точечных зарядов. Что произойдет с энергией системы, если изменить знаки всех зарядов на противоположные?
2. Какую работу нужно совершить, чтобы разноименные точечные заряды q_1 и q_2 , расположенные первоначально на расстоянии r , разнести на бесконечное расстояние друг от друга?

3. Заряженный конденсатор отключен от источника напряжения. Что произойдет с энергией конденсатора, если первоначально пустой зазор между обкладками заполнить диэлектриком с проницаемостью ϵ ?

Примеры решения задач

1. Вычислить энергию W кулоновского взаимодействия двух электронов, находящихся друг от друга на расстоянии $r = 1,00$ мм.

Решение. Энергия взаимодействия двух зарядов $W = (1/4\pi\epsilon_0)q_1q_2/r$. В данном случае $q_1 = q_2 = -e$. Следовательно,

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = 9 \cdot 10^9 \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{1,00 \cdot 10^{-3}} = 2,3 \cdot 10^{-25} \text{ Дж.}$$

2. Точечный заряд $q = 1,00$ мКл помещается в центре шарового слоя из однородного и изотропного диэлектрика $\epsilon = 3,00$. Внутренний радиус слоя $a = 100$ мм, внешний $b = 200$ мм. Найти энергию W , заключенную в пределах диэлектрика.

Решение. Напряженность поля в диэлектрике

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2}.$$

Разобьем диэлектрик на шаровые слои радиуса r и толщины dr . Объем слоя $dV = 4\pi r^2 dr$.

Плотность энергии в слое

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon q^2}{2 (4\pi\epsilon_0)^2 \epsilon^2 r^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{8\pi\epsilon r^4}.$$

Умножив плотность энергии на объем слоя, получим энергию, заключенную в слое:

$$dW = w dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{8\pi\epsilon r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 dr}{2\epsilon r^2}.$$

Проинтегрировав это выражение по r в пределах от a до b , найдем энергию, заключенную в диэлектрике:

$$\begin{aligned} W &= \int w dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2\epsilon} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \\ &= 9 \cdot 10^9 \frac{(1,00 \cdot 10^{-6})^2}{2 \cdot 3,00} \left(\frac{1}{0,100} - \frac{1}{0,200} \right) = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Г л а в а 5. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 24. Электрический ток

Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов. Носителями тока могут быть электроны, а также положительные и отрицательные ионы, т. е. атомы или молекулы, потерявшие либо присоединившие к себе один или несколько электронов.

Носители тока находятся в беспорядочном тепловом движении. Через воображаемую площадку переносится в обоих направлениях одинаковый заряд и ток отсутствует. При наличии электрического поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение носителей — возникает ток. Подобно этому в потоке газа на хаотическое тепловое движение молекул накладывается их упорядоченное движение.

Заряд, переносимый через некоторую воображаемую поверхность (например, через поперечное сечение проводника) в единицу времени, называется силой тока I . Если за время dt переносится заряд dq , то

$$I = dq/dt. \quad (24.1)$$

Ток, не изменяющийся со временем, называется постоянным.

Единицей силы тока является ампер (А)¹). Его определение будет дано в § 37.

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он течет, неравномерно. Более детально можно охарактеризовать ток с помощью векторной величины j , называемой плотностью тока. Чтобы определить плотность тока в некоторой точке пространства, нужно взять в этой точке элементарную площадку dS_{\perp} , перпендикулярную к направлению упорядоченного движения носителей тока. Разделив силу тока dI , текущего через эту площадку, на dS_{\perp} , получим модуль плотности тока:

$$j = dI/dS_{\perp}. \quad (24.2)$$

¹⁾ Название дано в честь французского ученого Андре Марка Ампера (1775—1836).

За направление вектора j принимается направление скорости u^+ упорядоченного движения положительных носителей либо направление, противоположное скорости u^- упорядоченного движения отрицательных носителей.

Поле вектора j можно изобразить с помощью линий тока, которые строятся так же, как и линии любого векторного поля (см. § 5). Линии постоянного тока замкнуты.

Если задано поле вектора плотности тока, можно вычислить силу тока, текущего через любую воображаемую поверхность S . Для этого нужно разбить S на элементарные площадки dS . Согласно (24.2) ток dI через площадку dS_{\perp} равен $j dS_{\perp}$. Из рис. 24.1 сле-

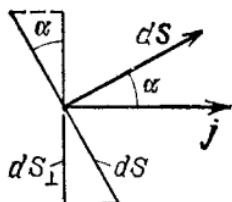


Рис. 24.1. Через площадку dS течет такой же ток, как через площадку $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$

дует, что через площадку dS , нормаль к которой образует с вектором j угол α , течет ток

$$dI = j dS_{\perp} = j dS \cos \alpha = j_n dS = j dS,$$

где dS — вектор элементарной площадки (см. § 5), j_n — проекция вектора j на нормаль к dS . Просуммировав токи через все площадки, получим силу тока, текущего через поверхность S :

$$I = \int_S j dS = \int_S j_n dS. \quad (24.3)$$

Отсюда следует, что сила тока равна потоку вектора плотности тока через заданную поверхность (см. формулу (5.5)).

Пусть в единице объема проводника содержится n^+ положительных носителей тока, имеющих заряд e^+ ($e^+ > 0$). Если скорость упорядоченного движения носителей равна u^+ , то через единичную поверхность пройдет в единицу времени заряд $n^+ e^+ u^+$ (рис. 24.2). Следовательно, плотность тока будет равна

$$j = n^+ e^+ u^+$$

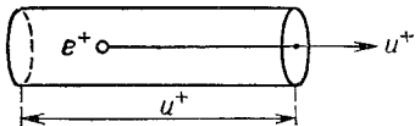
(направления j и u^+ совпадают).

Для отрицательных носителей тока получается формула

$$j = n^- e^- u^-$$

($e^- < 0$, поэтому направление j и u^- противоположны).

Рис. 24.2. Через единичную поверхность пройдут за секунду все носители тока, заключенные в цилиндре высоты u^+ . Их суммарный заряд равен $n^+ e^+ u^+$



В общем случае, когда в проводнике присутствуют носители тока обоих знаков, формула для плотности тока имеет вид

$$j = n^+ e^+ u^+ + n^- e^- u^- \quad (24.4)$$

Скорость упорядоченного движения носителей тока невелика. Например, у одного из лучших проводников — меди при предельно допустимой техническими нормами плотности тока она составляет примерно 1 мм/с. При меньших значениях j скорость u соответственно меньше.

§ 25. Электродвижущая сила

Если возбудить в проводнике стационарное (т. е. не изменяющееся со временем) электрическое поле, то устанавливается конечная плотность тока. Это свидетельствует о том, что, несмотря на действие на них электрической силы eE , скорость носителей тока не возрастает неограниченно, а достигает конечного значения u . Следовательно, на носители тока кроме электрической силы действует сила, тормозящая их движение. Эта сила «трения» обусловлена взаимодействием носителей тока с атомами или молекулами проводника. «Трение» служит причиной того, что после выключения поля ток быстро спадает до нуля.

В § 8 было показано, что циркуляция напряженности E электростатического поля равна нулю (см. формулу (8.3)). Поэтому работа, совершаемая над носителем электростатической силой на замкнутом пути, по которому он движется в случае постоянного тока, также равна нулю. Следовательно, для поддер-

жания постоянного тока, кроме электростатических сил, в цепи должны действовать силы неэлектростатического происхождения, называемые сторонними и силами. Эти силы могут быть обусловлены химическими процессами, диффузией носителей тока в неоднородной среде или через границу двух разнородных веществ, электрическими (но не электростатическими) полями, порождаемыми переменными магнитными полями (см. § 60), и т. д. Сторонние силы могут действовать либо на всем протяжении цепи, либо на отдельных ее участках.

Сторонние силы характеризуют работой, которую они совершают над носителями тока. Величина, равная работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, называется электродвижущей силой (ЭДС) \mathcal{E} , действующей в замкнутой цепи или на ее участке. Следовательно, если работа сторонних сил над зарядом e равна A , то

$$\mathcal{E} = A/e. \quad (25.1)$$

Из сопоставления формул (25.1) и (8.10) вытекает, что размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала. Измеряется ЭДС в тех же единицах, что и потенциал, т. е. в вольтах (В).

Стороннюю силу, действующую на заряд e , можно представить в виде произведения заряда на напряженность поля сторонних сил E_{ct} :

$$\mathbf{F}_{ct} = e\mathbf{E}_{ct}.$$

Тогда работа сторонних сил на участке 1—2 цепи будет равна

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}_{ct} dl = e \int_1^2 \mathbf{E}_{ct} dl.$$

Разделив эту работу на e , получим ЭДС, действующую на данном участке цепи:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_{ct} dl. \quad (25.2)$$

ЭДС, действующая в замкнутой цепи, определяется выражением

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_{ct} dl. \quad (25.3)$$

Таким образом, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, равна циркуляции вектора напряженности сторонних сил.

Кроме сторонних сил, на носители тока действуют силы электростатического поля eE . Следовательно, результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд e , равна

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}).$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом e на участке $1-2$ цепи, определяется выражением

$$A_{12} = e \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} + e \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{ст}} d\mathbf{l} = e(\varphi_1 - \varphi_2) + e\mathcal{E}_{12}. \quad (25.4)$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами над единичным положительным зарядом, называется падением напряжения или просто напряжением U на данном участке цепи. Согласно формуле (25.4)

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (25.5)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется однородным. Участок, на котором действуют сторонние силы, называется неоднородным. Для однородного участка

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (25.6)$$

т. е. напряжение совпадает с разностью потенциалов на концах участка цепи.

§ 26. Закон Ома

Ом¹) экспериментально установил закон, согласно которому *сила тока, текущего по однородному (в смысле отсутствия сторонних сил) металлическому проводнику, пропорциональна падению напряжения U на проводнике:*

$$I = \frac{1}{R} U = \frac{1}{R} (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (26.1)$$

Напомним, что в случае однородного проводника напряжение U равно разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ (см. (25.6)).

¹⁾ Георг Симон Ом (1787—1854) — немецкий физик.

Величина R в формуле (26.1) называется электрическим сопротивлением проводника. Единицей сопротивления служит ом (Ом), равный сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении в 1 В течет ток силы 1 А.

Электрическое сопротивление зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан. Для однородного цилиндрического проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (26.2)$$

где l — длина проводника, S — площадь его поперечного сечения, ρ — зависящий от свойств материала коэффициент, называемый удельным электрическим сопротивлением вещества. Если $l = 1$ и $S = 1$, то R численно равно ρ . Измеряется ρ в ом-метрах (Ом·м).

Выделим мысленно в проводнике элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными векторам j и E (рис. 26.1). Согласно формуле

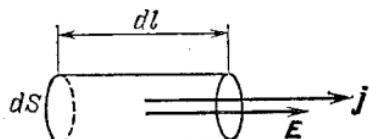


Рис. 26.1. В изотропном проводнике направления векторов j и E совпадают

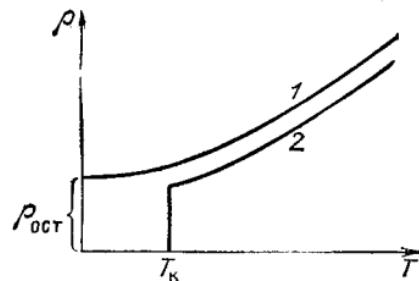


Рис. 26.2. Зависимость удельного сопротивления от температуры: 1 — для обычных металлов, 2 — для сверхпроводников

(26.2) сопротивление цилиндра равно $\rho dl/dS$. Через поперечное сечение цилиндра течет ток силы $j dS$. Напряжение, приложенное к цилинду, равно $E dl$. Подстановка этих значений в формулу (26.1) дает, что

$$j dS = \frac{dS}{\rho dl} E dl, \quad \text{откуда} \quad j = \frac{1}{\rho} E.$$

Векторы j и E имеют одинаковое направление. Поэтому можно написать

$$j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E. \quad (26.3)$$

Эта формула выражает закон Ома в дифференциальной форме.

Обратная ρ величина σ называется удельной электрической проводимостью (или, короче, электропроводностью) вещества. Единица, обратная ому, называется сименсом (См^1). Следовательно, единицей σ является сименс на метр ($\text{См}/\text{м}$).

Для большинства металлов при не слишком низких температурах удельное сопротивление ρ изменяется пропорционально термодинамической температуре:

$$\rho \sim T. \quad (26.4)$$

При низких температурах наблюдаются отступления от этой зависимости (рис. 26.2). В большинстве случаев зависимость ρ от T следует кривой 1. Остаточное сопротивление ρ_0 зависит от чистоты материала и наличия механических напряжений в образце.

У большой группы металлов и сплавов, а также керамических материалов при достаточно низкой температуре сопротивление скачком обращается в нуль (кривая 2). Впервые это явление, названное сверхпроводимостью, было обнаружено в 1911 г. Камерлинг-Оннесом²). Для каждого сверхпроводника имеется своя критическая температура T_c , при которой он переходит в сверхпроводящее состояние. У металлов и сплавов эта температура составляет несколько кельвин, у керамических материалов — несколько десятков кельвин.

Сопоставление формул (24.4) и (26.3) приводит к выводу, что скорость упорядоченного движения носителей тока пропорциональна напряженности поля:

$$u^+ = u_0^+ E, \quad u^- = u_0^- E. \quad (26.5)$$

¹⁾ В честь немецкого электротехника Эрнста Вернера Сименса (1816—1892).

²⁾ Хейке Камерлинг-Оннес (1853—1926) — нидерландский физик.

Величины u_0^+ и u_0^- называются подвижностью соответствующего носителя тока. Подвижность численно равна скорости упорядоченного движения носителя тока при напряженности поля, равной единице.

Подстановка соотношений (26.5) в формулу (24.4) дает

$$\mathbf{j} = (n^+ e^+ u_0^+ + n^- e^- u_0^-) \mathbf{E}, \quad (26.6)$$

откуда

$$\sigma = n^+ e^+ u_0^+ + n^- e^- u_0^-. \quad (26.7)$$

На неоднородном участке цепи средняя скорость упорядоченного движения носителей тока пропорциональна сумме напряженности электростатического поля и напряженности поля сторонних сил. Соответственно плотность тока

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}). \quad (26.8)$$

Эта формула обобщает формулу (26.3) на случай неоднородного проводника.

Рассмотрим цилиндрический проводник с площадью поперечного сечения S и длиной l . Допустим, что напряженности \mathbf{E} и $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ во всех точках проводника одни и те же. Умножим обе части равенства (26.8) на перемещение dl вдоль оси проводника и проинтегрируем получившееся соотношение по длине проводника от 0 до l . В результате получим:

$$\int_0^l \mathbf{j} dl = \sigma \left(\int_0^l \mathbf{E} dl + \int_0^l \mathbf{E}_{\text{ст}} dl \right). \quad (26.9)$$

Интеграл, стоящий слева, равен jl . Интегралы справа равны соответственно разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между концами проводника и ЭДС \mathcal{E}_{12} , действующей в проводнике (см. формулу (25.4)). Учтя это и заменив j на I/S , а σ на $1/\rho$, можно написать (26.9) в виде

$$I \frac{\rho l}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Согласно формуле (26.2) множитель при I равен со-

противлению R проводника. Следовательно,

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R} = \frac{U}{R} \quad (26.10)$$

(см. (25.5)).

Формула (26.10) выражает закон Ома для неоднородного участка цепи. В ней сила тока и ЭДС — величины алгебраические. Сила тока положительна, когда ток течет в направлении от конца проводника 1 к концу 2. ЭДС считается положительной, если она способствует движению положительных носителей в направлении 1—2.

Для замкнутой цепи $\varphi_1 = \varphi_2$ и формула (26.10) имеет вид

$$I = \mathcal{E}/R, \quad (26.11)$$

где \mathcal{E} — ЭДС, действующая в цепи, R — суммарное сопротивление всей цепи.

§ 27. Правила Кирхгофа

В основе расчета разветвленных электрических цепей лежат два правила Кирхгофа¹). Первое правило относится к узлам цепи. Узлами называются точки, в которых сходятся более чем два проводника (рис. 27.1). Току, текущему к узлу, приписывается один знак (плюс или минус), току, текущему от узла, — другой знак.

Первое правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum I_k = 0. \quad (27.1)$$

Это вытекает из следующих соображений. В цепи постоянного тока ничего не должно изменяться. В частности, потенциалы во всех точках должны оставаться постоянными. Если бы алгебраическая сумма токов была отлична от нуля, то в узле происходило бы накапливание или уменьшение зарядов, что в свою очередь приводило бы к изменению потенциала узла.

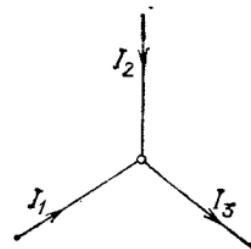


Рис. 27.1 Узел цепи. Сумма токов I_1 и I_2 равна току I_3

¹⁾ Густав Роберт Кирхгоф (1824—1887) — немецкий физик.

Уравнение (27.1) можно написать для всех N узлов. Однако независимыми будут только $N - 1$ уравнение, N -е будет следствием остальных.

Второе правило относится к любому выделенному мысленно в разветвленной цепи замкнутому контуру, (рис. 27.2). Выберем направление обхода (например,

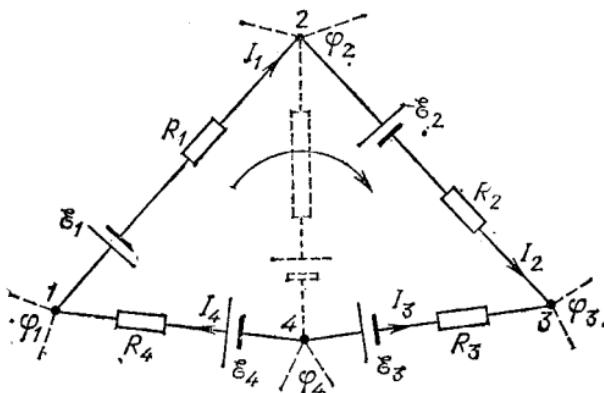


Рис. 27.2. Сплошными линиями показан замкнутый контур $1-2-3-4-1$, выделенный в сложной разветвленной цепи. Из остальных звеньев цепи изображен штриховой линией лишь участок $2-4$

по часовой стрелке, как показано на рисунке) и применим к каждому из участков контура закон Ома:

$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1, & I_2 R_2 &= \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2, \\ I_3 R_3 &= \varphi_3 - \varphi_4 + \mathcal{E}_3, & I_4 R_4 &= \varphi_4 - \varphi_1 + \mathcal{E}_4. \end{aligned}$$

Если сложить эти равенства, потенциалы сократятся и получится уравнение

$$\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k, \quad (27.2)$$

которое выражает второе правило Кирхгофа.

Уравнение (27.2) можно составить для всех замкнутых контуров, которые можно выделить в данной цепи. Однако независимыми будут только уравнения для тех контуров, которые нельзя получить наложением на них других контуров. Например, контур $1-2-3-4-1$ на рис. 27.1 получается наложением контуров $1-2-4-1$ и $2-3-4-2$. Поэтому независимыми будут уравнения для любых двух контуров из этих трех.

При составлении уравнений направления токов и направление обхода можно выбирать произвольно. Токам и ЭДС нужно приписывать знаки в соответствии с выбранным направлением обхода. Например, ток I_3 на рис. 27.2 нужно считать отрицательным (и подставлять в уравнение $-I_3$), так как он изображен текущим навстречу направлению обхода. ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 также нужно считать отрицательными, поскольку они действуют в направлении, противоположном направлению обхода. Если для какого-либо тока будет получено отрицательное значение, это будет означать, что в действительности он течет в направлении, противоположном указанному на рисунке.

Надо иметь в виду, что через любое сечение неразветвленного участка цепи течет один и тот же ток. Например, на участке от точки 1 до источника тока \mathcal{E}_1 течет такой же ток I_1 , как и на участке от источника \mathcal{E}_1 до точки 2.

Число независимых уравнений, составленных по первому и второму правилам Кирхгофа, равно количеству токов, текущих в разных звеньях цепи. Поэтому если заданы ЭДС и сопротивления, то могут быть вычислены все токи. Можно решить и задачи иного рода, например, найти ЭДС (или сопротивления), которые нужно включить в каждое звено цепи, чтобы получить при заданных сопротивлениях (или ЭДС) нужные токи.

§ 28. Закон Джоуля — Ленца

Проводник при прохождении по нему тока нагревается. Джоуль и независимо от него Ленц¹⁾ установили экспериментально, что количество выделившейся в проводнике теплоты пропорционально его сопротивлению, квадрату силы тока и времени:

$$Q = RI^2t. \quad (28.1)$$

Эта формула выражает закон Джоуля — Ленца.

¹⁾ Эмилий Христианович Ленц (1804—1865) — русский физик и электротехник.

С учетом закона Ома (см. (26.1)) формулу (28.1) можно представить в виде

$$Q = RI^2 t = UIt = \frac{1}{R} U^2 t, \quad (28.2)$$

где U — напряжение между концами проводника.

Разделив Q на t , получим тепловую мощность тока:

$$P = RI^2 = UI = \frac{1}{R} U^2. \quad (28.3)$$

Рассмотрим, как и в § 26, однородный (в смысле отсутствия сторонних сил) цилиндрический проводник с площадью поперечного сечения S и длиной l . Допустим, что напряженность поля E и плотность тока j во всех точках проводника одинаковы. В этом случае $U = \varphi_1 - \varphi_2 = El$ и $j = I/S$. Разделив P на объем проводника Sl , получим удельную мощность тока, т. е. количество теплоты, выделяемое в единице объема в единицу времени:

$$P_{\text{уд}} = \frac{P}{Sl} = \frac{I}{S} \frac{U}{l} = jE = jE \quad (28.4)$$

(векторы j и E коллинеарны, поэтому их скалярное произведение равно произведению модулей).

Формула (28.4) выражает закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме. Она справедлива и в том случае, когда j и E в разных точках проводника различны.

Приняв во внимание соотношения (26.3), формулу (28.4) можно представить в виде

$$P_{\text{уд}} = jE = \rho j^2 = \sigma E^2. \quad (28.5)$$

Когда в проводнике имеются сторонние силы, формула (28.4) выглядит следующим образом:

$$P_{\text{уд}} = j(E + E_{\text{ст}}). \quad (28.6)$$

В этом случае формулы (28.2) и (28.3) справедливы, если под U понимать величину (25.5).

§ 29. Природа носителей тока в металлах

Первый опыт, предпринятый для выяснения природы носителей тока в металлах, был осуществлен Рикке¹) в 1901 г. (через четыре года после открытия

¹⁾ Карл Виктор Эдуард Рикке (1845—1915) — немецкий физик.

электрона). Три цилиндра — два медных и один алюминиевый — с тщательно отшлифованными торцами были сложены вместе в последовательности: медь — алюминий — медь. Через такой составной проводник пропускался непрерывно ток одного и того же направления в течение года. За все время через цилиндры прошел заряд, равный $3,5 \cdot 10^6$ Кл (который соответствует $2,2 \cdot 10^{25}$ элементарным зарядам). Взвешивание показало, что вес цилиндров не изменился. При исследовании торцов цилиндров под микроскопом не было обнаружено проникновения одного металла в другой. Результаты опыта свидетельствовали о том, что носителями тока в металлах являются не атомы, а какие-то частицы, входящие в состав всех металлов.

Г. А. Лоренц предложил опыт, суть которого заключается в том, что при резком торможении быстро движущегося металлического проводника носители тока должны какое-то время двигаться по инерции, вследствие чего в проводнике должен возникнуть импульс тока¹⁾. Как показали расчеты, из данных опыта можно получить знак носителей тока и их удельный заряд (т. е. отношение e к m). Опыт был осуществлен в 1916 г. Толменом²⁾ и Т. Стюартом. Они приводили во вращение катушку из провода длины 500 м с угловой скоростью, при которой линейная скорость витков составляла 300 м/с (более 1000 километров в час). Концы катушки были подсоединенены через скользящие контакты к баллистическому гальванометру (прибору, позволяющему измерять заряд, проходящий в цепи при кратковременных импульсах тока). Катушка резко тормозилась, и определялся заряд, протекавший в цепи за время торможения. Знак заряда носителей получился отрицательный, а значение e/m — очень близким к удельному заряду электрона.

¹⁾ В 1913 г. русские физики Леонид Исаакович Мандельштам (1879—1944) и Николай Дмитриевич Папалекси (1880—1947) осуществили качественный опыт. Приведя катушку из проволоки в крутильные колебания, они слышали шум в подключенных к катушке наушниках. Результаты опыта не были опубликованы.

²⁾ Ричард Чейс Толмен (1881—1948) — американский физик,

Таким образом, было доказано, что носителями тока в металлах являются электроны. Ток в металлах можно вызвать крайне малой разностью потенциалов. Это дает основание считать, что электроны перемещаются по металлу практически свободно.

§ 30. Классическая теория электропроводности металлов

Классическая теория электропроводности металлов была создана Друде¹⁾ в 1900 г. Он предположил, что носители тока в металлах — электроны ведут себя подобно молекулам идеального газа. В промежутках между соударениями они движутся в отсутствие поля совершенно свободно, пробегая в среднем некоторый путь λ . В отличие от молекул газа, пробег которых определяется соударениями молекул друг с другом, электроны сталкиваются преимущественно не между собой, а с ионами, образующими кристаллическую решетку металла. Эти столкновения приводят к установлению теплового равновесия между электронным газом и кристаллической решеткой.

Воспользуемся формулой (74.10) 1-го тома для оценки средней скорости теплового движения электронов проводимости в металлах, положив температуру равной 300 К:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{3,14 \cdot 0,91 \cdot 10^{-30}}} \approx 10^5 \text{ м/с.}$$

Друде не учитывал распределение по скоростям и приписывал всем электронам одинаковое значение скорости v .

В § 24 было указано, что скорость v упорядоченного движения электронов составляет не более 1 мм/с, так что при расчете времени пробега электронов можно полагать их скорость равной v .

Закон Ома. Друде предполагал, что при соударении электрона с ионом решетки приобретенная электроном за время пробега дополнительная энергия полностью передается иону и в начале нового про-

¹⁾ Пауль Карл Людвиг Друде (1863—1906) — немецкий физик.

бега скорость электрона снова равна v . Если поле в металле однородно, то электрон получает постоянное ускорение $a = eE/m$ и к концу пробега скорость упорядоченного движения достигает значения

$$u_{\max} = \frac{eE}{m} \tau = \frac{eE}{m} \frac{\lambda}{v} \quad (30.1)$$

(τ — время пробега).

Скорость u изменяется за время пробега линейно. Поэтому ее среднее значение равно половине максимального:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} u_{\max} = \frac{eE\lambda}{2mv}.$$

Подставив это значение в формулу (24.4), получим плотность тока:

$$j = ne \langle u \rangle = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E.$$

Все величины в множителе, стоящем перед напряженностью поля, не зависят от E . Следовательно, мы пришли к закону Ома. В соответствии с (26.3) коэффициент пропорциональности между j и E представляет собой проводимость:

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2mv}. \quad (30.2)$$

Если бы электроны не претерпевали столкновений, длина свободного пробега, а следовательно, и проводимость были бы бесконечно велики. Таким образом, согласно классическим представлениям сопротивление металлов обусловлено соударениями электронов проводимости с ионами кристаллической решетки.

Закон Джоуля — Ленца. Найдем среднее значение обусловленной действием поля дополнительной кинетической энергии электронов. Скорость электронов равна сумме скорости теплового движения v и скорости упорядоченного движения u . Среднее значение квадрата результирующей скорости равно

$$\langle(v + u)^2\rangle = \langle v^2 + 2vu + u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + 2\langle vu \cos \alpha \rangle + \langle u^2 \rangle,$$

где α — угол между векторами v и u (усреднение производится по электронам). Скорость v хаотического движения имеет с равной вероятностью самые

разнообразные направления. Поэтому все значения $\cos \alpha$ от -1 до $+1$ равновероятны. По этой причине среднее значение $v u \cos \alpha$ равно нулю. Поскольку скорость всех электронов предполагается одинаковой, $\langle v^2 \rangle = v^2$. Таким образом,

$$\langle (v + u)^2 \rangle = v^2 + \langle u^2 \rangle.$$

Отсюда вытекает, что средняя кинетическая энергия электронов состоит из постоянного слагаемого $mv^2/2$ и дополнительного слагаемого

$$\langle \Delta \varepsilon_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle u^2 \rangle,$$

обусловленного полем.

В момент, предшествующий соударению, *и* имеет значение u_{\max} и дополнительная кинетическая энергия

$$\Delta \varepsilon_k = \frac{1}{2} m u_{\max}^2 = \frac{e^2 \lambda^2}{2mv^2} E^2 \quad (30.3)$$

(см. формулу (30.1)).

Столкнувшись с ионом, электрон, по предположению, отдает ему (т. е. решетке) всю приобретенную им дополнительную энергию. Каждый электрон претерпевает в секунду v/λ соударений, сообщая всякий раз решетке энергию (30.3). Поэтому в единице объема в единицу времени будет выделяться количество теплоты

$$Q_{\text{уд}} = n \frac{v}{\lambda} \Delta \varepsilon_k = \frac{n e^2 \lambda}{2mv} E^2 \quad (30.4)$$

(n — число электронов проводимости в единице объема).

$Q_{\text{уд}}$ есть удельная тепловая мощность тока. Согласно (30.2) множитель при E^2 в выражении (30.4) представляет собой проводимость σ . Таким образом, мы пришли к закону Джоуля — Ленца (см. формулу (28.5)).

Закон Видемана — Франца. Наряду с высокой электропроводностью металлы обладают также большой теплопроводностью. Способностью проводить теплоту обладают и неметаллические кристаллы. Однако теплопроводность металлов значительно превосходит теплопроводность диэлектриков. Из этого следует, что теплопроводность в металлах осуществляется

ся в основном не кристаллической решеткой, а свободными электронами.

В 1853 г. Видеман¹⁾ и Франц установили экспериментально закон, согласно которому отношение теплопроводности κ к электропроводности σ для всех металлов приблизительно одинаково и пропорционально термодинамической температуре.

Рассматривая свободные электроны как одноатомный газ, можно написать для теплопроводности выражение

$$\kappa = \frac{1}{2} n k v \lambda$$

(см. формулу (80.12) 1-го тома; для одноатомного газа $i=3$). Разделив κ на выражение (30.2) для σ придем к соотношению

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{k m v^2}{e^2} \cdot 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T \quad (30.5)$$

(мы воспользовались тем, что для молекул одноатомного газа $m v^2 / 2 = (3/2) kT$).

При $T = 300$ К для κ/σ по формуле (30.5) получается значение $6,7 \cdot 10^{-6}$ Дж·Ом/(с·К), хорошо согласующееся с экспериментальными данными. Однако впоследствии выяснилось, что согласие с экспериментальными данными оказалось случайным, ибо когда Лоренц уточнил расчеты, учтя распределение электронов по скоростям, для κ/σ получилось значение $2(k/e)^2 T$, которое хуже согласуется с экспериментальными данными.

Подводя итог, можно сказать, что классическая теория смогла объяснить законы Ома и Джоуля — Ленца, а также дала качественное объяснение закона Видемана — Франца. Вместе с тем эта теория встретилась с весьма существенными затруднениями. Из формулы (30.2) вытекает, что сопротивление металлов (т. е. величина, обратная σ) должно возрастать как корень квадратный из T . Действительно, для предположения о зависимости величин n и λ от температуры нет никаких оснований. Скорость же теплового движения пропорциональна корню из T . Этот вывод теории противоречит опытным данным, согласно

¹⁾ Густав Генрих Видеман (1826—1899) — немецкий физик,

которым электрическое сопротивление металлов растет пропорционально первой степени T , т. е. быстрее, чем \sqrt{T} (см. формулу (26.4)).

Второе затруднение классической теории заключается в том, что электронный газ должен обладать молярной теплоемкостью, равной $(3/2)R$. Следовательно, теплоемкость металлов должна заметно пре-восходить теплоемкость диэлектриков. Однако в действительности теплоемкость металлов не отличается существенно от теплоемкости неметаллических кристаллов. Объяснить такое несоответствие смогла лишь квантовая теория металлов.

Наконец, классическая теория не смогла объяснить самого главного — почему электроны в металлах оказываются свободными.

§ 31. Электрический ток в газах

Прохождение электрического тока через газы называется газовым разрядом. В нормальном состоянии газы являются изоляторами, носители тока в них практически отсутствуют. Носители тока могут возникнуть в результате внешних воздействий, не связанных с наличием электрического поля. В этом случае говорят о несамостоятельной проводимости газа. Если носители тока возникают в результате процессов, обусловленных созданным в газе электрическим полем, проводимость называется самостоятельной.

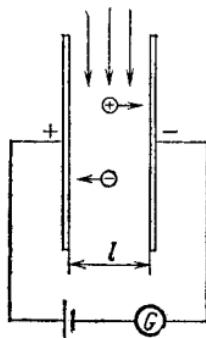
Несамостоятельный разряд может быть вызван нагреванием газа (термическая ионизация), воздействием ультрафиолетового или рентгеновского излучений, а также воздействием излучения радиоактивных веществ.

Пусть газ, находящийся между электродами (рис. 31.1), подвергается постоянному по интенсивности однородному воздействию, например рентгеновских лучей. От некоторых молекул газа будут отщепляться электроны, в результате чего возникнут свободные электроны и положительные ионы. Условно будем называть электроны отрицательными ионами. Положительные ионы будем считать однозарядными (т. е. имеющими заряд $+e$). Обозначим

число пар ионов, возникающих за секунду в единице объема, через Δn_t .

Наряду с процессом ионизации происходит рекомбинация ионов, т. е. воссоединение при встрече электрона и положительного иона. Вероятность встречи двух разноименных ионов пропорциональна как числу положительных, так и числу отрицательных ионов. Поэтому число рекомбинирующих

Рис. 31.1. Схема прибора для изучения несамостоятельного газового разряда. Площадь электродов S , объем межэлектродного пространства равен Sl



за секунду в единице объема пар ионов Δn_r , пропорционально квадрату числа n имеющихся в единице объема пар ионов:

$$\Delta n_r = rn^2 \quad (31.1)$$

(r — коэффициент пропорциональности).

В состоянии равновесия число возникающих ионов равно числу рекомбинирующих. Поэтому

$$\Delta n_r = rn^2,$$

откуда получается равновесная концентрация ионов (т. е. число пар ионов в единице объема):

$$n = \sqrt{\Delta n_r / r}. \quad (31.2)$$

Если подать напряжение на электроды, убыль ионов будет происходить не только вследствие рекомбинации, но и за счет отсасывания ионов полем к электродам. Пусть из единицы объема отсасывается ежесекундно Δn_i пар ионов. Нейтрализация на электродах одной пары ионов сопровождается переносом по цепи заряда e . Следовательно, сила тока в цепи

$$I = jS = e \Delta n_i S l$$

(Sl — объем межэлектродного пространства). Отсюда

$$\Delta n_i = j/el, \quad (31.3)$$

где j — плотность тока, l — расстояние между электродами.

При наличии тока условие равновесия имеет вид

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j.$$

Подстановка выражений (31.1) и (31.3) приводит к соотношению

$$\Delta n_i = rn^2 + j/el. \quad (31.4)$$

Согласно (26.6) плотность тока определяется выражением

$$j = en(u_0^+ + u_0^-)E, \quad (31.5)$$

где u_0^+ и u_0^- — подвижности положительных и отрицательных ионов (электронов).

В случае слабых полей плотность тока будет очень мала. Поэтому вторым слагаемым в правой части равенства (31.4) можно пренебречь по сравнению с первым и определять концентрацию ионов по формуле (31.2). Подстановка этого выражения в (31.5) дает, что

$$j = e\sqrt{\Delta n_i/r}(u_0^+ + u_0^-)E = \sigma E.$$

Коэффициент σ не зависит от E . Следовательно, в случае слабых полей несамостоятельный газовый разряд подчиняется закону Ома.

В случае сильных полей практически все ионы будут достигать электродов, не успев рекомбинировать. Поэтому в равенстве (31.4) можно пренебречь слагаемым rn^2 . В результате получается формула

$$j = e\Delta n_i l, \quad (31.6)$$

согласно которой j не зависит от E . Эта плотность тока создается всеми ионами, порождаемыми ионизатором в единицу времени, и является максимальной при данных значениях Δn_i и l . Ее называют **плотностью тока насыщения** $j_{\text{нас}}$.

При промежуточных значениях E происходит плавный переход от линейной зависимости j от E к насыщению, по достижении которого j перестает зависеть от E (рис. 31.2). Показанное штриховой линией резкое возрастание тока объясняется тем, что, начиная с некоторого значения E , электроны (которые гораздо подвижнее положительных ионов) успевают за время свободного пробега приобрести энергию, достаточную для того, чтобы, столкнувшись с молекулой, ионизовать ее. Возникшие при этом электроны, разогнавшись, в свою очередь вызывают ионизацию. В результате происходит лавинообразное размножение носителей тока и резкое возрастание разрядного тока.

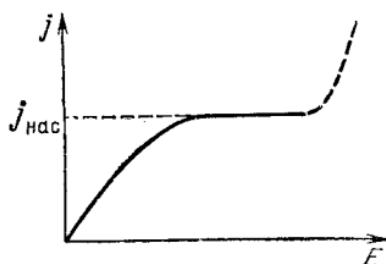


Рис. 31.2. Зависимость плотности тока при несамостоятельном газовом разряде от напряженности поля

§ 32. Процессы, приводящие к возникновению носителей тока при самостоятельном газовом разряде

В зависимости от условий, в которых он протекает, самостоятельный газовый разряд может принимать разнообразные формы. Прежде чем приступить к их описанию, рассмотрим процессы, которые приводят к возникновению носителей тока при самостоятельном газовом разряде.

Ионизация ударом. Энергия молекул (так же как и атомов) квантуется. Это означает, что она может принимать лишь дискретные (т. е. разделенные конечными промежутками) значения, называемые уровнями энергии. Состояние с наименьшей энергией называется основным, остальные состояния называются возбужденными. При столкновении электрона с молекулой она может перейти из основного состояния в возбужденное. В этом состоянии молекула обычно пребывает время порядка 10^{-8} с, после чего переходит в основное состояние, излучив избыток энергии в виде кванта света — фотона. Эти процессы вызывают свечение газа при разряде. При достаточно большой энергии ударяющего

электрона молекула может быть ионизована, т. е., потеряв один или несколько электронов, превратиться в положительный ион.

Фотоионизация. Электромагнитное излучение (в частности, свет) состоит из частиц — фотонов, энергия которых равна $h\nu$ (h — постоянная Планка, ν — частота излучения). Поглощение фотона молекулой приводит к ее возбуждению или ионизации (которая в данном случае называется фотоионизацией). Энергия фотона видимого света недостаточна для отщепления электрона от молекулы. Энергией, достаточной для фотоионизации, обладают фотоны ультрафиолетового излучения (напомним, что длина волны ультрафиолетового излучения меньше, а частота соответственно больше, чем видимого света).

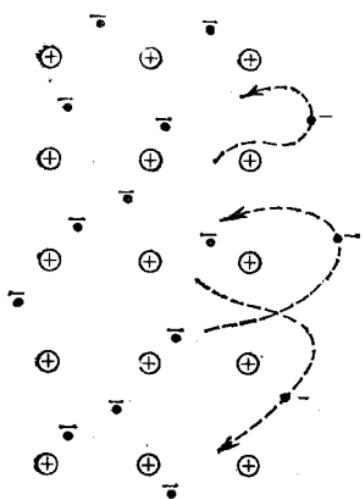


Рис. 32.1. Двойной электрический слой на границе металла: кружки — ионы, точки — электроны

Испускание (эмиссия) электронов поверхностью электродов. Электроны проводимости не могут самопроизвольно покидать металл в заметном количестве. Это объясняется тем, что металл представляет для электронов потенциальную яму, образованную потенциальным барьером на границе металла. Силы, обусловливающие этот барьер, имеют следующее проис-

хождение. Случайное удаление электрона от наружного слоя положительных ионов (рис. 32.1) приводит к возникновению в том месте, которое покинул электрон, избыточного положительного заряда. Кулоновское взаимодействие с этим зарядом заставляет электрон, скорость которого не очень велика, вернуться обратно. Таким образом, отдельные электроны все время покидают поверхность металла, удаляются от него на несколько межатомных расстояний и возвращаются обратно. В результате металл оказывается окруженным тонким облаком электронов. Это облако образует совместно с наруж-

ным слоем ионов двойной электрический слой. Силы, действующие на электрон в таком слое, направлены внутрь металла. Они и создают потенциальный барьер.

Наименьшая энергия, которую нужно сообщить электрону для того, чтобы удалить его из твердого или жидкого тела в вакуум, называется работой выхода $A_{\text{вых}}$. Работа выхода очень чувствительна к состоянию поверхности металла, в частности к ее чистоте. Подобрав покрытие поверхности, можно сильно снизить работу выхода. Например, нанесение на поверхность вольфрама слоя окисла щелочноземельного металла (Ca, Sr, Ba) снижает работу выхода с 4,5 эВ (для чистого вольфрама) до 1,5—2 эВ.

Вследствие распределения по энергиям всегда имеется некоторое количество электронов, энергия которых достаточна для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер и выйти из металла наружу. При комнатной температуре число таких электронов мало. При повышении температуры количество электронов, вылетающих из металла, резко возрастает и становится вполне заметным. Испускание электронов нагретыми твердыми или жидкими телами называется термоэлектронной эмиссией.

Вылетевшие из металла электроны образуют отрицательный пространственный заряд (электронное облако). Это облако отталкивает вылетающие электроны и возвращает их обратно. При наличии отсасывающего электрона электрического поля плотность тока, созданного термоэлектронами, вначале с увеличением напряженности поля растет, затем достигает насыщения и в дальнейшем практически не изменяется. Очевидно, что именно ток насыщения характеризует термоэлектронную эмиссию. Если в единицу времени с единицы поверхности вылетает N электронов, то плотность тока насыщения (сила тока насыщения, отнесенная к единице поверхности металла) будет равна $j_{\text{нас}} = Ne$.

Плотность тока насыщения можно вычислить по формуле Ричардсона¹⁾ — Дэшмана:

$$j_{\text{нас}} = BT^2 \exp(-A_{\text{вых}}/kT). \quad (32.1)$$

¹⁾ Оуэн Уилланс Ричардсон (1879—1959) — английский физик.

Здесь B — константа, $A_{\text{вых}}$ — работа выхода, k — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура.

Вторичной электронной эмиссией называется испускание электронов поверхностью твердого или жидкого тела при бомбардировке ее электронами или ионами. Отношение числа испущенных (вторичных) электронов к числу частиц, вызвавших эмиссию, называется коэффициентом вторичной эмиссии. В случае бомбардировки поверхности металла электронами значения этого коэффициента заключены в пределах от 0,5 до 1,8.

Автоэлектронной (или холодной) эмиссией называется испускание электронов поверхностью металлов, происходящее в том случае, когда вблизи поверхности создается электрическое поле очень большой напряженности (порядка 10^8 В/м). Это явление называется также вырыванием электронов электрическим полем.

§ 33. Плазма

Плазмой называется частично или полностью ионизованный газ, в котором положительные и отрицательные заряды в среднем нейтрализуют друг друга. В общем случае плазма состоит из электронов, положительных ионов и нейтральных атомов (или молекул). В пределах малых объемов (размеры которых даны ниже) строгое равенство чисел положительно и отрицательно заряженных частиц может нарушаться. Поэтому говорят, что плазма квазинейтральна (латинская приставка «квази» означает «мнимый», «ненастоящий»).

Плазму принято характеризовать степенью ионизации α , под которой понимают отношение числа ионизованных атомов к их полному числу (оба числа берутся для единицы объема). В зависимости от значения α говорят о слабо ($\alpha \sim 10^{-3}$), умеренно ($\alpha \sim 10^{-2}$) и полностью ионизованной плазме.

Плазма является преобладающим состоянием вещества во Вселенной. Звезды, галактические туманности и межзвездная среда представляют собой плазму, которую называют четвертым состоя-

нием вещества. Один из верхних слоев атмосферы, называемый ионосферой, состоит из слабо ионизованной плазмы. Этот слой отражает радиоволны и делает возможной радиосвязь на больших расстояниях. В земных условиях плазма образуется при электрическом разряде в газах (см. следующий параграф), в процессах горения и взрыва.

Сила взаимодействия между атомами и молекулами убывает с расстоянием очень быстро (как $1/r^6$). Поэтому частицы газа взаимодействуют лишь при сильном сближении. Кулоновские силы убывают гораздо медленнее (как $1/r^2$). Поэтому взаимодействие между частицами (электронами и ионами) в плазме постоянно влияет на их движение, вследствие чего для плазмы характерны коллективные процессы.

Вокруг каждого заряда преимущественно располагаются заряды противоположного знака, нейтрализующие влияние данного заряда за пределами сферы радиуса D , называемого дебаевским¹⁾ радиусом экранировки. Соответствующий расчет дает, что

$$D = \sqrt{\epsilon_0 kT/ne^2}, \quad (33.1)$$

где n — концентрация (т. е. количество в единице объема) электронов в плазме. Подстановка значений констант приводит к формуле

$$D = 69 \sqrt{T/n}.$$

Для примера оценим дебаевский радиус для плазмы, возникающей в канале молнии. Газ в этом случае ионизуется полностью, так что n равно числу молекул воздуха в единице объема, т. е. примерно $2,7 \cdot 10^{25}$ м⁻³, температура составляет приблизительно $2 \cdot 10^4$ К. Следовательно,

$$D \approx 69 \sqrt{2 \cdot 10^4 / (2,7 \cdot 10^{25})} \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

Таков же примерно будет дебаевский радиус при $T = 500$ К и $n = 3 \cdot 10^{23}$ м⁻³.

¹⁾ В честь Петера Йозефа Вильгельма Дебая (1884—1966). Родился в Нидерландах, учился и работал в Германии, с 1940 г. в США.

Внешнее электрическое поле проникает в плазму только на расстояние порядка дебаевского радиуса. Таким образом, плазма экранирует внешнее электрическое поле.

Дебаевский радиус определяет размеры областей, в которых равенство чисел частиц разных знаков может не соблюдаться, т. е. нарушается условие квазинейтральности. Квазинейтральность плазмы в целом соблюдается при условии, что линейные размеры l области, занимаемой плазмой, много больше дебаевского радиуса: $l \gg D$. Только при выполнении этого условия можно говорить о плазме как таковой.

Мы уже отмечали, что для плазмы характерны коллективные процессы. Дальнодействие кулоновских сил приводит к тому, что плазма может рассматриваться как упругая среда. Если группу электронов в плазме сдвинуть из их равновесного положения, то на них будет действовать электростатическая возвращающая сила. Это служит причиной того, что в плазме легко возбуждаются продольные колебания пространственного заряда, называемые ленгмюровскими¹⁾ волнами. Их частота, называемая плазменной частотой, определяется выражением

$$\omega = \sqrt{n e^2 / m \epsilon_0} \quad (33.2)$$

(n — концентрация электронов, m — масса электрона).

Средние значения энергии электронов, ионов и нейтральных атомов могут отличаться друг от друга. В этом случае плазму нельзя охарактеризовать одним значением температуры и приходится различать электронную T_e , ионную T_i и температуру нейтральных атомов T_a . Плазму, у которой эти температуры различны, называют неизотермической. Если все три температуры равны, плазма называется изотермической. Неизотермической является газоразрядная плазма, т. е. плазма, возникающая при газовом разряде. Плазма, воз-

¹⁾ Ирвинг Ленгмюр (1881—1957) и Леви Тонкс (1897—1971) — оба американские физики — ввели термин «плазма» (1929 г.) и занимались исследованием газоразрядной плазмы.

никающая вследствие высокой температуры вещества, является изотермической. Условно изотермическую плазму подразделяют на низкотемпературную ($c T_i \leqslant 10^5$ К) и высокотемпературную ($c T_i > 10^6$ К).

Достаточно разогретая плазма является очень хорошим проводником. Благодаря большей подвижности электронов, чем ионов, проводимость плазмы в основном определяется электронами. Соответствующий расчет дает для проводимости плазмы формулу

$$\sigma \approx 10^{-3} T^{3/2} \text{ См}/\text{м}. \quad (33.3)$$

При $T \approx 15 \cdot 10^6$ К проводимость плазмы равна проводимости одного из лучших проводников — серебра.

Важнейшими техническими применениями плазмы являются управляемый термоядерный синтез и непосредственное преобразование теплоты в электрическую энергию в магнитогидродинамических генераторах (МГД-генераторах).

Для протекания термоядерной реакции (т. е. объединения легких ядер в более тяжелые) вещество нужно нагреть до столь высокой температуры (порядка 10^8 К), при которой оно находится в состоянии плазмы. Задачу удержания плазмы в ограниченном объеме нельзя решить, поместив ее в обычный сосуд, ибо стенки любого сосуда при такой температуре немедленно испарятся. Поэтому для удержания плазмы используются сильные магнитные поля.

§ 3.4. Самостоятельный газовый разряд

Тлеющий разряд. Этот разряд возникает при низких давлениях. Его можно наблюдать в стеклянной трубке с вплавленными плоскими металлическими электродами (рис. 34.1), подав на электроды напряжение порядка 1000 В. При атмосферном давлении тока в трубке практически нет. Если понижать давление, то примерно при 100 гПа возникает разряд в виде свящущегося извилистого тонкого шнура. По мере понижения давления шнур утолщается и приблизительно при 10 гПа заполняет все сечение трубы — устанавливается тлеющий разряд. Его основные части

указаны на рисунке. Из графика, приведенного в нижней части рисунка, видно, что потенциал изменяется вдоль трубы неравномерно. Почти все падение напряжения приходится на первые три участка разряда, по катодное темное пространство включительно.

Основные процессы, необходимые для поддержания тлеющего разряда, происходят в его катодной

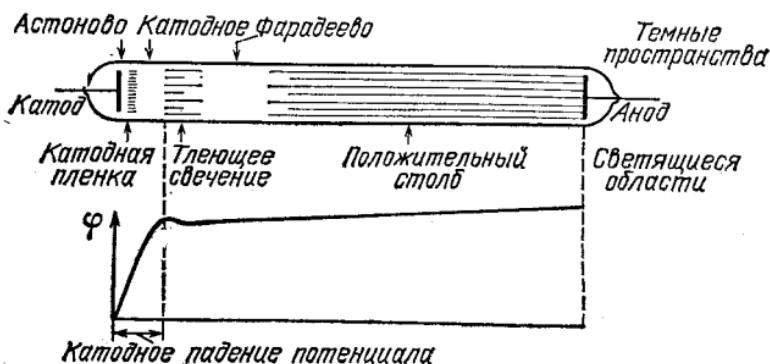


Рис. 34.1. Тлеющий разряд. Внизу показано изменение потенциала вдоль газоразрядной трубы

части. Этих процессов два — вторичная электронная эмиссия из катода, вызываемая бомбардировкой его положительными ионами, и ударная ионизация электронами молекул газа. Ударная ионизация происходит преимущественно в области катодного темного пространства.

Положительный столб представляет собой газоразрядную плазму. Он выполняет роль проводника, соединяющего анод с катодными частями разряда. Поэтому его длина может быть любой. Свечение положительного столба имеет различный цвет для разных газов (неоновые трубы дают красное свечение, аргоновые — сине-зеленое и т. д.). Это обстоятельство используется в газоразрядных трубках, из которых изготавливаются светящиеся надписи и рекламы. Эти надписи представляют собой положительный столб тлеющего разряда.

Дуговой разряд. В 1802 г. В. В. Петров¹⁾ обнаружил, что при разведении первоначально соприкасав-

¹⁾ Василий Владимирович Петров (1761—1834) — русский физик и электротехник.

шихся угольных электродов, подключенных к большой гальванической батарее, между электродами вспыхивает ослепительное свечение. При горизонтальном расположении электродов нагретый светящийся газ изгибается в виде дуги, в связи с чем открытое Петровым явление было названо электрической дугой (сам Петров назвал его вольтовой дугой).

Дуговой разряд может протекать как при низком (порядка нескольких гектопаскалей), так и при высоком (до 1000 атм) давлении. Сила тока в дуге может достигать огромных значений (10^3 — 10^4 А) при напряжении в несколько десятков вольт.

Основными процессами, поддерживающими дуговой разряд, являются термоэлектронная эмиссия с раскаленной поверхности катода и термическая ионизация молекул, обусловленная высокой температурой газа в межэлектродном промежутке. Почти все межэлектродное пространство заполнено изотермической плазмой. Она служит проводником, по которому электроны, испущенные катодом, достигают анода. Температура плазмы составляет около 6000 К. В дуге сверхвысокого давления температура плазмы может достигать 10 000 К. Вследствие бомбардировки положительными ионами катод раскаляется примерно до 3500 К. Анод, бомбардируемый мощным потоком электронов, разогревается еще больше. Это приводит к тому, что анод интенсивно испаряется и на его поверхности образуется углубление — кратер. Это углубление является самым ярким местом дуги.

Дуговой разряд имеет очень важное техническое применение — он используется для электросварки.

Кроме описанной выше термоэлектронной дуги бывает дуга с холодным катодом. Катодом такой дуги служит обычно жидккая ртуть, налитая в баллон, из которого удален воздух. Разряд происходит в парах ртути. Электроны вылетают из катода за счет автоэлектронной эмиссии. Необходимое для этого сильное поле у поверхности катода создается положительным пространственным зарядом, образованным ионами.

Искровой разряд. Этот вид разряда возникает в тех случаях, когда напряженность электрического поля достигает пробивного для данного газа значения.

Для воздуха при атмосферном давлении оно составляет около 3 МВ/м (30 кВ/см).

Искровой разряд сопровождается образованием ярко светящегося извилистого разветвленного канала, по которому проходит кратковременный импульс тока большой силы. Примером может служить молния: длина ее бывает до 10 км, диаметр канала до 40 см, сила тока может достигать 100 000 и более ампер. Газ в искровом канале представляет собой плазму, температура которой бывает до 10 000 К.

Возникновению искры предшествует образование в газе сильно ионизованного канала, называемого стримером. Этот канал получается путем перекрытия отдельных электронных лавин (рис. 34.2).



Рис. 34.2. Электронные лавины, возникающие при искровом разряде. Их перекрытие приводит к образованию стримера. Извилистойми линиями показано излучение, вызывающее фотоионизацию молекул

Родоначальником каждой лавины служит электрон, образующийся путем фотоионизации. Стример представляет собой хорошо проводящий канал, по которому устремляется от катода к аноду мощный поток электронов.

Коронный разряд. Если один из электродов (или оба) имеет очень большую кривизну (например, электродом служит тонкая проволока или острие), то при не слишком большом напряжении возникает разряд, сопровождаемый свечением, которое имеет вид короны, окружающей электрод. Это послужило причиной того, что разряд был назван коронным. Коронный разряд с острием имеет вид светящейся кисти, в связи с чем его иногда называют кистевым разрядом.

При коронном разряде ионизация и возбуждение молекул происходят не во всем межэлектродном пространстве, а вблизи электрода с малым радиусом кривизны, где напряженность поля достигает пробивного значения.

В зависимости от знака коронирующего электрода говорят о положительной или отрицательной короне. В случае отрицательной короны явления на катоде сходны с явлениями на катоде тлеющего разряда. Во внешней области короны поле недостаточно для того, чтобы сообщить электронам энергию, необходимую для ионизации молекул. Поэтому проникшие в эту область электроны дрейфуют под действием поля к аноду.

В положительной короне электронные лавины зарождаются у внешней границы короны и устремляются к аноду. Возникновение электронов, порождающих лавины, обусловлено фотоионизацией, вызванной излучением коронирующего слоя. Во внешней области короны носителями тока являются положительные ионы, которые дрейфуют под действием поля к катоду.

Корона, появляющаяся под действием атмосферного электричества на верхушках корабельных мачт или деревьев, получила в старину название огней святого Эльма. Эти «огни» вызывали суеверный ужас у моряков.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое плотность электрического тока?
2. Как, зная плотность тока в каждой точке некоторой поверхности, найти силу тока, текущего через эту поверхность?
3. Как связана ЭДС с напряженностью поля сторонних сил?
4. Что произойдет с мощностью электрической плитки, если нагревательную спираль разрезать на две равные части и включить их параллельно в сеть?
5. Как была установлена природа носителей тока в металлах?

Примеры решения задач

1. Из материала с удельным сопротивлением $\rho = 1,00 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ изготовлено плоское кольцо толщины $d = 10,0 \text{ мм}$. Радиусы кольца равны $a = 50,0 \text{ мм}$ и $b = 100,0 \text{ мм}$. Между внешней и внутренней цилиндрическими поверхностями кольца поддерживается некоторая разность потенциалов. Найти сопротивление R кольца в этих условиях.

Решение. Разделим кольцо на цилиндрические слои радиуса r и толщины dr . Эти слои представляют собой систему последовательно соединенных проводников. Сопротивление слоя равно

$$dR = \frac{\rho dr}{2\pi r d}.$$

Проинтегрировав это выражение по r в пределах от a до b , найдем сопротивление кольца:

$$\begin{aligned} R &= \int dR = \frac{\rho}{2\pi d} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi d} \ln \frac{b}{a} = \\ &= \frac{1,00}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,0100} \ln \frac{0,1000}{0,0500} = 11 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

2. Конденсатор емкости $C = 300$ пФ подключается через сопротивление $R = 500$ Ом к источнику постоянного напряжения U_0 . Определить время t , по истечении которого напряжение на конденсаторе окажется равным ηU_0 , где $\eta = 0,990$.

Решение. После включения внешнего напряжения на обкладках конденсатора возникает растущий со временем заряд q , в результате чего на конденсаторе появляется напряжение $U = q/C$, направленное навстречу напряжению U_0 . Поэтому мгновенное значение силы тока определяется формулой

$$I = \frac{U_0 - U}{R}.$$

Сила тока связана с приращением заряда на конденсаторе за время dt соотношением

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CU) = C \frac{dU}{dt}.$$

Приравняв оба выражения для силы тока, придем к дифференциальному уравнению

$$dt = RC \frac{dU}{U_0 - U}.$$

Интегрирование этого уравнения приводит к равенству

$$t = -RC \ln(U_0 - U) + \text{const.}$$

В момент $t = 0$ напряжение на конденсаторе $U = 0$. Отсюда следует, что $\text{const} = RC \ln U_0$. Следовательно,

$$t = -RC \ln \frac{U_0 - U}{U_0} = -RC \ln \left(1 - \frac{U}{U_0}\right).$$

Положив U/U_0 равным η , получим искомое время:

$$t = -RC \ln(1 - \eta) = -500 \cdot 300 \cdot 10^{-12} \ln(1 - 0,990) = 0,69 \text{ мкс.}$$

Г л а в а 6. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 35. Магнитное поле. Магнитная индукция

Из опыта следует, что электрические токи взаимодействуют между собой. Это взаимодействие осуществляется через поле, называемое магнитным. Название происходит от того, что, как обнаружил в 1820 г. Эрстед¹⁾, поле, возбуждаемое током, оказывает ориентирующее действие на магнитную стрелку. В опыте Эрстеда проволока, по которой шел ток, была натянута над магнитной стрелкой, вращающейся на игле. При включении тока стрелка устанавливалась перпендикулярно к проволоке. Изменение направления тока вызывало поворот стрелки в противоположную сторону.

Из опыта Эрстеда следует, что магнитное поле имеет направленный характер и должно характеризоваться векторной величиной. Эту величину принято обозначать буквой ***B***. По аналогии с напряженностью электрического поля, ***B*** следовало бы назвать напряженностью магнитного поля. Однако по историческим причинам основную силовую характеристику магнитного поля назвали магнитной индукцией. Название же «напряженность магнитного поля» оказалось присвоенным вспомогательной величине ***H***, аналогичной вспомогательной характеристике электрического поля ***D***.

Магнитное поле в отличие от электрического не оказывает действия на покоящийся заряд. Сила возникает лишь тогда, когда заряд движется.

Проводник с током представляет собой электрически нейтральную систему зарядов, в которой заряды одного знака движутся в одну сторону, а заряды другого знака движутся в противоположную сторону (либо покоятся). Отсюда следует, что магнитное поле порождается движущимися зарядами.

Итак, движущиеся заряды (токи) изменяют свойства окружающего их пространства — создают в нем магнитное поле. Это поле проявляется в том, что на движущиеся в нем заряды (токи) действуют силы.

Экспериментально установлено, что для магнитного

¹⁾ Ханс Кристиан Эрстед (1777—1851) — датский физик.

поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: поле \mathbf{B} , порождаемое несколькими движущимися зарядами (токами), равно векторной сумме полей \mathbf{B}_k , порождаемых каждым зарядом (током) в отдельности:

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_k \quad (35.1)$$

(ср. с (4.5)).

Подобно тому, как для исследования электрического поля мы использовали пробный точечный заряд, применим для исследования магнитного поля пробный ток, циркулирующий в плоском замкнутом контуре очень малых размеров. Ориентацию контура в пространстве будем характеризовать направлением нормали к контуру, связанной с направлением тока

правилом правого винта (рис. 35.1).

Такую нормаль мы будем называть положительной.

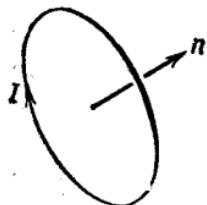
Поместив пробный контур в магнитное поле, мы обнаружим, что поле устанавливает контур положительной нормалью в определенном направлении. Примем это направление за направление поля в данной точке. Если контур повернуть так, чтобы направления нормали и поля не совпадали, возникает вращающий момент, стремящийся вернуть контур в равновесное положение. Значение момента зависит от угла α между нормалью и направлением поля, достигая наибольшего значения M_{\max} при $\alpha = \pi/2$ (при $\alpha = 0$ момент равен нулю).

Рис. 35.1. Пробный контур с током для исследования магнитного поля

Вращающий момент зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств контура. Внося в одну и ту же точку поля разные пробные контуры, мы обнаружим, что при фиксированном α вращающий момент пропорционален силе тока I в контуре и площади S контура и совершенно не зависит от формы контура. Таким образом, действие магнитного поля на плоский контур с током определяется величиной

$$p_m = IS, \quad (35.2)$$

которую называют дипольным магнитным моментом контура (аналогично вращающий мо-



мент, действующий в электрическом поле на диполь, пропорционален электрическому моменту диполя $p = ql$.

Кроме силы тока I и площади S контур характеризуется также ориентацией в пространстве. Поэтому магнитный момент следует рассматривать как вектор, направление которого совпадает с направлением положительной нормали n :

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n} \quad (35.3)$$

(\mathbf{n} — единичный вектор). Единицей магнитного момента является ампер-квадратный метр ($\text{A} \cdot \text{м}^2$).

На пробные контуры, отличающиеся значением p_m , действуют в данной точке разные по модулю врашающие моменты M . Однако отношение M/p_m оказывается при фиксированном α одним и тем же. Поэтому в качестве модуля магнитной индукции можно принять величину, равную отношению M_{\max}/p_m :

$$B = M_{\max}/p_m \quad (35.4)$$

(M_{\max} — наибольшее значение врачающего момента, получающееся при $\alpha = \pi/2$).

Итак, магнитная индукция есть векторная величина, модуль которой определяется выражением (35.4), а направление задается равновесным положением положительной нормали к контуру с током.

Единица B , называемая тесла (Тл)¹), равна магнитной индукции однородного поля, в котором на плоский контур с током, имеющий магнитный момент $1 \text{ A} \cdot \text{м}^2$, действует максимальный врачающий момент, равный $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

§ 36. Закон Био — Савара — Лапласа

Био² и Савар³ провели в 1820 г. исследование магнитных полей, создаваемых токами, текущими по тонким проводам различной формы. Лаплас проана-

¹⁾ В честь изобретателя в области электро- и радиотехники Никола Тесла (1856—1943) — по национальности серб, с 1884 г. в США.

²⁾ Жан Батист Био (1774—1862) — французский физик.

³⁾ Феликс Савар (1791—1841) — французский физик.

лизировал экспериментальные данные, полученные Био и Саваром, и установил зависимость, которая получила название закона Био—Савара—Лапласа. Согласно этому закону магнитное поле любого тока может быть вычислено как векторная сумма (суперпозиция) полей, создаваемых отдельными элементарными участками тока. Для магнитной индукции поля, создаваемого элементом тока длины dl , Лаплас получил формулу

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [dl, r]}{r^3}, \quad (36.1)$$

где dl — вектор, совпадающий с элементарным участком тока и направленный в ту сторону, в какую течет ток (рис. 36.1), r — вектор, проведенный от

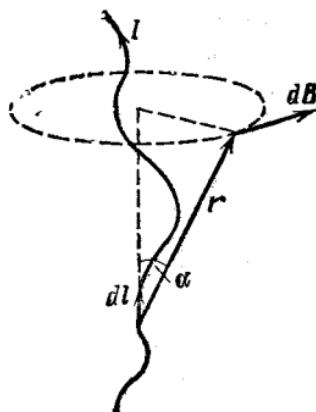


Рис. 36.1. Магнитная индукция dB , порождаемая элементом dl проводника, по которому течет ток I

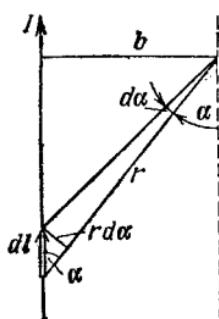


Рис. 36.2. Вычисление поля прямого тока

элемента тока в ту точку, в которой определяется dB , r — модуль этого вектора, μ_0 — так называемая магнитная постоянная, равная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{м/А} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}, \quad (36.2)$$

где Гн (генри) — единица индуктивности, см. с. 203. Модуль вектора (36.1) определяется выражением

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}, \quad (36.3)$$

где α — угол между векторами r и dl . Применим эту формулу для вычисления поля прямого тока, т. е.

поля, создаваемого током, текущим по тонкому прямому проводу бесконечной длины (рис. 36.2). Вычисления будем производить для точки, находящейся на расстоянии b от провода. Все векторы $d\mathbf{B}$ в данной точке имеют одинаковое направление (за чертеж). Поэтому сложение векторов $d\mathbf{B}$ можно заменить сложением их модулей.

На рис. 36.2 видно, что

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подстановка этих значений в формулу (36.3) дает

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I b \sin \alpha \sin^2 \alpha}{b^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \sin \alpha d\alpha.$$

Угол α для всех элементов бесконечного прямого тока изменяется от 0 до π . Следовательно,

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}.$$

Таким образом, магнитная индукция поля прямого тока определяется формулой

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}. \quad (36.4)$$

Линии магнитной индукции поля прямого тока представляют собой систему охватывающих провод концентрических окружностей (рис. 36.3).

Теперь найдем магнитную индукцию поля в центре и на оси кругового тока, т. е. тока, текущего по тонкому проводнику, имеющему форму окружности радиуса R . Каждый элемент тока создает в центре индукцию, направленную вдоль положительной нормали к контуру (рис. 36.4). Поэтому векторное сложение $d\mathbf{B}$ сводится к сложению их модулей. По формуле (36.3)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2}$$

($\alpha = \pi/2$). Интегрирование по всему контуру дает

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(I\pi R^2)}{R^3}. \quad (36.5)$$

Выражение в скобках равно модулю дипольного магнитного момента p_m кругового тока (см. (35.2)). На рис. 36.4 видно, что направление вектора \mathbf{B} совпадает с направлением положительной нормали к

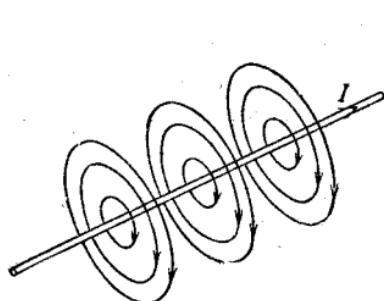


Рис. 36.3. Линии магнитной индукции поля прямого тока

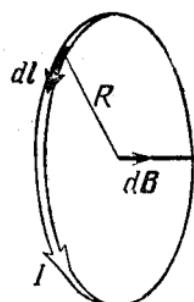


Рис. 36.4. Поле в центре кругового тока направлено вдоль положительной нормали n

контуру, т. е. с направлением вектора p_m . Следовательно, формулу (36.5) можно представить в виде

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{R^3}. \quad (36.6)$$

Возьмем точку на оси кругового тока на расстоянии r от центра контура (рис. 36.5 a). Векторы $d\mathbf{B}$

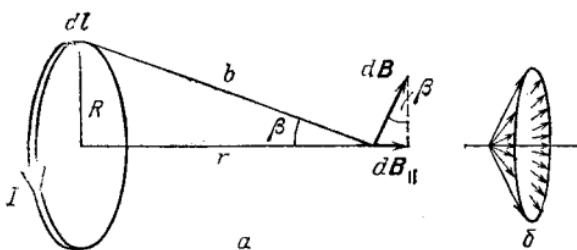


Рис. 36.5. К вычислению поля на оси кругового тока

перпендикулярны к плоскостям, проходящим через соответствующий элемент тока dl и точку, в которой определяется поле. Следовательно, они образуют симметричный конический веер (рис. 36.5 b). Из соображений симметрии ясно, что результирующий вектор \mathbf{B} направлен вдоль оси контура. Каждый из

векторов $d\mathbf{B}$ вносит в результирующий вектор \mathbf{B} вклад $d\mathbf{B}_{\parallel}$, равный по модулю

$$d\mathbf{B}_{\parallel} = dB \sin \beta = dB \frac{R}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{b^2} \frac{R}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{b^3} dl$$

(фигурирующий в формуле (36.3) угол α в данном случае равен $\pi/2$). Проинтегрировав по всему контуру и заменив b на $\sqrt{R^2 + r^2}$, получим модуль вектора \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} B &= \int d\mathbf{B}_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{b^3} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{b^3} \cdot 2\pi R = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(I\pi R^2)}{b^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\rho_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (36.7)$$

На больших расстояниях от контура, т. е. при $r \gg R$, можно пренебречь R^2 по сравнению с r^2 , и формула примет вид

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\rho_m}{r^3} \quad (36.8)$$

(ср. с формулой (10.7)).

Поскольку векторы \mathbf{B} и ρ_m имеют одинаковое направление, формулу (36.7) можно написать в векторном виде:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\rho_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (36.9)$$

Эта формула определяет \mathbf{B} в точках оси по обе стороны от контура (справа и слева). Таким образом, в точках оси, симметричных относительно центра тока, магнитная индукция одинакова по модулю и направлению.

При $r = 0$ формула (36.9) переходит в формулу (36.6).

На рис. 36.6 изображены линии \mathbf{B} поля кругового тока.

Из формулы (36.1) легко получить выражение для магнитной индукции поля, создаваемого точечным зарядом q , движущимся со скоростью v . Допустим, что ток создается носителями с зарядом e (знак безразличен), скорость упорядоченного движения которых равна v (раньше скорость упорядоченного движения носителей тока мы обозначали

буквой u ; теперь удобнее обозначить ее через v). Тогда

$$I = jS = ne'vS, \quad (36.10)$$

где S — площадь поперечного сечения проводника, n — число носителей тока в единице объема.

Подставим выражение (36.10) в формулу (36.1):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ne'vS [dl, r]}{r^3}. \quad (36.11)$$

Учтя, что векторы $e'v$ и dl совпадают по направлению, заменим $e'vdl$ через $e'vdl$. Тогда формула (36.11) примет вид

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ne'S dl [v r]}{r^3} \quad (36.12)$$

(скалярные множители можно вносить и выносить из-под знака векторного произведения).

Произведение Sdl дает объем отрезка провода длины dl , поэтому $nSdl$ равно числу носителей тока, содержащихся в этом объеме и создающих поле dB . Следовательно, разделив (36.12) на $nSdl$, мы найдем магнитную индукцию B поля, создаваемого зарядом e' , движущимся со скоростью v . Заменив e' на q , получим

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [v r]}{r^3}, \quad (36.13)$$

где r — вектор, проведенный от заряда в данную точку поля, r — его модуль (рис. 36.7). Мы произвели

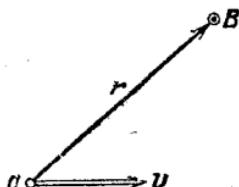


Рис. 36.7. Магнитное поле движущегося заряда. Вектор B перпендикулярен к плоскости рисунка и направлен «на нас»

замену e' на q в связи с тем, что формула (36.13) справедлива для любых точечных зарядов, например для заряженных шариков, размеры которых много меньше r .

§ 37. Закон Ампера. Сила Лоренца

Согласно закону, установленному Ампером, на элемент тока действует в магнитном поле сила

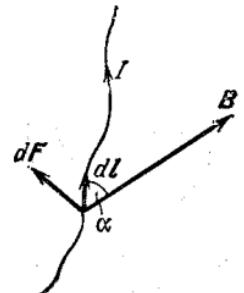
$$d\mathbf{F} = I [dl, \mathbf{B}] \quad (37.1)$$

(I — сила тока, \mathbf{B} — магнитная индукция в том месте, где помещается элемент dl). Модуль этой силы определяется выражением

$$dF = IB dl \sin \alpha, \quad (37.2)$$

где α — угол между векторами dl и \mathbf{B} (рис. 37.1). Направление силы определяется по правилу правого

Рис. 37.1. Действующая на элемент тока сила $d\mathbf{F}$ перпендикулярна к плоскости, в которой лежат векторы dl и \mathbf{B} , и направлена за чертеж



винта: поворот по кратчайшему расстоянию от dl к \mathbf{B} вызывает перемещение в направлении вектора $d\mathbf{F}$.

Воспользуемся формулой (37.2) для вычисления силы взаимодействия двух находящихся в вакууме параллельных бесконечно длинных прямых токов. Если расстояние между токами b (рис. 37.2), то каждый элемент тока I_2 будет находиться в возбуждаемом током I_1 поле, магнитная индукция которого равна

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{b}$$

(см. (36.4)). Угол α между элементами тока I_2 и вектором \mathbf{B}_1 прямой. Следовательно, согласно (37.2) на элемент тока I_2 будет действовать сила

$$dF = I_2 B_1 dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b} dl,$$

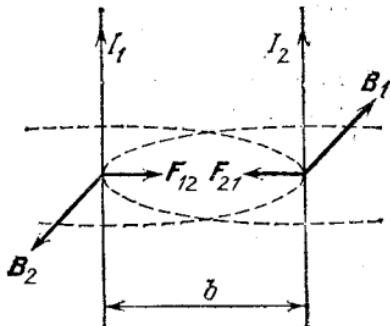


Рис. 37.2. Взаимодействие двух параллельных прямых токов

а на единицу длины тока I_2 — сила

$$F_{\text{ед}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}. \quad (37.3)$$

Для силы, действующей на единицу длины тока I_1 , получается такое же выражение.

Легко убедиться в том, что при одинаковом направлении токов они притягивают друг друга, а при противоположном — отталкивают.

На основании формулы (37.3) устанавливается единица силы тока в СИ — ампер. Ампер определяется как сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Единицу заряда — кулон определяют как заряд, проходящий за 1 с через поперечное сечение проводника, по которому течет постоянный ток силой 1 А. В соответствии с этим кулон называют также ампер-секундой (А·с).

Сила (37.1) обусловлена тем, что магнитное поле действует на носители тока (мы уже отмечали, что магнитное поле действует только на движущиеся заряды). От носителей тока действие силы передается проводнику, по которому они перемещаются. Найдем силу, действующую на отдельно взятый движущийся заряд. Для этого представим силу тока I в виде

$$I = jS = ne'vS,$$

где смысл обозначений тот же, что и в формуле (36.10). Подстановка этого выражения в (37.1) дает

$$dF = ne'vS [dl, \mathbf{B}] = ne'S dl [\mathbf{v} \mathbf{B}]$$

(преобразования те же, что и при переходе от (36.11) к (36.12)).

Произведение $nSdl$ равно числу носителей тока, содержащихся в элементе тока dl . Разделив dF на это число, найдем силу F , действующую на заряд e' , движущийся со скоростью v . Заменив e' на q , получим формулу

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{v} \mathbf{B}]. \quad (37.4)$$

Эта формула определяет силу (мы будем называть ее магнитной), действующую в точке поля, где магнитная индукция равна \mathbf{B} , на точечный заряд q , движущийся со скоростью v .

Формулу (37.4) легко запомнить с помощью следующего рассуждения. Имеются скаляр q и векторы v и \mathbf{B} . Для того чтобы «сконструировать» из них новый вектор \mathbf{F} , проще всего перемножить v и \mathbf{B} векторно и умножить получившийся результат на скаляр q . В результате получится (37.4). Порядок, в котором стоят сомножители в векторном произведении, можно запомнить, обратив внимание на то, что в формуле сначала стоят рядом характеристики заряда q и v , а после них стоит характеристика поля \mathbf{B} .

Модуль магнитной силы равен

$$F = qvB \sin \alpha, \quad (37.5)$$

где α — угол между векторами v и \mathbf{B} . Из (37.5) следует, что заряд, движущийся вдоль линий поля, не испытывает действия магнитной силы (в этом случае $\alpha = 0$).

Направлена магнитная сила перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы v и \mathbf{B} . Если заряд положителен, направление силы совпадает с направлением вектора $[v \mathbf{B}]$. В случае отрицательного заряда направления векторов \mathbf{F} и $[v \mathbf{B}]$ противоположны (рис. 37.3).

Магнитная сила всегда направлена перпендикулярно к скорости заряженной частицы, поэтому она работы над частицей не совершает. Следовательно, действуя на заряженную частицу постоянным магнитным полем, изменить ее энергию нельзя.

В случае, когда имеются одновременно электрическое и магнитное поля, сила, действующая на заряженную частицу, равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[v \mathbf{B}]. \quad (37.6)$$

Это выражение было получено Лоренцем путем обобщения экспериментальных данных и носит название силы Лоренца или лоренцевой силы.

Пусть одноименные точечные заряды q_1 и q_2 движутся «бок о бок» вдоль параллельных прямых с одинаковой скоростью v , много меньшей c (рис. 37.4). При $v \ll c$ электрическое поле практически не отли-

чается от поля неподвижного заряда. Поэтому модуль электрической силы F_e , действующей на заряды, можно считать равным

$$F_{e1} = F_{e2} = F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (37.7)$$

(r — расстояние между зарядами).

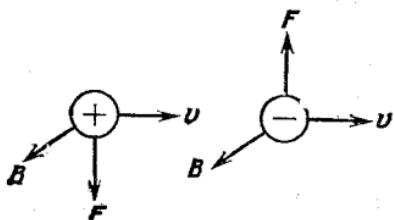


Рис. 37.3. Направление магнитной силы, действующей на движущийся заряд

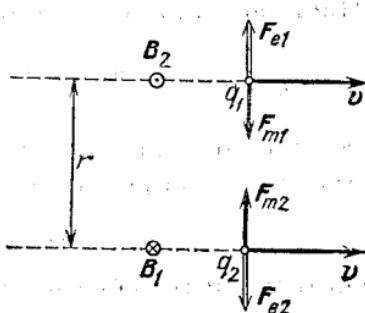


Рис. 37.4. Электрические и магнитные силы, с которыми действуют друг на друга положительные движущиеся заряды. Для отрицательных зарядов направления сил будут такими же, а направления B_1 и B_2 изменятся на противоположные. Для разноименных зарядов направления сил противоположны показанным на рисунке

Согласно формулам (36.13) и (37.5) магнитная сила, действующая на заряд q_2 , равна (в данном случае α в обеих формулах равен $\pi/2$)

$$F_{m2} = q_2 v B_1 = q_2 v \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 v}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v^2}{r^2} \quad (37.8)$$

(B_1 — магнитная индукция поля, создаваемого зарядом q_1 , в той точке, где находится заряд q_2). Такая же по модулю сила действует на заряд q_1 .

Найдем отношение магнитной силы к электрической:

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{(\mu_0/4\pi) q_1 q_2 v^2 / r^2}{(1/4\pi\epsilon_0) q_1 q_2 / r^2} = \epsilon_0 \mu_0 v^2. \quad (37.9)$$

Определим размерность и числовое значение произведения $\epsilon_0 \mu_0$. Согласно (37.7) и (37.3) ϵ_0 измеряется в $\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)$, а μ_0 — в $(\text{Н}/\text{м})\cdot\text{м}/\text{А}^2 = \text{Н}\cdot\text{с}^2/\text{Кл}^2$ (фор-

мула (37.3) определяет силу, приходящуюся на единицу длины; $A = \text{Кл}/\text{с}$). Следовательно, произведение $\epsilon_0\mu_0$ измеряется в

$$[\text{Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2)] [\text{Н} \cdot \text{с}^2/\text{Кл}^2] = \text{с}^2/\text{м}^2 = 1/(\text{м}/\text{с})^2.$$

Таким образом, размерность $\epsilon_0\mu_0$ обратна квадрату размерности скорости.

Числовое значение $\epsilon_0\mu_0$ равно (см. (3.4) и (36.2))

$$\frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} = \frac{1}{9 \cdot 10^{16}} = \frac{1}{(3 \cdot 10^8)^2}.$$

Итак, и размерность и числовое значение $\epsilon_0\mu_0$ обратны квадрату скорости света в вакууме c :

$$\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2. \quad (37.10)$$

С учетом этого соотношение (37.9) можно представить в виде

$$F_m/F_e = v^2/c^2. \quad (37.11)$$

Мы получили это соотношение в предположении, что $v \ll c$. Однако оно справедливо при любых v (разумеется, меньших c).

Из (37.11) следует, что магнитная сила слабее кулоновской в c^2/v^2 раз. Это объясняется тем, что магнитное взаимодействие между движущимися зарядами (и токами) является релятивистским эффектом. Магнетизм исчез бы, если бы скорость света оказалась бесконечно большой.

§ 38. Поток и циркуляция вектора магнитной индукции

В природе нет магнитных зарядов¹⁾, вследствие чего линии \mathbf{B} не имеют ни начала, ни конца — они либо замкнуты, либо уходят в бесконечность. Поэтому в соответствии с формулой (5.8) поток Φ_B вектора \mathbf{B} через замкнутую поверхность должен быть равен нулю. Следовательно, для любого магнитного

¹⁾ Английский физик-теоретик Поль Адриен Морис Дирак (1902—1984) высказал предположение, что в природе должны существовать магнитные заряды (названные монополями Дирака). Поиски этих зарядов пока не дали никаких результатов, так что вопрос о существовании монополей Дирака остается открытым.

поля и произвольной замкнутой поверхности S

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint_S B_n dS = 0. \quad (38.1)$$

Эта формула выражает теорему Гаусса для вектора \mathbf{B} : поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Отсутствие начала и конца магнитных линий означает, что дивергенция вектора \mathbf{B} всюду равна нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (38.2)$$

Теперь найдем циркуляцию вектора \mathbf{B} . По определению (см. § 8) циркуляция равна интегралу

$$\oint \mathbf{B} dl, \quad (38.3)$$

где dl — элемент замкнутого контура, по которому производится интегрирование.

Проще всего вычислить интеграл (38.3) в случае поля прямого тока. Пусть замкнутый контур лежит в плоскости, перпендикулярной к проводу, по которому течет ток (рис. 38.1). В каждой точке контура

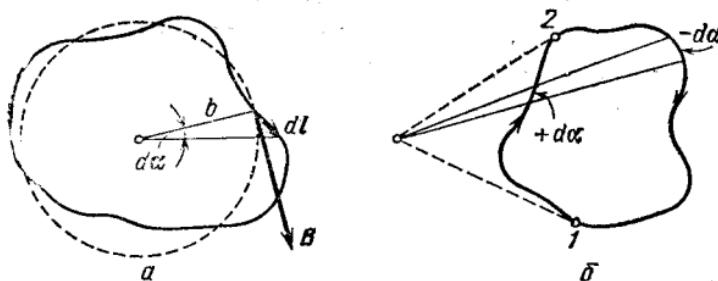


Рис. 38.1. К вычислению циркуляции для поля прямого тока. Ток перпендикулярен к плоскости чертежа и направлен за чертеж

вектор \mathbf{B} направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку. Представим Bdl в виде Bdl_B (dl_B — проекция dl на направление вектора \mathbf{B}). Из рисунка следует, что dl_B равна $b d\alpha$, где b — расстояние от провода с током до dl , $d\alpha$ — угол, на который поворачивается радиальная прямая при перемещении вдоль контура на отрезок dl . Подставив в

(38.3) это значение dl_B и выражение (36.4) для B , получим

$$\oint \mathbf{B} dl = \oint B dl_B = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} b d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\alpha.$$

При обходе по контуру, охватывающему ток (рис. 38.1а), радиальная прямая все время поворачивается в одном направлении, поэтому $\oint d\alpha = 2\pi$. Если ток не охватывается контуром (рис. 38.1б), то радиальная прямая поворачивается сначала в одном направлении (участок 1—2), а затем в противоположном (участок 2—1). Углы $d\alpha$, отвечающие поворотам в противоположные стороны, отличаются знаком. Поэтому $\oint d\alpha = 0$. Оба результата можно выразить формулой

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 I, \quad (38.4)$$

где I — ток, охватываемый контуром. Если контур тока не охватывает, $I = 0$ и, следовательно, циркуляция также равна нулю.

Знак циркуляции зависит от направления обхода по контуру. Если это направление образует с направлением тока правовинтовую систему, то, как следует из рис. 38.1а, выражение (38.4) положительно; в противном случае — отрицательно. Знак можно учесть, полагая I алгебраической величиной, причем положительным нужно считать ток, направление которого образует с направлением обхода по контуру правовинтовую систему; ток противоположного направления будет отрицательным.

Мы получили формулу (38.4) для прямого тока и плоского контура. Однако можно доказать, что эта формула справедлива и для неплоского контура, охватывающего ток, текущий по проводу произвольной формы.

Допустим, что контур произвольной формы охватывает несколько проводов с токами. В силу принципа суперпозиции

$$\oint \mathbf{B} dl = \left(\sum_k \mathbf{B}_k \right) dl = \sum_k \oint \mathbf{B}_k dl.$$

Каждый из интегралов в этой сумме равен $\mu_0 I_k$. Следовательно,

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_k. \quad (38.5)$$

Таким образом, циркуляция вектора \mathbf{B} по некоторому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, умноженной на μ_0 . Это утверждение называется теоремой о циркуляции.

Отметим, что формула (38.5) справедлива только для поля в вакууме в отсутствие меняющихся во времени электрических полей.

Сравним поток и циркуляцию электростатического и магнитного полей в вакууме. Согласно формулам (6.5), (8.3), (38.1) и (38.5)

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q, \quad \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0,$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I.$$

Сопоставление этих формул показывает, что электростатическое и магнитное поля имеют существенно различный характер. Источниками электростатического поля являются заряды q . Магнитное поле не имеет источников. Циркуляция напряженности электростатического поля равна нулю; следовательно, электростатическое поле потенциально и может быть охарактеризовано потенциалом ϕ . Циркуляция вектора магнитной индукции пропорциональна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром. Поэтому магнитному полю нельзя приписать скалярный потенциал, аналогичный потенциалу ϕ электростатического поля.

Поле, у которого циркуляция отлична от нуля, называется вихревым или соленоидальным.

Таким образом, в то время как электростатическое поле потенциально, магнитное поле, в отличие от него, является вихревым.

§ 39. Поле соленоида и тороида

Соленоидом называется провод, навитый на круглый цилиндрический каркас. Линии \mathbf{B} поля соленоида выглядят примерно так, как показано на

рис. 39.1. Внутри соленоида направление линий образует с направлением тока в витках правовинтовую систему.

У реального соленоида имеется составляющая тока вдоль оси, обусловленная переходом от витка к витку. Кроме того, линейная плотность тока $j_{\text{лин}}$

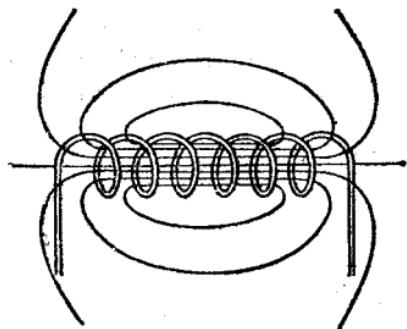


Рис. 39.1. Поле соленоида

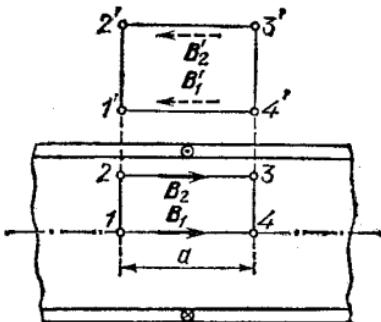


Рис. 39.2. Участок бесконечно-го идеального соленоида. Кружок с точкой и кружок с кре-стиком указывают направление тока («на нас» и «от нас»)

(т. е. отношение силы тока dI к элементу длины dl соленоида, на который она приходится) изменяется пе-риодически при перемещении вдоль соленоида. Сред-нее значение этой плотности

$$\langle j_{\text{лин}} \rangle = nI,$$

где n — число витков соленоида, приходящееся на единицу его длины, I — сила тока в соленоиде.

В учении об электромагнетизме большую роль играет воображаемый бесконечно длинный соленоид, у которого отсутствует осевая составляющая тока и линейная плотность тока постоянна по всей длине. Это вызвано тем, что поле такого соленоида однородно и ограничено объемом соленоида (подобно этому электрическое поле бесконечного плоского конденсатора однородно и ограничено объемом конденсатора).

Чтобы удовлетворить указанным требованиям, представим идеальный соленоид в виде бесконечного тонкостенного цилиндра (рис. 39.2), обтекаемого то-ком с однородной линейной плотностью

$$j_{\text{лин}} = nI. \quad (39.1)$$

В силу симметрии линии вектора \mathbf{B} должны быть параллельными осями соленоида. При наклоне под углом к оси они должны были бы где-то начинаться, что невозможно.

Из рис. 39.1 следует, что число линий внутри и вне соленоида одно и то же. При увеличении длины l соленоида равенство числа линий внутри и вне соленоида сохраняется и остается справедливым в пределе при $l \rightarrow \infty$.

Возьмем внутри соленоида воображаемый прямоугольный контур 1—2—3—4—1 (рис. 39.2). Обойдя контур по часовой стрелке, получим для циркуляции вектора \mathbf{B} значение $(B_2 - B_1)a$. Контур не охватывает токов, поэтому циркуляция должна быть равна нулю (см. (38.5)). Отсюда следует, что $B_1 = B_2$. Располагая участок 2—3 контура на разных расстояниях от оси, получим, что магнитная индукция на любом расстоянии равна индукции B_1 на оси соленоида. Таким образом, поле внутри соленоида является однородным.

Рассмотрим контур 1'—2'—3'—4'—1'. Векторы \mathbf{B}'_1 и \mathbf{B}'_2 изображены штриховыми линиями, поскольку, как сейчас выяснится, поле вне бесконечного соленоида равно нулю. Повторяя рассуждения, проведенные для контура 1—2—3—4—1, придем к выводу, что поле вне соленоида (если оно отлично от нуля) также должно быть однородным.

Представим себе бесконечную плоскость, перпендикулярную к оси соленоида. Через внутреннюю часть этой плоскости проходит конечное число равноотстоящих линий \mathbf{B} . Такое же число равноотстоящих линий проходит через простирающуюся до бесконечности внешнюю часть плоскости. Поскольку плоскость бесконечна, а число линий конечно, густота их равна нулю. Это означает, что поле \mathbf{B}' вне соленоида равно нулю.

Для обхода по часовой стрелке циркуляция по контуру, изображенному на рис. 39.3, равна Ba ($B' = 0$). Контур охватывает положительный ток, сила которого равна $j_{\text{лин}}a = nIa$ (см. (39.1)). В соответствии с (38.5) $Ba = \mu_0 n I a$, откуда

$$B = \mu_0 n I. \quad (39.2)$$

Итак, внутри бесконечного соленоида поле однород-

но и определяется выражением (39.2), а вне соленоида поле равно нулю.

В магнитную индукцию в некоторой точке на оси соленоида обе полубесконечные части соленоида вносят одинаковый вклад (это вытекает из принципа суперпозиции и соображений симметрии). Поэтому у

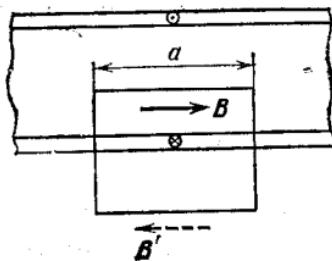


Рис. 39.3. Вычисление циркуляции по контуру, охватывающему ток, текущий в соленоиде

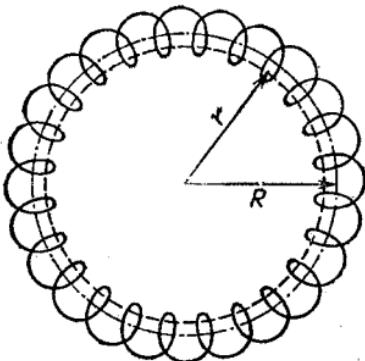


Рис. 39.4. Тороид радиуса R . Штриховой линией радиуса r показана одна из линий вектора B

конца полубесконечного соленоида на его оси магнитная индукция равна половине значения (39.2):

$$B_{\text{кон}} = \mu_0 n I / 2. \quad (39.3)$$

Для реального соленоида в случае, если его длина намного больше, чем диаметр, формула (39.2) справедлива для точек в средней части соленоида, а формула (39.3) — для точек на оси вблизи его концов.

Тороидом называется провод, навитый на каркас, имеющий форму тора (рис. 39.4). Возьмем контур в виде окружности радиуса r , центр которой совпадает с центром тороида. В силу симметрии вектор B в каждой точке должен быть направлен по касательной к контуру. Следовательно, циркуляция вектора B равна

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r$$

(B — магнитная индукция в тех точках, где проходит контур).

Если контур проходит внутри тороида, он охватывает ток $2\pi RnI$ (R — радиус тороида, n — число витков на единицу его длины). В этом случае для контура радиуса r

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot 2\pi RnI,$$

откуда

$$B = \frac{R}{r} \mu_0 n I. \quad (39.4)$$

Контур, проходящий вне тороида, токов не охватывает, поэтому для него $B \cdot 2\pi r = 0$. Следовательно, вне тороида поле равно нулю. Таким образом, поле сосредоточено внутри тороида, однако, в отличие от поля соленоида, поле тороида не является однородным.

У реального тороида имеется составляющая тока вдоль оси. Она создает дополнительное поле, подобное полю кругового тока.

§ 40. Контур с током в магнитном поле

Рассмотрим, как ведет себя контур с током в магнитном поле. Допустим сначала, что поле однородно ($B = \text{const}$). Согласно (37.1) на элемент контура dl действует сила

$$d\mathbf{F} = I [dl, \mathbf{B}]. \quad (40.1)$$

Результирующая этих сил равна

$$\mathbf{F} = \oint I [dl, \mathbf{B}]. \quad (40.2)$$

Вынесем постоянные величины I и \mathbf{B} из-под знака интеграла. В результате получим

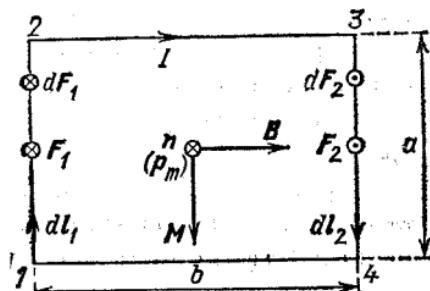
$$\mathbf{F} = I \left[\left(\oint dl \right), \mathbf{B} \right].$$

Интеграл $\oint dl$ равен нулю, следовательно, и $\mathbf{F} = 0$. Таким образом, результирующая сила, действующая на контур с током в однородном магнитном поле, равна нулю. Это справедливо для контуров любой формы (в том числе и неплоских) при произвольном расположении контура относительно направления поля. Существенной для равенства нулю результирующей силы является лишь однородность поля.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением плоских контуров. Вычислим результирующий врашающий момент, создаваемый силами (40.1), приложенными к контуру. Сначала будем считать поле однородным. Поскольку в однородном поле сумма этих сил равна нулю, результирующий момент относительно любой точки будет один и тот же (ср. с моментом пары сил).

На рис. 40.1 показан прямоугольный контур, ориентированный так, что вектор \mathbf{B} параллелен двум

Рис. 40.1. Плоский контур с током в однородном магнитном поле, параллельном стороне b контура. Нормаль n и сила F_1 направлены «от нас», сила F_2 направлена «на нас»



из его сторон. При указанных направлениях тока и поля на каждый элемент участка 1—2 действует направленная за чертеж сила $d\mathbf{F}_1$, модуль которой равен $IBdl_1$, а на каждый элемент участка 3—4 действует направленная «на нас» сила $d\mathbf{F}_2$, модуль которой равен $IBdl_2$. Участки 2—3 и 4—1 параллельны полю, поэтому силы на них не действуют.

Результирующая \mathbf{F}_1 сил $d\mathbf{F}_1$ приложена к середине участка 1—2 и имеет модуль, равный IBa . Аналогично результирующая \mathbf{F}_2 сил $d\mathbf{F}_2$ приложена к середине участка 3—4 и имеет модуль такой же величины, что и \mathbf{F}_1 . Силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 образуют пару сил с плечом, равным b . Следовательно, на контур действует врачающий момент

$$M = IBab = IBS,$$

где S — площадь контура. Учтя взаимную ориентацию векторов M , \mathbf{B} и орта нормали n , можно написать, что

$$\mathbf{M} = [(ISn), \mathbf{B}]. \quad (40.3)$$

Выражение в круглых скобках представляет собой магнитный момент контура p_m (см. (35.3)). Таким

образом, мы пришли к формуле

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}] \quad (\mathbf{p}_m \perp \mathbf{B}). \quad (40.4)$$

Можно доказать, что формулы (40.3) и (40.4) справедливы для плоских контуров любой формы, находящихся в однородном магнитном поле.

В случае, когда векторы \mathbf{p}_m и \mathbf{B} коллинеарны, силы, действующие на отдельные элементы контура, лежат в одной плоскости (плоскости контура) и, следовательно, не могут обусловить вращающий момент. Эти силы стремятся растянуть (если \mathbf{p}_m и \mathbf{B} имеют одинаковое направление) либо сжать (если \mathbf{p}_m и \mathbf{B} имеют противоположные направления) контур.

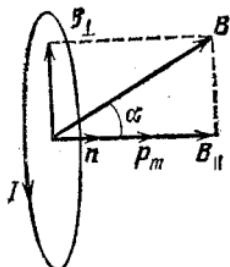


Рис. 40.2. Контур, нормаль n к плоскости которого образует с направлением вектора B угол α

Рассмотрим случай, когда векторы \mathbf{p}_m и \mathbf{B} образуют произвольный угол α (рис. 40.2). Разложим магнитную индукцию \mathbf{B} на две составляющие: \mathbf{B}_{\parallel} — параллельную и \mathbf{B}_{\perp} — перпендикулярную к вектору \mathbf{p}_m , и рассмотрим действие каждой составляющей отдельно. Составляющая \mathbf{B}_{\parallel} будет обуславливать силы, растягивающие или сжимающие контур. Составляющая \mathbf{B}_{\perp} , имеющая модуль, равный $B \sin \alpha$, приведет к возникновению вращающего момента, который можно вычислить по формуле (40.4):

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}_{\perp}]. \quad (40.5)$$

Поскольку $[\mathbf{p}_m \mathbf{B}_{\parallel}] = 0$, формулу (40.5) можно написать в виде

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]. \quad (40.6)$$

Эта формула справедлива при любой взаимной ориентации векторов \mathbf{p}_m и \mathbf{B} .

Модуль вектора \mathbf{M} равен

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (40.7)$$

где α — угол между векторами \mathbf{p}_m и \mathbf{B} . Для того чтобы этот угол увеличить на $d\alpha$, нужно совершить против сил, действующих на контур в магнитном поле,

работу

$$dA = M d\alpha = p_m B \sin \alpha da. \quad (40.8)$$

Поворачиваясь в первоначальное положение, контур может возвратить затраченную на его поворот работу, совершив ее над каким-нибудь телом. Следовательно, работа (40.8) идет на увеличение потенциальной энергии W , которой обладает контур с током в магнитном поле,

$$dW = p_m B \sin \alpha da.$$

Интегрируя, находим, что

$$W = -p_m B \cos \alpha + \text{const.}$$

Если положить $\text{const} = 0$, формула упрощается следующим образом:

$$W = -p_m B \cos \alpha = -p_m B \quad (40.9)$$

(ср. с формулой (11.3)).

Параллельная ориентация векторов p_m и B соответствует минимуму энергии (40.9) и, следовательно, положению устойчивого равновесия.

Теперь рассмотрим плоский круговой контур, находящийся в неоднородном осесимметричном магнитном поле. Ось симметрии поля обозначим буквой

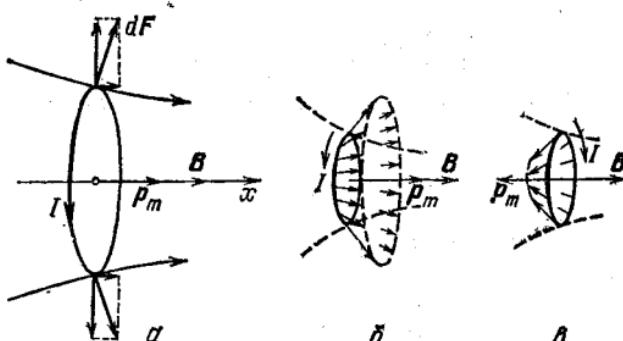


Рис. 40.3. Круговой контур с током в неоднородном осесимметричном магнитном поле

x . Контур расположим так, чтобы его центр оказался на оси x , а магнитный момент контура был ориентирован по полю (рис. 40.3а).

Поскольку $B \neq \text{const}$, выражение (40.2) не обявлено равняться нулю. Сила dF , действующая на элемент контура, перпендикулярна к B , т. е. к линии

магнитной индукции в месте пересечения ее с dl . Поэтому силы, приложенные к различным элементам контура, образуют симметричный конический веер (рис. 40.3б). Их результирующая \mathbf{F} направлена в сторону возрастания B и, следовательно, втягивает контур в область более сильного поля. Очевидно, что чем быстрее изменяется поле (чем больше $\partial B / \partial x$), тем меньше угол раствора веера и тем больше, при прочих равных условиях, результирующая сила \mathbf{F} . Если изменить направление тока на обратное (при этом p_m станет противоположным B), направления всех сил $d\mathbf{F}$ и их результирующей \mathbf{F} изменятся на обратные (рис. 40.3в). Следовательно, при такой взаимной ориентации векторов p_m и B контур будет выталкиваться из поля.

С помощью выражения (40.9) для энергии контура в магнитном поле легко найти модуль силы \mathbf{F} . Если ориентация магнитного момента по отношению к полю остается неизменной ($\alpha = \text{const}$), то W будет зависеть только от x (через B). Продифференцировав W по x и изменив у результата знак на обратный, получим проекцию силы на ось x :

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha.$$

В силу осевой симметрии поля можно считать, что $F = F_x$. Следовательно,

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha. \quad (40.10)$$

Согласно полученной формуле сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле, зависит от ориентации магнитного момента контура относительно направления поля. Если векторы p_m и B совпадают по направлению ($\alpha = 0$), сила положительна, т. е. направлена в сторону возрастания B ($\partial B / \partial x$ предполагается положительной; в противном случае знак и направление силы изменяются на противоположные, но сила по-прежнему будет втягивать контур в область более сильного поля). Если p_m и B антипараллельны ($\alpha = \pi$), сила отрицательна, т. е. направлена в сторону убывания B . Этот результат мы уже получили качественно с помощью рис. 40.3.

Разумеется, что кроме силы (40.10) на контур с током в неоднородном магнитном поле будет действовать также вращающий момент (40.6).

§ 41. Работа, совершаемая при перемещении тока в магнитном поле

Допустим, что прямолинейный провод с током может перемещаться во внешнем магнитном поле. Это можно осуществить с помощью скользящих контактов между концами провода и остальными участками замкнутой цепи (рис. 41.1). Предположим, что замкнутая цепь образует плоский контур. Внешнее поле будем считать однородным и перпендикулярным к плоскости контура.

В случае, изображенном на рисунке, направление поля и направление положительной нормали n к контуру совпадают. Поэтому магнитный поток, пронизывающий контур, положителен и равен BS (S — площадь контура). Сила F , действующая на провод в этом случае, направлена вправо и имеет модуль, равный IBl . При перемещении провода вправо на dh эта сила совершает над ним положительную работу

$$dA = F dh = IBl dh = IB dS = Id\Phi, \quad (41.1)$$

где dS — приращение площади контура, $d\Phi$ — приращение магнитного потока через контур, которое равно потоку, «пересеченному» проводом при его движении. В данном случае $d\Phi > 0$. При перемещении провода влево работа силы F была бы отрицательной. Приращение магнитного потока также было бы отрицательным. Так что в любом случае совершенная над проводом работа равна силе тока, умноженной на пересеченный проводом магнитный поток:

$$dA = Id\Phi. \quad (41.2)$$

Если бы однородное магнитное поле было направлено под углом α к положительной нормали контура, то и сила F образовывала бы с направлением

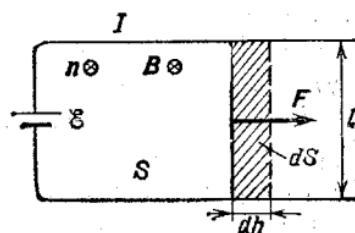


Рис. 41.1. Контур с перемещающейся перемычкой в магнитном поле, направленном «от нас»

перемещения тот же угол α . В результате в формуле (41.1) появился бы множитель $\cos \alpha$. Пересеченный проводом магнитный поток также был бы равен $B dS \cos \alpha$. Следовательно, и в этом случае справедлива формула (41.2).

Можно доказать, что формула (41.2) справедлива для провода любой формы, движущегося в неоднородном магнитном поле.

Чтобы получить работу, совершающую в магнитном поле при конечном перемещении провода, нужно просуммировать элементарные работы (41.2), совершаемые на элементарных участках пути. В результате получим, что

$$A = I \int d\Phi = I\Phi_{\text{пересеч}} \quad (41.3)$$

($\Phi_{\text{пересеч}}$ — поток, пересеченный проводом при его движении; ток в проводе предполагается постоянным).

Производя вычисление работы по формуле (41.3), нужно помнить, что $\Phi_{\text{пересеч}}$ — алгебраическая величина.

Переместим в магнитном поле плоский контур с током в его плоскости из некоторого начального положения в конечное (рис. 41.2). Поле будем считать

неоднородным и перпендикулярным к плоскости, в которой перемещается контур. Силы dF , действующие на элементы участка 3—4—1, образуют с направлением перемещения острые углы, поэтому их работа положительна. Участок 3—4—1 пересекает поток, равный $\Phi_0 + \Phi_k$. Следовательно, над этим участком совершается работа $I(\Phi_0 + \Phi_k)$.

Силы dF , действующие на элементы участка 1—2—3, образуют с направлением перемещения тупые углы, поэтому их работа отрицательна. Участок 1—2—3 пересекает поток, равный

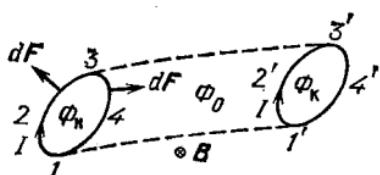


Рис. 41.2. Контур перемещается в плоскости рисунка, поле направлено за чертеж и неоднородно: Φ_n — поток через контур в начале перемещения, Φ_k — поток через контур в конце перемещения, Φ_0 — поток через поверхность 1—4—3—3'—2'—1

элементы участка 1—2—3, образуют с направлением перемещения тупые углы, поэтому их работа отрицательна. Участок 1—2—3 пересекает поток, равный

$\Phi_n + \Phi_0$. Следовательно, над этим участком совершается работа $-I(\Phi_n + \Phi_0)$. Таким образом, работа, совершаемая над контуром, равна

$$A = I(\Phi_0 + \Phi_n) - I(\Phi_n + \Phi_0) = I(\Phi_n - \Phi_0). \quad (41.4)$$

Мы получили эту формулу, рассматривая плоское движение контура в перпендикулярном к плоскости поле. Однако можно доказать, что формула верна при любом движении контура в произвольном постоянном магнитном поле. В частности, при повороте плоского контура в однородном поле из положения, в котором положительная нормаль n к контуру и вектор B направлены в противоположные стороны, в положение, при котором направления этих векторов совпадают, совершаемая над контуром работа равна

$$A = 2ISB$$

($\Phi_n = SB$, $\Phi_h = -SB$). Учтя, что IS равно магнитному моменту контура p_m , можно написать, что

$$A = 2p_m B. \quad (41.5)$$

Отметим, что работа (41.4) совершается не за счет энергии внешнего магнитного поля (это поле остается неизменным), а за счет источника тока, поддерживающего постоянной силу тока I .

§ 42. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Магнитная сила всегда направлена перпендикулярно к скорости заряженной частицы. Поэтому она может изменять лишь направление скорости, но не ее модуль.

Если заряд e' движется в однородном магнитном поле со скоростью v , перпендикулярной к вектору B , то магнитная сила сообщает ему нормальное ускорение, модуль которого

$$a_n = \frac{F}{m} = \frac{e'}{m} v B \quad (42.1)$$

остается постоянным (см. формулу (37.5); угол α между векторами v и B равен $\pi/2$).

В случае, когда частица движется в плоскости с постоянными по модулю скоростью и нормальным

ускорением, траекторией является окружность, радиус которой определяется соотношением $a_n = v^2/R$. Подставив сюда значение (42.1) для a_n и решив получившееся уравнение относительно R , придем к формуле

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B}. \quad (42.2)$$

Итак, если заряженная частица движется в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости, в которой происходит движение, траекторией частицы является окружность. Радиус этой окружности зависит от скорости частицы, магнитной индукции поля и отношения заряда частицы к ее массе. Отношение e'/m называется удельным зарядом частицы.

Разделив длину окружности $2\pi R$ на скорость v , получим период обращения частицы, т. е. время, затрачиваемое на один оборот:

$$T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B}. \quad (42.3)$$

Из этой формулы следует, что период обращения частицы не зависит от ее скорости, он определяется только удельным зарядом частицы и магнитной индукцией поля.

Рассмотрим случай, когда скорость частицы v образует с направлением однородного магнитного поля угол α , отличный от нуля или $\pi/2$. Разложим вектор v на две составляющие: v_{\perp} — перпендикулярную к B и v_{\parallel} — параллельную B (рис. 42.1). Модули этих составляющих равны

$$v_{\perp} = v \sin \alpha, \quad v_{\parallel} = v \cos \alpha.$$

Магнитная сила имеет модуль

$$F = e' v B \sin \alpha = e' v_{\perp} B$$

и лежит в плоскости, перпендикулярной к B . Создаваемое этой силой ускорение является для составляющей v_{\perp} нормальным. Составляющая магнитной силы в направлении B равна нулю. Поэтому повлиять на составляющую v_{\parallel} магнитная сила не может.

Из сказанного вытекает, что движение частицы можно представить как наложение двух движений:

1) перемещения вдоль направления \mathbf{B} с постоянной скоростью $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ и 2) равномерного движения по окружности в плоскости, перпендикулярной к вектору \mathbf{B} . Радиус этой окружности можно определить по формуле (42.2), заменив в ней v на $v_{\perp} = v \sin \alpha$. Траектория частицы представляет собой винтовую

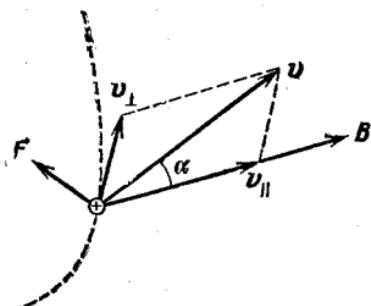


Рис. 42.1. Разложение скорости частицы на составляющие v_{\perp} и v_{\parallel}

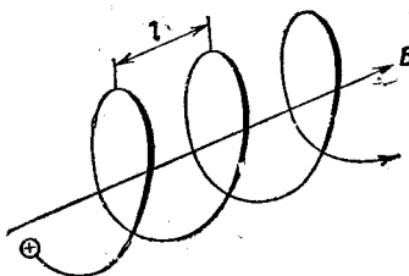


Рис. 42.2. Траектория положительно заряженной частицы для случая $\alpha < \pi/2$

линию, ось которой совпадает с направлением вектора \mathbf{B} (рис. 42.2). Шаг линии l можно найти, умножив v_{\parallel} на определяемый формулой (42.3) период обращения T :

$$l = v_{\parallel} T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{v}{B} \cos \alpha. \quad (42.4)$$

Направление, в котором закручивается траектория, зависит от знака заряда частицы. Если смотреть вдоль направления \mathbf{B} , то траектория положительного заряда закручивается против часовой стрелки, а траектория отрицательного заряда — по часовой стрелке. При $\alpha < \pi/2$ частица летит «от нас», при $\alpha > \pi/2$ — «на нас».

Формулы (42.2) и (42.3) были получены, исходя из ньютоновского уравнения $ma = \mathbf{F}$. Иначе обстоит дело в релятивистском случае. Поскольку магнитная сила перпендикулярна к скорости частицы, модуль скорости остается постоянным. Поэтому уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \mathbf{F}$$

(см. формулу (51.1) 1-го тома) упрощается следующим образом:

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} = F \quad (42.5)$$

($v^2 = \text{const}$!). В этом уравнении dv/dt есть нормальное ускорение a_n , модуль которого равен v^2/R . Модуль силы в данном случае равен $e'vB$. Заменив в (42.5) векторы их модулями, получим уравнение

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v^2}{R} = e'vB,$$

откуда

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B \sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (42.6)$$

(ср. с (42.2)). Следовательно, для периода обращения частицы $T = 2\pi R/v$ получается формула

$$T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (42.7)$$

Таким образом, в релятивистском случае период обращения по мере увеличения скорости уменьшается.

При $v \ll c$ формула (42.7) переходит в (42.3).

§ 43. Определение заряда и массы электрона. Масс-спектрографы

Определение заряда электрона было произведено с большой точностью Милликеном¹⁾ в 1909 г. В закрытое пространство между горизонтально расположенными пластинами конденсатора Милликен вводил мельчайшие капельки масла (рис. 43.1). При разбрзгивании капельки электризовались, и их можно было устанавливать неподвижно, подбирая напряжение на конденсаторе. Равновесие наступало при условии

$$P' = e'E, \quad (43.1)$$

где e' — заряд капельки, E — напряженность поля, P' — результирующая сила тяжести и архимедовой

¹⁾ Роберт Эндрюс Милликен (1868—1953) — американский физик.

сили, равная

$$P' = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) g \quad (43.2)$$

(ρ — плотность капельки, r — ее радиус, ρ_0 — плотность воздуха).

Из формул (43.1) и (43.2), зная r , можно было найти e' . Для определения радиуса измерялась скорость v_0 равномерного падения капельки в отсутствие поля. Равномерное движение капельки устанавливалось при условии, что сила P' уравновешивается силой сопротивления $F = 6\pi\eta rv$:

$$P' = 6\pi\eta rv \quad (43.3)$$

(см. формулу (43.2) 1-го тома; η — вязкость воздуха). Движение капельки

наблюдалось с помощью микроскопа. Для измерения v_0 определялось время, за которое капелька проходила расстояние между двумя нитями, видимыми в поле зрения микроскопа.

Точно зафиксировать равновесие капельки очень трудно. Поэтому вместо поля, отвечающего условию (43.1), включалось такое поле, под действием которого капелька двигалась с небольшой скоростью вверх. Установившаяся скорость подъема v_E определялась из условия, что сила P' вместе с силой $6\pi\eta rv$, уравновешивали силу $e'E$:

$$P' + 6\pi\eta rv_E = e'E. \quad (43.4)$$

Исключив из уравнений (43.2), (43.3) и (43.4) P' и r , получим выражение для e' :

$$e' = 9\pi \sqrt{\frac{2\eta^3 v_0}{(\rho - \rho_0) g}} \frac{v_0 + v_E}{E}.$$

Таким образом, измерив скорость свободного падения капельки v_0 и скорость ее подъема v_E в известном электрическом поле E , можно было найти заряд капельки e' . Произведя измерение скорости v_E

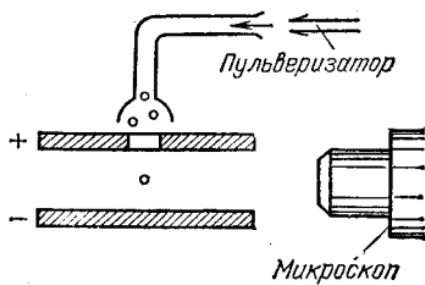


Рис. 43.1. Схема опыта Милликена для определения заряда электрона

при некотором значении заряда e' , Милликен вызывал ионизацию воздуха, облучая пространство между пластинами рентгеновским излучением. Отдельные ионы, прилипая к капельке, изменяли ее заряд, в результате чего скорость v_B также менялась. После измерения нового значения скорости снова облучалось пространство между пластинами и т. д.

Измеренные Милликеном изменения заряда капельки $\Delta e'$ и сам заряд e' каждый раз получались целыми кратными одной и той же величины e . Тем самым была доказана дискретность электрических зарядов, т. е. тот факт, что всякий заряд состоит из элементарных зарядов одинаковой величины.

Значение элементарного заряда, установленное с учетом измерений Милликена и данных, полученных другими методами, равно

$$e = 1,602\,189\,2 \text{ Кл.} \quad (43.5)$$

Такое же значение имеет заряд электрона.

Дж. Дж. Томсоном¹⁾ в 1897 г. впервые измерен удельный заряд (т. е. отношение e/m) электрона. Измерения были осуществлены с помощью разрядной трубки, схема которой показана на рис. 43.2. В трубке возбуждался тлеющий разряд (см. § 34) при

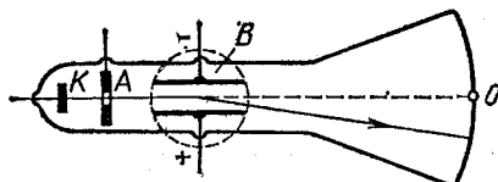


Рис. 43.2. Схема разрядной трубки, использованной Томсоном для определения удельного заряда электрона. Штриховой окружностью обведена область перпендикулярного к плоскости рисунка магнитного поля

столь низком давлении, что большинство электронов, выбитых положительными ионами из катода, пролетев сквозь отверстие в аноде, беспрепятственно достигали конца трубки и вызывали на нем светящееся пятно. Анод одновременно играл роль коллиматора, сжимающего пучок, вследствие чего пятно получалось малого радиуса. Прежде чем попасть на

¹⁾ Джозеф Джон Томсон (1856—1940) — английский физик.

экран, пучок проходил между пластинами конденсатора. Подавая напряжение на пластины, можно было вызывать смещение пучка в вертикальном направлении. Трубка помещалась между полюсами электромагнита, с помощью которого можно было создавать на том же участке, где действовало электрическое поле, перпендикулярное к электрическому магнитное поле. Это поле также могло вызывать смещение пучка в вертикальном направлении.

Соответствующий расчет дает, что смещение x светящегося пятна под действием магнитного поля равно

$$x = K \frac{e}{m} \frac{B}{v} = \frac{K}{R}, \quad (43.6)$$

где v — скорость электронов, B — магнитная индукция поля, K — коэффициент, определяемый геометрией прибора (протяженностью области, в которой действует поле, и расстоянием от этой области до экрана). Эту формулу легко понять, если учесть, что выражение eB/mv обратно радиусу R окружности, по которой движутся электроны в магнитном поле (см. (42.2)).

Измерив смещение x пятна под действием магнитного поля B , Томсон включал дополнительно электрическое поле и подбирал его напряженность E так, чтобы пятно вернулось в положение, в котором оно находилось в отсутствие полей. В этом случае магнитная сила уравновешивалась электрической, т. е. соблюдалось равенство

$$eE = evB. \quad (43.7)$$

Исключив v из уравнений (43.6) и (43.7), получим формулу

$$\frac{e}{m} = \frac{x}{K} \frac{E}{B^2} \quad (43.8)$$

(коэффициент K был известен).

Томсон осуществил измерения с различными газами (воздухом и углекислым газом) и разными материалами катода (алюминием и платиной). Скорость электронов также варьировалась примерно в два раза. Значения e/m во всех случаях получились одними и теми же с погрешностью 15 %. Точность

измерений Томсона была мала. Наличие систематических погрешностей привело к тому, что полученное им значение e/m в 2,5 раза превышает принятое в настоящее время значение.

Скорость электронов в опыте Томсона была невелика, вследствие чего релятивистские эффекты не сказывались. Впоследствии, когда стали экспериментировать с электронами больших скоростей, обнаружилось, что расчеты по формуле (43.8) приводят по мере роста v ко все меньшим значениям e/m . Однако если принять в формуле (43.6) релятивистское выражение (42.6) для R , то вычисленные значения e/m оказываются не зависящими от v .

Наиболее точное значение удельного заряда электрона, установленное с учетом результатов, полученных разными методами, равно

$$\frac{e}{m} = 1,758\,804\,7 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}. \quad (43.9)$$

Для массы электрона из (43.5) и (43.9) получается значение

$$m = 0,910\,953\,4 \cdot 10^{-30} \text{ кг}, \quad (43.10)$$

в 1840 раз меньшее массы самого легкого атома — водорода.

Масс-спектрометром называется прибор для определения удельного заряда положительных ионов. Первый такой прибор создал Дж. Дж. Томсон в 1912 г. С его помощью Томсон обнаружил, что существуют две химически неразличимые разновидности атомов неона (по современной терминологии — два изотопа неона).

Мы ограничимся рассмотрением масс-спектрометра Бейнбриджа (рис. 43.3). В этом приборе пучок ионов проходит сначала через селектор (или фильтр) скоростей, который выделяет из пучка ионы с определенным значением скорости. В селекторе ионы подвергаются одновременному воздействию взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей, отклоняющих ионы в противоположные стороны. Через выходную щель селектора проходят только те ионы, для которых действия электри-

ческого и магнитного полей компенсируют друг друга. Это происходит при условии, что $e'E = e'vB$. Следовательно, скорость вышедших из селектора ионов, независимо от их заряда и массы, имеет одинаковое значение $v = E/B$.

Выходя из селектора, ионы попадают в область перпендикулярного к их скорости однородного магнитного поля с индукцией B' . В этом поле они движутся по окружностям, радиусы которых

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B'}$$

зависят от e'/m (см. (42.2)). Описав половину окружности, ионы попадают на фотопластинку на расстояниях от щели, равных $2R$. Следовательно, ионы каждого сорта (определенного значением e'/m) оставляют на

пластинке след в виде узкой полоски. Зная параметры прибора, можно вычислить удельные заряды ионов. Поскольку заряды ионов являются целыми кратными элементарного заряда e , по найденным значениям e'/m можно определить массы ионов.

Имеется много типов усовершенствованных масс-спектрографов. Созданы также приборы, в которых ионы регистрируются не фотопластинкой, а с помощью электрического устройства. Они получили название масс-спектрометров.

§ 44. Циклические ускорители заряженных частиц

Ускорителями заряженных частиц называются устройства, предназначенные для получения заряженных частиц (электронов, протонов, атомных ядер, ионов) больших энергий посредством ускорения их электрическим полем. Имеется много типов ускорителей. Мы рассмотрим принцип действия высоковольтных циклических ускорителей. Простейшим

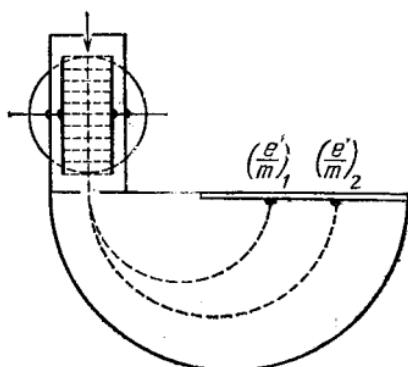


Рис. 43.3. Схема масс-спектрографа Бейнбриджа. Слева вверху селектор скоростей

ускорителем такого типа является циклотрон, построенный Лоуренсом¹⁾ в 1931 г.

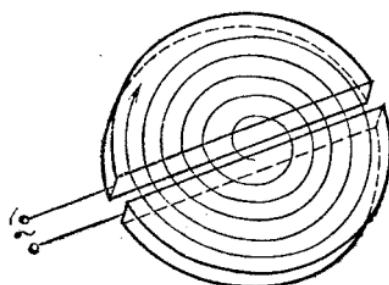
В основу действия циклотрона положено то обстоятельство, что, пока скорость частицы не очень велика, период обращения ее в однородном магнитном поле не зависит от скорости (см. (42.3)).

Циклотрон состоит из двух электродов в виде половин круглой невысокой коробки (рис. 44.1), по-

лучивших название дуантов. Электроды заключены в откачиваемый корпус, который помещается между полюсами большого электромагнита. Поле, создаваемое электромагнитом, однородно и перпендикулярно к плоскости дуантов. На дуанты подается ускоряющее частицы переменное напряжение, возбуждаемое генератором высокой частоты.

Рис. 44.1. Дуанты циклотрона: спиральная линия — траектория ускоряемой частицы

Допустим, что в момент, когда ускоряющее поле достигает наибольшей величины, в зазор между дуантами вводится заряженная частица. Она будет подхвачена электрическим полем и втянута внутрь одного из дуантов. Пространство внутри дуанта является эквипотенциальным, поэтому частица в нем будет находиться под воздействием только магнитного поля. В этом случае частица движется по окружности, радиус которой пропорционален скорости частицы (см. (42.2)). Подберем частоту изменения напряжения между дуантами так, чтобы к моменту, когда частица, пройдя половину окружности, подойдет к зазору между дуантами, разность потенциалов между ними изменила знак и достигла амплитудного значения. Тогда частица будет снова ускорена и влетит во второй дуант с энергией в два раза большей, чем та, с которой она двигалась в первом дуанте. Обладая большей скоростью, частица будет двигаться во втором дуанте по окружности большего ради-



¹⁾ Эрнест Орландо Лоуренс (1901—1958) — американский физик.

уса, но время, за которое она пройдет половину окружности, останется прежним. Поэтому к моменту, когда частица влетит в зазор между дуантами, напряжение между ними снова изменит знак и примет амплитудное значение.

Таким образом, частица движется по кривой, близкой к спирали, получая при каждом прохождении через зазор между дуантами дополнительную порцию энергии, равную $e'U_m$ (e' — заряд частицы, U_m — амплитуда напряжения, вырабатываемого генератором). Располагая источником напряжения сравнительно небольшой величины ($U_m \sim 10^5$ В), можно с помощью циклотрона ускорить протоны до энергии порядка 25 МэВ. При более высокой энергии начинает сказываться зависимость периода обращения частицы от скорости — период обращения увеличивается и синхронизм между движением частиц и изменениями ускоряющего поля оказывается нарушенным. (При энергии 25 МэВ период обращения увеличивается на 2,5 % по сравнению с первоначальным.)

Чтобы избежать нарушения синхронизма и получить частицы больших энергий, делают изменяющейся либо частоту напряжения, питающего дуанты, либо индукцию магнитного поля. Прибор, в котором в процессе ускорения каждой порции частиц соответствующим образом уменьшается частота ускоряющего напряжения, называется фазотроном (либо синхроциклотроном). Ускоритель, в котором частота остается постоянной, а индукция магнитного поля изменяется так, чтобы произведение $B\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (см. (42.7)) было постоянным, называется синхротроном (ускорители этого типа применяются только для ускорения электронов).

В ускорителе, называемом синхрофазотроном или протонным синхротроном, изменяются и частота ускоряющего напряжения, и индукция магнитного поля. Ускоряемые частицы движутся в синхрофазотроне не по спирали, а по круговой траектории. По мере увеличения скорости частиц индукция магнитного поля растет так, чтобы определяемый формулой (42.6) радиус оставался постоянным. При этом период обращения изменяется как из-за возрастания скорости частиц, так и вследствие

увеличения B . Для того чтобы ускоряющее напряжение было синхронным с движением частиц, частота этого напряжения делается изменяющейся по соответствующему закону. Дуантов в синхрофазotronе нет, ускорение частиц происходит на отдельных участках траектории с помощью электрического поля, создаваемого генераторами напряжения меняющейся частоты.

§ 45. Эффект Холла

Рассмотрим металлическую пластинку, вдоль которой течет ток плотности j (рис. 45.1 a). Потенциал вдоль пластиинки меняется. Выберем точки 1 и 2 так, чтобы потенциал их был одинаков. Если теперь включить перпендикулярное к пластинке магнитное поле, то между точками 1 и 2 возникает разность потенциалов. Это явление было обнаружено

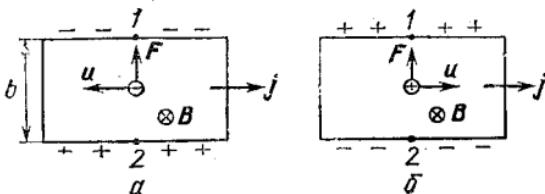


Рис. 45.1. Эффект Холла. При включении магнитного поля, направленного за чертеж, между точками 1 и 2 возникает разность потенциалов. Носители тока отрицательны (a), положительны (b)

Холлом¹) в 1879 г. и называется эффектом Холла или гальваномагнитным эффектом.

Холловская разность потенциалов определяется выражением

$$U_H = RbjB, \quad (45.1)$$

где b — ширина пластиинки, j — плотность тока, B — магнитная индукция поля, R — коэффициент пропорциональности, получивший название постоянной Холла.

Эффект Холла объясняется электронной теорией. При включении магнитного поля каждый носитель

¹) Эдвин Герберт Холл (1855—1938) — американский физик.

тока (электрон) оказывается под действием магнитной силы F , направленной вдоль стороны b пластиинки и равной по модулю

$$F = euB \quad (45.2)$$

(u — скорость упорядоченного движения носителей). В результате у электронов появляется составляющая скорости, направленная к верхней (на рисунке) грани пластиинки. У этой грани образуется избыток отрицательных, соответственно у нижней грани — избыток положительных зарядов. Следовательно, возникает поперечное электрическое поле E . Когда напряженность этого поля достигает такого значения, что его действие на электроны будет уравновешивать силу (45.2), установится стационарное распределение зарядов в поперечном направлении. Соответствующее значение E определяется условием $eE = euB$. Отсюда

$$E = uB.$$

Умножив напряженность E на ширину пластиинки b , получим напряжение между точками 1 и 2, т. е. холловскую разность потенциалов:

$$U_H = bE = buB. \quad (45.3)$$

Из формулы $j = neu$ следует, что $u = j/ne$. Подставив это значение в (45.3), получим

$$U_H = \frac{1}{ne} b j B. \quad (45.4)$$

Найденное выражение совпадает с (45.1), если положить

$$R = 1/ne. \quad (45.5)$$

Согласно формуле (26.7) проводимость

$$\sigma = neu_0, \quad (45.6)$$

где u_0 — подвижность носителей тока.

Из формул (45.5) и (45.6) следует, что, измерив постоянную Холла R и проводимость σ , можно найти концентрацию носителей тока (т. е. число их в единице объема) и подвижность носителей в соответствующем проводнике,

Эффект Холла наблюдается не только в металлах, но и в полупроводниках, причем по знаку эффекта можно судить о принадлежности полупроводника к *n*- или *p*-типу (в полупроводниках *n*-типа знак носителей тока отрицателен, а в полупроводниках *p*-типа — положителен).

На рис. 45.1 сопоставлен эффект Холла для пластинок с положительными и отрицательными носителями. На рисунке видно, что при одном и том же направлении тока и поля магнитная сила, действующая на положительные и отрицательные носители, имеет одинаковое направление. Поэтому в случае отрицательных носителей потенциал верхней (на рисунке) грани ниже, чем нижней, а в случае положительных носителей — выше. Таким образом, определив знак холловской разности потенциалов, можно установить знак носителей тока.

Любопытно, что у некоторых металлов знак U_H соответствует положительным носителям тока. Объяснение этой аномалии дает квантовая теория.

§ 46. Магнитогидродинамические генераторы

Магнитогидродинамическим генератором (МГД-генератором) называется устройство, в котором внутренняя энергия сильно нагретого газа преобразуется непосредственно в электрическую энергию, минуя стадию превращения энергии газа в механическую энергию и последующего превращения механической энергии в электрическую. (Часто неправильно говорят о непосредственном превращении тепловой энергии в электрическую. Понятие «тепловая энергия» устарело.)

Рабочим веществом в МГД-генераторах служит нагретый до примерно 3000 К и вследствие этого сильно ионизованный газ (плазма).

Достоинствами МГД-генераторов являются простота конструкции и отсутствие в высокотемпературной зоне механически движущихся частей. Недостатком является то, что для получения необходимой степени ионизации газа требуется очень высокая температура; в результате возникает потребность в жаростойких конструкционных материалах.

На рис. 46.1 показаны две простейшие конструкции МГД-генератора. В случае *а* ионизованный газ

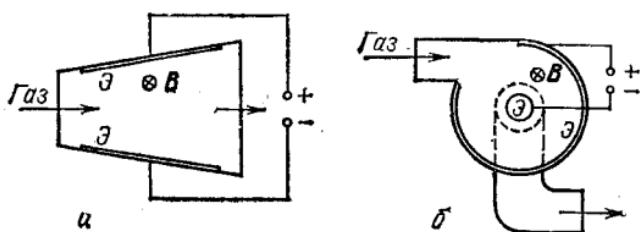


Рис. 46.1. Схема МГД-генератора: *а* — канал расширяется в вертикальном (на рисунке) направлении; *б* — вихревой канал, газ выходит через боковой патрубок, подсоединеный к середине камеры. Магнитное поле в обоих случаях направлено за чертеж; Э — электроды

проходит по расширяющемуся в одном направлении прямоугольному каналу. Перпендикулярно к расширяющимся стенкам канала направлено магнитное поле, под действием которого заряды одного знака отклоняются к одному электроду, противоположного знака — к другому. В результате между электродами возникает напряжение, возбуждающее ток в нагрузке.

В случае *б* газ совершает в канале генератора вихревое движение. В центре камеры установлен цилиндрический электрод; другой электрод расположен по внешней цилиндрической поверхности камеры. Действие генератора ясно из рисунка.

Существует ряд других более сложных конструкций, которых мы касаться не будем.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Чему равен поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность?
- Что такое сила Лоренца?
- Что характерно для поля бесконечного соленоида?
- Плоский жесткий контур с током помещен в неоднородное магнитное поле. Как он будет себя вести, если его предоставить самому себе?
- Как будет двигаться заряженная частица, влетевшая в однородное магнитное поле под углом к вектору B_1 , отличным от нуля и $\pi/2$?

6. Какая особенность движения заряженных частиц в однородном магнитном поле лежит в основе действия циклотрона?

Примеры решения задач

1. Магнитный момент кругового контура с током $p_m = 1,00 \text{ A}\cdot\text{м}^2$. Радиус контура $r = 10,0 \text{ см}$. Найти магнитную индукцию B в центре контура. Проницаемость среды $\mu = 1$.

Решение. Разобьем контур на элементы длины dl . Для каждого элемента направление к центру контура образует с dl прямой угол. Согласно закону Био — Савара — Лапласа каждый элемент создает в центре контура поле

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [dl, r]}{r^3},$$

где r — вектор, проведенный от элемента dl в центр контура. Поскольку угол между dl и r прямой,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ir dl}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}. \quad (1)$$

Вектор dB перпендикулярен к плоскости контура, причем образует с направлением тока в контуре правовинтовую систему.

Все dB направлены одинаково. Поэтому модуль результирующего вектора равен сумме модулей векторов dB . Проинтегрировав выражение (1) по всему контуру, получим

$$B = \oint dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{r}. \quad (2)$$

Магнитный момент контура имеет модуль

$$p_m = IS = I \cdot \pi r^2 \quad (3)$$

и так же, как B , образует с направлением тока правовинтовую систему. Следовательно, направления B и p_m совпадают.

Исключив из (2) и (3) силу тока I , придем к соотношению

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{r^3} = 10^{-7} \frac{2 \cdot 1,00}{0,100^3} = 0,20 \text{ мТл.}$$

2. Изолированный провод намотан так, что образует плоскую спираль из $N = 100$ витков. Радиус внутреннего витка (по оси провода) $a = 10,0 \text{ мм}$, внешнего — $b = 40,0 \text{ мм}$. Каким магнитным моментом p_m обладает спираль, когда по ней идет ток силы $I = 10,0 \text{ мА}$?

Решение. Считая ток распределенным равномерно вдоль радиальных направлений, представим спираль как совокуп-

ность круговых токов радиуса r и силы

$$dI = \frac{NI}{b-a} dr.$$

Магнитный момент такого тока

$$dp_m = dI \pi r^2 = \frac{NI}{b-a} \pi r^2 dr.$$

Проинтегрировав это выражение по r в пределах от a до b , получим магнитный момент спирали:

$$\begin{aligned} p_m &= \int dp_m = \frac{\pi NI}{b-a} \int_a^b r^2 dr = \\ &= \frac{\pi NI}{3(b-a)} (b^3 - a^3) = (\pi/3) NI (a^2 + ab + b^2) = \\ &= (3,14/3) \cdot 100 \cdot 10,0 \cdot 10^{-3} \cdot (0,010^2 + 0,010 \cdot 0,040 + 0,040^2) = \\ &= 2,2 \text{ мА} \cdot \text{м}^2, \end{aligned}$$

Г л а в а 7. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

§ 47. Намагничивание вещества

Если в магнитное поле \mathbf{B}_0 , созданное в вакууме, поместить какое-либо вещество, то поле изменяется. Это объясняется тем, что всякое вещество является магнетиком, т. е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться). Намагниченное вещество создает дополнительное поле \mathbf{B}' , которое складывается с полем \mathbf{B}_0 в результирующее поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' \quad (47.1)$$

(ср. с (12.3)).

Истинное (микроскопическое) поле в магнетике сильно изменяется в пределах межмолекулярных расстояний. Под \mathbf{B} подразумевается усредненное (макроскопическое) поле (см. § 12).

Для объяснения намагничивания тел Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые токи (молекулярные токи). Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствие внешнего поля молекулярные токи ориентированы

беспорядочным образом, поэтому обусловленное ими результирующее поле в среднем равно нулю. Вследствие хаотической ориентации магнитных моментов отдельных молекул суммарный магнитный момент тела также равен нулю. Под действием внешнего поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в одном направлении, вследствие чего вещество намагничивается — его суммарный магнитный момент становится отличным от нуля. Магнитные поля отдельных молекулярных токов в этом случае уже не компенсируют друг друга, и возникает поле \mathbf{B}' .

Намагничение вещества естественно характеризовать магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют намагченностью и обозначают буквой J . Если вещество намагничено неоднородно, намагченность в данной точке определяется выражением

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_m, \quad (47.2)$$

где ΔV — физически бесконечно малый объем, взятый в окрестности рассматриваемой точки, \mathbf{p}_m — магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование производится по всем молекулам, находящимся в объеме ΔV (ср. с формулой (12.2)).

Поле \mathbf{B}' , так же как и поле \mathbf{B}_0 , не имеет источников. Поэтому дивергенция результирующего поля (47.1) всюду равна нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mathbf{B}_0 + \operatorname{div} \mathbf{B}' = 0. \quad (47.3)$$

Следовательно, формулы (38.1) и (38.2) справедливы не только для поля в вакууме, но и для поля в веществе.

§ 48. Напряженность магнитного поля

Напишем выражение для циркуляции поля (47.1):

$$\oint \mathbf{B} dl = \oint \mathbf{B}_0 dl + \oint \mathbf{B}' dl. \quad (48.1)$$

Согласно (38.5)

$$\oint \mathbf{B}_0 dl = \mu_0 \sum I, \quad (48.2)$$

где $\sum I$ — алгебраическая сумма макроскопических токов, охватываемых контуром, по которому производится интегрирование, т. е. алгебраическая сумма токов, текущих через произвольную поверхность S , ограниченную контуром.

Для поля \mathbf{B}' , создаваемого молекулярными токами, должно выполняться аналогичное соотношение:

$$\oint \mathbf{B}' dl = \mu_0 \sum I_{\text{мол}}, \quad (48.3)$$

где $\sum I_{\text{мол}}$ — алгебраическая сумма молекулярных токов, текущих через поверхность S .

Подставим выражения (48.2) и (48.3) в формулу (48.1):

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 \sum I + \mu_0 \sum I_{\text{мол}}. \quad (48.4)$$

Здесь мы сталкиваемся с затруднением, аналогичным тому, которое возникло при вычислении электрического поля в диэлектриках (см. (14.1)): для того чтобы найти циркуляцию поля \mathbf{B} , нужно знать сумму молекулярных токов, которая в свою очередь зависит от \mathbf{B} . Способ, позволяющий обойти это затруднение, аналогичен способу, которым мы воспользовались в § 14. Оказывается, можно найти такую вспомогательную величину, циркуляция которой определяется лишь суммой макроскопических токов.

Вычислим алгебраическую сумму молекулярных токов, текущих через поверхность, ограниченную некоторым контуром. Из рис. 48.1 следует, что в эту сумму входят только те молекулярные токи, которые оказываются «нанизанными» на контур. Токи, не «нанизанные» на контур, либо не пересекают поверхность совсем, либо пересекают поверхность дважды — один раз в одном направлении, другой раз в другом. Поэтому их вклад в алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром, равен нулю.

На рис. 48.2 видно, что элемент контура dl , образующий с направлением намагниченности \mathbf{J} угол α , «нанизывает» на себя те молекулярные токи, центры которых попадают внутрь косого цилиндра с объемом $S_{\text{мол}} \cos \alpha dl$ ($S_{\text{мол}}$ — площадь, охватываемая отдельным молекулярным током). Если n — число молекул в единице объема, то суммарный ток, охваты-

ваемый элементом dl , равен $I_{\text{мол}}nS_{\text{мол}} \cos \alpha dl$. Произведение $I_{\text{мол}}S_{\text{мол}}$ равно магнитному моменту p_m отдельного молекулярного тока. Следовательно, выражение $I_{\text{мол}}S_{\text{мол}}n$ представляет собой магнитный момент единицы объема, т. е. дает модуль вектора J , а $I_{\text{мол}}S_{\text{мол}}n \cos \alpha$ — проекцию вектора J на направление элемента dl . Таким образом, суммарный

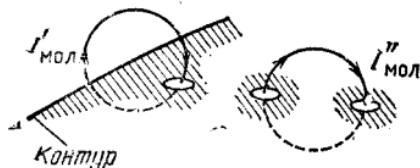


Рис. 48.1. Ток $I''_{\text{мол}}$ пересекает поверхность дважды в противоположных направлениях, поэтому его вклад в сумму токов равен нулю. Ток $I'_{\text{мол}}$ пересекает поверхность только один раз

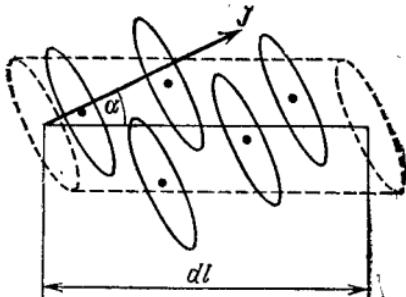


Рис. 48.2. Молекулярные токи, «нанизанные» на элемент контура dl

молекулярный ток, «нанизанный» на элемент dl , определяется выражением $Jdl \cos \alpha = Jdl$, а сумма молекулярных токов, «нанизанных» на весь контур (т. е. сумма молекулярных токов, текущих через поверхность, ограниченную контуром), равна

$$\sum I_{\text{мол}} = \oint J dl.$$

Подставив это выражение в (48.4), придем к равенству

$$\oint \mathbf{B} dl = \mu_0 \sum I + \mu_0 \oint J dl.$$

Разделив это равенство на μ_0 и объединив вместе обе циркуляции, получим формулу

$$\oint \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) dl = \sum I. \quad (48.5)$$

Величина, стоящая в скобках под знаком интеграла, обладает тем свойством, что ее циркуляция определяется только макроскопическими токами. Эту вспомогательную величину называют напряжен-

ностью магнитного поля и обозначают буквой H . Таким образом,

$$H = \frac{B}{\mu_0} - J. \quad (48.6)$$

С учетом (48.6) соотношение (48.5) можно написать в виде

$$\oint H dl = \sum I. \quad (48.7)$$

Формула (48.7) выражает теорему о циркуляции вектора H : циркуляция вектора напряженности магнитного поля по некоторому контуру равна алгебраической сумме макроскопических токов, охватываемых этим контуром.

Напряженность магнитного поля H является аналогом электрического смещения D . Первоначально предполагалось, что в природе имеются подобные электрическим зарядам магнитные массы, и учение о магнетизме развивалось по аналогии с учением об электричестве. Тогда и были введены названия: «магнитная индукция» для B и «напряженность поля» для H . Впоследствии выяснилось, что магнитных масс в природе не существует и что величина, названная магнитной индукцией, в действительности является аналогом не электрического смещения D , а напряженности электрического поля E (соответственно H — аналогом не E , а D). Однако изменять уже установившуюся терминологию не стали, тем более, что вследствие различной природы электрического и магнитного полей (электростатическое поле потенциально, магнитное соленоидально) величины B и D обнаруживают много сходства в своем поведении (например, линии B , как и линии D , не претерпевают разрыва на границе двух сред).

В вакууме $J = 0$, поэтому H превращается в B/μ_0 , и формула (48.7) переходит в формулу (38.5).

В соответствии с (36.4) напряженность поля прямого тока в вакууме определяется выражением

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{b}, \quad (48.8)$$

из которого следует, что напряженность магнитного поля имеет размерность, равную размерности силы

тока, деленной на размерность длины. В соответствии с этим единицей напряженности магнитного поля является ампер на метр ($\text{A}/\text{м}$).

По причинам, которые выясняются позже, намагниченность принято связывать не с магнитной индукцией, а с напряженностью поля. Полагают, что в каждой точке магнетика

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (48.9)$$

где χ — характерная для данного магнетика величина, называемая магнитной восприимчивостью. Опыт показывает, что для слабомагнитных (неферромагнитных) веществ при не слишком сильных полях χ не зависит от \mathbf{H} . Согласно (48.7) размерность \mathbf{H} совпадает с размерностью \mathbf{J} . Следовательно, χ — безразмерная величина.

Подставив в формулу (48.6) выражение (48.9) для \mathbf{J} , получим соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi \mathbf{H},$$

из которого

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1 + \chi)}. \quad (48.10)$$

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + \chi \quad (48.11)$$

называется относительной магнитной проницаемостью или просто магнитной проницаемостью вещества¹⁾.

В отличие от диэлектрической восприимчивости ϵ , которая может иметь лишь положительные значения (поляризованность \mathbf{P} в изотропном диэлектрике всегда направлена по полю \mathbf{E}), магнитная восприимчивость χ бывает как положительной, так и отрицательной. Поэтому магнитная проницаемость μ может быть как больше, так и меньше единицы.

С учетом (48.11) формуле (48.10) можно придать вид

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu}. \quad (48.12)$$

¹⁾ В электротехнике вводят так называемую абсолютную магнитную проницаемость $\mu_a = \mu \mu_0$. Однако эта величина физического смысла не имеет, и мы ею пользоваться не будем.

Таким образом, напряженность магнитного поля \mathbf{H} есть вектор, имеющий то же направление, что и вектор \mathbf{B} , но в μ_0 раз меньший по модулю. (В анизотропных средах векторы \mathbf{H} и \mathbf{B} , вообще говоря, не совпадают по направлению.)

Выясним физический смысл магнитной проницаемости. Допустим, что имеется однородное магнитное поле в вакууме, которое мы будем характеризовать с помощью либо вектора \mathbf{B}_0 , либо вектора $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0/\mu_0$. Внесем в это поле (которое мы будем называть внешним) бесконечно длинный круглый стержень из однородного и изотропного материала и расположим его вдоль линий \mathbf{B}_0 (рис. 48.3). Под действием поля молекулярные токи установятся так, что их магнитные моменты расположатся вдоль оси стержня, а плоскости токов станут перпендикулярными к этой оси. Рассмотрим молекулярные токи, лежащие в одном из поперечных сечений стержня. В любой точке внутри стержня соседние молекулярные токи текут в противоположных направлениях, так что их совместное действие равно нулю. Некомпенсированными будут лишь участки токов, призывающие к поверхности стержня. Таким образом, суммарное действие молекулярных токов будет таким, какое вызвал бы макроскопический ток, текущий по поверхности стержня перпендикулярно к его оси. Обозначим линейную плотность этого тока через $j_{\text{лин}}$. Согласно (39.1) цилиндр, обтекаемый током, эквивалентен соленоиду с числом ампер-витков nI , равным $j_{\text{лин}}$. Магнитная индукция внутри такого соленоида определяется формулой (39.2). Следовательно, магнитная индукция дополнительного поля, создаваемого молекулярными токами внутри стержня, равна

$$\mathbf{B}' = \mu_0 j_{\text{лин}}. \quad (48.13)$$

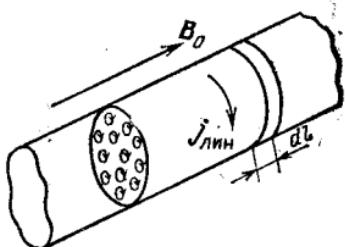


Рис. 48.3. Молекулярные токи в намагниченном стержне

В соответствии с правилом правого винта направление \mathbf{B}' совпадает с направлением \mathbf{B}_0 (см. рис. 48.3). Вне стержня \mathbf{B}' равно нулю.

Выделим мысленно в стержне перпендикулярный к его оси слой толщины dl (рис. 48.3). Молекулярные токи, расположенные в этом слое, эквивалентны круговому току силы $j_{\text{лин}}dl$. Согласно формуле (35.2) магнитный момент этого тока равен

$$dp_m = j_{\text{лин}} S dl,$$

где S — площадь поперечного сечения стержня. Разделив dp_m на объем слоя $dV = S dl$, получим намагниченность стержня:

$$J = j_{\text{лин}}. \quad (48.14)$$

Таким образом, модуль намагниченности стержня равен линейной плотности обтекающего стержень молекулярного тока.

С учетом (48.14) формула (48.13) принимает вид

$$\mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J} \quad (48.15)$$

(мы смогли написать формулу в векторном виде, поскольку векторы \mathbf{B}' и \mathbf{J} совпадают по направлению).

Сложив векторы \mathbf{B}_0 и \mathbf{B}' , найдем магнитную индукцию результирующего поля внутри стержня:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{J}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (48.6) дает напряженность поля внутри стержня:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mathbf{H}_0.$$

Следовательно, напряженность поля в стержне оказывается совпадающей с напряженностью внешнего поля.

Умножив \mathbf{H} на μ_0 , получим магнитную индукцию внутри стержня:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mu \mathbf{B}_0. \quad (48.16)$$

Отсюда следует, что магнитная проницаемость μ показывает, во сколько раз усиливается поле в магнетике. Напомним, что диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз ослабляется поле в диэлектрике (см. формулу (16.3)).

Отметим, что поскольку поле \mathbf{B}' отлично от нуля только внутри стержня, магнитное поле вне стержня остается без изменений.

Полученный нами результат бывает справедлив лишь в тех случаях, когда однородный и изотропный магнетик заполняет объем, ограниченный поверхностями, которые образованы линиями напряженности внешнего поля. В противном случае напряженность поля, определяемая формулой (48.7), не совпадает с $H_0 = B_0/\mu_0$ и соотношение (48.16) не соблюдается. В следующем параграфе мы рассмотрим случай, когда $B = B_0$, а $H = H_0/\mu$.

Напомним, что в случае электрического поля $D = D_0$ и $E = E_0/\epsilon$ при условии, что однородный и изотропный диэлектрик заполняет объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями, т. е. поверхностями, ортогональными линиям напряженности внешнего поля.

Заметим, что поскольку H (в отличие от B) при соблюдении указанных выше условий не зависит от μ (а следовательно, и от χ), целесообразно рассматривать зависимость J от H , а не от B (см. формулу (48.9)).

В заключение найдем напряженность поля бесконечно длинного соленоида, заполненного однородным и изотропным магнетиком (или погруженного в безграничный однородный и изотропный магнетик). Применив к контуру, изображеному на рис. 39.3, теорему о циркуляции (48.7), получим соотношение $Ha = nAI$. Отсюда

$$H = nI. \quad (48.17)$$

Таким образом, напряженность поля внутри бесконечно длинного соленоида равна числу ампер-витков, т. е. произведению силы тока на число витков, приходящееся на единицу длины. Вне соленоида напряженность поля равна нулю.

§ 49. Условия на границе двух магнетиков

Рассуждения и выкладки, приводящие к установлению условий, которым должны удовлетворять на границе раздела двух магнетиков векторы B и H , аналогичны рассуждениям и выкладкам, изложенным в § 15 при установлении условий на границе двух диэлектриков. Поэтому, чтобы не повторяться, мы воспользуемся формулами, полученными в § 15,

заменив в них E на H , а D на B . Основанием для этого служит, во-первых, то обстоятельство, что линии B , как и линии D (в отсутствие на границе сторонних зарядов), проходят через границу раздела, не прерываясь; во-вторых, циркуляция вектора H (при условии, что контур не охватывает макроскопических токов) так же, как и циркуляция вектора E , равна нулю. Следовательно, вектор B при переходе через границу ведет себя точно так же, как вектор D , а вектор H (если на границе раздела нет макроскопических токов) ведет себя точно так же, как вектор E .

Таким образом, по аналогии с (15.1)–(15.5) получаются формулы

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (49.1)$$

$$B_{1\tau}/B_{2\tau} = \mu_1/\mu_2, \quad H_{1n}/H_{2n} = \mu_2/\mu_1, \quad (49.2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1/\operatorname{tg} \alpha_2 = \mu_1/\mu_2. \quad (49.3)$$

Здесь μ_1 и μ_2 — магнитная проницаемость первой и второй среды, α_1 и α_2 — углы, образуемые с нормалью к поверхности раздела векторами B_1 и B_2 (см. рис. 15.1, заменив в нем мысленно D на B).

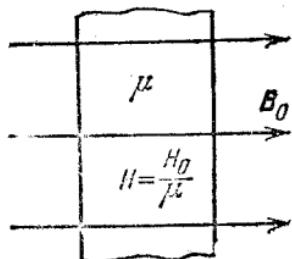


Рис. 49.1. Пластинка из магнетика в поперечном магнитном поле

Внесем в однородное магнитное поле B_0 , созданное в вакууме, бесконечную пластину из однородного и изотропного магнетика, расположив ее перпендикулярно к линиям вектора B_0 (рис. 49.1). Поскольку в этом случае $\alpha_1=0$, то согласно (49.3) и $\alpha_2=0$; следовательно, нормальные составляющие вектора B_0 и вектора B в пластине равны самим векторам.

В соответствии с первой из формул (49.1) $B = B_0$. Следовательно, напряженность поля в пластине

$$H = H_0/\mu. \quad (49.4)$$

Это означает, что напряженность поля в пластине при прочих равных условиях тем меньше, чем больше μ , т. е. зависит от свойств магнетика,

Рассмотренный пример показывает неправомерность широко распространенного определения \mathbf{H} как характеристики поля, не зависящей от свойств среды. Напряженность \mathbf{H} не зависит от свойств среды только при соблюдении особых условий, указанных в предыдущем параграфе. При несоблюдении этих условий \mathbf{H} зависит от свойств среды. Правильное определение \mathbf{H} , пригодное во всех случаях, дает формула (48.7).

Из формулы (49.3) следует, что при переходе в магнетик с большей μ линии магнитной индукции отклоняются от нормали к поверхности раздела. Это приводит к сгущению линий. Сгущение линий \mathbf{B} в веществе с большой магнитной проницаемостью дает возможность формировать магнитные пучки, т. е. придавать им необходимую форму и направление. В частности, для того чтобы осуществить магнитную защиту некоторого объема, его окружают железным экраном. На рис. 49.2 видно, что сгущение линий магнитной индукции в толще экрана приводит к ослаблению поля внутри.

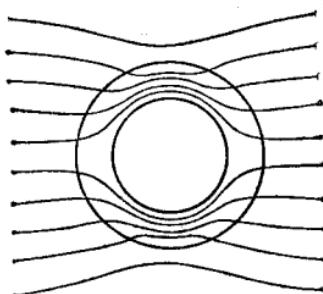


Рис. 49.2. Сгущение линий магнитного поля в железном экране

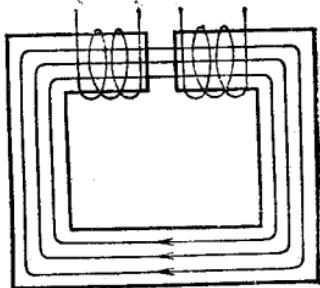


Рис. 49.3. Схема лабораторного электромагнита

На рис. 49.3 дана схема лабораторного электромагнита. Он состоит из железного сердечника, на который надеты питаемые током катушки. Линии магнитной индукции оказываются сосредоточенными в основном внутри сердечника. Лишь в узком воздушном зазоре они проходят в среде с малой μ . Вектор \mathbf{B} пересекает границы между воздушным зазором и сердечником по нормали к поверхности раздела. Отсюда следует, что магнитная индукция в зазоре

такая же, как в сердечнике (см. первую из формул (49.1)). Применим теорему о циркуляции \mathbf{H} к контуру, проходящему по оси сердечника. Напряженность поля можно считать всюду в железе одинаковой и равной $H_{ж} = B/\mu_0\mu_{ж}$. В воздухе $H_{в} = B/\mu_0\mu_{в}$. Обозначим длину участка контура в железе через $l_{ж}$, а в зазоре — через $l_{в}$. Тогда циркуляцию можно представить в виде $H_{ж}l_{ж} + H_{в}l_{в}$. Согласно (48.7) эта циркуляция должна быть равна NI , где N — суммарное число витков катушек электромагнита, I — сила тока. Таким образом,

$$\frac{B}{\mu_0\mu_{ж}} l_{ж} + \frac{B}{\mu_0\mu_{в}} l_{в} = NI.$$

Отсюда

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l_{в}/\mu_{в} + l_{ж}/\mu_{ж}} \approx \mu_0 I \frac{N}{l_{в} + l_{ж}/\mu_{ж}}$$

($\mu_{в}$ отличается от единицы лишь в пятом знаке после запятой).

Обычно $l_{в}$ бывает порядка 0,1 м, $l_{ж}$ — порядка 1 м, $\mu_{ж}$ достигает значений порядка нескольких тысяч. Поэтому вторым слагаемым в знаменателе можно пренебречь и считать, что

$$B = \mu_0 I N / l_{в}. \quad (49.5)$$

Следовательно, магнитная индукция в зазоре электромагнита имеет такое значение, какое она имела бы внутри тороида без сердечника, на единицу длины которого было бы намотано число витков, равное $N/l_{в}$ (см. (39.2)). Увеличивая общее число витков и уменьшая размер воздушного зазора, можно получить поля с большим значением B . Практически с помощью электромагнитов с железным сердечником удается получить поля с магнитной индукцией порядка нескольких тесла.

§ 50. Магнитные моменты атомов

Природа молекулярных токов стала понятной после того, как опытами Резерфорда¹⁾ было установлено, что атомы всех веществ состоят из положитель-

¹⁾ Эрнест Резерфорд (1871—1937) — английский физик.

но заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов.

Движение электронов в атомах подчиняется квантовым законам; в частности, понятие траектории к электронам, движущимся в атоме, неприменимо. Однако магнетизм вещества удается удовлетворительно объяснить, пользуясь полуклассической боровской¹⁾ моделью, согласно которой электроны в атомах движутся по стационарным круговым орбитам. Устойчивость таких орбит противоречит законам классической физики. Поэтому объяснить магнетизм вещества на основе чисто классических представлений невозможно. Исчерпывающее объяснение дает лишь квантовая механика.

Мы рассмотрим объяснение магнитных свойств веществ на основе представления об устойчивых электронных орбитах. Пусть электрон движется со скоростью v по орбите радиуса r (рис. 50.1). Через площадку, расположенную в любом месте на пути электрона, переносится в единицу времени заряд ev , где e — элементарный заряд, а v — частота вращения электрона. Следовательно, движущийся по орбите электрон эквивалентен круговому току силы $I = ev$. Поскольку заряд электрона отрицателен, направление движения электрона и направление тока противоположны. Магнитный момент создаваемого электроном тока равен

$$p_m = IS = ev\pi r^2.$$

Произведение $2\pi rv$ дает скорость электрона v , поэтому можно написать, что

$$p_m = evr/2. \quad (50.1)$$

Этот момент обусловлен движением электрона по орбите, в связи с чем называется орбитальным магнитным моментом электрона. Направление

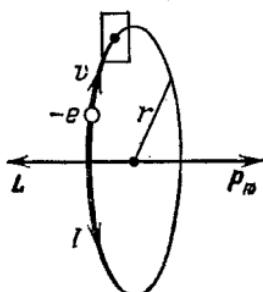


Рис. 50.1. Механический и магнитный орбитальные моменты электрона

¹⁾ Нильс Хендrik Давид Бор (1885—1962) — датский физик.

вектора p_m образует с направлением тока правовинтовую, а с направлением движения электрона левовинтовую систему (см. рис. 50.1).

Движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса

$$L = mvr \quad (50.2)$$

(m — масса электрона). Вектор L называется орбитальным механическим моментом электрона. Он образует с направлением движения электрона правовинтовую систему. Следовательно, направления векторов p_m и L противоположны.

Отношение магнитного момента элементарной частицы¹⁾ к ее механическому моменту называется магнитомеханическим (или гиromагнитным) отношением. Для электрона оно равно

$$p_m/L = -e/2m \quad (50.3)$$

(знак минус указывает на то, что направления моментов противоположны).

Вследствие вращения вокруг ядра электрон оказывается подобным волчку. Это обстоятельство лежит в основе так называемых магнитомеханических явлений, заключающихся в том, что намагничение магнетика приводит к его вращению и, наоборот, вращение магнетика вызывает его намагничение. Существование первого явления было доказано экспериментально Эйнштейном и де Хаазом²⁾, второго — Барнеттом³⁾.

В основе опыта Эйнштейна и де Хааза лежат следующие соображения. Если поместить стержень из магнетика в параллельное его оси магнитное поле, то магнитные моменты электронов установятся по направлению поля, а механические моменты — против поля. В результате суммарный механический момент электронов $\sum L_e$ станет отличным от нуля (первоначально вследствие хаотической ориентации отдельных моментов он был равен нулю). Момент им-

¹⁾ Элементарными называются такие частицы, как электрон, нейtron, мезоны и т. п.

²⁾ В. де Хааз (1878—1960) — голландский физик.

³⁾ Сэмюэл Джексон Барнетт (1873—1956) — американский физик.

пульса системы стержень + электроны должен оставаться без изменений. Поэтому стержень приобретает момент импульса, равный $-\sum \mathbf{L}_e$, и, следовательно, приходит во вращение. Изменение направления поля на обратное приведет к изменению направления вращения стержня.

Механическую модель этого опыта можно осуществить, посадив человека на вращающийся стул и дав ему в руки вращающееся массивное колесо. Повернув колесо осью вверх, человек приходит во вращение в сторону, противоположную направлению вращения колеса. Повернув колесо осью вниз, человек начинает вращаться в другую сторону.

Опыт Эйнштейна и де Хааза осуществлялся следующим образом (рис. 50.2). Тонкий железный стержень подвешивался на упругой нити и помещался внутрь соленоида. Закручивание нити при намагничивании стержня постоянным магнитным полем получалось очень малым. Для усиления эффекта был применен метод резонанса — соленоид питался переменным током, частота которого подбиралась равной собственной частоте крутильных колебаний стержня. При этих условиях амплитуда колебаний достигала значений, которые можно было измерить, наблюдая смещения светового зайчика, отраженного от зеркальца, укрепленного на нити. Из данных опыта было вычислено магнитомеханическое отношение, которое оказалось равным $-e/m$. Таким образом, знак заряда носителей, создающих молекулярные токи, совпал со знаком заряда электрона. Однако полученный результат превысил значение (50.3) в два раза.

Чтобы понять опыт Барнетта, учтем, что, как показывают расчеты и опыт, при попытках вовлечь гироскоп во вращение вокруг некоторого направления ось гироскопа поворачивается так, чтобы направления собственного и принудительного вращений гироскопа совпадали. Если установить гироскоп, закрепленный в карданном подвесе, на диск центробежной

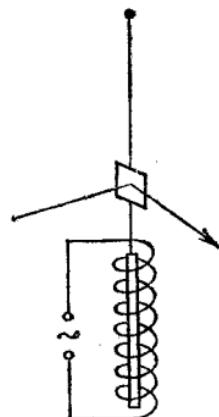


Рис. 50.2. Схема опыта Эйнштейна и де Хааза

машины и привести ее во вращение, то ось гироскопа установится по вертикали, причем так, что направление вращения гироскопа совпадет с направлением вращения диска. При изменении направления вращения центробежной машины ось гироскопа поворачивается на 180° , т. е. так, чтобы направления обоих вращений снова совпали.

Барнетт приводил железный стержень в очень быстрое вращение вокруг его оси и измерял возникающую при этом намагниченность. Из результатов этого опыта Барнетт также получил для магнитомеханического отношения значение, в два раза большее, чем (50.3).

В дальнейшем выяснилось, что, кроме орбитальных моментов (50.1) и (50.2), электрон обладает собственными механическим L_s и магнитным p_{ms} моментами, для которых магнитомеханическое отношение равно

$$p_{ms}/L_s = -e/m, \quad (50.4)$$

т. е. совпадает со значением, полученным в опытах Эйнштейна — де Хааза и Барнетта. Отсюда следует, что магнитные свойства железа обусловлены не орбитальным, а собственным магнитным моментом электронов.

Существование собственных моментов электрона первоначально пытались объяснить, рассматривая электрон как заряженный шарик, вращающийся вокруг своей оси. В соответствии с этим собственный механический момент электрона получил название спин (от английского *to spin* — вращаться). Однако вскоре выяснилось, что такое представление приводит к ряду противоречий, и от гипотезы о «вращающемся» электроне пришлось отказаться. Было признано, что собственный механический момент (спин) и связанный с ним собственный (спиновый) магнитный момент являются такими же неотъемлемыми свойствами электрона, как его масса и заряд.

Спином обладают не только электроны, но и другие элементарные частицы. Спин¹⁾ элементарных ча-

¹⁾ Точнее, максимальное значение проекции спина на выделенное в пространстве направление, например на направление внешнего поля.

стиц является целым или полуцелым кратным величины \hbar , которая равна постоянной Планка h , деленной на 2π :

$$\hbar = h/2\pi = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с.} \quad (50.5)$$

В частности, для электрона $L_s = \hbar/2$, в связи с чем говорят, что спин электрона равен $1/2$. Таким образом, \hbar представляет собой естественную единицу момента импульса, подобно тому как элементарный заряд e является естественной единицей электрического заряда.

В соответствии с (50.4) собственный магнитный момент электрона равен

$$p_{ms} = -\frac{e}{m} L_s = -\frac{e}{m} \frac{\hbar}{2} = -\frac{e\hbar}{2m}. \quad (50.6)$$

Естественную единицу магнитного момента¹⁾

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл} \quad (50.7)$$

называют магнетоном Бора. Следовательно, собственный магнитный момент электрона равен одному магнетону Бора.

Магнитный момент атома слагается из орбитальных и собственных моментов входящих в его состав электронов, а также из магнитного момента ядра (который обусловлен магнитными моментами входящих в состав ядра элементарных частиц — протонов и нейтронов). Магнитный момент ядра значительно меньше момента электронов; поэтому при рассмотрении многих вопросов им можно пренебречь и считать, что магнитный момент атома равен векторной сумме магнитных моментов электронов. Магнитный момент молекулы также можно считать равным сумме магнитных моментов входящих в ее состав электронов.

¹⁾ Согласно формуле $W = -p_m B$ размерность магнитного момента равна размерности энергии, деленной на размерность магнитной индукции. Поэтому магнитный момент можно измерять не только в амперах, умноженных на квадратный метр ($\text{A} \cdot \text{м}^2$), как было указано в § 35, но и в джоулях на тесла (Дж/Тл).

§ 51. Диа- и парамагнетизм

Формула (48.9) определяет магнитную восприимчивость χ единицы объема вещества. Часто вместо этой восприимчивости пользуются отнесенной к одному молю вещества молярной (для химически простых веществ — атомной) восприимчивостью χ_m (χ_{at}). Очевидно, что $\chi_m = \chi V_m$, где V_m — молярный объем вещества. В то время как χ — безразмерная величина, χ_m измеряется в $\text{м}^3/\text{моль}$.

В зависимости от знака и числового значения магнитной восприимчивости все магнетики подразделяются на три группы:

1) диамагнетики, у которых χ отрицательна и мала по модулю ($\chi_m \sim 10^{-11} \div 10^{-10} \text{ м}^3/\text{моль}$);

2) парамагнетики, у которых χ тоже невелика, но положительна ($\chi_m \sim 10^{-10} \div 10^{-9} \text{ м}^3/\text{моль}$);

3) ферромагнетики, у которых χ положительна и достигает очень больших значений ($\chi_m \sim 1 \text{ м}^3/\text{моль}$). Кроме того, в отличие от диа- и парамагнетиков, у которых χ не зависит от H , восприимчивость ферромагнетиков является сложной функцией напряженности магнитного поля.

Таким образом, в изотропных веществах намагниченность J может как совпадать по направлению с H (у пара- и ферромагнетиков), так и быть направленной в противоположную сторону (у диамагнетиков). Напомним, что у изотропных диэлектриков поляризованность всегда направлена в ту же сторону, что и E .

В этом параграфе мы рассмотрим диа- и парамагнетики, ферромагнетики будут рассмотрены в следующем параграфе. Классическая теория пара- и диамагнетизма была создана Ланжевеном¹⁾ в 1905 г.

Диамагнетизм. Электрон, движущийся по круговой орбите, подобен волчку. Поэтому ему свойственны все особенности поведения гироскопов, в частности при соответствующих условиях должна возникать прецессия электронной орбиты. Условия для прецессии осуществляются, если атом находится в магнитном поле (рис. 51.1). В этом случае на орбиту дей-

¹⁾ Поль Ланжевен (1872—1946) — французский физик.

ствует вращающий момент $M = [p_m B]$, стремящийся установить орбитальный магнитный момент электрона p_m по направлению поля (при этом механический орбитальный момент L установится против поля). Под действием момента M векторы p_m и L совершают прецессию вокруг направления вектора магнитной индукции B , скорость которой легко найти (см. § 35 1-го тома).

За время dt вектор L получает приращение dL , равное

$$dL = M dt.$$

Вектор dL , как и вектор M , перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы B и L ; его модуль равен

$$|dL| = p_m B \sin \alpha dt,$$

где α — угол между векторами p_m и B .

За время dt плоскость, в которой лежит вектор L , повернется вокруг направления B на угол

$$\begin{aligned} d\vartheta &= \frac{|dL|}{L \sin \alpha} = \frac{p_m B \sin \alpha dt}{L \sin \alpha} = \\ &= \frac{p_m}{L} B dt. \end{aligned}$$

Разделив этот угол на время dt , найдем угловую скорость прецессии:

$$\omega_L = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{p_m}{L} B.$$

Подставив значение (50.3) отношения магнитного и механического моментов электрона, получим, что

$$\omega_L = eB/2m. \quad (51.1)$$

Частоту (51.1) называют частотой ларморовой¹) прецессии или просто ларморовой частотой. Она не зависит ни от угла наклона орбиты по отношению к направлению магнитного

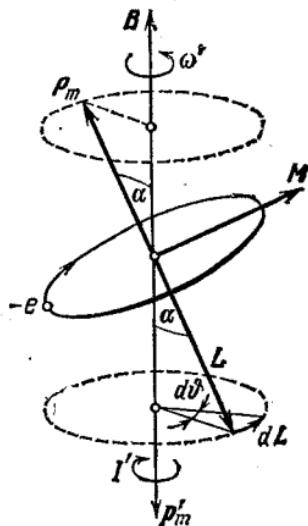


Рис. 51.1. Прецессия электронной орбиты в магнитном поле. Стрелка, помеченная буквой ω' , указывает направление прецессии; стрелка, помеченная буквой I' , указывает направление дополнительного тока, обусловленного прецессией

¹⁾ Джозеф Лáрмор (1857—1942) — английский физик,

поля, ни от радиуса орбиты или скорости электрона и, следовательно, для всех электронов, входящих в состав атома, одинакова.

Прецессия орбиты обусловливает дополнительное вращение электрона в направлении, обозначенном на рис. 51.1 буквой ω' . Это вращение приводит к возникновению кругового тока I' , образующего с направлением магнитного поля левовинтовую систему. Магнитный момент p'_m тока I' направлен противоположно внешнему магнитному полю B , что характерно для диамагнетиков.

Итак, под действием внешнего магнитного поля происходит прецессия электронных орбит с одинаковой для всех электронов угловой скоростью (51.1). Обусловленное прецессией дополнительное движение электронов приводит к возникновению индуцированного магнитного момента атома, направленного против поля. Ларморова прецессия возникает у всех без исключения веществ. Однако в тех случаях, когда атомы обладают сами по себе магнитным моментом, магнитное поле не только индуцирует дополнительный момент p'_m , но и оказывает на собственные магнитные моменты атомов ориентирующее действие, устанавливая их по направлению поля. Возникающий при этом положительный (т. е. направленный по полю) магнитный момент бывает значительно больше, чем отрицательный индуцированный момент. Поэтому результатирующий момент оказывается положительным и вещество ведет себя как парамагнетик.

Диамагнетиками оказываются только те вещества, у которых атомы не обладают собственным магнитным моментом (векторная сумма орбитальных и спиновых магнитных моментов электронов атома равна нулю).

Магнитная восприимчивость диамагнетиков практически не зависит от температуры.

Парамагнетизм. Если собственный магнитный момент атомов отличен от нуля, вещество оказывается парамагнитным. Магнитное поле стремится установить магнитные моменты атомов вдоль B , тепловое движение стремится разбросать их равномерно по всем направлениям. В результате устанавливается некоторая преимущественная ориентация моментов

вдоль поля, тем большая, чем больше B , и тем меньшая, чем выше температура.

Кюри¹⁾ экспериментально установил закон, согласно которому молярная восприимчивость paramagnитного вещества равна

$$\chi_m = C/T, \quad (51.2)$$

где C — постоянная Кюри, зависящая от рода вещества, T — термодинамическая температура.

Классическая теория paramагнетизма, созданная Ланжевеном, приводит к формуле (51.2).

§ 52. Ферромагнетизм

Особый класс магнетиков образуют вещества, способные обладать намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля. По своему наиболее распространенному представителю — железу — они получили название ферромагнетиков. К их числу кроме железа принадлежат никель, кобальт, гадолиний, их сплавы и соединения, а также некоторые сплавы и соединения марганца и хрома с неферромагнитными элементами. Ферромагнетизм присущ всем этим веществам только в кристаллическом состоянии.

Ферромагнетики являются сильномагнитными веществами. Их намагниченность в огромное (до 10^{10}) число раз превосходит намагниченность ди- и paramагнетиков, принадлежащих к категории слабомагнитных веществ.

Намагниченность слабомагнитных веществ изменяется с напряженностью поля линейно. Намагниченность ферромагнетиков зависит от H сложным образом. На рис. 52.1 изображена кривая намагничивания железа, намагниченность которого первоначально была равна нулю (она называется основной или нулевой кривой намагничивания). Уже в полях порядка 100 А/м намагниченность J достигает насыщения. Основная кривая намагничивания на диаграмме $B-H$ приведена на рис. 52.2 (кривая 0—I). Напомним, что $B = \mu_0(H+J)$. Поэтому по достижении насыщения B продолжает расти с H по

¹⁾ Пьер Кюри (1859—1906) — французский физик

линейному закону: $B = \mu_0 H + \text{const}$, где $\text{const} = \mu_0 J_{\text{нас}}$.

Кривая намагничивания железа была впервые подробно исследована Столетовым¹⁾). Разработанный им баллистический метод измерения магнитной индукции находит применение до настоящего времени.

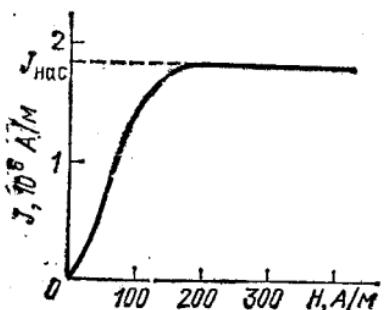


Рис. 52.1. Основная кривая намагничивания железа; $J_{\text{нас}}$ — намагниченность насыщения

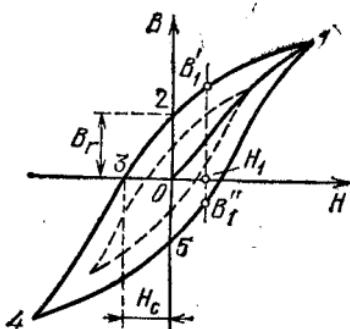


Рис. 52.2. Кривые намагничивания ферромагнетика: 0—1 — основная кривая, 1—2—3—4—5—1 — максимальная петля гистерезиса. Штриховой линией изображен один из частных циклов

Кроме нелинейной зависимости J от H (или B от H), для ферромагнетиков характерно явление гистерезиса. Если довести намагниченность до насыщения (точка 1 на рис. 52.2) и затем уменьшать напряженность магнитного поля, то индукция B изменяется не по первоначальной кривой $0—1$, а по кривой $1—2$. В результате, когда напряженность внешнего поля становится равной нулю (точка 2), намагниченность не исчезает и характеризуется величиной J_r , которая называется остаточной намагниченностью. Магнитная индукция имеет при этом значение B_r , называемое остаточной индукцией.

Индукция обращается в нуль лишь под действием поля H_c , направленного противоположно полю, вызвавшему намагничивание. Напряженность H_c называется коэрцитивной силой.

¹⁾ Александр Григорьевич Столетов (1839—1896) — русский физик.

Существование остаточной намагниченности делает возможным изготовление постоянных магнитов, т. е. тел, которые без затраты энергии на поддержание макроскопических токов обладают магнитным моментом и создают в окружающем их пространстве магнитное поле. Постоянный магнит тем лучше сохраняет свои свойства, чем больше коэрцитивная сила материала, из которого он изготовлен.

При действии на ферромагнетик переменного магнитного поля индукция изменяется в соответствии с кривой 1—2—3—4—5—1 (рис. 52.2), которая называется петлей гистерезиса (аналогичная петля получается и на диаграмме $J - H$). Если максимальные значения H таковы, что намагниченность достигает насыщения, получается максимальная петля гистерезиса (сплошная петля на рис. 52.2). Если при амплитудных значениях H насыщение не достигается, получается петля, называемая частным циклом (петля, изображенная на рисунке штриховой линией). Частных циклов существует бесконечное множество, все они лежат внутри максимальной петли гистерезиса.

Гистерезис приводит к тому, что намагниченность ферромагнетика не является однозначной функцией H , она зависит от предыстории образца — от того, в каких полях он побывал прежде. Например, в поле напряженности H_1 (рис. 52.2) индукция может иметь любое значение в пределах от B'_1 до B''_1 .

Из всего сказанного о ферромагнетиках следует, что они очень похожи по своим свойствам на сегнетоэлектрики (см. § 17).

В связи с неоднозначностью зависимости B от H понятие магнитной проницаемости применяется лишь к основной кривой намагничения. Магнитная проницаемость ферромагнетиков (а следовательно, и магнитная восприимчивость) является функцией напряженности поля. На рис. 52.3 a изображена основная кривая намагничения. Тангенс угла наклона прямой, проведенной из начала координат в некоторую точку кривой, пропорционален отношению B к H , которое в свою очередь пропорционально магнитной проницаемости μ для соответствующего значения напряженности поля. При увеличении H от нуля угол наклона (а значит, и μ) сначала растет. В точке 2 он

достигает максимума (прямая 0—2 является касательной к кривой), а затем убывает. На рис. 52.3б дан график зависимости μ от H . На рисунке видно, что максимальное значение проницаемости достигается немного раньше, чем насыщение. При неогра-

ниченном возрастании H проницаемость асимптотически приближается к единице. Это следует из того, что J в выражении $\mu = 1 + J/H$ не может превысить значения $J_{\text{нас}}$.

Величины B_r (или J_r), H_c и $\mu_{\text{нас}}$ являются основными характеристиками ферромагнетика. Если коэрцитивная сила H_c велика, ферромагнетик называется жестким. Для него характерна широкая петля гистерезиса. Ферромагнетик с малой H_c (и соответственно узкой петлей гистерезиса) называется мягким. В зависимости от назначения используются

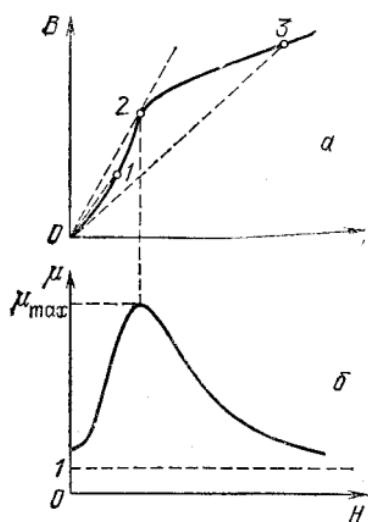
Рис. 52.3. Основная кривая намагничения (а) и график зависимости μ от H (б)

ферромагнетики с той или иной характеристикой. Так, для постоянных магнитов употребляются жесткие ферромагнетики, а для сердечников трансформаторов — мягкие.

Основы теории ферромагнетизма были созданы Френкелем¹⁾ и Гейзенбергом в 1928 г. Из опытов по изучению магнитомеханических явлений (см. § 50) следует, что ответственными за магнитные свойства ферромагнетиков являются собственные (спиновые) магнитные моменты электронов. При определенных условиях в кристаллах могут возникать силы²⁾, которые заставляют спиновые магнитные моменты электронов выстраиваться параллельно друг другу. В ре-

¹⁾ Яков Ильич Френкель (1894—1952) — советский физик-теоретик.

²⁾ Эти силы называются обменными. Их объяснение дается только квантовой механикой.



в результате возникают области спонтанного (самопроизвольного) намагничивания, которые называют также доменами. В пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагнчен до насыщения и обладает магнитным моментом. Направления этих моментов для разных доменов различны (рис. 52.4), так что в отсутствие внешнего поля суммарный момент всего тела равен нулю. Домены имеют размеры порядка 1—10 мкм.

Действие поля на домены на разных стадиях процесса намагничивания различно. Вначале, при слабых полях, наблюдается смещение границ доменов, в результате чего происходит увеличение тех доменов, моменты которых составляют с \mathbf{H} меньший угол, за счет доменов, у которых угол ϕ между векторами r_m и \mathbf{H} больше. Например, домены 1 и 3 (рис. 52.4) увеличиваются за счет доменов 2 и 4. С увеличением напряженности поля этот процесс идет все дальше и дальше, пока домены с меньшими значениями ϕ (которые обладают в магнитном поле меньшей энергией) не поглотят целиком энергетически менее выгодные домены. На следующей стадии происходит поворот магнитных моментов доменов в направлении поля. При этом моменты электронов в пределах домена поворачиваются одновременно, без нарушения их строгой параллельности друг другу. Эти процессы (исключая небольшие смещения границ между доменами в очень слабых полях) являются необратимыми, что и служит причиной гистерезиса.

Для каждого ферромагнетика имеется своя температура T_c , при которой области спонтанного намагничивания распадаются и вещество утрачивает ферромагнитные свойства. Эта температура называется точкой Кюри. Для железа она равна 768°C , для никеля 365°C . При температуре выше точки Кюри ферромагнетик становится обычным парамагнетиком, магнитная восприимчивость которого подчи-

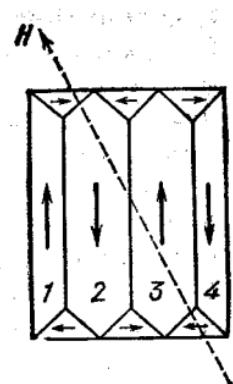


Рис. 52.4. Домены с различной ориентацией намагниченности

няется закону Кюри — Вейса¹⁾:

$$\chi_m = C/(T - T_c) \quad (52.1)$$

(ср. с формулой (51.2)). При охлаждении ферромагнетика ниже точки Кюри в нем снова возникают домены.

В некоторых случаях обменные силы приводят к возникновению так называемых антиферромагнетиков (марганец, хром и др.). Существование антиферромагнетиков было предсказано Неелем²⁾ в 1932 г. В антиферромагнетиках спиновые магнитные моменты электронов самопроизвольно ориентированы антипараллельно друг другу. Такая ориентация охватывает попарно соседние атомы. В результате антиферромагнетики обладают очень малой магнитной восприимчивостью и ведут себя как слабые парамагнетики. Для антиферромагнетиков также существует температура T_N , при которой антипараллельная ориентация спинов исчезает. Эта температура называется антиферромагнитной точкой Кюри или точкой Нееля. У некоторых антиферромагнетиков (например, у эрбия, диспрозия, сплавов марганца и меди) таких температур две (верхняя и нижняя точки Нееля), причем антиферромагнитные свойства наблюдаются только при промежуточных температурах. Выше верхней точки вещества ведет себя как парамагнетик, а при температурах, меньших нижней точки Нееля, становится ферромагнетиком.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое намагниченность вещества?
2. Что происходит с нормальной составляющей вектора B при переходе через границу раздела двух магнетиков?
3. Может ли поток вектора H через замкнутую поверхность быть отличным от нуля?
4. Какова размерность магнитной восприимчивости?
5. При соблюдении каких условий напряженность магнитного поля не зависит от проницаемости среды?
6. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора H .

¹⁾ Пьер Эрнест Вейс (1865—1940) — французский физик.

²⁾ Луи Элен Феликс Неель (р. 1904) — французский физик.

Примеры решения задач

1. На железном сердечнике в виде тора диаметра $d = 500$ мм имеется обмотка с числом витков $N = 1000$. В сердечнике сделана поперечная прорезь, в результате чего образовался воздушный зазор ширины $b = 1,00$ мм. Найти напряженность поля H в зазоре в случае, когда в обмотке течет ток силы $I = 0,85$ А. При этих условиях магнитная проницаемость железа $\mu = 3800$. Рассеянием поля у краев зазора пренебречь.

Решение. В сердечнике и зазоре магнитная индукция направлена по касательной к оси тора, т. е. по нормали к его сечению. Следовательно, $B_n = B$. При переходе через границу зазора нормальная составляющая B не изменяется, поэтому $B_* = B_b$. Выразив B через H , приDEM к равенству

$$\mu H_{jk} = H,$$

где H — напряженность поля в зазоре, μ — магнитная проницаемость сердечника (мы положили $\mu_a = 1$ и сократили в обеих частях равенства множитель μ_0). Из написанного равенства следует, что

$$H_{jk} = H/\mu.$$

Теперь воспользуемся теоремой о циркуляции вектора H . Циркуляция по контуру, совпадающему с осью тора, равна

$$H_{jk}(\pi d - b) + Hb = \frac{H}{\mu}(\pi d - b) + Hb.$$

Согласно теореме о циркуляции это выражение должно быть равно току NI , охватываемому контуром:

$$\frac{H}{\mu}(\pi d - b) + Hb = NI.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} H &= \frac{\mu NI}{\pi d + (\mu - 1)b} \approx \frac{\mu NI}{\pi d + \mu b} = \\ &= \frac{3800 \cdot 1000 \cdot 0,85}{3,14 \cdot 0,500 + 3800 \cdot 1,00 \cdot 10^{-3}} = 600 \text{ кА/м.} \end{aligned}$$

2. Бесконечная пластина из однородного и изотропного магнетика с проницаемостью $\mu = 1,0100$ помещена в перпендикулярное к ней однородное внешнее поле с индукцией $B_0 = 0,100$ Тл. Проницаемость вне пластины равна единице. Найти поток вектора H через воображаемую цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к пластине, и основаниями площади $S = 0,100$ м², одно из которых находится внутри пластины, а другое вне ее с той стороны, в которую направлен вектор B_0 .

Решение. Поток через боковую поверхность цилиндра равен нулю. Поток через основание, находящееся внутри пластины, равен $-H_{\text{пл}}S = (-B_0/\mu_0) S$ ($H_{\text{пл}}$ — напряженность поля в пластине; знак минус потому, что линии **Н** входят через это основание внутрь цилиндра). Поток через внешнее основание равен $(B_0/\mu_0) S$. Следовательно, поток через всю поверхность

$$\Phi_H = \frac{B_0 S}{\mu_0} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = \frac{0,100 \cdot 0,100}{4\pi \cdot 10^{-7}} \left(1 - \frac{1}{1,0100}\right) = 79 \text{ А} \cdot \text{м.}$$

Глава 8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

§ 53. Явление электромагнитной индукции

Экспериментируя с расположенным рядом катушками, по одной из которых шел электрический ток, Фарадей¹⁾ открыл в 1831 г. явление электромагнитной индукции. Это явление заключается в том, что изменение потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную проводящим контуром, сопровождается возникновением в контуре электрического тока, называемого индукционным.

Обнаруженнное Фарадеем явление свидетельствует о том, что при изменениях магнитного потока в контуре возникает электродвижущая сила индукции \mathcal{E}_i . Эта ЭДС не зависит от способа, которым осуществляется изменение магнитного потока Φ , и определяется только скоростью изменения Φ , т. е. значением $d\Phi/dt$. При изменении знака $d\Phi/dt$ направление \mathcal{E}_i также меняется.

Поясним сказанное следующим примером (рис. 53.1). Текущий в контуре 1 ток I_1 создает магнитное поле, пронизывающее контур 2. Если увеличивать ток I_1 , магнитный поток Φ через контур 2 будет расти. Это приведет к возникновению в контуре 2 индукционного тока I_2 . Уменьшение тока I_1 обусловит убывание магнитного потока через второй контур, что приведет к появлению в нем индукционного тока иного направления, чем в первом случае. Индукционный ток I_2 можно вызвать также, приближая контур 2 к контуру 1 или удаляя второй контур от первого. В обоих случаях направления возникаю-

¹⁾ Майкл Фарадей (1791—1867) — английский физик.

щего тока противоположны. Наконец, индукционный ток можно вызвать, не перемещая контур 2 поступательно, а поворачивая его так, чтобы изменялся угол между нормалью к контуру и направлением поля.

Контур 1 можно заменить постоянным магнитом. При приближении или удалении магнита в контуре 2 будет наблюдаться возникновение индукционного тока.

Направление индукционного тока можно найти с помощью правила Ленца, согласно которому **индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей**. Если, например, изменение Φ вызвано перемещением контура 2, то возникает индукционный ток такого направления, что сила взаимодействия с первым контуром противится движению контура. При приближении контура 2 к контуру 1 (см. рис. 53.1) возникает ток I_2' , магнитный момент которого направлен противоположно полю тока I_1 (угол α между векторами p'_m и B равен π). Следовательно, на контур 2 будет действовать сила, отталкивающая его от контура 1 (см. формулу (40.10)). При удалении контура 2 от контура 1 возникает ток I_2'' , момент которого p''_m совпадает по направлению с полем тока I_1 ($\alpha = 0$), так что сила, действующая на контур 2, направлена к контуру 1.

Предположим, что оба контура неподвижны и ток в контуре 2 индуцируется путем изменения тока I_1 в контуре 1. В этом случае возникает ток I_2' такого направления, что создаваемый им собственный магнитный поток стремится ослабить изменения внешнего потока, приведшие к появлению индукционного тока. При увеличении тока I_1 , т. е. при возрастании внешнего магнитного потока, направленного вправо, возникает ток I_2' , создающий поток, направленный

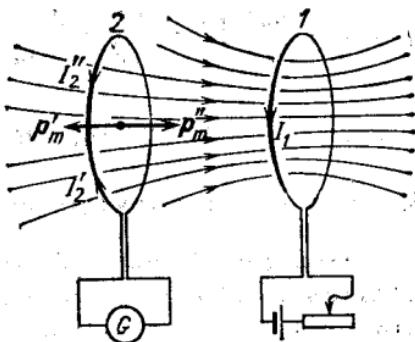


Рис. 53.1. Силу тока в контуре 1 можно изменять с помощью реостата. Возникающий при этом в контуре 2 ток измеряется гальваниometром G .

вправо, направленного вправо, возникает ток I_2' , создающий поток, направленный вправо, направленный

влево. При уменьшении тока I_1 возникает ток I''_2 , собственный магнитный поток которого направлен так же, как и внешний поток, и, следовательно, стремится поддержать внешний поток неизменным.

Индукционные токи могут возбуждаться и в сплошных массивных проводниках. В этом случае их называют токами Фуко или вихревыми токами. Электрическое сопротивление массивного проводника мало, поэтому токи Фуко могут достигать очень большой силы.

В соответствии с правилом Ленца токи Фуко выбирают внутри проводника такие пути и направления, чтобы своим действием возможно сильнее противиться причине, которая их вызывает. Поэтому движущиеся в магнитном поле хорошие проводники испытывают торможение, обусловленное взаимодействием токов Фуко с магнитным полем. Этим пользуются для демпфирования (успокоения) подвижных частей гальванометров, сейсмографов и других приборов. На подвижной части прибора укрепляется

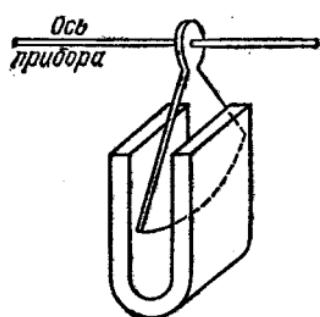


Рис. 53.2. Электромагнитный успокоитель

проводящая (например, алюминиевая) пластинка в виде сектора (рис. 53.2), которая вводится в зазор между полюсами постоянного магнита. При движении пластинки в ней возникают токи Фуко, вызывающие торможение системы. Преимущество такого устройства состоит в том, что торможение

возникает лишь при движении пластинки и исчезает, когда пластинка неподвижна. По-

этому электромагнитный успокоитель не препятствует точному приходу системы в положение равновесия.

Тепловое действие токов Фуко используется в индукционных печах. Такая печь представляет собой катушку, питаемую высокочастотным током большой силы. Если поместить внутрь катушки проводящее тело, в нем возникнут интенсивные вихревые токи, которые могут разогреть тело до плавления. Таким способом осуществляют плавление металлов в ва-

кууме, что позволяет получать материалы исключительно высокой чистоты.

С помощью токов Фуко осуществляется также прогрев внутренних металлических частей вакуумных установок для их обезгаживания.

Во многих случаях токи Фуко бывают нежелательными и приходится принимать для борьбы с ними специальные меры. Так, например, чтобы предотвратить потери энергии на нагревание токами Фуко сердечников трансформаторов, их набирают из тонких пластин, разделенных изолирующими прослойками. Пластины располагаются так, чтобы возможные направления токов Фуко были к ним перпендикулярными. Появление ферритов (полупроводниковых магнитных материалов с большим электрическим сопротивлением) сделало возможным изготовление сердечников сплошными.

§ 54. Электродвижущая сила индукции

Найдем связь между ЭДС индукции \mathcal{E} , и скоростью изменения магнитного потока Φ через контур. Мы сделаем это двумя способами. Первый способ основывается на законе сохранения энергии, второй — на существовании магнитной силы, действующей на движущийся заряд.

Рассмотрим контур, изображенный на рис. 54.1. Контур содержит источник тока с ЭДС \mathcal{E} . За время dt источник совершает работу

$$dA = P dt = \mathcal{E} I dt, \quad (54.1)$$

где I — сила тока в контуре, P — мощность, развиваемая источником тока (см. формулу (28.3)); в данном случае, поскольку цепь замкнута, вместо U нужно взять \mathcal{E}).

Когда перемычка 1—2 неподвижна, работа (54.1) полностью превращается в ленц-джоулеву теплоту

$$dQ = RI^2 dt. \quad (54.2)$$

Допустим, что перемычка, двигаясь со скоростью v , переместилась за время dt в положение 1'—2'. При этом магнитная сила совершила над перемычкой работу, которая согласно (41.2) равна

$$d'A = I d\Phi, \quad (54.3)$$

где $d\Phi$ — магнитный поток через заштрихованную площадку, т. е. приращение потока магнитной индукции через контур за время dt (см. рис. 54.1). Эта работа совершается за счет источника тока. Таким образом, при движении перемычки совершаемая источником тока работа (54.1) идет не только на выделение теплоты (54.2), но и на совершение над перемычкой работы (54.3):

$$\mathcal{E}Idt = RI^2 dt + I d\Phi. \quad (54.4)$$

Из соотношения (54.4) следует, что

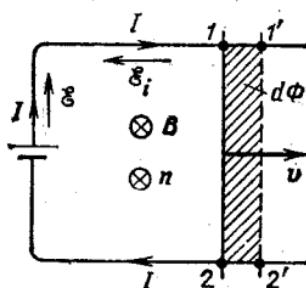
$$I = \frac{\mathcal{E} - d\Phi/dt}{R}. \quad (54.5)$$

Рис. 54.1. Перемычка 1—2 может перемещаться без нарушения контакта с остальной частью контура. Вектор \mathbf{B} и нормаль n к плоскости контура направлены за чертеж

ная $-d\Phi/dt$. Эта ЭДС и есть электродвижущая сила индукции. Таким образом,

$$\mathcal{E}_i = -d\Phi/dt. \quad (54.6)$$

Чтобы понять смысл знака минус в формуле (54.6), свяжем знаки ЭДС и магнитного потока с направлением нормали n к плоскости контура. Будем считать ЭДС положительной, если ее направление образует с n правовинтовую систему, и отрицательной, если ее направление образует с n левовинтовую систему. Из (54.5) следует, что в изображенном на рис. 54.1 случае знаки \mathcal{E} и \mathcal{E}_i противоположны, причем $\mathcal{E} > 0$, а $\mathcal{E}_i < 0$. При указанных на рисунке направлениях n и \mathbf{B} поток Φ и его приращение $d\Phi$ положительны. Таким образом, $\mathcal{E}_i < 0$, а $d\Phi/dt > 0$. Если бы вектор \mathbf{B} был направлен противоположно n , т. е. «на нас», то Φ и $d\Phi$ были бы отрицательными, а \mathcal{E}_i — положительной, т. е. действовала бы, как и \mathcal{E} , по часовой стрелке. При направлении \mathbf{B} за чертеж и движении перемычки 1—2 влево поток



Φ был бы положительным, а $d\Phi$ отрицательным. Соответственно \mathcal{E}_i была бы положительной, т. е. действовала бы по часовой стрелке, образуя с n правовинтовую систему.

Теперь получим формулу (54.6) другим способом. Возьмем контур, аналогичный изображенному на рис. 54.1, но без источника ЭДС \mathcal{E} (рис. 54.2). Приведем перемычку в движение со скоростью v . С той же скоростью станут перемещаться и носители тока в перемычке — электроны. В результате на каждый электрон будет действовать направленная вдоль перемычки магнитная сила

$$\mathbf{F} = -e[\mathbf{v} \mathbf{B}] \quad (54.7)$$

(см. (37.4); заряд электрона равен $-e$). Действие этой силы эквивалентно действию на электрон электрического поля напряженности

$$\mathbf{E} = [\mathbf{v} \mathbf{B}].$$

Это поле неэлектростатического происхождения. Его циркуляция по контуру дает значение ЭДС, индуцируемой в контуре:

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E} dl = \oint [\mathbf{v} \mathbf{B}] dl = \int_1^2 [\mathbf{v} \mathbf{B}] dl \quad (54.8)$$

(подынтегральная функция отлична от нуля лишь на образуемом перемычкой участке 1—2).

Векторы v и B взаимно перпендикулярны, а векторы $[\mathbf{v} \mathbf{B}]$ и dl направлены в противоположные стороны. Поэтому формула (54.8) упрощается следующим образом:

$$\mathcal{E}_i = - \int_1^2 v B dl = -vBl = -\frac{dx}{dt} Bl$$

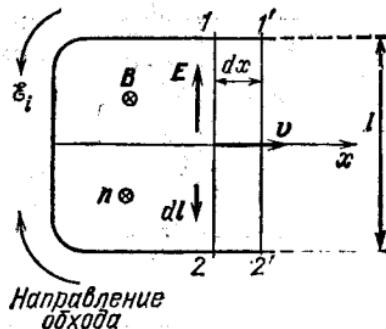


Рис. 54.2. Перемычка 1—2 длины l перемещается с постоянной скоростью v . При направлении n за чертеж положительна ЭДС, действующая по часовой стрелке. Направление dl выбрано так, чтобы направление обхода при вычислении циркуляции образовало с n правовинтовую систему

(мы представили v в виде dx/dt). Произведение $B dx$ представляет собой $d\Phi$ — приращение магнитного потока через контур за время dt . Следовательно, мы пришли к формуле (54.6).

При выводе формулы (54.6) мы считали, что магнитное поле постоянно, а изменяется геометрия контура. Однако магнитный поток через контур может изменяться также за счет изменения \mathbf{B} . В этом случае объяснение возникновения ЭДС индукции оказывается в принципе другим. Изменяющееся со временем магнитное поле порождает вихревое электрическое поле (см. § 60). Под действием этого поля носители тока приходят в движение, образуя индуцированный ток. Связь между ЭДС индукции и изменением магнитного потока и в этом случае описывается формулой (54.6).

Пусть контур состоит из N витков, например представляет собой соленоид. Поскольку витки соединяются последовательно, индуцируемая в контуре ЭДС \mathcal{E}_i будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом из витков в отдельности:

$$\mathcal{E}_i = - \sum \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \sum \Phi.$$

Величину

$$\Psi = \sum \Phi \quad (54.9)$$

называют потокосцеплением или полным магнитным потоком. Ее измеряют в тех же единицах, что и магнитный поток. Если поток, пронизывающий каждый из витков, одинаков, то

$$\Psi = N\Phi. \quad (54.10)$$

ЭДС, индуцируемая в сложном контуре, определяется формулой

$$\mathcal{E}_i = - d\Psi/dt. \quad (54.11)$$

Единицей потока магнитной индукции является вебер (Вб)¹), который представляет собой поток через поверхность в 1 м^2 , пересекаемую нормальны-

¹⁾ В честь немецкого ученого Вильгельма Эдуарда Вебера (1804—1891).

ми к ней линиями однородного магнитного поля с индукцией B , равной 1 Тл. При скорости изменения потока, равной 1 Вб/с, в контуре индуцируется ЭДС, равная 1 В.

§ 55. Явление самоиндукции

Текущий в каком-либо контуре электрический ток создает пронизывающий этот контур полный магнитный поток Ψ . Изменения силы тока сопровождаются изменениями магнитного потока, вследствие чего в контуре индуцируется ЭДС. Это явление называется самоиндукцией.

Согласно закону Био — Савара — Лапласа магнитная индукция пропорциональна силе тока, создающего поле. Отсюда следует, что ток I в контуре и создаваемый им полный магнитный поток Ψ через контур пропорциональны друг другу:

$$\Psi = LI. \quad (55.1)$$

Коэффициент пропорциональности L между силой тока и полным магнитным потоком называется индуктивностью контура.

Пропорциональность потока Ψ силе тока I имеет место только в том случае, когда магнитная проницаемость μ среды, которой окужен контур, не зависит от напряженности поля H , т. е. в отсутствие ферромагнетиков. В противном случае μ является сложной функцией от I (через H ; см. рис. 52.3б), и, поскольку $B = \mu_0 \mu H$, зависимость Ψ от I также будет сложной. Однако формулу (55.1) распространяют и на этот случай, считая индуктивность L функцией от I . При неизменной силе тока полный поток может изменяться за счет изменения формы и размеров контура.

Таким образом, индуктивность зависит от геометрии контура (т. е. от его формы и размеров), а также от магнитных свойств (от μ) окружающей контур среды. Если контур жесткий и вблизи него нет ферромагнитных тел, индуктивность является постоянной величиной.

Единицей индуктивности служит генри (Гн)¹, равный индуктивности такого проводника, у которого

¹) В честь американского физика Джозефа Генри (1797—1878).

при силе тока в нем в 1 А возникает сцепленный с ним полный магнитный поток в 1 Вб.

Определим индуктивность соленоида. Рассмотрим соленоид такой длины, чтобы его можно было считать бесконечным. При протекании по нему тока I внутри соленоида возбуждается однородное поле с индукцией $B = \mu_0 \mu n I$ (см. формулы (48.16) и (48.17)). Поток через каждый из витков $\Phi = BS$, а полный магнитный поток, сцепленный с соленоидом,

$$\Psi = N\Phi = nlBS = \mu_0 \mu n^2 l SI, \quad (55.2)$$

где l — длина соленоида, S — площадь поперечного сечения, n — число витков на единицу длины (произведение nl дает полное число витков N).

Сравнение формул (55.1) и (55.2) дает для индуктивности очень длинного соленоида выражение

$$L = \mu_0 \mu n^2 l S = \mu_0 \mu n^2 V, \quad (55.3)$$

где $V = lS$ — объем соленоида.

Из (55.3) следует, что размерность μ_0 равна размерности индуктивности, деленной на размерность длины (n^2 имеет размерность, обратную размерности квадрата длины, μ — безразмерная величина). В соответствии с этим μ_0 измеряется не только в тесла-метр на ампер (см. (36.2)), но и в генри на метр ($\text{Гн}/\text{м}$).

Изменения силы тока в контуре сопровождаются возникновением электродвижущей силы самоиндукции \mathcal{E}_s , которая определяется формулой

$$\mathcal{E}_s = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d(LI)}{dt} = - \left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt} \right). \quad (55.4)$$

Если при изменениях силы тока индуктивность остается постоянной (что возможно только в отсутствие ферромагнетиков), выражение для ЭДС самоиндукции упрощается следующим образом:

$$\mathcal{E}_s = - L \frac{dI}{dt}. \quad (55.5)$$

Знак минус в этой формуле обусловлен правилом Ленца, согласно которому индукционный ток бывает направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей. В данном случае причиной, вызывающей \mathcal{E}_s , является изменение силы тока в цепи,

Примем в качестве положительного направление обхода по часовой стрелке. При этом условии сила тока будет положительной, если ток течет в контуре по часовой стрелке, и отрицательной, если ток течет против часовой стрелки. Аналогично \mathcal{E}_s будет положительной, если она действует в направлении по часовой стрелке, и отрицательной, если она действует в направлении против часовой стрелки.

Производная dI/dt положительна в двух случаях: либо при возрастании положительного тока, либо при убывании модуля отрицательного тока. Из (55.5) следует, что в этих случаях $\mathcal{E}_s < 0$. Это означает, что ЭДС самоиндукции направлена против часовой стрелки и, следовательно, противится указанным изменениям тока (нарастанию положительного или убыванию отрицательного тока).

Производная dI/dt отрицательна также в двух случаях: либо при убывании положительного тока, либо при возрастании модуля отрицательного тока. В этих случаях $\mathcal{E}_s > 0$ и, следовательно, противится изменениям тока (убыванию положительного или возрастанию модуля отрицательного тока).

Формула (55.5) позволяет определить индуктивность как коэффициент пропорциональности между скоростью изменения силы тока в контуре и возникающей вследствие этого ЭДС самоиндукции. Однако такое определение правомерно лишь при условии, что $L = \text{const}$. В присутствии ферромагнетиков L не-деформируемого контура будет функцией от I (через H), поэтому производную dL/dt можно представить в виде $(dL/dI)(dI/dt)$. Произведя такую замену в формуле (55.4), получим

$$\mathcal{E}_s = - \left(L + I \frac{dL}{dI} \right) \frac{dI}{dt}. \quad (55.6)$$

Отсюда видно, что при наличии ферромагнетиков коэффициент пропорциональности между dI/dt и \mathcal{E}_s не равен L .

§ 56. Ток при замыкании и размыкании цепи

По правилу Ленца токи, возникающие вследствие самоиндукции, направлены так, чтобы противодействовать изменениям тока в цепи. Это приводит к

тому, что установление тока при замыкании цепи и убывание тока при размыкании цепи происходит не мгновенно, а постепенно.

Найдем сначала характер изменения тока при размыкании цепи. Пусть в цепи, изображенной на рис. 56.1, ключ K вначале замкнут. Тогда через

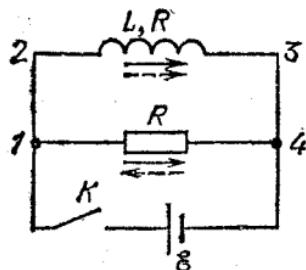


Рис. 56.1. Цепь состоит из катушки с индуктивностью L и сопротивлением R' и безындуктивного сопротивления R . Направления токов в различных звеньях цепи до размыкания ключа K показаны сплошными стрелками, после размыкания — штриховыми

индуктивность L будет течь постоянный ток силы

$$I_0 = \mathcal{E}/R' \quad (56.1)$$

(сопротивлением источника тока пренебрегаем).

При размыкании ключа ток в цепи $1-2-3-4$ не может исчезнуть мгновенно, потому что в индуктивности возникнет ЭДС самоиндукции, направленная так, чтобы противодействовать убыванию тока.

Если индуктивность постоянна, сила тока в цепи после размыкания ключа будет удовлетворять уравнению

$$I(R + R') = \mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt},$$

которое можно представить в виде

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R + R'}{L} I = 0. \quad (56.2)$$

Это — линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Разделив переменные, получим уравнение

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R + R'}{L} dt,$$

интегрирование которого приводит к выражению

$$\ln I = -\frac{R + R'}{L} t + \ln \text{const}$$

(здесь целесообразно постоянную интегрирования обозначить через $\ln \text{const}$). Потенцирование этого выражения дает, что

$$I = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{R+R'}{L}t\right). \quad (56.3)$$

Функция (56.3) является общим решением дифференциального уравнения (56.2). Значение константы определяется из начальных условий. При $t=0$ сила тока в индуктивности имеет значение (56.1). Следовательно, $\text{const} = I_0 = \mathcal{E}/R'$. Подставив это значение в (56.3), придем к формуле

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R'} \exp\left(-\frac{R+R'}{L}t\right). \quad (56.4)$$

Таким образом, после отключения источника ЭДС сила тока в цепи не обращается мгновенно в нуль, а убывает по экспоненциальному закону. График убывания тока дан на рис. 56.2 (кривая 1). Скорость убывания определяется имеющей размерность времени величиной

$$\tau = \frac{L}{R+R'}, \quad (56.5)$$

которую называют постоянной времени цепи. Заменив в (56.4) $(R+R')/L$ через $1/\tau$, получим формулу

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R'} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (56.6)$$

В соответствии с этой формулой τ есть время, в течение которого сила тока уменьшается в e раз. Из (56.5) видно, что чем больше индуктивность цепи и меньше ее сопротивление, тем больше постоянная времени τ и тем медленнее спадает ток в цепи.

Согласно (56.4) ЭДС самоиндукции после размыкания цепи определяется выражением

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} \frac{R+R'}{R'} \exp\left(-\frac{R+R'}{L}t\right).$$

В начальный момент

$$\mathcal{E}_s \approx \mathcal{E} \frac{R+R'}{R'} > \mathcal{E}. \quad (56.7)$$

Из (56.7) следует, что в случае, когда $R \gg R'$, ЭДС самоиндукции значительно превосходит ЭДС \mathcal{E} .

действовавшую в цепи до ее разрыва. Если разорвать простую (последовательную) цепь, то место разрыва будет обладать очень большим сопротивлением R . В соответствии с (56.7) в цепи возникнет высокое индуцированное напряжение, создающее искру или дугу в месте разрыва.

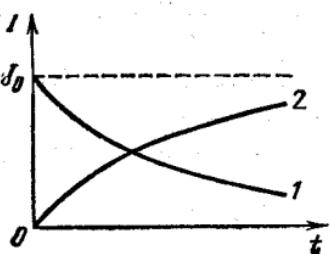


Рис. 56.2. График изменения тока при размыкании (кривая 1) и замыкании (кривая 2) цепи

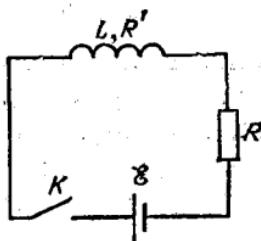


Рис. 56.3. Цепь, состоящая из последовательно включенных индуктивности (L, R') , сопротивления R и источника ЭДС \mathcal{E}

Теперь рассмотрим цепь, изображенную на рис. 56.3. После замыкания ключа K до тех пор, пока сила тока не достигнет установленвшегося значения

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R + R'}, \quad (56.8)$$

в цепи кроме ЭДС \mathcal{E} будет действовать ЭДС самоиндукции. Следовательно, сила тока удовлетворяет уравнению

$$I(R + R') = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - L dI/dt,$$

откуда

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R + R'}{L} I = \frac{\mathcal{E}}{L} \quad (56.9)$$

(сопротивление источника ЭДС считаем пренебрежимо малым).

Мы пришли к линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка, которое отличается от уравнения (56.2) лишь тем, что в правой части вместо нуля в нем стоит постоянная величина \mathcal{E}/L . Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения можно получить, прибавив любое его

частное решение к общему решению соответствующего однородного уравнения. Общее решение однородного уравнения имеет вид (56.3). Легко убедиться в том, что выражение (56.8) является частным решением уравнения (56.9). Следовательно, общим решением уравнения (56.9) будет функция

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R'} + \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{R + R'}{L} t\right). \quad (56.10)$$

(Рекомендуем проверить подстановкой, что функция (56.10) удовлетворяет уравнению (56.9).)

В начальный момент сила тока равна нулю. Подстановка в (56.10) $I = 0$ и $t = 0$ приводит к значению константы, равному $-\mathcal{E}/(R + R')$. Следовательно,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R'} \left[1 - \exp\left(-\frac{R + R'}{L} t\right) \right]. \quad (56.11)$$

С учетом (56.5) и (56.8) этой формуле можно придать вид

$$I = I_0 [1 - \exp(-t/\tau)]. \quad (56.12)$$

Функции (56.11) и (56.12) описывают нарастание тока в цепи после подключения к ней источника ЭДС. График функции (56.12) дан на рис. 56.2 (кривая 2).

§ 57. Взаимная индукция

Рассмотрим два расположенных рядом контура 1 и 2 (рис. 57.1). Текущий в контуре 1 ток силы I_1 создает связанный с контуром 2 полный магнитный поток

$$\Psi_2 = L_{21} I_1 \quad (57.1)$$

(ср. с (55.1)). Поле, создающее этот поток, изображено на рисунке сплошными линиями. При изменениях тока I_1 в контуре 2 индуцируется ЭДС

$$\mathcal{E}_{12} = -L_{21} dI_1/dt \quad (57.2)$$

(мы предполагаем, что контуры жесткие и ферромагнетиков вблизи них нет).

Аналогично, при протекании в контуре 2 тока силы I_2 возникает сцепленный с контуром 1 поток

$$\Psi_1 = L_{12} I_2 \quad (57.3)$$

(поле, создающее этот поток, изображено штриховыми линиями). При изменениях тока I_2 в контуре 1 индуцируется ЭДС

$$\mathcal{E}_{11} = -L_{12} dI_2/dt. \quad (57.4)$$

Контуры 1 и 2 называются связанными, а явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменениях силы тока в другом называется взаимной индукцией.

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются взаимной индуктивностью контуров.

Соответствующий расчет дает, что в отсутствие ферромагнетиков эти коэффициенты равны друг другу:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (57.5)$$

Они зависят от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости окружающей контуры среды. Измеряется взаимная индуктивность в тех же единицах, что и индуктивность, т. е. в генри (Гн).

Рассмотрим в качестве примера имеющий форму тора каркас из парамагнетика, на который намотаны плотно по всей длине одна поверх другой две обмотки. Число витков одной обмотки равно N_1 , другой — N_2 . Если радиус тороида R много больше радиуса поперечного сечения r , то при протекании в первой обмотке тока I_1 внутри каркаса создается практически однородное по поперечному сечению тора магнитное поле с индукцией

$$B_1 = \mu_0 \mu n_1 I_1 = \mu_0 \mu (N_1 / 2\pi R) I_1$$

(см. формулу (39.4)). Каждый виток второй обмотки будет пронизан магнитным потоком $\Phi_2 = B_1 S$ (S — площадь поперечного сечения тора). Следовательно, полный магнитный поток, сцепленный со второй

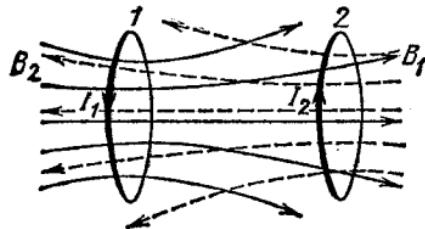


Рис. 57.1. Связанные контуры. Изменение силы тока в одном из контуров вызывает возникновение ЭДС индукции в другом

обмоткой,

$$\Psi_2 = N_2 B_1 S = N_2 \mu_0 \mu (N_1 / 2\pi R) S I_1 = \mu_0 \mu N_2 N_1 (S / 2\pi R) I_1. \quad (57.6)$$

При протекании во второй обмотке тока I_2 внутри каркаса возникает поле

$$B_2 = \mu_0 \mu n_2 I_2 = \mu_0 \mu (N_2 / 2\pi R) I_2.$$

В результате с первой обмоткой будет сцеплен поток

$$\Psi_1 = N_1 B_2 S = N_1 \mu_0 \mu (N_2 / 2\pi R) S I_2 = \mu_0 \mu N_1 N_2 (S / 2\pi R) I_2. \quad (57.7)$$

Из формул (57.6) и (57.7) вытекает, что отношения Ψ_2/I_1 и Ψ_1/I_2 одинаковы. Эти отношения равны соответственно L_{21} и L_{12} (см. (57.1) и (57.3)). Следовательно, взаимная индуктивность обмоток равна

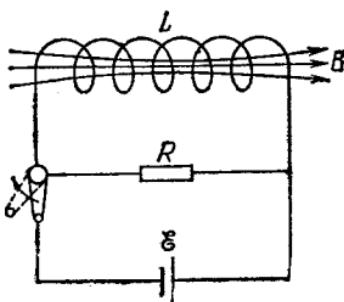
$$L_{12} = L_{21} = \mu_0 \mu N_1 N_2 (S / 2\pi R). \quad (57.8)$$

Если сделать каркас тороида из ферромагнетика, значения L_{12} и L_{21} сильно возрастут (из-за μ). Однако в этом случае условие (57.5), вообще говоря, не выполняется.

§ 58. Энергия магнитного поля

Пусть имеется цепь, изображенная на рис. 58.1. При замкнутом ключе в соленоиде установится ток I ,

Рис. 58.1. После размыкания ключа через индуктивность и сопротивление течет ток, обусловленный ЭДС самоиндукции. Этот ток нагревает элементы цепи за счет энергии магнитного поля



который обусловит магнитное поле, сцепленное с витками соленоида. Если разомкнуть ключ, то через сопротивление R будет некоторое время течь постепенно убывающий ток, поддерживаемый возникающей в

соленоиде ЭДС самоиндукции. Работа, совершаемая током за время dt , равна

$$dA = \mathcal{E}_s I dt = -\frac{d\Psi}{dt} I dt = -I d\Psi. \quad (58.1)$$

Эта работа идет на приращение внутренней энергии сопротивления R , обмотки соленоида и соединительных проводов (т. е. на их нагревание). Совершение работы сопровождается ослаблением магнитного поля. Поскольку никаких других изменений в окружающих электрическую цепь телах не происходит, остается заключить, что магнитное поле является носителем энергии, за счет которой и совершается работа (58.1). Таким образом, обозначив энергию сцепленного с соленоидом магнитного поля через W , можно написать, что

$$dW = -dA = I d\Psi \quad (58.2)$$

(работа dA равна убыли энергии, т. е. $-d\Psi$).

Согласно (48.17) напряженность поля в соленоиде $H = nI$, где n — число витков на единице длины. Следовательно,

$$I = H/n. \quad (58.3)$$

Сцепленный с соленоидом поток $\Psi = nlSB$ (l — длина, S — площадь поперечного сечения соленоида); отсюда

$$d\Psi = nlS dB. \quad (58.4)$$

Подставив в выражение (58.2) значения (58.3) и (58.4) для I и $d\Psi$, получим соотношение

$$dW = lSH dB = H dB \cdot V, \quad (58.5)$$

где V — объем соленоида.

В § 39 было показано, что поле бесконечно длинного (практически — очень длинного) соленоида однородно и отлично от нуля только внутри соленоида. Поэтому энергия W магнитного поля сосредоточена внутри соленоида и распределена по его объему с постоянной плотностью $w = W/V$. Из (58.5) следует, что

$$dw = H dB. \quad (58.6)$$

Мы получили выражение для приращения dw плотности энергии магнитного поля, отвечающего

приращению dB магнитной индукции. Чтобы получить саму плотность энергии, нужно проинтегрировать выражение (58.6) в пределах от 0 до B :

$$w = \int_0^B H dB. \quad (58.7)$$

Мы получили формулы (58.6) и (58.7), рассматривая однородное поле, однако они годятся и для неоднородного поля.

Заменив H через $B/\mu_0\mu$, придем к формуле

$$w = \int_0^B \frac{B dB}{\mu_0\mu}. \quad (58.8)$$

Проницаемость μ , вообще говоря, является функцией B (через H). В случае если среда линейна, т. е. μ не зависит от H , проницаемость можно вынести за знак интеграла:

$$w = \frac{1}{\mu_0\mu} \int_0^B B dB = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}.$$

Приняв во внимание, что $B = \mu_0\mu H$, выражение для плотности энергии магнитного поля можно написать тремя способами:

$$w = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}. \quad (58.9)$$

Подчеркнем, что эти формулы годятся только в том случае, когда μ не зависит от H , т. е. для диа- и парамагнетиков.

Отметим, что выражения (58.9) отличаются от выражений (23.2) для плотности энергии электрического поля лишь тем, что величины, характеризующие электрическое поле, заменены в них величинами, характеризующими магнитное поле.

В случае соленоида $H = nI$. Поэтому энергию W магнитного поля, сцепленного с соленоидом, можно выразить через силу тока I и индуктивность соленоида L :

$$W = wV = \frac{1}{2} \mu_0\mu n^2 V I^2 = \frac{1}{2} L I^2 \quad (58.10)$$

(см. формулу (55.3)).

Формула (58.10) годится не только для соленоида, но и для проводника любой формы. Таким образом, проводник с индуктивностью L , по которому течет ток силы I , обладает энергией

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (58.11)$$

Можно показать, что в случае связанных контуров (в отсутствие ферромагнетиков) энергия магнитного поля определяется формулой

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{L_{12} I_1 I_2}{2} + \frac{L_{21} I_2 I_1}{2}. \quad (58.12)$$

Для энергии N связанных друг с другом контуров получается аналогичное выражение:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^N L_{ik} I_i I_k, \quad (58.13)$$

где $L_{ik} = L_{ki}$ — взаимная индуктивность i -го и k -го контуров, а $L_{ii} = L_i$ — индуктивность i -го контура.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте правило Ленца.
2. Чем определяется индуктивность контура?
3. В каком случае индуктивность контура не зависит от силы тока в нем?
4. Что такое постоянная времени электрической цепи?
5. В каком случае плотность энергии магнитного поля определяется выражением $\mu_0 \mu H^2 / 2$?

Примеры решения задач

1. Между полюсами электромагнита помещена небольшая катушка так, что оси катушки и полюсных наконечников магнита совпадают. Площадь поперечного сечения катушки $S = 3,00 \text{ мм}^2$, число витков $N = 60$. При повороте катушки на 180° через соединенный с ней баллистический гальванометр проходит заряд $q = 4,50 \text{ мкКл}$. Определить магнитную индукцию B поля между полюсами. Сопротивление катушки, гальванометра и соединительных проводов $R = 40,0 \text{ Ом}$.

Решение. Обозначим полный магнитный поток, сцепленный с катушкой, буквой Ψ . Изменение Ψ , обусловленное вращением катушки, приводит к возникновению в цепи индукционного тока

$$I = \frac{1}{R} \mathcal{E}_t = - \frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt}.$$

За время dt через гальванометр проходит заряд

$$dq = I dt = \frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt} dt = \frac{1}{R} d\Psi$$

(знак минус мы опустили). За все время поворота катушки через гальванометр проходит заряд

$$q = \int dq = \frac{1}{R} \int d\Psi = \frac{1}{R} \Delta\Psi, \quad (1)$$

где $\Delta\Psi$ — полное изменение потока, равное $NBS - (-NBS) = 2NBS$. Таким образом,

$$q = \frac{1}{R} \cdot 2NBS,$$

откуда

$$B = \frac{qR}{2NS} = \frac{4,50 \cdot 10^{-6} \cdot 40,0}{2 \cdot 60 \cdot 3,00 \cdot 10^{-6}} = 0,50 \text{ Тл.}$$

2. По соседству расположены два витка. По первому течет ток $I_1 = 10,0 \text{ А}$. В цепь второго включен баллистический гальванометр. Полное сопротивление второй цепи $R = 5,00 \text{ Ом}$. Чему равна взаимная индуктивность L_{12} витков, если при выключении тока I_1 через гальванометр проходит заряд $q = 1,00 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$?

Решение. Согласно определению взаимной индуктивности первоначально магнитный поток, пронизывающий второй виток, равен

$$\Psi_2 = L_{12}I_1.$$

После выключения тока Ψ_2 становится равным нулю. Следовательно, изменение потока $\Delta\Psi = L_{12}I_1$. Подстановка этого значения в полученную при решении предыдущей задачи формулу (1) дает, что

$$q = \frac{1}{R} L_{12}I_1,$$

откуда

$$L_{12} = \frac{qR}{I_1} = \frac{1,00 \cdot 10^{-8} \cdot 5,00}{10,0} = 5,0 \text{ мГн.}$$

Глава 9. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

§ 59. Ротор векторного поля. Теорема Стокса

В уравнения Максвелла входят дивергенция и ротор электрического и магнитного полей. С понятием дивергенции мы познакомились в § 5. В этом параграфе будет рассмотрен ротор.

Ротор соотносится с циркуляцией подобно тому, как дивергенция соотносится с потоком: дивергенция порождает поток, ротор порождает циркуляцию.

Циркуляция обладает свойством аддитивности. Это означает, что циркуляция по контуру, ограничивающему несколько смежных поверхностей, равна сумме циркуляций по контурам, ограничивающим каждую из поверхностей в отдельности. Докажем это для случая двух смежных поверхностей (рис. 59.1). Обозначим циркуляцию по контурам Γ_1 ,

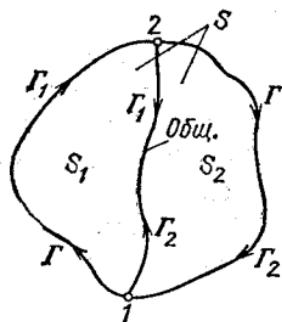


Рис. 59.1. Циркуляция по контуру Γ равна сумме циркуляций по контурам Γ_1 и Γ_2

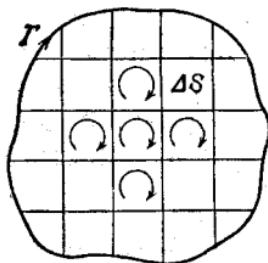


Рис. 59.2. Циркуляция по внешнему контуру Γ равна сумме элементарных циркуляций, охватывающих площадки ΔS

Γ_2 и Γ через C_1 , C_2 и C соответственно. При вычислении циркуляции по контурам Γ_1 и Γ_2 общий для обоих контуров участок $1-2$ проходится в противоположных направлениях (направление обхода для всех контуров одно и тоже — по часовой стрелке). Поэтому вклад этого участка в сумму циркуляций C_1 и C_2 равен нулю, а вклад остальных участков контуров

Γ_1 и Γ_2 равен циркуляции C по контуру Γ . Таким образом,

$$C = C_1 + C_2. \quad (59.1)$$

Доказанное соотношение не зависит от формы поверхностей и справедливо при любом числе слагаемых. Следовательно, если разбить произвольную незамкнутую поверхность S на большое число элементарных поверхностей ΔS (рис. 59.2), то циркуляция по контуру, ограничивающему S , может быть представлена как сумма элементарных циркуляций ΔC по контурам, ограничивающим поверхности ΔS :

$$C = \sum \Delta C. \quad (59.2)$$

На рис. 59.2 элементарные поверхности изображены для простоты в виде прямоугольников. В действительности их форма может быть любой.

Ротор. Из свойства аддитивности вытекает, что элементарная циркуляция пропорциональна не длине контура, а поверхности элементарной площадки, охватываемой контуром. Это дает основание утверждать, что циркуляция порождается на поверхности. Соответственно можно ввести понятие плотности порождения циркуляции, т. е. циркуляции, порождаемой бесконечно малым участком поверхности в расчете на единицу площади этого участка:

$$\text{плотность порождения циркуляции} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta S}. \quad (59.3)$$

Величина (59.3), вычисленная для некоторой точки поля P , будет зависеть не только от свойств поля в этой точке, но также и от ориентации в пространстве площадки ΔS , т. е. от ориентации контура, охватывающего ΔS . Эта ориентация может быть задана направлением положительной нормали n к плоскости контура (положительной считается нормаль, связанная с направлением обхода контура при вычислении циркуляции правилом правого винта). Определяя предел (59.3) в одной и той же точке P для разных направлений n , мы будем получать различные значения. Выясним связь между этими значениями на простейшем примере.

Напомним, что в однородном поле циркуляция по любому контуру равна нулю. В этом случае постоянный вектор \mathbf{a} в выражении для циркуляции можно вынести за знак интеграла:

$$\oint \mathbf{a} dl = a \oint dl,$$

а интеграл $\oint dl$, очевидно, равен нулю.

Плотность порождения циркуляции однородного поля также равна нулю. Поэтому рассмотрим простейшее неоднородное поле, определяемое выражением

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x = k y \mathbf{e}_x, \quad (59.4)$$

где k — константа. У этого поля отлична от нуля только компонента a_x , которая пропорциональна координате y , от других координат эта компонента не

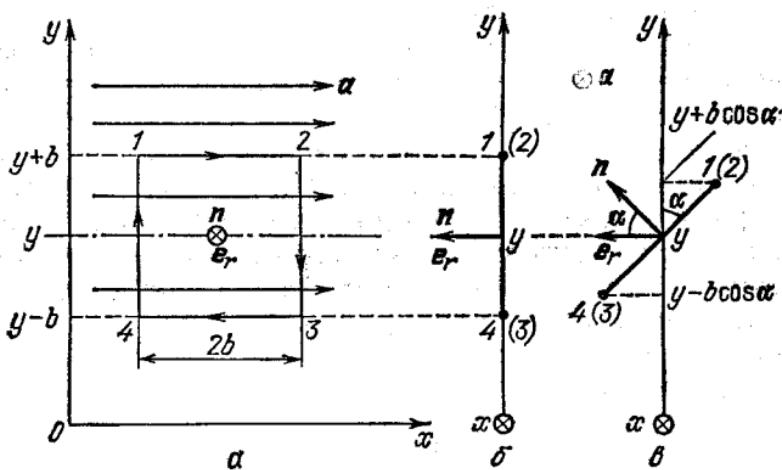


Рис. 59.3. Параллельное оси x поле \mathbf{a} изменяется только в направлении оси y . Квадратный контур со стороной $2b$ на рис. a и b лежит в плоскости xy . Положительная нормаль n и фиксированный орт e_r на рис. a направлены за чертеж. Цифры в скобках на рис. b и c — номера углов квадрата, расположенные за углами, обозначенными цифрами без скобок

зависит. Представим себе в этом поле очень малый (в пределе бесконечно малый) квадратный контур (рис. 59.3). При указанной на рис. 59.3б ориентации контура циркуляция равна

$$k(y+b) \cdot 2b - k(y-b) \cdot 2b = 4kb^2 = kS,$$

где $S = 4b^2$ — площадь контура. Соответственно плотность порождения циркуляции равна k .

В случае, изображенном на рис. 59.3в, циркуляция равна

$$k(y + b \cos \alpha) \cdot 2b - k(y - b \cos \alpha) \cdot 2b = 4kb^2 \cos \alpha = \\ = kS \cos \alpha,$$

где α — угол между нормалью к контуру и фиксированным ортом e_r . Соответственно плотность порождения циркуляции равна $k \cos \alpha$.

Таким образом, плотность порождения циркуляции ведет себя при вращении контура как проекция вектора ke , на нормаль к контуру. Этот вектор называют ротором векторного поля и обозначают $\text{rot } a$. Его модуль равен наибольшему положительному значению плотности порождения циркуляции из всех значений, соответствующих различным ориентациям контура в пространстве.

Казалось бы, выражение $k \cos \alpha$ можно рассматривать как проекцию вектора kn на направление орта e_r . Однако такой вектор не имеет никакого смысла: в нем сочетались бы характеристики разных объектов — характеристика поля k и характеристика контура n . Кроме того, вектор kn не мог бы служить характеристикой поля, поскольку он был бы неоднозначным — орт n может иметь любое направление.

Итак, плотность порождения циркуляции равна проекции характеризующего поле вектора $\text{rot } a$ на положительную нормаль к контуру:

$$(\text{rot } a)_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint a \, dl. \quad (59.5)$$

Эта формула годится не только для рассмотренного нами, но и для любого векторного поля.

В случае поля вектора скорости текущей жидкости (см. § 39 1-го тома) наглядное представление о роторе v можно получить, представив себе небольшую легкую крыльчатку, помещенную в данную точку жидкости (рис. 59.4). В тех местах, где ротор отличен от нуля, крыльчатка будет вращаться, причем с тем большей скоростью, чем больше проекция ротора на ось крыльчатки,

По аналогии с крыльчаткой, изображенной на рис. 59.4, представим себе электрическую «крыльчатку» в виде легкой втулки со спицами, на концах которых помещаются одинаковые положительные заряды q (рис. 59.5; все устройство должно быть малых размеров). В тех местах электрического поля, где ротор E отличен от нуля, такая крыльчатка вращалась бы с тем большим ускорением, чем больше проекция ротора E на ось крыльчатки. В случае электростатического поля такое воображаемое устрой-

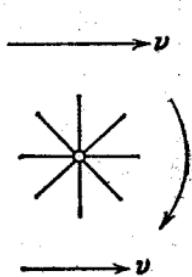


Рис. 59.4. Крыльчатка, помещенная в поток жидкости

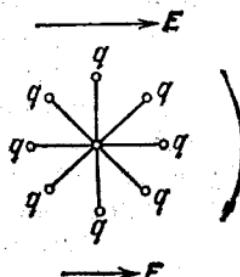


Рис. 59.5. Крыльчатка с заряженными шариками на концах «крыльев», помещенная в электрическое поле

ство не пришло бы во вращение при любой ориентации его оси. Напомним, что циркуляция, а следовательно, и ротор электростатического поля равны нулю:

$$\operatorname{rot} E = 0. \quad (59.6)$$

Вектор бывает определен, если известны его компоненты, т. е. проекции на координатные оси. Чтобы найти выражения для проекций $\operatorname{rot} a$ на оси декартовой системы координат, нужно определить значения величины (59.5) для таких ориентаций площадки ΔS , при которых нормаль к площадке совпадает с одной из координатных осей. Если, например, направить нормаль по оси x , то выражение (59.5) даст $(\operatorname{rot} a)_x$. В этом случае контур расположен параллельно координатной плоскости yz . Возьмем контур в виде прямоугольника со сторонами Δy и Δz (рис. 59.6). Участок 1 контура противоположен по

направлению оси z . Поэтому a_z на этом участке совпадает с $-a_z$. Рассуждая аналогично, найдем, что a_z на участках 2, 3 и 4 равна соответственно a_y , a_z и $-a_y$. Следовательно, циркуляция имеет вид

$$(a_{z3} - a_{z1}) \Delta z - (a_{y4} - a_{y2}) \Delta y, \quad (59.7)$$

где a_{z3} и a_{z1} — средние значения a_z на участках 3 и 1, a_{y4} и a_{y2} — средние значения a_y на участках 4 и 2.

Разность $a_{z3} - a_{z1}$ представляет собой приращение среднего значения a_z на отрезке Δz при смещении этого отрезка в направлении оси y на Δy . Вследствие малости Δy и Δz это приращение можно представить в виде $(da_z/dy)\Delta y$, где значение da_z/dy берется в точке P . Аналогично разность $a_{y4} - a_{y2}$ можно представить в виде $(da_y/dz)\Delta z$. Подставив эти выражения в (59.7) и вынеся общий множитель за скобки, получим для

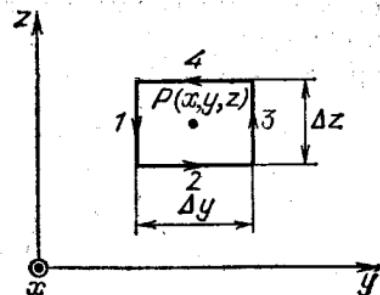


Рис. 59.6. Контур, положительная нормаль к которому направлена по оси x (нормаль и ось направлены «на нас»). $P(x, y, z)$ — точка, в которой вычисляется ротор

циркуляции выраже-

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \Delta S,$$

где ΔS — площадь контура. Разделив циркуляцию на ΔS , найдем выражение для проекции $\text{rot } \mathbf{a}$ на ось x :

$$(\text{rot } \mathbf{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}. \quad (59.8)$$

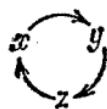
Путем аналогичных рассуждений можно найти, что

$$(\text{rot } \mathbf{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad (59.9)$$

$$(\text{rot } \mathbf{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \quad (59.10)$$

Легко убедиться в том, что любое из выражений (59.8) — (59.10) может быть получено из предыдущего (для (59.8) предыдущим считается (59.10)).

путем циклической перестановки координат, т. е. замены координат, осуществляющей по схеме



Итак, ротор вектора \mathbf{a} определяется в декартовой системе координат следующим выражением:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right). \quad (59.11)$$

Представив производные в виде произведений $\frac{\partial}{\partial y} \cdot a_z$ и т. д., выражение (59.11) можно написать в виде определителя:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}, \quad (59.12)$$

где $\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z$ — компоненты оператора ∇ (набла).

С помощью точно такого определителя можно представить векторное произведение векторов ∇ и \mathbf{a} . Следовательно, существуют два способа обозначения ротора: $\text{rot } \mathbf{a}$ и $[\nabla \mathbf{a}]$. Оба способа совершенно равноправны:

$$\text{rot } \mathbf{a} \equiv [\nabla \mathbf{a}]. \quad (59.13)$$

(Напомним, что $\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi$ и $\text{div } \mathbf{a} \equiv \nabla \cdot \mathbf{a}$.)

Определим дивергенцию векторного поля $\text{rot } \mathbf{a}$. Согласно формулам (5.13) и (59.11) — (59.13)

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{a} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

($\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ и т. д.). Таким образом, дивергенция ротора всегда равна нулю:

$$\text{div rot } \mathbf{a} = 0. \quad (59.14)$$

Это означает, что поле $\text{rot } \mathbf{a}$ не имеет источников, его линии либо замкнуты, либо уходят в бесконечность.

Найдем ротор градиента скалярной функции φ . Компоненты градиента равны

$$(\text{grad } \varphi)_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (\text{grad } \varphi)_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (\text{grad } \varphi)_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Подставив их в формулу (59.11), получим, что

$$\begin{aligned} \text{rot grad } \varphi &= e_x \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \\ &+ e_y \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + e_z \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ротор градиента оказался равным нулю:

$$\text{rot grad } \varphi = 0. \quad (59.15)$$

Полученный результат означает, что поле градиента является безвихревым — циркуляция такого поля по любому контуру равна нулю. Это, в частности, справедливо для электростатического поля, которое может быть представлено в виде градиента потенциала: $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$.

Теорема Стокса. Зная ротор вектора \mathbf{a} в каждой точке некоторой (не обязательно плоской) поверхности S , можно вычислить циркуляцию этого вектора по контуру Γ , ограничивающему S (контур также может быть неплоским). Для этого разобьем поверхность на очень малые элементы ΔS . Вследствие малости эти элементы можно считать плоскими. Поэтому в соответствии с (59.5) циркуляция вектора \mathbf{a} по контуру, ограничивающему ΔS , может быть представлена в виде

$$\Delta C \approx (\text{rot } \mathbf{a})_n \Delta S = \text{rot } \mathbf{a} \Delta S, \quad (59.16)$$

где n — положительная нормаль к элементу поверхности ΔS .

Просуммировав выражение (59.16) по всем ΔS , получим циркуляцию вектора \mathbf{a} по контуру Γ , ограничивающему S :

$$C = \sum \Delta C \approx \sum \text{rot } \mathbf{a} \Delta S$$

(см. (59.2)). Наконец, осуществив предельный переход, при котором все ΔS стремятся к нулю (число их при этом неограниченно растет), придем к формуле

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{a} dl = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{a} dS. \quad (59.17)$$

Соотношение (59.17) носит название теоремы Стокса¹). Смысл ее состоит в том, что циркуляция вектора \mathbf{a} по произвольному контуру Γ равна потоку вектора $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ через произвольную поверхность S , ограниченную данным контуром.

Поскольку поле $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ не имеет источников, число пересечений линиями $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ любой поверхности, ограниченной заданным контуром, будет одно и то же. Поэтому поверхность S , по которой берется интеграл в правой части равенства (59.17), может быть любой, лишь бы ее граница совпадала с данным контуром Γ .

Отметим, что в рассмотренном выше примере (см. рис. 59.3) $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ во всех точках поля одинаков: он направлен перпендикулярно к плоскости xy , а модуль его всюду равен k . Поэтому согласно (59.17) циркуляция вектора \mathbf{a} по контуру любой формы, расположенному в плоскости, параллельной плоскости xy , равна kS , где S — площадь контура.

Воспользуемся теоремой Стокса для нахождения ротора напряженности магнитного поля. Согласно теореме о циркуляции

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} dl = \sum I,$$

где $\sum I$ — алгебраическая сумма макроскопических токов, охватываемых контуром (см. (48.7)). Если ток распределен непрерывно по поверхности, ограниченной контуром, сумму токов можно представить в виде

$$\sum I = \int_S j dS,$$

¹⁾ Джордж Габриэль Стокс (1819—1903) — английский физик и математик.

где j — плотность тока (см. формулу (24.3)). Следовательно, можно написать, что

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S j dS.$$

Преобразовав левую часть по теореме Стокса, придем к равенству

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} dS = \int_S j dS.$$

Это равенство должно выполняться для любой произвольно взятой поверхности, что возможно только в том случае, если подынтегральные выражения равны друг другу в каждой точке пространства. Таким образом, мы пришли к формуле

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = j, \quad (59.18)$$

согласно которой ротор напряженности магнитного поля в некоторой точке пространства равен плотности макроскопического тока в той же точке.

§ 60. Вихревое электрическое поле

Пусть индукционный ток обусловлен не деформированием или перемещением контура, а изменениями магнитного поля. В этом случае возникновение индукционного тока указывает на то, что изменения магнитного поля вызывают появление в контуре сторонних сил. Эти силы не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами в проводнике; они также не могут быть магнитными силами, поскольку такие силы работы над зарядами не совершают. Остается заключить, что индукционный ток обусловлен возникающим в проводнике электрическим полем. Обозначим напряженность этого поля через E_B (это обозначение, так же как и применяемое в дальнейшем обозначение E_q , является вспомогательным; впоследствии индексы B и q мы опустим).

Электродвижущая сила равна циркуляции вектора напряженности сторонних сил (в данном случае это E_B) по контуру:

$$\mathcal{E}_t = \oint E_B d\mathbf{l}. \quad (60.1)$$

Согласно формуле (54.6) ЭДС, индуцированная в контуре, равна

$$\mathcal{E}_I = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (60.2)$$

где S — произвольная поверхность, ограниченная контуром.

Приравняв правые части формул (60.1) и (60.2), придем к соотношению

$$\oint \mathbf{E}_B dl = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Поскольку контур и поверхность неподвижны, операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами:

$$\oint \mathbf{E}_B dl = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (60.3)$$

Вектор \mathbf{B} зависит, вообще говоря, как от времени, так и от координат, поэтому мы написали под знаком интеграла символ частной производной по времени (интеграл $\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$ является функцией только от времени).

Преобразуем левую часть равенства (60.3) по теореме Стокса (см. (59.17)). В результате получим, что

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E}_B d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Вследствие произвольности выбора поверхности интегрирования должно выполняться равенство

$$\text{rot } \mathbf{E}_B = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (60.4)$$

Мы установили, что ротор поля \mathbf{E}_B в каждой точке пространства равен взятой с обратным знаком производной по времени от вектора \mathbf{B} .

Дж. К. Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле обусловливает появление

ние в пространстве поля E_B независимо от присутствия в этом пространстве проводящего контура. Поле E_B существенно отличается от порождаемого неподвижными зарядами электростатического поля E_q . Электростатическое поле потенциально, его линии напряженности начинаются и оканчиваются на зарядах. Ротор вектора E_q в любой точке равен нулю:

$$\operatorname{rot} E_q = 0 \quad (60.5)$$

(см. формулу (59.6) и следующий за ней текст). Согласно (60.4) ротор вектора E_B отличен от нуля. Следовательно, поле E_B , как и магнитное поле, является вихревым. Линии напряженности поля E_B замкнуты или уходят в бесконечность.

Итак, электрическое поле может быть как потенциальным (E_q), так и вихревым (E_B). В общем случае электрическое поле может слагаться из поля E_q , создаваемого зарядами, и поля E_B , обусловленного изменяющимся со временем магнитным полем. Сложив соотношения (60.4) и (60.5), получим для ротора напряженности суммарного поля $E = E_q + E_B$ уравнение

$$\operatorname{rot} E = - \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (60.6)$$

Это уравнение является одним из основных в электромагнитной теории Максвелла.

Существование взаимосвязи между электрическим и магнитным полями (выражаемой, в частности, уравнением (60.6)) указывает на то, что раздельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл. Действительно, чисто электрическое поле создается системой неподвижных зарядов. Однако если заряды неподвижны относительно некоторой инерциальной системы отсчета, то относительно других инерциальных систем эти заряды движутся и, следовательно, порождают не только электрическое, но и магнитное поле. Неподвижный провод с постоянным током создает постоянное магнитное поле. Однако относительно других инерциальных систем этот провод движется. Поэтому созданное им магнитное поле в любой точке будет изменяться и, следовательно, порождать

вихревое электрическое поле. Таким образом, поле, которое относительно некоторой системы отсчета оказывается чисто электрическим или чисто магнитным, относительно других систем отсчета представляет собой совокупность электрического и магнитного полей, образующих единое электромагнитное поле.

§ 61. Ток смещения

Представим себе в пространстве, в котором течет ток плотности $j(x, y, z)$, воображаемую замкнутую поверхность S (рис. 61.1). Поток вектора j через эту

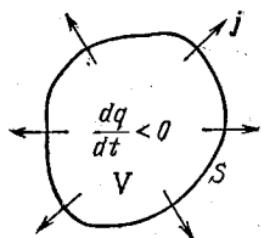


Рис. 61.1. Поток вектора плотности тока через замкнутую поверхность равен скорости убывания заряда в объеме, ограниченном поверхностью

поверхность определяет заряд, выходящий в единицу времени из объема V , ограниченного поверхностью. В силу закона сохранения заряда эта величина должна быть равна скорости убывания заряда q , содержащегося в объеме V :

$$\oint_S j dS = - \frac{dq}{dt}.$$

Заряд q можно представить в виде $\int_V \rho dV$. В результате получается соотношение

$$\oint_S j dS = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (61.1)$$

Под знаком интеграла мы написали частную производную ρ по t , так как плотность заряда может зависеть не только от времени, но и от координат (интеграл $\int_V \rho dV$ есть функция только времени). Преобразуем левую часть равенства (61.1) по теореме

Остроградского — Гаусса (см. (5.12)). В результате получим, что

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (61.2)$$

Равенство (61.2) должно выполняться при произвольном выборе объема V , по которому берутся интегралы. Это возможно лишь в том случае, если в каждой точке пространства выполняется условие:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (61.3)$$

Соотношение (61.3) называют уравнением непрерывности. Оно выражает закон сохранения заряда. Согласно (61.3) в точках, которые являются источниками вектора \mathbf{j} , происходит убывание заряда.

В случае стационарного (т. е. не изменяющегося со временем) электромагнитного поля ротор вектора \mathbf{H} равен в каждой точке плотности тока проводимости:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (61.4)$$

(см. (59.18)). Вектор \mathbf{j} связан с плотностью заряда в той же точке уравнением непрерывности (61.3). Электромагнитное поле может быть стационарным лишь при условии, что плотность заряда ρ и плотность тока j не зависят от времени. Согласно (61.3) дивергенция \mathbf{j} в этом случае равна нулю. Поэтому линии тока (линии вектора \mathbf{j}) не имеют источников и являются замкнутыми.

Выясним, является ли уравнение (61.4) справедливым в случае изменяющихся со временем полей. Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током, текущим при зарядке конденсатора от источника постоянного напряжения U (рис. 61.2). Этот ток непостоянен во времени (в момент, когда напряжение на конденсаторе становится равным U , ток прекращается). Линии тока проводимости терпят разрыв в промежутке между обкладками конденсатора.

Возьмем круговой контур Γ , охватывающий провод, по которому течет ток к конденсатору, и проин-

тегрируем соотношение (61.4) по пересекающей провод поверхности S_1 :

$$\int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{j} d\mathbf{S} = I \quad (61.5)$$

(I — сила тока, заряжающего конденсатор). Заметим, что в зазоре нет тока проводимости, но зато есть изменяющееся электрическое поле.

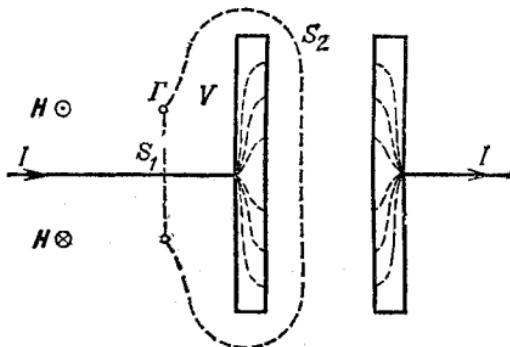


Рис. 61.2. Процесс зарядки конденсатора. Штриховые линии — линии тока проводимости. Над проводом вектор \mathbf{H} направлен «на нас», под проводом — «от нас»

Преобразовав левую часть равенства (61.5) по теореме Стокса, найдем циркуляцию вектора \mathbf{H} по контуру Γ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} dl = I. \quad (61.6)$$

Проделав такие же вычисления для поверхности S_2 , не пересекающей провод, придем к явно неверному соотношению

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} dl = \int_{S_2} \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0. \quad (61.7)$$

Полученный нами результат указывает на то, что в случае изменяющихся со временем полей уравнение (61.4) оказывается несправедливым. Напрашивается вывод, что в этом уравнении отсутствует слагаемое, зависящее от производных полей от времени. Для стационарных полей это слагаемое обращается в нуль,

На несоблюдение равенства (61.4) в случае нестационарных полей указывают также следующие соображения. Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (61.4):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{j}.$$

Согласно (59.14) дивергенция ротора обязана быть равной нулю. Отсюда следует, что дивергенция вектора \mathbf{j} также должна быть всегда равной нулю. Однако этот вывод противоречит уравнению (61.3). Действительно, при нестационарных процессах плотность заряда ρ может изменяться со временем (это, в частности, происходит с плотностью заряда на обкладках заряжаемого конденсатора). В этом случае согласно (61.3) дивергенция \mathbf{j} отлична от нуля.

Чтобы согласовать уравнения (61.4) и (61.3), Максвелл ввел в правую часть уравнения (61.4) дополнительное слагаемое. Естественно, что это слагаемое должно иметь размерность плотности тока. Максвелл назвал его плотностью тока смещения. Таким образом, согласно Максвеллу уравнение (61.4) должно иметь вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{смеш.}} \quad (61.8)$$

Сумму тока проводимости и тока смещения принято называть полным током. Плотность полного тока равна

$$\mathbf{j}_{\text{полн.}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{смеш.}} \quad (61.9)$$

Если положить дивергенцию тока смещения равной дивергенции тока проводимости, взятой с обратным знаком.

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{смеш.}} = -\operatorname{div} \mathbf{j}, \quad (61.10)$$

то дивергенция правой части уравнения (61.8), также как и дивергенция левой части, всегда будет равна нулю.

Заменив в (61.10) $\operatorname{div} \mathbf{j}$ согласно (61.3) через $-\partial\rho/\partial t$, получим для дивергенции плотности тока смещения выражение

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{смеш.}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (61.11)$$

Чтобы связать ток смещения с величинами, характеризующими изменение электрического поля со врем-

менем, воспользуемся соотношением (14.9), согласно которому дивергенция вектора электрического смещения равна плотности сторонних зарядов:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

(в формуле (14.9) применено обозначение дивергенции с помощью оператора ∇). Продифференцировав это соотношение по времени, получим, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Теперь изменим в левой части порядок дифференцирования по времени и по координатам. В результате придем к равенству

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (61.10) дает, что

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{смеш}} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Отсюда

$$\mathbf{j}_{\text{смеш}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (61.12)$$

Подставив выражение (61.12) в формулу (61.8), придем к уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (61.13)$$

которое, как и уравнение (60.6), является одним из основных в теории Максвелла.

Подчеркнем, что термин «ток смещения» является условным. По существу ток смещения — это изменяющееся со временем электрическое поле. Основанием для того, чтобы назвать «током» величину (61.12), служит лишь то, что размерность этой величины совпадает с размерностью плотности тока. Из всех физических свойств, присущих току проводимости, ток смещения обладает только одним — способностью создавать магнитное поле.

Введение тока смещения «уравняло в правах» электрическое и магнитное поля. Из явления электромагнитной индукции вытекает, что изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле. Из

уравнения (61.13) следует, что изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле.

Ток смещения имеется везде, где есть изменяющееся со временем электрическое поле. В частности, он существует и внутри проводов, по которым течет переменный электрический ток. Однако внутри проводов ток смещения обычно бывает пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости.

Отметим, что равенство (61.5) является не вполне строгим. Для того чтобы оно стало строгим, к его правой части нужно добавить слагаемое, учитывающее ток смещения, обусловленный слабым рассеянным электрическим полем, имеющимся в окрестности поверхности S_1 .

Для тока смещения, как и для тока проводимости, можно строить линии тока. Согласно формуле (16.4) электрическое смещение в зазоре конденсатора равно поверхностной плотности заряда на обкладке: $D = \sigma$. Отсюда

$$\dot{D} = \dot{\sigma}.$$

Левая часть дает плотность тока смещения в зазоре, правая часть — плотность тока проводимости внутри обкладок. Равенство этих плотностей означает, что на границе обкладок линии тока проводимости непрерывно переходят в линии тока смещения. Следовательно, линии полного тока оказываются замкнутыми.

§ 62. Уравнения Максвелла

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория объяснила все известные в то время экспериментальные факты и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии. Основным следствием теории Максвелла был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. Теоретическое исследование свойств этих волн привело Максвелла к созданию электромагнитной теории света.

Основу теории образуют уравнения Максвелла. В учении об электромагнетизме эти уравнения

играют такую же роль, как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике.

Первую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (60.6) и (38.2):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (62.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (62.2)$$

Первое из этих уравнений связывает значения \mathbf{E} с изменениями вектора \mathbf{B} во времени и является, по существу, выражением закона электромагнитной индукции. Второе уравнение указывает на отсутствие источников магнитного поля, т. е. магнитных зарядов.

Вторую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (61.13) и (14.9):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (62.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (62.4)$$

Первое уравнение устанавливает связь между токами проводимости и смещения и порождаемым ими магнитным полем. Второе уравнение показывает, что источниками вектора \mathbf{D} служат сторонние заряды.

Уравнения (62.1)–(62.4) представляют собой уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Отметим, что в первую пару уравнений входят только основные характеристики поля: \mathbf{E} и \mathbf{B} . Во второй же паре фигурируют только вспомогательные величины: \mathbf{D} и \mathbf{H} .

Каждое из векторных уравнений (62.1) и (62.3) эквивалентно трем скалярным уравнениям, связывающим компоненты векторов, стоящих в обеих частях равенств. Воспользовавшись формулами (5.13) и (59.8)–(59.10), представим уравнения Максвелла в скалярной форме:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (62.5)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t},$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (62.6)$$

(первая пара уравнений);

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}, \quad (62.7)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \quad (62.8)$$

(вторая пара уравнений).

Всего получилось 8 уравнений, в которые входят 12 функций (по три компоненты векторов E , B , D , H). Поскольку число уравнений меньше числа неизвестных функций, уравнений Максвелла недостаточно для нахождения полей по заданным распределениям в пространстве зарядов и токов. Чтобы осуществить расчет полей, нужно дополнить уравнения Максвелла уравнениями, связывающими D и j с E , а также H с B . Эти уравнения имеют вид

$$D = \epsilon_0 \epsilon E, \quad (62.9)$$

$$B = \mu_0 \mu H, \quad (62.10)$$

$$j = \sigma E \quad (62.11)$$

(см. формулы (14.6), (48.12) и (26.3)).

Совокупность уравнений (62.1)–(62.4) и (62.9)–(62.11) образует основу электродинамики покоящихся сред.

Уравнения Максвелла можно представить в интегральной форме. Проинтегрируем обе части уравнения (62.1) по произвольной поверхности S :

$$\int_S \operatorname{rot} E \, dS = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \, dS.$$

Теперь преобразуем левую часть равенства по теореме Стокса, а в правой части поменяем местами интегрирование по поверхности и дифференцирование по времени. В результате получим уравнение

$$\oint_{\Gamma} E \, dl = - \frac{d}{dt} \int_S B \, dS, \quad (62.12)$$

эквивалентное уравнению (54.6).

Проинтегрируем уравнение (62.2) по произвольному объему V :

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0.$$

Применив теорему Остроградского — Гаусса, придем к уравнению

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad (62.13)$$

эквивалентному уравнению (38.1) (S — произвольная замкнутая поверхность).

Проинтегрируем обе части уравнения (62.3) по произвольной незамкнутой поверхности S :

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}$$

(во втором слагаемом мы поменяли местами операции интегрирования по поверхности и дифференцирования по времени). Преобразовав левую часть по теореме Стокса, придем к уравнению

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} dt = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}. \quad (62.14)$$

Наконец, проинтегрируем обе части уравнения (62.4) по произвольному объему V :

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Преобразовав левую часть по теореме Остроградского — Гаусса, получим уравнение

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV, \quad (62.15)$$

эквивалентное уравнению (14.10).

Уравнения (62.12) — (62.15) представляют собой уравнения Максвелла в интегральной форме,

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как, зная ротор векторного поля E в каждой точке некоторой поверхности, определить циркуляцию вектора E по контуру, ограничивающему эту поверхность?
2. Чему равен поток ротора векторного поля через замкнутую поверхность?
3. Что такое ток смещения?
4. Напишите уравнения Максвелла в дифференциальной форме и объясните смысл каждого из них,

ЧАСТЬ 2

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Глава 10. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 63. Колебания в природе и технике

Колебаниями называются движения или процессы, обладающие той или иной повторяемостью во времени. Таким свойством повторяемости обладают, например, качания маятника часов, колебания струны или ножек камертона, напряжение между обкладками конденсатора в контуре радиоприемника и т. п.

Колебания широко распространены в природе и технике. Во многих случаях они играют отрицательную роль. Колебания моста, возникающие из-за толчков, сообщаемых ему колесами поезда при прохождении через стыки рельсов, колебания (вибрации) корпуса корабля, вызванные вращением гребного винта, вибрации крыльев самолета — все эти процессы могут привести к катастрофическим последствиям. В подобных случаях задача состоит в том, чтобы предотвратить возникновение колебаний или, во всяком случае, воспрепятствовать тому, чтобы колебания достигли опасных размеров.

Вместе с тем колебательные процессы лежат в самой основе различных областей техники. Так, например, на колебательных процессах основана вся радиотехника.

Колебания могут быть разной природы. В физике рассматриваются механические, электромагнитные и электромеханические колебания.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают свободные (или собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными или собственными называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок или она была выведена из положения равновесия. Примером могут служить колебания шарика, подвешенного на нити (маятник).

Для того чтобы вызвать колебания, можно либо толкнуть шарик, либо, отведя в сторону, отпустить его.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы. Примером служат колебания моста, возникающие при прохождении по нему людей, шагающих в ногу.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешней силы, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой — система сама управляет внешним воздействием. Примером автоколебательной системы являются часы, в которых маятник получает толчки за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины, причем эти толчки происходят в моменты прохождения маятника через среднее положение.

При параметрических колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы, например длины нити, к которой подвешен шарик, совершающий колебания, или емкости конденсатора, включенного в колебательный контур.

Простейшими являются гармонические колебания, т. е. такие колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Этот вид колебаний особенно важен по следующим причинам: во-первых, колебания в природе и технике часто имеют характер, очень близкий к гармоническим колебаниям, и, во-вторых, периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

§ 64. Гармонические колебания

В случае гармонических колебаний изменения со временем колеблющейся величины x описываются формулой

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad \text{или} \quad x = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (64.1)$$

(в дальнейшем мы будем использовать запись гармонических колебаний с помощью косинуса).

Колебания совершаются около среднего положения (положения равновесия), отвечающего $x = 0$. Величина x характеризует отклонение колеблющейся системы от положения равновесия.

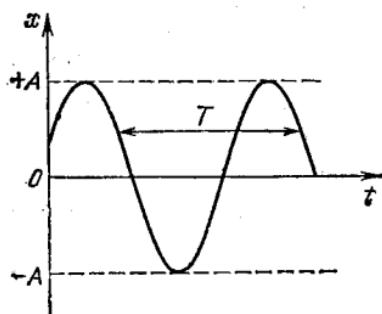


Рис. 64.1. График гармонического колебания. T — период, A — амплитуда колебания

График гармонического колебания показан на рис. 64.1. По горизонтальной оси отложено время t , по вертикальной оси — колеблющаяся величина x . Поскольку косинус изменяется в пределах от -1 до $+1$, значения x лежат в пределах от $-A$ до $+A$. Наибольшее значение A колеблющейся величины называется амплитудой колебаний. Ам-

плитуда A — постоянная положительная величина. В дальнейшем, кроме буквы A , мы будем обозначать амплитуду символом колеблющейся величины с индексом m (например, x_m).

Величина $(\omega_0 t + \alpha)$, стоящая под знаком косинуса, называется фазой колебаний. Постоянная величина α представляет собой значение фазы в момент времени $t = 0$ и называется начальной фазой колебаний. С изменением начала отсчета времени изменяется и α . Следовательно, значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени. Так как значение x не изменяется при добавлении или вычитании из фазы целого числа 2π , всегда можно добиться того, чтобы начальная фаза была по модулю меньше π . Поэтому обычно рассматриваются только значения α , лежащие в пределах от $-\pi$ до $+\pi$.

Поскольку косинус — периодическая функция с периодом 2π , различные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через такой промежуток времени T , за который фаза колебаний получает приращение, равное 2π (см. рис. 64.1). Этот промежуток времени T называется периодом колебаний. Он может быть определен

из условия $[\omega_0(t+T) + \alpha] = (\omega_0 t + \alpha) + 2\pi$, откуда

$$T = 2\pi/\omega_0. \quad (64.2)$$

Число колебаний в единицу времени называется частотой колебаний v . Очевидно, что частота v связана с периодом колебаний T соотношением

$$v = 1/T. \quad (64.3)$$

За единицу частоты принимается частота такого колебания, период которого равен 1 с. Эту единицу называют герцем (Гц)¹). Частота в 10^3 Гц называется килогерцем (кГц), в 10^6 Гц — мегагерцем (МГц).

Из (64.2) следует, что

$$\omega_0 = 2\pi/T. \quad (64.4)$$

Таким образом, ω_0 равна числу колебаний за 2π секунд. Величину ω_0 называют круговой или циклической частотой. Она связана с обычной частотой v соотношением

$$\omega_0 = 2\pi v. \quad (64.5)$$

Рассмотрим материальную точку (в дальнейшем для краткости мы будем ее называть просто телом) массы m , которая может совершать колебания вдоль оси x . В этом случае выражение

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (64.6)$$

определяет смещение тела из положения равновесия.

Система, совершающая гармонические колебания около положения равновесия, называется гармоническим осциллятором, а ω_0 — собственной частотой гармонического осциллятора.

Продифференцировав (64.6) по времени, получим выражение для проекции скорости тела на ось x :

$$v_x = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2). \quad (64.7)$$

Из этой формулы видно, что скорость также изменяется по гармоническому закону, причем амплитуда

¹⁾ В честь немецкого физика Генриха Рудольфа Герца (1857—1894).

скорости равна $A\omega_0$. Из сравнения выражений (64.6) и (64.7) следует, что скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$.

Продифференцировав (64.7) еще раз по времени, найдем выражение для проекции ускорения на ось x :

$$a_x = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \quad (64.8)$$

Из (64.8) следует, что ускорение и смещение находятся в противофазе. Это означает, что в тот момент, когда смещение достигает наибольшего положительного значения, ускорение достигает наибольшего по модулю отрицательного значения, и наоборот.

На рис. 64.2 сопоставлены графики смещения и проекций скорости и ускорения на ось x .

Из сопоставления выражений (64.6) и (64.8) следует, что

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (64.9)$$

Это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Очевидно, что функция (64.6) является общим решением этого уравнения. Величины A и α — произвольные постоянные, значения которых для каждого конкретного колебания определяются из начальных условий. Во всех случаях, когда выясняется, что некоторая величина x удовлетворяет уравнению $\ddot{x} + bx = 0$ (где $b > 0$), можно утверждать, что эта величина изменяется со временем по гармоническому закону, причем корень из b дает круговую частоту колебаний.

Рис. 64.2. Сопоставление графиков смещения x , скорости \dot{x} и ускорения \ddot{x}

Определим силу F , которая действует на тело, совершающее гармонические колебания. Согласно второму закону Ньютона проекция силы на ось x равна

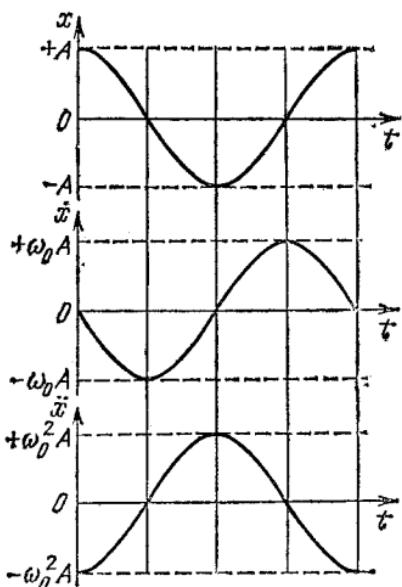


Рис. 64.2. Сопоставление графиков смещения x , скорости \dot{x} и ускорения \ddot{x}

Определим силу F , которая действует на тело, совершающее гармонические колебания. Согласно второму закону Ньютона проекция силы на ось x равна

$F_x = m\ddot{x}$. Воспользовавшись соотношением (64.9), получим, что

$$F_x = -m\omega_0^2 x = -kx, \quad (64.10)$$

где

$$k = m\omega_0^2. \quad (64.11)$$

Таким образом, сила пропорциональна смещению. Знак минус означает, что направления силы и смещения противоположны.

Условию (64.10) удовлетворяет упругая сила (см. формулу (13.3) 1-го тома). Поэтому силы вида (64.10) независимо от их природы называют **квазиупругими**.

Квазиупругая сила обуславливает наличие у тела потенциальной энергии

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) \quad (64.12)$$

(см. формулу (23.9) 1-го тома). Кинетическая энергия тела

$$W_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha) \quad (64.13)$$

(см. (64.7)).

Квазиупругая сила является консервативной. Поэтому полная энергия гармонического колебания должна оставаться постоянной. Действительно, сложив выражения (64.12) и (64.13) и приняв во внимание равенство (64.11), получим, что

$$W = W_k + W_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \text{const.} \quad (64.14)$$

В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия W состоит только из потенциальной энергии, которая достигает своего наибольшего значения

$$W_{p\max} = \frac{kA^2}{2}. \quad (64.15)$$

При прохождении же системы через положение равновесия полная энергия состоит лишь из кинетиче-

ской энергии, которая в эти моменты достигает своего наибольшего значения

$$W_{k \max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \quad (64.16)$$

(выше было показано, что амплитуда скорости равна $A\omega_0$).

Используя известные формулы тригонометрии, выражениям (64.12) и (64.13) можно придать вид

$$W_k = W \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = W \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right], \quad (64.17)$$

$$W_p = W \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = W \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right], \quad (64.18)$$

где W — полная энергия осциллятора. Из этих формул видно, что W_k и W_p изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, в два раза превышающей частоту гармонического колебания. На рис. 64.3 сопоставлены графики для x , W_k и W_p .

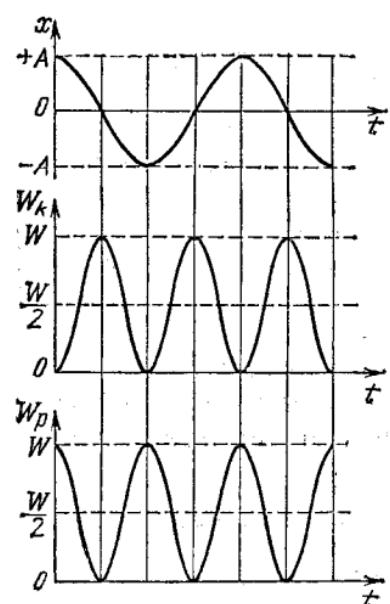


Рис. 64.3. Сопоставление графика смещения x с графиками кинетической W_k и потенциальной W_p энергий. W_k и W_p изменяются относительно среднего значения $W/2$ в противофазе по закону косинуса

Среднее значение квадрата синуса и квадрата косинуса равно, как известно, $1/2$. Следовательно, среднее значение W_k совпадает со средним значением W_p и равно $W/2$.

Рассмотрим механическую систему, положение которой может быть задано с помощью одной величины, которую мы обозначим через x . В таких случаях говорят, что система имеет одну степень свободы. Величиной x , определяющей положение системы, может быть угол, отсчитываемый от некоторой плоскости, или расстояние, отсчитываемое

вдоль заданной кривой (в частности прямой) линии, и т. п. Потенциальная энергия системы будет функцией одной переменной x : $W_p = W_p(x)$. Допустим, что система обладает положением устойчивого равновесия. В этом положении функция $W_p(x)$ имеет минимум. Условимся координату x и потенциальную энергию W_p отсчитывать от положения равновесия. Тогда $W_p(0) = 0$.

Разложим функцию $W_p(x)$ в ряд по степеням x , причем ограничимся рассмотрением малых колебаний, так что высшими степенями x можно будет пренебречь. По формуле Маклорена

$$W_p(x) = W_p(0) + W'_p(0)x + \frac{1}{2}W''_p(0)x^2$$

(ввиду малости x остальными членами ряда пренебрегаем). Поскольку $W_p(x)$ при $x = 0$ имеет минимум, $W'_p(0)$ равна нулю, а $W''_p(0)$ положительна. Кроме того, по условию $W_p(0) = 0$. Введем обозначение: $W''_p(0) = k$ ($k > 0$). Тогда

$$W_p(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Мы получили выражение, идентичное выражению (64.12) для потенциальной энергии гармонического колебания.

Таким образом, малые колебания системы вблизи положения равновесия, независимо от конкретного вида потенциальной энергии, всегда являются гармоническими.

В заключение отметим, что гармонические колебания можно представить несколькими способами. Преобразуем выражение (64.6) по формуле для коэффициента суммы:

$$x = A(\cos \alpha \cos \omega_0 t - \sin \alpha \sin \omega_0 t),$$

и введем обозначения

$$c_1 = A \cos \alpha, \quad c_2 = -A \sin \alpha.$$

Тогда функция $x(t)$ примет вид

$$x = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t,$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Напомним, что комплексным числом называется величина $z = \xi + i\eta$, где ξ и η — вещественные числа, i — мнимая единица, равная $\sqrt{-1}$. Число ξ называется вещественной частью комплексного числа z (обозначается $\operatorname{Re} z$), число η — мнимой частью (обозначается $\operatorname{Im} z$).

Согласно формуле Эйлера

$$\exp(i\phi) = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Из этой формулы следует, что $\cos \phi$ представляет собой вещественную часть комплексного числа $\exp(i\phi)$; $\cos \phi = \operatorname{Re}\{\exp(i\phi)\}$. Поэтому функцию (64.6) можно написать в виде

$$x = \operatorname{Re}\{A \exp[i(\omega_0 t + \alpha)]\}. \quad (64.19)$$

Такое представление гармонических функций обладает рядом преимуществ. Однако останавливаться на этом мы не имеем возможности.

§ 65. Маятник

Пружинный маятник. Пружинным маятником называется система, состоящая из шарика массы m , подвешенного на пружине, массой которой можно пренебречь по сравнению с m (рис. 65.1). В положении равновесия сила mg уравновешивается упругой силой $k\Delta l_0$:

$$mg = k \Delta l_0 \quad (65.1)$$

(Δl_0 — удлинение пружины). Будем характеризовать смещение шарика из положения равновесия координатой x , причем ось x направим по вертикали вниз, а нуль оси совместим с положением равновесия. Если сместить шарик в положение, характеризуемое координатой x , то удлинение пружины станет равным $\Delta l_0 + x$ и проекция на ось x результирующей силы, действующей на шарик, примет значение $F_x = mg - k(\Delta l_0 + x)$. Учитя условие (65.1), получим, что

$$F_x = -kx. \quad (65.2)$$

Следовательно, результирующая сила тяжести и упругой силы имеет характер квазиупругой силы и шарик будет совершать гармонические колебания.

Сообщим шарику смещение $x = A$, после чего предоставим систему самой себе. Под действием квазиупругой силы шарик начнет двигаться к положению равновесия со все возрастающей скоростью \dot{x} . При этом потенциальная энергия системы будет убывать (рис. 65.2), но зато появится все возрастающая кинетическая энергия $W_k = m\dot{x}^2/2$ (массой пружины пренебрегаем). Пройдя через положение равновесия, шарик будет двигаться по инерции. Это движение прекратится тогда, когда кинетическая энергия полностью превратится в потенциальную, т. е. когда смещение шарика станет равным $-A$. Затем такие же превращения энергии будут происходить при движении шарика в обратном

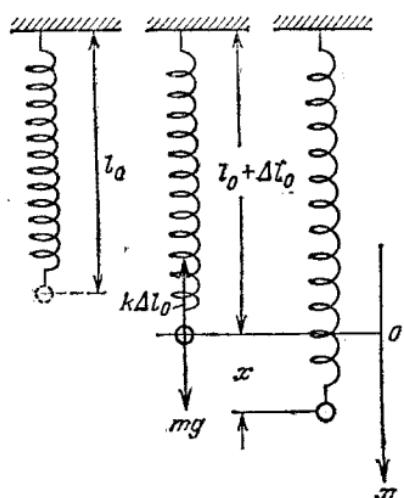


Рис. 65.1. Пружинный маятник: l_0 — длина недеформированной пружины, Δl_0 — удлинение пружины, соответствующее положению равновесия, x — смещение шарика из положения равновесия

движении. Если трение в системе отсутствует, энергия системы должна сохраняться и шарик будет двигаться в пределах от $x = A$ до $x = -A$ неограниченно долго.

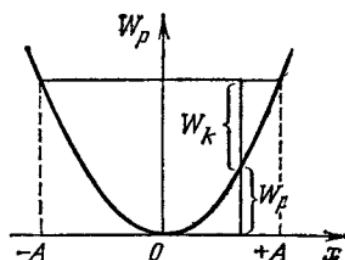


Рис. 65.2. График зависимости потенциальной энергии W_p шарика от смещения x (парабола). Сумма W_k и W_p остается постоянной

направлении. Если трение в системе отсутствует, энергия системы должна сохраняться и шарик будет двигаться в пределах от $x = A$ до $x = -A$ неограниченно долго.

Уравнение второго закона Ньютона для шарика имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx, \text{ или } \ddot{x} + (k/m)x = 0 \quad (65.3)$$

($k/m > 0$). Мы пришли к дифференциальному уравнению вида (64.9). Согласно (64.6) решением

этого уравнения является функция

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (65.4)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}. \quad (65.5)$$

Таким образом, выведенный из положения равновесия шарик будет совершать гармонические колебания около этого положения. Частота колебаний будет тем больше, чем больше жесткость пружины k и чем меньше масса шарика m .

Математический маятник. Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена материальная точка. Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити.

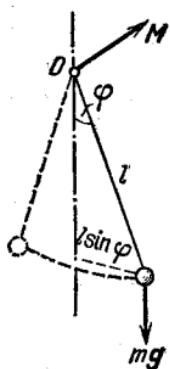


Рис. 65.3. Математический маятник: M — момент силы mg относительно точки подвеса, $l \sin \varphi$ — плечо силы

Отклонение маятника от положения равновесия естественно характеризовать углом φ , образованным нитью с вертикалью (рис. 65.3). При отклонении маятника от положения равновесия возникает врачающий момент M , равный $mg l \sin \varphi$ (m — масса, а l — длина маятника). Он стремится вернуть маятник в положение равновесия и в этом отношении аналогичен квазиупругой силе. Поэтому так же, как смещению и квазиупругой силе, моменту M и угловому смещению φ нужно приписывать противоположные знаки. Следовательно, выражение для врачающего момента имеет вид

$$M = -mg l \sin \varphi. \quad (65.6)$$

Напишем для маятника уравнение динамики вращательного движения. Обозначив угловое ускорение через $\ddot{\varphi}$ и учитя, что момент инерции маятника равен ml^2 , получим соотношение

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mg l \sin \varphi,$$

которое можно привести к виду

$$\ddot{\phi} + (g/l) \sin \phi = 0. \quad (65.7)$$

В случае малых колебаний можно положить синус ϕ равным ϕ , в результате чего уравнение (65.7) упростится и примет вид

$$\ddot{\phi} + (g/l) \phi = 0. \quad (65.8)$$

Таким образом, мы снова пришли к дифференциальному уравнению гармонических колебаний. Его решением является функция

$$\phi = \phi_m \cos(\omega_0 t + a), \quad (65.9)$$

где ϕ_m — амплитуда колебаний (наибольший угол, на который отклоняется маятник от положения равновесия). Следовательно, при малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется со временем по гармоническому закону.

Из сравнения уравнений (65.8) и (64.9) получаем для круговой частоты математического маятника выражение

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}, \quad (65.10)$$

из которого вытекает, что частота колебаний математического маятника зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения и не зависит от массы маятника.

Согласно формуле (64.2) период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}. \quad (65.11)$$

Чем длиннее маятник, тем медленнее он качается.

Физический маятник. Если колеблющееся тело нельзя считать материальной точкой, то маятник называется физическим. При отклонении маятника от положения равновесия на угол ϕ возникает врачающий момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент равен

$$M = -mgl \sin \phi, \quad (65.12)$$

где m — масса маятника, а l — расстояние от точки подвеса O до центра масс маятника (рис. 65.4). Знак минус имеет то же значение, что и в случае формулы (65.6).

Обозначив момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, буквой I , можно написать, что

$$I\ddot{\phi} = -mg l \sin \phi. \quad (65.13)$$

В случае малых колебаний (65.13) переходит в дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0, \quad (65.14)$$

где

$$\omega_0^2 = mgl/I. \quad (65.15)$$

Из формул (65.14) и (65.15) следует, что при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси подвеса и расстояния от точки подвеса до центра масс маятника.

В соответствии с (65.15) период колебаний физического маятника определяется выражением

$$T = 2\pi \sqrt{I/mgl}. \quad (65.16)$$

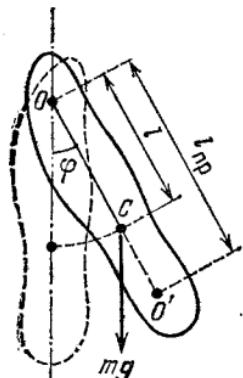
Из сопоставления формул (65.11) и (65.16) получается, что математический маятник с длиной

$$l_{\text{пр}} = I/ml \quad (65.17)$$

Рис. 65.4. Физический маятник: l — расстояние от точки подвеса до центра масс, $l_{\text{пр}}$ — приведенная длина, O' — центр качания

будет иметь такой же период колебаний, как и данный физический маятник. Величину (65.17) называют приведенной длиной физического маятника. Следовательно, приведенная длина физического маятника — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси подвеса, называется центром качания физического маятника (см. рис. 65.4).



По теореме Штейнера момент инерции маятника может быть представлен в виде

$$I = I_C + ml^2,$$

где I_C — момент инерции относительно оси, параллельной оси подвеса и проходящей через центр масс маятника. Подставив это выражение в (65.17), получим, что

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_C}{ml} + l. \quad (65.18)$$

Из этой формулы следует, что приведенная длина всегда больше l , так что точка подвеса O и центр качания O' лежат по разные стороны от центра масс.

Подвесим маятник в центре качания O' . В соответствии с (65.18) приведенная длина в этом случае будет равна

$$l'_{\text{пр}} = \frac{I_C}{ml'} + l', \quad (65.19)$$

где l' — расстояние от первоначального центра качания (от точки O') до центра масс маятника. С учетом того, что $l' = l_{\text{пр}} - l$, выражение (65.19) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} l'_{\text{пр}} &= \frac{I_C}{m(l_{\text{пр}} - l)} + (l_{\text{пр}} - l) = \\ &= l_{\text{пр}} + \frac{1}{m(l_{\text{пр}} - l)} [(I_C + ml^2) - mll_{\text{пр}}]. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю. Действительно, $I_C + ml^2$ равно I — моменту инерции относительно первоначальной оси подвеса. Этой же величине согласно (65.17) равно выражение $mll_{\text{пр}}$. Таким образом, мы приходим к выводу, что при подвешивании маятника в центре качания приведенная длина, а значит, и период колебаний будут теми же, что и прежде. Следовательно, точка подвеса и центр качания обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания.

На этом свойстве основано определение ускорения свободного падения с помощью так называемого оборотного маятника. Оборотным называется такой маятник, у которого имеются две параллельные друг

другу, закрепленные вблизи его концов опорные призмы, за которые он может поочередно подвешиваться. Вдоль маятника могут перемещаться и закрепляться на нем тяжелые грузы. Перемещением грузов добиваются того, чтобы при подвешивании маятника за любую из призм период колебаний был одинаков. Тогда расстояние между опорными ребрами призм будет равно $l_{\text{пр}}$. Измерив период колебаний маятника и зная $l_{\text{пр}}$, можно по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{l_{\text{пр}}/g}$$

найти ускорение свободного падения g .

§ 66. Электрический колебательный контур

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися со временем. Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Однако они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющихся токов и напряжений, если только их изменения происходят не слишком быстро. Электромагнитные возмущения распространяются по цепи с огромной скоростью, равной скорости света c . Пусть длина цепи равна l . Если за время $t = l/c$, необходимое для передачи возмущения в самую отдаленную точку цепи, сила тока изменяется незначительно, то мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи можно считать одинаковыми. Токи, удовлетворяющие такому условию, называются квазистационарными. Для периодически изменяющихся токов условие квазистационарности имеет вид

$$t = l/c \ll T,$$

где T — период изменений.

Для цепи длины 3 м запаздывание $t = 10^{-8}$ с. Поэтому вплоть до T порядка 10^{-6} с (что соответствует частоте 10^6 Гц) токи в такой цепи можно считать квазистационарными. Ток промышленной частоты ($v = 50$ Гц) квазистационарен для цепей длины до примерно 100 км.

Мгновенные значения квазистационарных токов подчиняются закону Ома. Следовательно, для них справедливы и правила Кирхгофа.

При изучении электрических колебаний мы будем предполагать, что рассматриваемые нами токи квазистационарны.

В общем случае переменные токи могут иметь постоянную составляющую, которая называется активной. Сопротивление цепи постоянному току также называется активным.

Колебательным контуром называется цепь, состоящая из индуктивности и емкости. Название вызвано тем, что в такой цепи могут возникать электрические колебания. На рис. 66.1 изображены последовательные стадии колебательного процесса в идеализированном контуре, не обладающем активным сопротивлением.

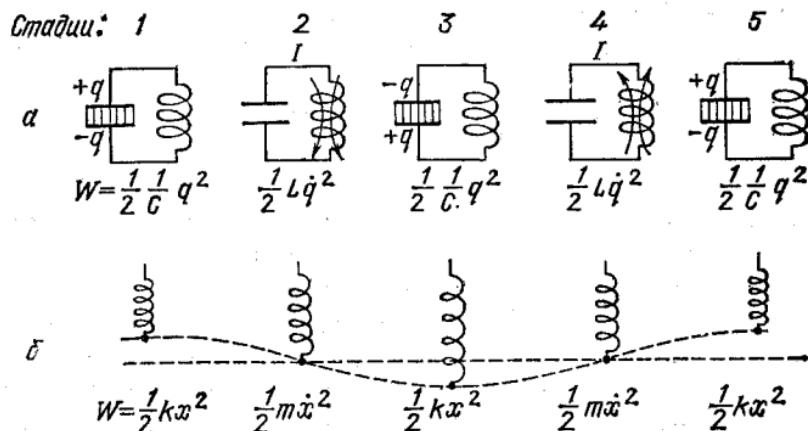


Рис. 66.1. Сопоставление стадий колебаний в электрическом контуре со стадиями колебаний пружинного маятника

Колебания в контуре можно вызвать, либо сообщив обкладкам конденсатора некоторый заряд, либо возбудив в индуктивности ток (например, путем выключения внешнего магнитного поля, пронизывающего витки катушки). Воспользуемся первым способом. Присоединим отключенный от индуктивности конденсатор к источнику напряжения. Это приведет к возникновению на обкладках разноименных зарядов $+q$ и $-q$ (стадия 1). Между обкладками возникнет электрическое поле, энергия которого равна

$q^2/2C$ (см. формулу (22.1)). Если затем отключить источник напряжения и замкнуть конденсатор на индуктивность, емкость начнет разряжаться и в контуре потечет ток. В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, но зато возникнет все возрастающая энергия магнитного поля, обусловленного током, текущим через индуктивность. Эта энергия равна $LI^2/2$ (см. формулу (58.11)).

Поскольку активное сопротивление контура равно нулю, полная энергия, слагающаяся из энергий электрического и магнитного полей, не расходуется на нагревание проводов и остается постоянной. Поэтому в момент, когда напряжение на конденсаторе, а следовательно, и энергия электрического поля обращаются в нуль, энергия магнитного поля, а значит, и ток достигают наибольшего значения (стадия 2; начиная с этого момента ток течет за счет ЭДС самоиндукции). В дальнейшем ток уменьшается и, когда заряды на обкладках достигнут первоначального значения q , сила тока станет равной нулю (стадия 3). Затем те же процессы протекают в обратном направлении (стадии 4 и 5), после чего система приходит в исходное состояние (стадия 5) и весь цикл повторяется снова и снова. В ходе процесса периодически изменяются (т. е. колеблются) заряд на обкладках, напряжение на конденсаторе и сила тока, текущего через индуктивность. Колебания сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.

На рис. 66.1 колебаниям в контуре сопоставлены колебания пружинного маятника. Сообщению зарядов обкладкам конденсатора соответствует сообщение маятнику внешней силой первоначального отклонения A . При этом возникает потенциальная энергия упругой деформации пружины, равная $kA^2/2$. Стадии 2 соответствует прохождение маятника через положение равновесия. В этот момент квазиупругая сила равна нулю и маятник продолжает двигаться по инерции. К этому времени потенциальная энергия маятника полностью переходит в кинетическую, равную $m\dot{A}^2\omega_0^2/2$. Сопоставление дальнейших стадий предоставляем читателю.

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что энергия электрического поля

$q^2/2C$ аналогична потенциальной энергии упругой деформации $kx^2/2$, а энергия магнитного поля $LI^2/2$ аналогична кинетической энергии $m\dot{x}^2/2$. Индуктивность L играет роль массы m , величина, обратная емкости $(1/C)$, — роль жесткости пружины k . Наконец, заряду q соответствует смещение маятника из положения равновесия x , а силе тока $I = \dot{q}$ — скорость \dot{x} . Ниже мы увидим, что аналогия между электрическими и механическими колебаниями распространяется и на описывающие их математические уравнения.

Найдем уравнение колебаний в контуре без активного сопротивления. Условимся считать положительным ток, заряжающий конденсатор (рис. 66.2). Тогда

$$I = dq/dt = \dot{q}. \quad (66.1)$$

Поскольку активное сопротивление R контура равно нулю, падения напряжения на соединительных проводах нет и напряжение на конденсаторе $\Phi_1 - \Phi_2 = q/C$ каждый момент времени равно ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s = -LdI/dt$. Следовательно,

$$q/C = -L dI/dt. \quad (66.2)$$

Для изображенной на рис. 66.2 стадии процесса зарядки конденсатора $\Phi_1 - \Phi_2$ положительно, а dI/dt отрицательна (ток уменьшается). Поэтому справа в уравнении (66.2) стоит минус.

Согласно (66.1) $dI/dt = \ddot{q}$. Подставив это значение dI/dt в уравнение (66.2) и произведя простые преобразования, придем к дифференциальному уравнению

$$\ddot{q} + (1/LC) q = 0. \quad (66.3)$$

Получилось уравнение вида (64.9). Следовательно, заряд на обкладках конденсатора изменяется (колеблется) по гармоническому закону:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (66.4)$$

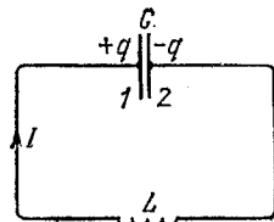


Рис. 66.2. Процесс зарядки конденсатора за счет ЭДС самоиндукции

с частотой

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (66.5)$$

Эта частота называется собственной частотой контура (она соответствует собственной частоте гармонического осциллятора). Для периода колебаний получается так называемая формула Томсона:

$$T = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (66.6)$$

Напряжение на конденсаторе отличается от заряда множителем $1/C$:

$$U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (66.7)$$

Продифференцировав функцию (66.4) по времени, получим выражение для силы тока:

$$I = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2). \quad (66.8)$$

Таким образом, сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\pi/2$.

Сопоставление формул (66.4) и (66.7) с формулой (66.8) показывает, что в момент, когда ток достигает наибольшего значения, заряд и напряжение обращаются в нуль, и наоборот. Это соотношение между зарядом и током мы уже установили ранее, основываясь на энергетических соображениях.

Из формул (66.7) и (66.8) следует, что

$$U_m = q_m/C, \quad I_m = \omega_0 q_m.$$

Взяв отношение этих амплитуд и заменив ω_0 по формуле (66.5), получим соотношение

$$U_m = \sqrt{L/C} I_m. \quad (66.9)$$

К этой формуле можно прийти также исходя из того, что наибольшее значение энергии электрического поля $CU_m^2/2$ равно наибольшему значению энергии магнитного поля $LI_m^2/2$.

§ 67. Векторная диаграмма

Рассмотрение многих вопросов, в частности сложение нескольких гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты (или, что то же самое, сложение нескольких гармонических функ-

ций), значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Полученная таким способом схема называется векторной диаграммой.

Возьмем ось, вдоль которой будем откладывать колеблющуюся величину x (рис. 67.1; величина x может быть любой физической природы). Из взятой на оси точки O отложим вектор длины A , образующий с осью угол α . Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω_0 , то проекция конца вектора будет перемещаться по оси x в пределах от $-A$ до $+A$, причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Следовательно, проекция конца вектора на ось будет совершать гармонические колебания с амплитудой, равной длине вектора, с круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора, и с начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью в начальный момент времени.

Таким образом, гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление образует с осью x угол, равный начальной фазе колебаний.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Результирующее колебание x будет суммой колебаний x_1 и x_2 , которые определяются функциями

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \quad (67.1)$$

Представим оба колебания с помощью векторов A_1 и A_2 (рис. 67.2). Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор A . На рисунке видно, что проекция этого вектора на ось x равна сумме проекций складываемых векторов:

$$x = x_1 + x_2.$$

Следовательно, вектор A представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той

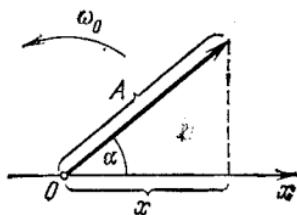


Рис. 67.1. Векторная диаграмма гармонического колебания с амплитудой A и начальной фазой α

же угловой скоростью ω_0 , как и векторы A_1 и A_2 , так что сумма x_1 и x_2 является гармоническим колебанием с частотой ω_0 , амплитудой A и начальной фазой α . Из рисунка вытекает, что

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos [\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_1), \end{aligned} \quad (67.2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (67.3)$$

Итак, представление гармонических колебаний с помощью векторов позволяет заменить сложение функций сложением векторов, что значительно проще.

Формулы (67.2) и (67.3) можно, конечно, получить, сложив выражения (67.1) и произведя соответствующие тригонометрические преобразования. Но графический способ получения этих формул обладает очевидными преимуществами. Эти преимущества особенно обнаруживаются в том случае, когда приходится складывать большое число колебаний.

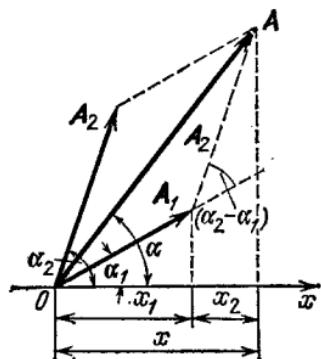


Рис. 67.2. Векторное сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

разность фаз колебаний $\alpha_2 - \alpha_1$ равна нулю, амплитуда результирующего колебания равна $A_1 + A_2$. Если разность $\alpha_2 - \alpha_1$ равна $+\pi$ или $-\pi$, т. е. колебания находятся в противофазе, то амплитуда результирующего колебания равна $|A_1 - A_2|$.

Если частоты колебаний x_1 и x_2 неодинаковы, векторы A_1 и A_2 будут вращаться с различной скоростью. В этом случае результирующий вектор A вращается с непостоянной скоростью, а его модуль изменяется в пределах от $|A_1 - A_2|$ до $A_1 + A_2$. Следовательно, результирующее колебание не будет гармоническим.

§ 68. Биения

Особенно важен случай, когда два складываемых гармонических колебания одного направления мало отличаются по частоте. Мы сейчас покажем, что возникающий при этом процесс можно рассматривать как гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой. Такое колебание называется **биениями**.

Обозначим частоту одного из колебаний буквой ω , частоту другого колебания через $\omega + \Delta\omega$. По условию $\Delta\omega \ll \omega$. Амплитуды колебаний будем полагать одинаковыми и равными A . Чтобы не усложнять без надобности формул, допустим, что начальные фазы обоих колебаний равны нулю. Тогда уравнения колебаний будут иметь вид

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = A \cos [(\omega + \Delta\omega) t].$$

Сложив эти выражения и применив формулу для суммы косинусов, получим

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t \quad (68.1)$$

(во втором сомножителе мы пренебрегли слагаемым $\Delta\omega/2$ по сравнению с ω). График функции (68.1) изображен на рис. 68.1a.

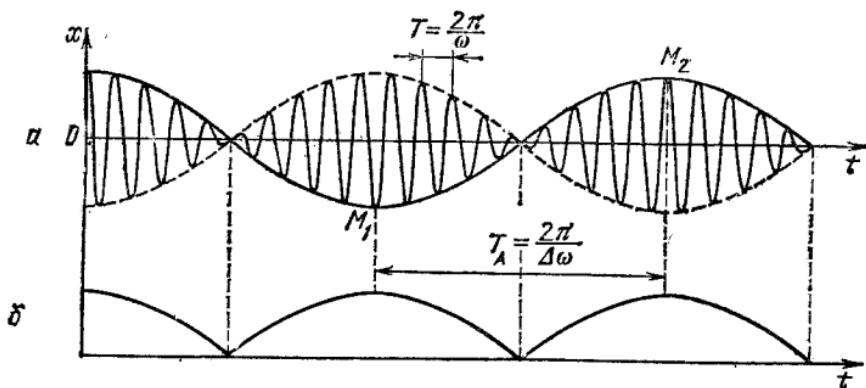


Рис. 68.1. a — График биений, построенный для $\omega/\Delta\omega = 10$, и б — график изменений амплитуды

Множитель в скобках в формуле (68.1) изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель. Ввиду условия $\Delta\omega \ll \omega$ за то время, за которое $\cos \omega t$ совершает несколько полных колебаний, множитель в

скобках почти не изменяется. Это дает основание рассматривать процесс (68.1) как гармоническое колебание частоты ω , амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону. Выражением этого закона не может быть множитель, стоящий в скобках, так как он изменяется в пределах от $-2A$ до $+2A$, в то время как амплитуда по определению — положительная величина. График амплитуды дан на рис. 68.1б. Аналитическое выражение амплитуды имеет вид

$$\text{амплитуда} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (68.2)$$

Это выражение представляет собой периодическую функцию с частотой, в два раза превышающей частоту гармонической функции, стоящей под знаком модуля, т. е. с частотой $\Delta\omega$ (рис. 68.2). Следовательно, частота пульсаций амплитуды — ее называют частотой биений — равна разности частот складываемых колебаний.

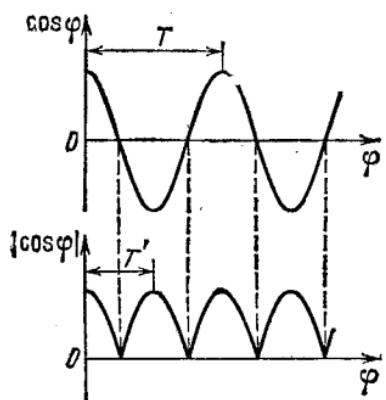


Рис. 68.2. Сопоставление графиков косинуса и его модуля

Отметим, что множитель $2A \cos(\Delta\omega/2)t$ не только определяет амплитуду, но и влияет на фазу колебания. Это проявляется, например, в том, что отклонения, со-

ответствующие соседним максимумам амплитуды, имеют противоположные знаки (см. точки M_1 и M_2 на рис. 68.1а).

§ 69. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Предположим, что имеются две взаимно перпендикулярные векторные величины x и y , изменяющиеся со временем с одинаковой частотой ω по гармоническому закону:

$$x = e_x A \cos \omega t, \quad y = e_y B \cos (\omega t + \alpha). \quad (69.1)$$

Здесь e_x и e_y — орты координатных осей x и y , A и B — амплитуды колебаний. Величинами x и y могут быть, например, смещения материальной точки (частицы) из положения равновесия или напряженности двух взаимно перпендикулярных электрических полей (E_x и E_y) и т. п.

В случае колеблющейся частицы величины

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos(\omega t + \alpha) \quad (69.2)$$

определяют координаты частицы на плоскости xy . В случае электрических полей величины (69.2) определяют координаты конца результирующего вектора напряженности поля E .

Частица или конец вектора E будут двигаться по некоторой траектории, вид которой зависит от разности фаз обоих колебаний. Выражения (69.2) представляют собой заданное в параметрической форме уравнение этой траектории. Чтобы получить уравнение траектории в обычном виде, нужно исключить из уравнений (69.2) параметр t . Из первого уравнения следует, что

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}. \quad (69.3)$$

Соответственно

$$\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \quad (69.4)$$

Развернем косинус во втором из уравнений (69.2) по формуле для косинуса суммы, подставляя при этом вместо $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ их значения (69.3) и (69.4). В результате получим

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \alpha \mp \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

Это уравнение посредством очевидных преобразований можно привести к виду

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (69.5)$$

Мы получили уравнение эллипса, оси которого повернуты относительно координатных осей x и y . Ориентация эллипса и его полуоси зависят довольно сложным образом от амплитуд A и B и разности фаз α .

Определим форму траектории для нескольких частных случаев.

1. Разность фаз α равна нулю. В этом случае уравнение (69.5) упрощается следующим образом:

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0.$$

Отсюда получается уравнение прямой:

$$y = \frac{B}{A} x. \quad (69.6)$$

Результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль этой прямой с частотой ω и амплитудой, равной $\sqrt{A^2 + B^2}$ (рис. 69.1а).

2. Разность фаз α равна $\pm\pi$. Уравнение (69.5) имеет вид

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0.$$

Следовательно, результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой

$$y = -\frac{B}{A} x \quad (69.7)$$

(рис. 69.1б).

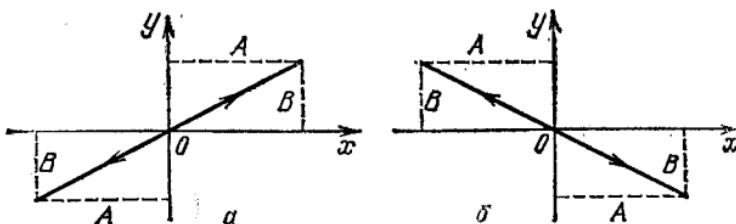


Рис. 69.1. Траектории частицы при разности фаз, равной нулю (а) и $\pm\pi$ (б)

3. При $\alpha = \pm\pi/2$ уравнение (69.5) переходит в уравнение эллипса, приведенного к координатным осям:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (69.8)$$

Полуси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний. При равенстве амплитуд A и B эллипс вырождается в окружность.

Случаи $\alpha = +\pi/2$ и $\alpha = -\pi/2$ отличаются направлением движения по эллипсу или окружности. Если $\alpha = +\pi/2$, уравнения (69.2) можно написать следующим образом:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = -B \sin \omega t. \quad (69.9)$$

В момент $t = 0$ тело находится в точке I (рис. 69.2). В последующие моменты времени координата x уменьшается, а координата y становится отрицательной. Следовательно, движение совершается по часовой стрелке.

При $\alpha = -\pi/2$ уравнения (69.2) имеют вид

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \sin \omega t.$$

Отсюда заключаем, что движение происходит против часовой стрелки.

Из сказанного вытекает, что равномерное движение по окружности радиуса R с угловой скоростью ω может быть представлено как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний:

$$x = R \cos \omega t, \quad y = \pm R \sin \omega t \quad (69.10)$$

(знак плюс в выражении для y соответствует движению против часовой стрелки, знак минус — движению по часовой стрелке).

В случае, когда частоты взаимно перпендикулярных колебаний отличаются на очень малую величину $\Delta\omega$, их можно рассматривать как колебания одинаковой частоты, но с медленно изменяющейся разностью фаз. Действительно, уравнения колебаний можно представить в виде

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos [\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)]$$

и выражение $\Delta\omega t + \alpha$ рассматривать как разность фаз, медленно изменяющуюся со временем по линейному закону. Результирующее движение в этом случае происходит по медленно видоизменяющейся кривой, которая будет последовательно принимать форму, отвечающую всем значениям разности фаз от $-\pi$ до $+\pi$.

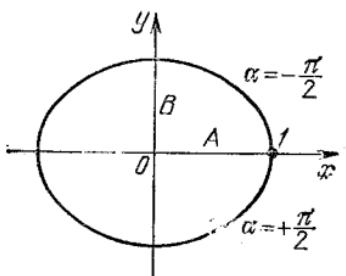


Рис. 69.2. Траектория частицы при разности фаз $\pm\pi/2$

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектории результирующего движения имеют вид довольно сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу¹). На рис. 69.3 и 69.4 приведены примеры

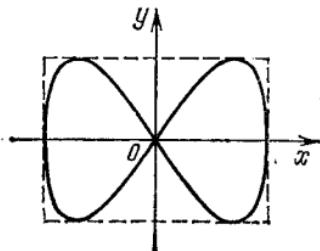


Рис. 69.3. Фигура Лиссажу для отношения частот 1 : 2 и разности фаз $\pi/2$

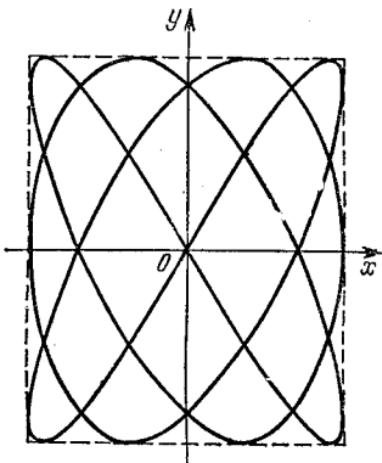


Рис. 69.4. Фигура Лиссажу для отношения частот 3 : 4 и разности фаз $\pi/2$

таких фигур. Иногда фигурами Лиссажу называют также траектории (в частности, эллиптические кривые), получающиеся при равенстве частот складываемых колебаний.

§ 70. Затухающие колебания

Во всякой реальной колебательной системе всегда имеется либо сила трения (в механической системе), либо активное электрическое сопротивление (в колебательном контуре), действие которых приводит к уменьшению энергии системы. Если убыль энергии не восполняется, колебания будут затухать.

Начнем с рассмотрения механических колебаний. В простейшем и вместе с тем наиболее часто встречающемся случае сила трения (например, сила вязкого трения) пропорциональна скорости:

$$F_x = -r\dot{x}. \quad (70.1)$$

¹⁾ Жюль Антуан Лиссажу (1822—1880) — французский физик.

Здесь r — постоянная, которую мы будем называть коэффициентом трения. Знак минус обусловлен тем, что сила F и скорость v направлены в противоположные стороны, вследствие чего их проекции на ось x имеют разные знаки.

Уравнение второго закона Ньютона при наличии силы трения имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \quad (70.2)$$

Применив обозначения

$$2\beta = r/m, \quad \omega_0^2 = k/m \quad (70.3)$$

(ср. с (65.5)), напишем уравнение (70.2) следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (70.4)$$

Отметим, что ω_0 — собственная частота колебательной системы, т. е. та частота, с которой колебалась бы система в отсутствие трения.

Попробуем искать решение уравнения (70.4) в виде

$$x = u \exp(-\beta t), \quad (70.5)$$

где u — некоторая функция от t . Дифференцирование по t дает:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{u} \exp(-\beta t) - u\beta \exp(-\beta t) = (\dot{u} - \beta u) \exp(-\beta t), \\ \ddot{x} &= (\ddot{u} - \beta \dot{u}) \exp(-\beta t) - (\dot{u} - \beta u) \beta \exp(-\beta t) = \\ &= (\ddot{u} - 2\beta\dot{u} + \beta^2 u) \exp(-\beta t). \end{aligned}$$

После подстановки выражений для x , \dot{x} и \ddot{x} в уравнение (70.4) и сокращения на отличный от нуля множитель $\exp(-\beta t)$ получим дифференциальное уравнение для u :

$$\ddot{u} + (\omega_0^2 - \beta^2)u = 0. \quad (70.6)$$

Решение уравнения (70.6) зависит от знака коэффициента, стоящего при u . Рассмотрим случай, когда этот коэффициент положителен (т. е. $\beta < \omega_0$ — трение мало). Введя обозначение

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (70.7)$$

придем к уравнению

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0,$$

решением которого является функция

$$u = A_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

(см. (64.9) и (64.6)).

Таким образом, в случае малого трения ($\beta < \omega_0$) решением уравнения (70.4) будет функция

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (70.8)$$

Здесь A_0 и α — постоянные, значения которых зависят от начальных условий, ω — величина, определяемая формулой (70.7).

График функции (70.8) дан на рис. 70.1. Штриховыми линиями показаны пределы, в которых находится смещение колеблющейся частицы.

В соответствии с видом функции (70.8) движение частицы можно рассматривать как гармоническое колебание частоты ω с амплитудой, изменяющейся по закону

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (70.9)$$

Рис. 70.1. График затухающего колебания. Верхняя штриховая кривая — график изменения амплитуды со временем

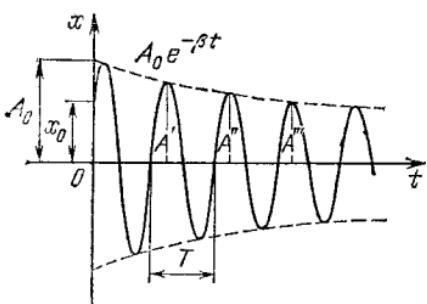
собой амплитуду в начальный момент времени. Начальное смещение x_0 зависит, кроме A_0 , также от начальной фазы α : $x_0 = A_0 \cos \alpha$.

Скорость затухания колебаний определяется величиной $\beta = r/2m$, которую называют коэффициентом затухания. Найдем время t , за которое амплитуда уменьшается в e раз. По определению $e^{-\beta t} = e^{-1}$, откуда $\beta t = 1$. Следовательно, коэффициент затухания обратен тому промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в e раз.

Согласно формуле (70.7) период затухающих колебаний

$$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (70.10)$$

При незначительном трении ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) период коле-



баний практически равен $T_0 = 2\pi/\omega_0$. С ростом коэффициента затухания период колебаний увеличивается.

Последующие наибольшие отклонения в какую-либо сторону (например, A' , A'' , A''' и т. д. на рис. 70.1) образуют геометрическую прогрессию. Действительно, если $A' = A_0 \exp(-\beta t)$, то

$$\begin{aligned}A'' &= A_0 \exp[-\beta(t+T)] = A' \exp(-\beta T), \\A''' &= A_0 \exp[-\beta(t+2T)] = A'' \exp(-\beta T)\end{aligned}$$

и т. д. Вообще, отношение значений амплитуды, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, равно

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}.$$

Это отношение называют декрементом затухания, а его логарифм — логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \quad (70.11)$$

Для характеристики колебательной системы обычно используется логарифмический декремент затухания λ . Выразив в соответствии с (70.11) β через λ и T , можно закон убывания амплитуды со временем написать в виде

$$A = A_0 e^{-(\lambda T)t}.$$

За время τ , за которое амплитуда уменьшается в e раз, система успевает совершить $N_e = \tau/T$ колебаний. Из условия $\exp(-\lambda\tau/T) = \exp(-1)$ получается, что $\lambda\tau/T = \lambda N_e = 1$. Следовательно, логарифмический декремент затухания обратен числу колебаний, совершаемых за то время, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

Для характеристики колебательной системы употребляется также величина

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e, \quad (70.12)$$

называемая добротностью колебательной системы. Она пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых системой за то время τ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Энергия колебательной системы пропорциональна квадрату амплитуды (см. (64.14)). В соответствии с этим энергия системы при затухающих колебаниях убывает по закону

$$W = W_0 \exp(-2\beta T) \quad (70.13)$$

(W_0 — значение энергии при $t = 0$). Как и всякая производная, dW/dt определяет скорость возрастаия W , а величина $-dW/dt$ — скорость убывания энергии. Согласно (70.13)

скорость убывания энергии $= -dW/dt =$

$$= 2\beta W_0 \exp(-2\beta t) = 2\beta W. \quad (70.14)$$

Если энергия мало изменяется за время, равное периоду колебаний, убыль энергии за период можно найти, умножив выражение (70.14) на T :

$$-\Delta W = 2\beta WT$$

(напомним, что ΔW обозначает приращение, а $-\Delta W$ — убыль энергии). Приняв во внимание формулы (70.11) и (70.12), придем к соотношению

$$\frac{W}{-\Delta W} = \frac{Q}{2\pi}, \quad (70.15)$$

из которого следует, что при слабом затухании колебаний добротность с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент, к убыли энергии за один период колебаний.

Из формулы (70.10) вытекает, что при $\beta = \omega_0$ период колебаний обращается в бесконечность, т. е. движение перестает быть периодическим. В случае, когда $\beta > \omega_0$ (трение велико), общее решение уравнения (70.4) имеет вид

$$x = C_1 \exp(-\beta + b) + C_2 \exp(-\beta - b), \quad (70.16)$$

где $b = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, C_1 и C_2 — постоянные, значения которых зависят от начальных условий. (В этом можно убедиться подстановкой функции (70.16) в уравнение (70.4).) Следовательно, движение носит апериодический (непериодический) характер — выведенная из положения равновесия система возвращается обратно, не совершая колебаний. На

рис. 70.2 показаны два возможных способа возвращения системы в положение равновесия при апериодическом движении. Каким из этих способов приходит система в положение равновесия, зависит от начальных условий. Движение, изображаемое кривой 2,

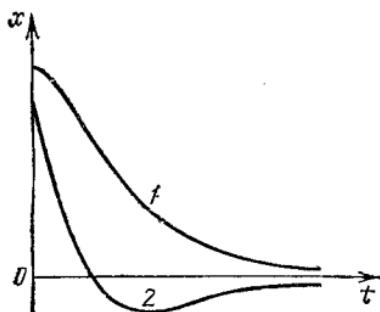


Рис. 70.2. Два способа возвращения системы в положение равновесия при апериодическом процессе

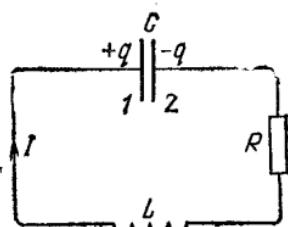


Рис. 70.3. Колебательный контур, содержащий активное сопротивление

получается в том случае, когда система начинает двигаться из положения, характеризуемого смещением x_0 , к положению равновесия с начальной скоростью v_0 , определяемой условием

$$|v_0| > |x_0|(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}). \quad (70.17)$$

Это условие будет выполнено в том случае, если выведенной из положения равновесия системе сообщить достаточно сильный толчок к положению равновесия. Если, отведя систему из положения равновесия, отпустить ее без толчка (т. е. с $v_0 = 0$) или сообщить ей толчок недостаточной силы (такой, что v_0 окажется меньше определяемой условием (70.17)), то движение будет происходить в соответствии с кривой 1 на рис. 70.2.

Теперь рассмотрим затухающие электрические колебания. Пусть в колебательном контуре имеется кроме емкости C и индуктивности L активное сопротивление R (рис. 70.3). В этом случае ЭДС самоиндукции в каждый момент времени будет равна сумме напряжения на конденсаторе и падения напряжения на сопротивлении, равного IR :

$$q/C + IR = -L dI/dt \quad (70.18)$$

(ср. с (66.2)). Введя обозначения

$$2\beta = R/L, \quad \omega_0^2 = 1/LC, \quad (70.19)$$

уравнение (70.18) можно привести к виду

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (70.20)$$

Отметим, что $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ — собственная частота контура, т. е. та частота, с которой совершились бы колебания в отсутствие активного сопротивления (см. (66.5)).

С математической точки зрения уравнение (70.20) тождественно с уравнением (70.4). Из сопоставления формул (70.3) и (70.19) следует, что сопротивление R играет роль коэффициента трения r , индуктивность L — роль массы, величина, обратная емкости C , — роль коэффициента квазиупругой силы k .

В случае, когда $\beta^2 < \omega_0^2$, т. е. $R^2/4L^2 < 1/LC$, решение уравнения (70.20) можно получить, заменив в (70.8) x на q :

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (70.21)$$

Здесь

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}. \quad (70.22)$$

Таким образом, частота затухающих колебаний ω меньше собственной частоты ω_0 . При $R = 0$ выражение (70.22) переходит в (66.5).

Разделив функцию (70.21) на емкость C , получим напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q_{m0}}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (70.23)$$

Чтобы найти силу тока, продифференцируем выражение (70.21) по времени:

$$I = \dot{q} = q_{m0} e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)].$$

Умножив правую часть этой формулы на равное единице отношение $\omega_0 / \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$, получим

$$I = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} \left[-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \alpha) \right].$$

Введя угол φ , определяемый условиями

$$\cos \varphi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0}, \quad \sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0},$$

можно написать

$$I = I_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \varphi) \quad (70.24)$$

($I_m = \omega_0 q_{m0}$). Поскольку $\cos \varphi < 0$, а $\sin \varphi > 0$, значение φ заключено в пределах от $\pi/2$ до π ($\pi/2 < \varphi < \pi$). Следовательно, при наличии в контуре активного сопротивления сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на $\pi/2$ (при $R = 0$ опережение составляет $\pi/2$).

График функции (70.21) изображен на рис. 70.4. Графики для напряжения и силы тока имеют аналогичный вид.

По определению логарифмический декремент затухания $\lambda = \beta T$ (см.

формулу (70.11)). Подставив значение (70.19) для β и заменив T через $2\pi/\omega$, получим выражение

$$\lambda = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}. \quad (70.25)$$

Если затухание невелико ($\beta^2 \ll \omega_0^2$), можно положить $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Тогда

$$\lambda \approx \frac{\pi R \sqrt{LC}}{L} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (70.26)$$

В соответствии с формулой (70.12) добротность контура

$$Q = \pi/\lambda = L\omega/R \quad (70.27)$$

(мы подставили выражение (70.25) для λ). В случае слабого затухания

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (70.28)$$

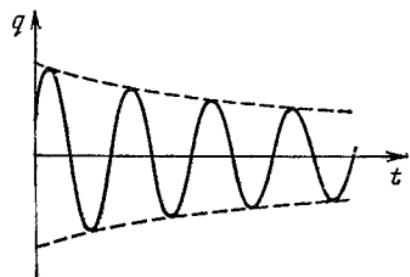


Рис. 70.4. График изменения заряда q на обкладках конденсатора при затухающем электрическом колебании

(см. (70.26)). Как и для механических колебаний, в случае слабого затухания

$$Q = 2\pi \frac{W}{-\Delta W} \quad (70.29)$$

(см. формулу (70.15)).

В заключение отметим, что при $R^2/4L^2 \geq 1/LC$, т. е. при $\beta^2 \geq \omega_0^2$, вместо колебаний происходит апериодический разряд конденсатора. Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется критическим. Значение критического сопротивления R_k определяется условием $R_k^2/4L^2 = 1/LC$, откуда

$$R_k = 2\sqrt{LC}. \quad (70.30)$$

При сопротивлении, большем критического, заряд убывает в соответствии с кривой I на рис. 70.2.

§ 71. Вынужденные колебания

Допустим, что механическая колебательная система подвергается действию внешней силы, изменяющейся со временем по гармоническому закону:

$$F_x = F_0 \cos \omega t. \quad (71.1)$$

В этом случае уравнение второго закона Ньютона имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Введя обозначения (70.3), преобразуем уравнение следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos \omega t. \quad (71.2)$$

Здесь β — коэффициент затухания, ω_0 — собственная частота колебательной системы, ω — частота вынуждающей силы.

Дифференциальное уравнение (71.2) описывает вынужденные колебания. Из теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами известно, что общее решение неоднородного уравнения (т. е. уравнения, в правой части которого стоит не равная тождественно нулю функция от t) равно сумме общего решения соответствующего од-

нородного уравнения (т. е. того же уравнения, в котором правая часть принята равной тождественно нулю) и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения мы уже знаем, оно имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + a), \quad (71.3)$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ (см. формулу (70.8); мы обозначили частоту затухающих колебаний буквой ω со штрихом, чтобы отличить ее от частоты ω вынуждающей силы).

Остается найти частное (т. е. не содержащее произвольных постоянных) решение уравнения (71.2). Попробуем искать это решение в виде

$$x = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (71.4)$$

где φ — неизвестный пока сдвиг фаз между силой и вызываемыми ею колебаниями. Попытаемся выяснить, не существует ли таких значений A и φ , при которых функция (71.4) удовлетворяет уравнению (71.2). Для этого подставим в уравнение (71.2) выражение (71.4) и его производные

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi), \quad (71.5)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi), \quad (71.6)$$

разворачивая одновременно $\sin(\omega t - \varphi)$ и $\cos(\omega t - \varphi)$ по формулам для синуса и косинуса разности:

$$\begin{aligned} & -A\omega^2 [\cos \varphi \cos \omega t + \sin \varphi \sin \omega t] - \\ & - 2\beta A\omega [\cos \varphi \sin \omega t - \sin \varphi \cos \omega t] + \\ & + \omega_0^2 A [\cos \varphi \cos \omega t + \sin \varphi \sin \omega t] = (F_0/m) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Сгруппировав соответствующим образом члены уравнения, получим

$$\begin{aligned} & [A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2\beta A\omega \sin \varphi] \cos \omega t - \\ & - [A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2\beta A\omega \cos \varphi] \sin \omega t = \\ & = (F_0/m) \cos \omega t. \quad (71.7) \end{aligned}$$

Для того чтобы уравнение (71.7) удовлетворялось при любых значениях t , коэффициенты при $\cos \omega t$ и

$\sin \omega t$ в обеих частях уравнения должны быть одинаковыми. Отсюда получаются условия

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2\beta A\omega \sin \varphi = F_0/m, \quad (71.8)$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2\beta A\omega \cos \varphi = 0. \quad (71.9)$$

Из этих соотношений можно найти значения A и φ , при которых функция (71.4) удовлетворяет уравнению (71.2). Возведя равенства (71.8) и (71.9) в квадрат и сложив их друг с другом, получим

$$A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 A^2 \omega^2 = (F_0/m)^2,$$

откуда

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (71.10)$$

Из уравнения (71.9) следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (71.11)$$

Подставив в (71.4) значения A и φ , определяемые формулами (71.10) и (71.11), получим частное решение неоднородного уравнения (71.2):

$$x = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (71.12)$$

Функция (71.12) в сумме с (71.3) дает общее решение уравнения (71.2). Слагаемое (71.3) играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при установлении колебаний (рис. 71.1). С течением времени из-за экспоненциального множителя $e^{-\beta t}$ роль слагаемого (71.3) уменьшается, и по прошествии достаточного времени им можно пренебречь, сохранив в решении только слагаемое (71.12), которое описывает установившиеся вынужденные колебания. Отметим, что на рис. 71.1 изображен простейший случай установления колебаний. При других начальных условиях амплитуда достигает попеременно максимумов и минимумов, причем значения ее могут превосходить амплитуду установившихся колебаний.

Получим частное решение уравнения (71.2) еще одним способом — с помощью векторной диаграммы. Представим формулы (71.5) и (71.6) в виде

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi) = A\omega \cos(\omega t - \varphi + \pi/2), \quad (71.13)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) = A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi). \quad (71.14)$$

Подставив выражения (71.4), (71.13) и (71.14) в уравнение (71.2), получим соотношение

$$A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta A\omega \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) + A\omega_0^2 \cos(\omega t - \varphi) = (F_0/m) \cos \omega t,$$

из которого следует, что сумма трех гармонических

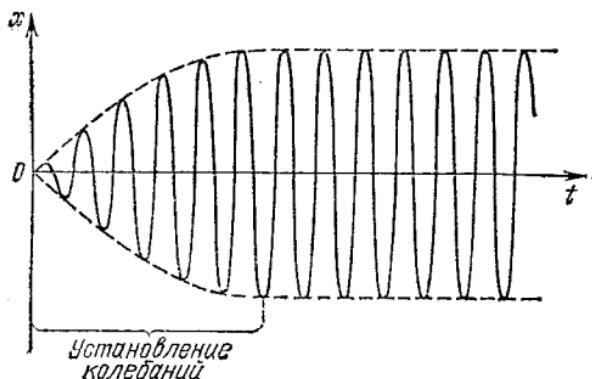


Рис. 71.1. Процесс установления вынужденных колебаний

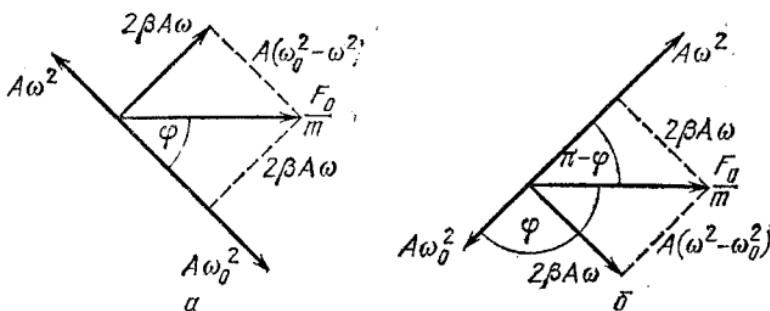


Рис. 71.2. Векторная диаграмма вынужденных колебаний для случаев $\omega < \omega_0$ (a) и $\omega > \omega_0$ (b)

функций, стоящих слева, должна быть равна гармонической функции, стоящей справа. Представим функции в виде векторов на векторной диаграмме (рис. 71.2). Начальная фаза функции, стоящей справа, равна нулю, поэтому мы изобразим ее вектором

длины F_0/m , направленным вправо по горизонтальной оси. Тогда третье слагаемое левой части изображается вектором длины $A\omega_0^2$, повернутым по часовой стрелке на угол ϕ (начальная фаза этого слагаемого отрицательна). Второе и первое слагаемые изображаются векторами длины $2\beta A\omega$ и $A\omega^2$, повернутыми относительно третьего слагаемого против часовой стрелки на угол $\pi/2$ и π соответственно (см. § 67). Требуется подобрать значения A и ϕ так, чтобы векторы, изображающие функции, стоящие в левой части равенства, в сумме были равны вектору, изображающему функцию, стоящую в правой части (на рис. 71.2 это условие соблюдается). Из рисунка следует, что требуемое значение A определяется соотношением

$$A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4A^2\beta^2\omega^2 = (F_0/m)^2,$$

откуда получается формула (71.10).

Для угла ϕ в обоих случаях, изображенных на рис. 71.2, получается формула (71.11) (напомним, что $\operatorname{tg}(\pi - \phi) = -\operatorname{tg} \phi$).

Обсудим полученные результаты. Из формулы (71.12) следует, что установившиеся вынужденные колебания представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Амплитуда колебаний пропорциональна амплитуде силы. Для данной колебательной системы (для заданных ω_0 и β) амплитуда зависит от частоты силы. Колебания отстают по фазе от силы, причем отставание также зависит от частоты силы.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой частоте амплитуда достигает максимального значения. Колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при данной частоте. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота — резонансной частотой.

Чтобы определить резонансную частоту $\omega_{\text{рез}}$, нужно найти максимум функции (71.10) или, что то же самое, минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе. Продифференцировав это выражение по ω и приравняв производную нулю, получим усло-

вие, определяющее $\omega_{\text{рез}}$:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega^2 = 0.$$

Это уравнение имеет три решения: $\omega = 0$ и $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Решение, равное нулю, соответствует максимуму знаменателя (т. е. минимуму амплитуды). Из остальных двух решений отрицательное должно быть отброшено, как не имеющее физического смысла (частота не может быть отрицательной). Таким образом, для резонансной частоты получается одно значение:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (71.15)$$

Подставив это значение в (71.10), получим выражение для амплитуды при резонансе:

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (71.16)$$

Из этого выражения следует, что в отсутствие трения амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность. Согласно (71.15) резонансная частота при тех же условиях (при $\beta = 0$) совпадает с собственной частотой колебаний системы ω_0 .

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (или, что тоже самое, от частоты колебаний) показана графически на рис. 71.3. Кривые на графике соответствуют различным значениям параметра β . В соответствии с (71.15) и (71.16), чем меньше β , тем выше и правее лежит максимум резонансной кривой. При очень большом затухании (таком, что $2\beta^2 > \omega_0^2$) выражение для резонансной частоты становится мнимым. Это означает, что резонанс в этом случае не наблюдается —

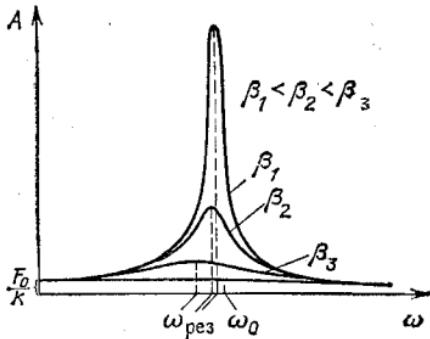


Рис. 71.3. Резонансные кривые для смещения частицы из положения равновесия

с увеличением частоты амплитуда монотонно убывает (см. нижнюю кривую на рис. 71.3).

Изображенная на рис. 71.3 совокупность графиков функции (71.10) называется **резонансными и кривыми**. По поводу этих кривых можно сделать следующие замечания. При стремлении частоты к нулю все кривые приходят к одному и тому же предельному значению, равному $F_0/m\omega_0^2$, т. е. F_0/k . Это значение представляет собой смещение из положения равновесия, которое получает система под действием постоянной силы F_0 . При стремлении ω к бесконечности все кривые асимптотически стремятся к нулю, так как при большой частоте сила так быстро изменяет свое направление, что система не успевает заметно сместиться из положения равновесия. Наконец, отметим, что чем меньше β , тем сильнее изменяется с частотой амплитуда вблизи резонанса, тем острее получается максимум.

Согласно формуле (71.16) при малом затухании (т. е. при $\beta \ll \omega_0$) амплитуда при резонансе

$$A_{\text{рез}} \approx \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0}.$$

Разделим это выражение на смещение x_0 из положения равновесия под действием постоянной силы F_0 , равное $F_0/m\omega_0^2$. В результате получим, что

$$\frac{A_{\text{рез}}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q \quad (71.17)$$

(см. формулу (70.12)). Следовательно, добротность Q показывает, во сколько раз амплитуда при резонансе превышает смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы, модуль которой равен амплитуде вынуждающей силы (это справедливо лишь при небольшом затухании).

На рис. 71.2 видно, что вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем отставание лежит в пределах от 0 до π . Зависимость ϕ от ω при разных значениях β показана на рис. 71.4. Частоте ω_0 соответствует $\phi = \pi/2$. Резонансная частота меньше собственной (см. формулу (71.15)), поэтому в момент резонанса $\phi < \pi/2$. При слабом затухании $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$, и значение ϕ при резонансе можно считать равным $\pi/2$.

Явление резонанса приходится учитывать при конструировании машин и различных сооружений. Резонансная частота этих устройств не должна быть близка к частоте возможных внешних воздействий. Например, резонансная частота вибраций корпуса корабля или крыльев самолета должна сильно отличаться от частоты колебаний, которые могут возбуждаться вращением гребного винта или пропеллера. Иначе возбуждаются вибрации, которые могут вызвать катастрофу. Известны случаи, когда обрушивались мосты при прохождении по ним марширующих колонн солдат. Это происходило потому, что резонансная частота колебаний моста оказывалась близкой к частоте, с которой шагала в ногу колонна.

Вместе с тем явление резонанса часто бывает весьма полезным, например в акустике, радиотехнике и т. д.

Чтобы вызвать вынужденные электрические колебания, нужно, разорвав контур, подать на образовавшиеся контакты переменное напряжение

$$U = U_m \cos \omega t \quad (71.18)$$

(рис. 71.5). Это напряжение надо прибавить к ЭДС самоиндукции. В результате формула (70.18) примет вид

$$\frac{q}{C} + IR = -L \frac{dI}{dt} + U_m \cos \omega t. \quad (71.19)$$

Заменив I через \dot{q} , а dI/dt через \ddot{q} , придем к уравнению

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (71.20)$$

Здесь β и ω_0^2 определяются формулами (70.19).

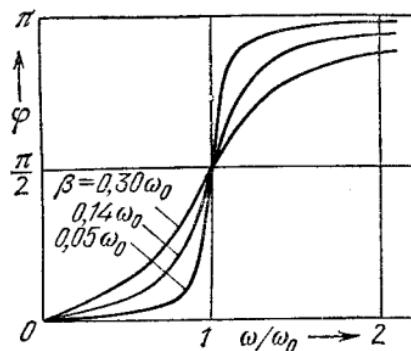


Рис. 71.4. Зависимость сдвига фаз между смещением и вынуждающей силой от частоты колебания при разных значениях коэффициента затухания β . При $\beta \rightarrow 0$ сдвиг фаз стремится к нулю для частот ω , меньших ω_0 , и к π для $\omega > \omega_0$

Уравнение (71.20) совпадает с дифференциальным уравнением (71.2) вынужденных механических

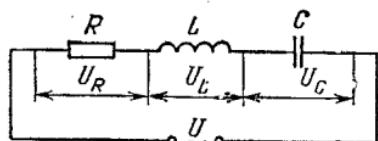


Рис. 71.5. Колебательный контур, на который подано внешнее переменное напряжение U

колебаний. Для того чтобы фаза тока равнялась $(\omega t - \varphi)$, напишем частное решение этого уравнения в виде

$$q = q_m \cos [\omega t - (\varphi + \pi/2)] = q_m \cos (\omega t - \varphi - \pi/2), \quad (71.21)$$

где

$$q_m = \frac{U_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (71.22)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi + \pi/2) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(см. формулы (71.4), (71.10) и (71.11)). Подстановка значений β и ω_0^2 дает

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad (71.23)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (71.24)$$

Функция (71.21) описывает установившиеся вынужденные колебания заряда на обкладках конденсатора. Напомним, что для получения общего решения уравнения (71.20) к функции (71.21) нужно прибавить общее решение уравнения затухающих колебаний, т. е. выражение (70.21), заменив в нем ω на ω' .

Продифференцировав выражение (71.21) по t , найдем силу тока в контуре при установившихся вынужденных колебаниях:

$$I = -q_m \omega \sin (\omega t - \varphi - \pi/2) = I_m \cos (\omega t - \varphi) \quad (71.25)$$

$(I_m = q_m \omega)$. Согласно (71.22)

$$I_m = q_m \omega = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (71.26)$$

Ток отстает от напряжений на угол φ , значение которого определяется формулой (71.24).

Представим соотношение (71.19) в виде

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t. \quad (71.27)$$

Произведение IR равно напряжению U_R на активном сопротивлении, q/C есть напряжение на конденсаторе U_C , выражение $L(dI/dt)$ определяет напряжение на индуктивности U_L . Поэтому можно написать, что

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t. \quad (71.28)$$

Таким образом, сумма напряжений на отдельных элементах контура равна в каждый момент времени напряжению, приложенному извне (см. рис. 71.5).

В соответствии с (71.25)

$$U_R = RI_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (71.29)$$

Разделив выражение (71.21) на емкость C , получим напряжение на конденсаторе:

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2) = U_{Cm} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2). \quad (71.30)$$

Здесь

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{I_m}{\omega C} \quad (71.31)$$

(см. (71.22)). Умножив производную функции (71.25) на L , получим напряжение на индуктивности:

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -LI_m \omega \sin(\omega t - \varphi) = \\ = U_{Lm} \cos(\omega t - \varphi + \pi/2), \quad (71.32)$$

где

$$U_{Lm} = \omega L I_m. \quad (71.33)$$

На рис. 71.6 приведена векторная диаграмма вынужденных колебаний в электрическом контуре. (При сопоставлении этой диаграммы с диаграммой для механических колебаний надо иметь в виду, что углу φ на рис. 71.2 соответствует угол $\varphi + \pi/2$ на рис. 71.6.) За основную принята ось тока. Поэтому U_R изображено вектором, направленным вправо по горизонтали. Сумма векторов U_R , U_L и U_C равна век-

тору U , изображающему напряжение, приложенное к контуру. Из диаграммы следует, что

$$U_m^2 = I_m^2 (\omega L - 1/\omega C)^2 + R^2 I_m^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R},$$

откуда получаются формулы (71.26) и (71.24).

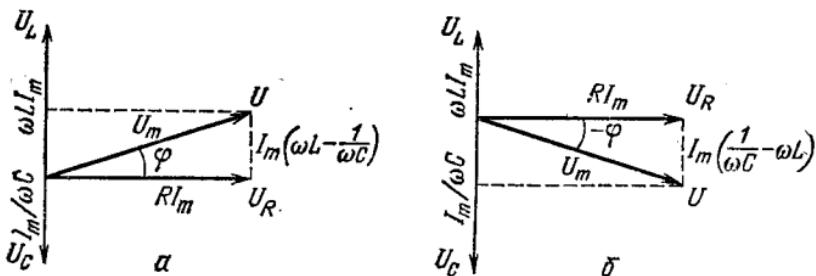


Рис. 71.6. Векторная диаграмма вынужденных колебаний в электрическом контуре для случаев, когда $\omega L > 1/\omega C$, т. е. $\omega > \omega_0$ (а) и $\omega L < 1/\omega C$, т. е. $\omega < \omega_0$ (б). В случае б угол φ отрицателен (он отложен по часовой стрелке); на рисунке указано абсолютное значение угла, равное $-\varphi$

На рис. 71.6 видно, что, когда $\omega > \omega_0$, ток отстает по фазе от приложенного напряжения, а при $\omega < \omega_0$ ток опережает напряжение. Если $\omega = \omega_0$, фазы тока и приложенного напряжения совпадают.

Резонансная частота для заряда q и напряжения на конденсаторе U_C равна

$$\omega_{q \text{рез}} = \omega_{U \text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{1/LC - R^2/2L^2} \leq \omega_0 \quad (71.34)$$

(см. формулу (71.15)).

Резонансные кривые для U_C изображены на рис. 71.7 (резонансные кривые для q имеют такой же вид). Они подобны резонансным кривым для механических колебаний (см. рис. 71.3). При $\omega \rightarrow 0$ кривые сходятся в одной точке с ординатой U_{Cm} , равной напряжению, возникающему на конденсаторе при подключении его к источнику постоянного напряжения U_m . Максимум при резонансе получается тем выше и острее, чем меньше $\beta = R/2L$, т. е. чем меньше активное сопротивление и больше индуктивность контура.

Из формулы (71.26) следует, что амплитуда силы тока I_m достигает максимума при $\omega L = 1/\omega C$. От-

сюда для резонансной частоты тока получается значение

$$\omega_{I \text{рез}} = 1/\sqrt{LC} = \omega_0. \quad (71.35)$$

Таким образом, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура.

Резонансные кривые для силы тока изображены на рис. 71.8. Отметим, что резонансные кривые для

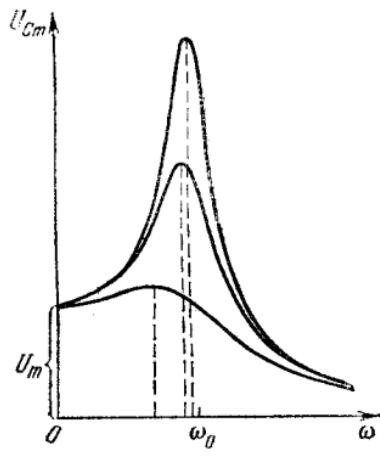


Рис. 71.7. Резонансные кривые для напряжения на конденсаторе

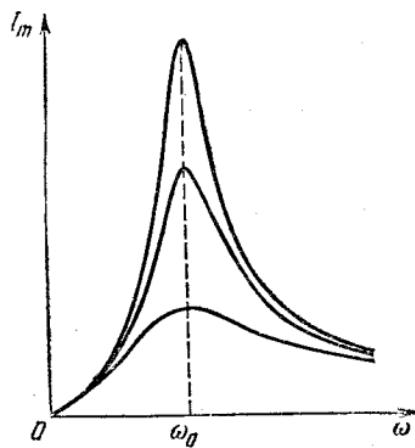


Рис. 71.8. Резонансные кривые для силы тока в колебательном контуре

скорости при механических вынужденных колебаниях имеют такой же вид. При стремлении частоты к нулю амплитуда силы тока также стремится к нулю — постоянный ток в цепи с конденсатором течь не может.

При малом затухании (при $\beta^2 \ll \omega_0^2$) резонансную частоту для напряжения можно положить равной ω_0 (см. (71.15)). Соответственно выражение $\omega L - 1/\omega C$ будет равно нулю. Согласно (71.31) для отношения амплитуды напряжения на конденсаторе при резонансе $U_{Cm \text{рез}}$ к амплитуде внешнего напряжения U_m в этом случае получается значение

$$\frac{U_{Cm \text{рез}}}{U_m} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q. \quad (71.36)$$

Таким образом, добротность контура Q показывает, во сколько раз напряжение на конденсаторе может превысить приложенное напряжение.

Добротность контура определяет также остроту резонансных кривых. На рис. 71.9 показана одна из резонансных кривых для силы тока в контуре. По вертикальной оси отложено отношение $I_m / I_{m\text{рез}}$ (т. е. к I_m при резонансе). Ширина кривой $\Delta\omega$ взята на высоте 0,7 (отношению амплитуд токов, равному

0,7, соответствует отношение квадратов амплитуд, т. е. отношение мощностей, равное $0,7^2 \approx 0,5$). Можно показать, что отношение этой ширины к резонансной частоте обратно добротности контура:

$$\Delta\omega/\omega_0 = 1/Q. \quad (71.37)$$

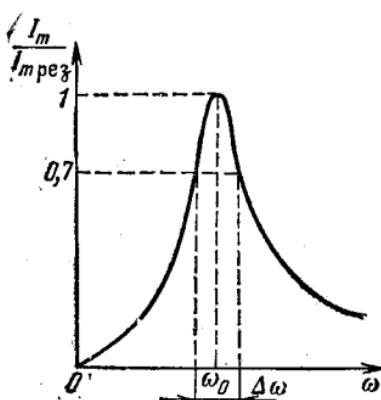


Рис. 71.9. Резонансная кривая для силы тока: $\Delta\omega$ — разность частот, соответствующих половине максимальной мощности тока в контуре

Напомним, что формулы (71.36) и (71.37) верны лишь при больших значениях Q , т. е. в случае, когда затухание свободных колебаний в контуре мало.

Явление резонанса используется для выделения из сложного напряжения нужной составляющей. Пусть

напряжение, приложенное к контуру, равно

$$U = U_{m1} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots$$

Настроив контур на одну из частот ω_1 , ω_2 и т. д. (т. е. подобрав соответствующим образом его параметры C и L), можно получить на конденсаторе напряжение, в Q раз превышающее значение данной составляющей, в то время как напряжение, создаваемое на конденсаторе другими составляющими, будет слабым. Такой процесс осуществляется, например, при настройке радиоприемника на нужную длину волн.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое колебание называется гармоническим?
2. Чему равна частота биений?
3. Чем определяется вид траектории частицы, участвующей

одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях одинаковой частоты?

4. За 10 с амплитуда затухающих колебаний уменьшается в два раза. Как изменится амплитуда за следующие 10 с?
5. Чем определяется резонансная частота колебательной системы?

Примеры решения задач

1. Найти период T малых колебаний тонкого стержня длины $l = 1,00$ м около оси, проходящей через один из его концов.

Решение. Плечо силы mg (m — масса стержня) равно $(l/2)\sin\varphi$, где φ — угол отклонения стержня от вертикали. Следовательно, момент силы, возвращающей стержень в положение равновесия, равен

$$M = -mg(l/2)\sin\varphi \approx -mg(l/2)\varphi$$

(при малых колебаниях можно положить $\sin\varphi$ равным φ). Движение стержня описывается уравнением $I\ddot{\varphi} = M = -mg(l/2)\varphi$. Отсюда

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{2I}\varphi = 0.$$

Мы пришли к дифференциальному уравнению гармонического колебания. Множитель при φ равен квадрату частоты:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{2I} = \frac{mgl}{2ml^2/3} = \frac{3g}{2l}$$

(мы учли, что момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец, равен $ml^2/3$). Таким образом,

$$\omega_0 = \sqrt{3g/2l}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{2 \cdot 1,00}{3 \cdot 9,81}} = 1,64 \text{ с.}$$

2. Параметры колебательного контура имеют значения: $C = 1000$ пФ, $L = 6,00$ мкГн, $R = 0,50$ Ом. Какую мощность P нужно подводить к контуру, чтобы поддерживать в нем незатухающие колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_m = 10,0$ В?

Решение. Мощность P расходуется на выделение теплоты в активном сопротивлении R . Среднее количество теплоты, выделяющееся в единицу времени, $Q = \langle RI^2 \rangle = \langle RI_m^2 \cos^2 \omega t \rangle = RI_m^2/2$, где I_m — амплитудное значение силы тока в контуре. Ам-

плитуды I_m и U_m связаны соотношением

$$\frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}, \quad \text{откуда } I_m^2 = \frac{C}{L} U_m^2.$$

Подставив это значение I_m^2 в выражение для Q , получим

$$P = Q = \frac{RI_m^2}{2} = \frac{RCU_m^2}{2L} = \frac{0,50 \cdot 1000 \cdot 10^{-12} \cdot 10,0^2}{2 \cdot 6,00 \cdot 10^{-6}} = 4,2 \text{ мВт.}$$

Глава 11. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 72. Волны в упругой среде

Волнами называются возмущения, распространяющиеся в среде (или в вакууме) и несущие с собой энергию. Характерное свойство волн состоит в том, что перенос энергии волной осуществляется без переноса вещества.

Основными видами волн являются упругие (в частности, звуковые и сейсмические) волны, волны на поверхности жидкости и электромагнитные волны (к числу последних относятся, в частности, световые волны и радиоволны).

Волны могут иметь различную форму. Одиночной волной или импульсом называется короткое возмущение, не имеющее

регулярного характера (рис. 72.1 а). Ограниченный ряд повторяющихся возмущений называется цугом волн. Обычно под цугом понимают отрезок синусоиды (рис. 72.1 б). Особое значение в теории волн имеет гармоническая вол-

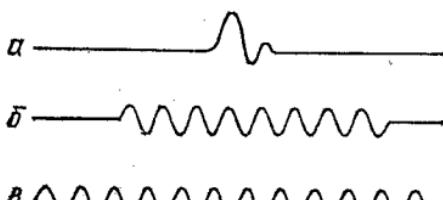


Рис. 72.1. Некоторые формы волн: одиночная волна или импульс (а), цуг волн (б) и синусоидальная волна (в)

на, т. е. бесконечная синусоидальная волна, в которой изменение состояния среды происходит по закону синуса или косинуса (72.1 в)

Мы начнем с рассмотрения упругих гармонических волн. Если в каком-либо месте упругой (твердой, жидкой или газообразной) среды возбудить колебание ее частиц, то вследствие взаимодействия ме-

жду частицами это колебание будет распространяться в среде от частицы к частице с некоторой скоростью v — возникает бегущая волна.

Частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются волной в поступательное движение, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают поперечные и продольные волны. В поперечной волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны. В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. Упругие поперечные волны могут возникнуть лишь в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Поэтому в жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В твердой среде возможно возникновение как поперечных, так и продольных волн.

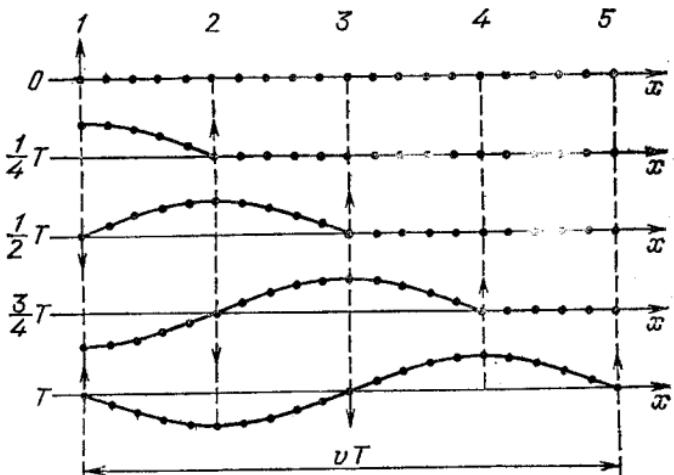


Рис. 72.2. Механизм образования поперечной упругой волны

На рис. 72.2 показано движение частиц при распространении со скоростью v упругой поперечной волны. Номерами 1, 2 и т. д. обозначены частицы, отстоящие друг от друга на расстояние, равное $vT/4$, т. е. на расстояние, проходимое волной за четверть периода колебаний, совершаемых частицами. В момент времени, принятый за нулевой, волна, распро-

страняясь вдоль оси x слева направо, достигла частицы 1, вследствие чего эта частица начала смещаться из положения равновесия вверх, увлекая за собой следующие частицы. Спустя четверть периода частица 1 достигает крайнего верхнего положения; одновременно начинает смещаться из положения равновесия частица 2. По прошествии еще четверти периода первая частица будет проходить положение равновесия, двигаясь в направлении сверху вниз, вторая частица достигнет крайнего верхнего положения, а третья частица начнет смещаться вверх из положения равновесия. В момент времени, равный T , первая частица завершит полный цикл колебания и будет находиться в таком же состоянии, как и в начальный момент. Волна к моменту времени T , пройдя путь vT , достигнет частицы 5.

На рис. 72.3 показано движение частиц при распространении в упругой среде продольной волны. Все

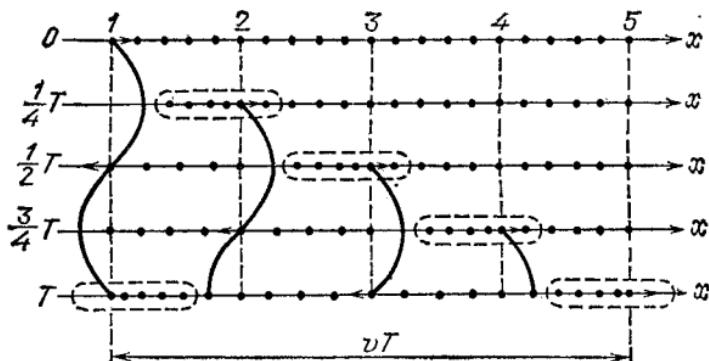


Рис. 72.3. Механизм образования продольной упругой волны. Штриховыми линиями обведены места сгущения частиц

рассуждения, касающиеся поведения частиц в поперечной волне, применимы и к продольной волне с заменой смещений вверх и вниз смещениями вправо и влево. На рисунке видно, что при распространении продольной волны в среде создаются чередующиеся сгущения и разрежения частиц, перемещающиеся в направлении распространения волны со скоростью v .

На рис. 72.2 и 72.3 показаны колебания частиц, положения равновесия которых лежат на оси x . Однако колеблются не только частицы, расположенные на оси x , а совокупность частиц, заключенных в не-

котором объеме. Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые части пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется фронтом волны (или волновым фронтом). Фронт волны представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не возникли.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. Волновых поверхностей существует бесконечное множество, в то время как волновой фронт в каждый момент времени только один. Волновые поверхности остаются неподвижными (они проходят через положения равновесия частиц, колеблющихся в одинаковой фазе). Волновой фронт все время перемещается.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Соответственно волна в этих случаях называется плоской или сферической. В плоской волне волновые поверхности представляют собой множество параллельных друг другу плоскостей, в сферической волне — множество концентрических сфер. К числу простейших принадлежит также цилиндрическая волна, у которой волновыми поверхностями являются коаксиальные цилиндрические поверхности.

Примем направление распространения плоской волны за ось x . Тогда все точки среды, положения равновесия которых имеют одинаковую координату x (но различные значения координат y и z), колеблются в одинаковой фазе. На рис. 72.4 изображена кривая, которая дает смещение ξ из положения равновесия точек с различными x в некоторый момент времени. Не следует воспринимать этот рисунок как зеркальное изображение волны. На рисунке показан график

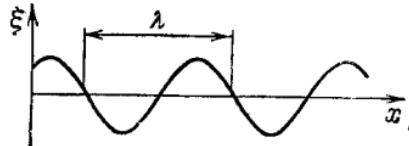


Рис. 72.4. Зависимость смещения частиц ξ от координаты x , построенная для некоторого момента времени t . График выглядит одинаково и для поперечной и для продольной волны. λ — длина волны

функции $\xi(x, t)$ для некоторого момента времени t . Такой график имеет одинаковый вид и для поперечной и для продольной волны.

Расстояние λ , на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды, называется длиной волны. Очевидно, что

$$\lambda = vT, \quad (72.1)$$

где v — скорость волны, T — период колебаний. Длину волны можно определить также как расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися с разностью фаз, равной 2π (см. рис. 72.4).

Заменив в соотношении (72.1) T через $1/v$ (v — частота колебаний), получим, что

$$\lambda v = v. \quad (72.2)$$

Эта формула вытекает также из следующих соображений. За одну секунду источник волн совершает v колебаний, порождая в среде при каждом колебании один «гребень» и одну «впадину» волны. К тому моменту, когда источник будет завершать v -е колебание, первый «гребень» успеет пройти путь v . Следовательно, v «гребней» и «впадин» волны должны уложиться на длине v .

§ 73. Уравнение бегущей волны

Уравнением волны называется выражение, которое определяет смещение колеблющихся частиц как функцию их координат x, y, z и времени t :

$$\xi = \xi(x, y, z, t) \quad (73.1)$$

(имеются в виду координаты равновесного положения частиц). Эта функция должна быть периодической как относительно времени t , так и относительно координат x, y, z . Периодичность по времени вытекает из того, что функция ξ описывает колебания частицы с координатами x, y, z . Периодичность по координатам следует из того, что точки, отстоящие друг от друга на расстояние λ , колеблются одинаковым образом.

Найдем вид функции ξ в случае плоской гармонической волны. Для упрощения направим оси коор-

нат так, чтобы ось x совпала с направлением распространения волны. Тогда волновые поверхности будут перпендикулярными к оси x и, поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение ξ будет зависеть только от x и t : $\xi = \xi(x, t)$. Пусть колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$ (рис. 73.1), имеют вид

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Найдем вид колебания точек в плоскости, соответствующей произвольному значению x . Для того чтобы пройти путь от плоскости $x = 0$ до этой плоскости, волне требуется время $\tau = x/v$ (v — скорость распространения волны). Поэтому колебания частиц, лежащих в плоскости x , будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$ и, следовательно, будут иметь вид

$$\xi(x, t) = A \cos[\omega(t - \tau) + \alpha] = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right].$$

Таким образом, уравнение плоской волны (и поперечной, и продольной), распространяющейся в направлении оси x , выглядит следующим образом:

$$\xi = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]. \quad (73.2)$$

Величина A представляет собой амплитуду волны. Начальная фаза волны α определяется выбором начал отсчета x и t . При рассмотрении одной волны начала отсчета времени и координаты обычно выбираются так, чтобы α была равной нулю. При совместном рассмотрении нескольких волн сделать так, чтобы у всех них начальная фаза равнялась нулю, как правило, не удается.

Зафиксируем некоторое значение фазы в уравнении (73.2), положив

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha = \text{const.} \quad (73.3)$$

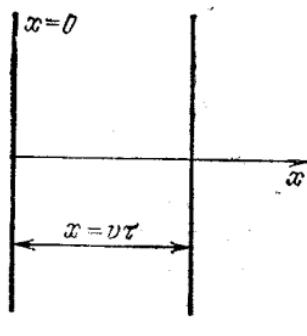


Рис. 73.1. Плоская волна, распространяющаяся вдоль оси x со скоростью v . За время τ волна проходит путь от $x = 0$ до $x = v\tau$

Продифференцировав это соотношение, получим, что

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Левая часть этого равенства определяет скорость перемещения данного значения фазы. Таким образом, скорость распространения волны v в уравнении (73.2) есть скорость перемещения фазы, в связи с чем ее называют фазовой скоростью.

Согласно (73.3) значение x с течением времени возрастает. Следовательно, уравнение (73.2) описывает волну, распространяющуюся в сторону возрастаания x . Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, описывается уравнением

$$\xi = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + a \right]. \quad (73.4)$$

Это вытекает из того, что, зафиксировав в (73.4) значение фазы, мы обнаружим, что с увеличением t координата x уменьшается.

Уравнению (73.2) можно придать симметричный относительно x и t вид. Для этого введем величину

$$k = 2\pi/\lambda, \quad (73.5)$$

которая называется волновым числом. Умножив числитель и знаменатель выражения (73.5) на частоту ν , можно представить волновое число в виде

$$k = \omega/v \quad (73.6)$$

(см. формулу (72.2)). Раскрыв в (73.2) круглые скобки и приняв во внимание (73.6), придем к уравнению

$$\xi = A \cos (\omega t - kx + a). \quad (73.7)$$

Уравнение волны, распространяющейся в сторону убывания x , отличается от (73.7) только знаком при kx .

Если направление распространения плоской волны образует с осями координат x , y , z отличные от нуля углы α , β , γ , уравнение волны будет сложнее.

Пусть колебания в плоскости, проходящей через начало координат (рис. 73.2), имеют вид

$$\xi_0 = A \cos(\omega t + a). \quad (73.8)$$

Возьмем волновую поверхность (плоскость), отстоящую от начала координат на расстояние l . Колебания в этой плоскости будут отставать от колебаний (73.8) на время $\tau = l/v$:

$$\xi = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{l}{v}\right) + a\right] = A \cos(\omega t - kl + a) \quad (73.9)$$

($k = \omega/v$; см. формулу (73.6)).

Выразим l через радиус-векторы точек рассматриваемой поверхности. Для этого введем единичный вектор n нормали к волновой поверхности. На рис. 73.2 видно, что скалярное произведение n на радиус-вектор r любой из точек поверхности равно l :

$$nr = r \cos \varphi = l.$$

Заменим в (73.9) l через nr :

$$\xi = A \cos(\omega t - knr + a). \quad (73.10)$$

Вектор

$$\mathbf{k} = kn, \quad (73.11)$$

равный по модулю волновому числу $k = 2\pi/\lambda$ и направленный по нормали к волновой поверхности, называется волновым вектором. Таким образом, уравнение (73.10) можно представить в виде

$$\xi(r, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k}r + a). \quad (73.12)$$

Мы получили уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении, определяемом волновым вектором \mathbf{k} .

Функция (73.12) дает смещение из положения равновесия точки с радиус-вектором r в момент времени t (напомним, что r определяет равновесное положение точки). Чтобы перейти от радиус-вектора

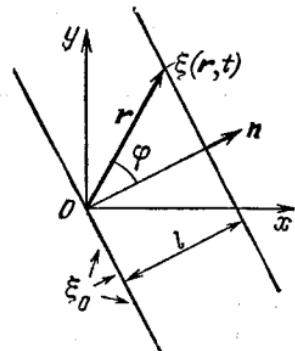


Рис. 73.2. Плоская волна, распространяющаяся в направлении, не совпадающем ни с одной из координатных осей x , y , z . Путь l волна проходит за время $\tau = l/v$

точки к ее координатам x, y, z , выразим скалярное произведение kr через компоненты векторов по координатным осям:

$$kr = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Тогда уравнение плоской волны примет вид

$$\xi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \quad (73.13)$$

Здесь

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma. \quad (73.14)$$

Функция (73.13) дает смещение точки с координатами x, y, z в момент времени t . В случае, когда n совпадает с e_x , $k_x = k$, $k_y = k_z = 0$ и уравнение (73.13) переходит в (73.7).

При выводе уравнения плоской волны мы предполагали, что амплитуда колебаний не зависит от x . Для плоской волны это справедливо в том случае, когда энергия волны не поглощается средой. При распространении в поглощающей энергию среде интенсивность волны постепенно уменьшается — происходит затухание волны. Опыт показывает, что в однородной среде затухание происходит по экспоненциальному закону: $A = A_0 \exp(-\gamma x)$ (ср. с формулой (70.9)). Соответственно уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , имеет вид

$$\xi = A_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (73.15)$$

где A_0 — амплитуда в плоскости $x = 0$. В случае затухания в уравнение (73.12) нужно добавить множитель $\exp(-\gamma l) = \exp(-\gamma nr)$.

Теперь найдем уравнение сферической волны. Всякий реальный источник волн обладает конечной протяженностью. Однако если ограничиться рассмотрением волны на расстояниях от источника, значительно больших его размеров, то источник можно считать точечным. В силу центральной симметрии в однородной и изотропной среде волна, порожденная точечным источником, будет сферической. Допустим, что фаза колебаний источника равна $(\omega t + \alpha)$. Тогда точки, лежащие на волновой поверхности радиуса r , будут колебаться с фазой

$$\omega(t - r/v) + \alpha = \omega t - kr + \alpha$$

(чтобы пройти путь r , волне требуется время $\tau = r/v$).

Амплитуда сферической волны, даже если энергия волны не поглощается средой, не остается постоянной — она убывает с расстоянием от источника по закону $1/r$ (см. § 76). Следовательно, уравнение сферической волны имеет вид

$$\xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + a), \quad (73.16)$$

где A — постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице. Размерность A равна размерности колеблющейся величины, умноженной на размерность длины. Для поглощающей среды в формулу (73.16) нужно добавить множитель $\exp(-\gamma r)$.

Напомним, что уравнение (73.16) справедливо только при r , значительно превышающих размеры источника. При стремлении r к нулю выражение для амплитуды обращается в бесконечность. Этот абсурдный результат объясняется неприменимостью уравнения для малых r .

§ 74. Волновое уравнение

Волновым уравнением называется линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее распространение волн в среде (или в вакууме). Установим вид этого уравнения, исходя из уравнения (73.13) плоской гармонической волны.

Вторые частные производные функции (73.13) по каждой из переменных имеют вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + a) = -\omega^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 \xi.$$

Сумма производных по координатам

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \xi$$

отличается от производной по времени множителем

k^2/ω^2 , который равен $1/v^2$ (см. (73.6)). Следовательно,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (74.1)$$

Это и есть волновое уравнение. Его можно написать в виде

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (74.2)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Хотя мы пришли к уравнению (74.1), исходя из функции, описывающей плоскую гармоническую волну, это уравнение описывает и волны другого вида. Например, легко убедиться в том, что любая функция вида

$$f(x, y, z, t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha) \quad (74.3)$$

удовлетворяет волновому уравнению. Действительно, обозначив выражение, стоящее в скобках в правой части формулы (74.3), через ξ , получим, что

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = f' \omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega \frac{df'}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega^2 f''. \quad (74.4)$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k_x^2 f'', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k_y^2 f'', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = k_z^2 f''. \quad (74.5)$$

Подстановка выражений (74.4) и (74.5) в уравнение (74.1) приводит к выводу, что функция (74.3) удовлетворяет волновому уравнению, если положить $v = \omega/k$.

Всякая функция, удовлетворяющая уравнению вида (74.1), описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при $\partial^2 \xi / \partial t^2$, дает фазовую скорость этой волны.

Форма волны определяется граничными условиями. При разных граничных условиях получаются волны различного вида.

Отметим, что для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (74.6)$$

§ 75. Фазовая скорость упругих волн в твердой среде

Рассмотрим цилиндрический стержень из однородного и изотропного материала. Допустим, что вдоль стержня распространяется плоская гармоническая волна. В этом случае частицы, лежащие в поперечном сечении стержня, определяемом координатой x , будут претерпевать смещение ξ , описываемое функцией

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (75.1)$$

(см. (73.7)). График этой функции дан на рис. 75.1.

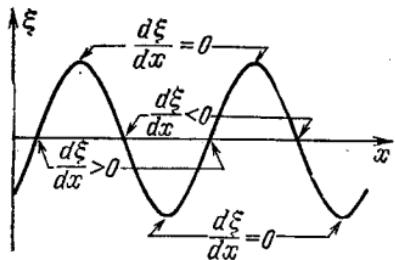


Рис. 75.1. Относительное удлинение $d\xi/dx$ в разных сечениях стержня, по которому распространяется продольная упругая волна. Ось x совпадает с геометрической осью стержня. С течением времени вся картина перемещается вдоль оси x со скоростью v

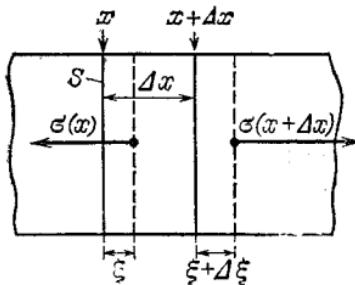


Рис. 75.2. Деформация элемента стержня при распространении в нем продольной упругой волны

Выделим в стержне элемент длины Δx , ограниченный в отсутствие волны сечениями x и $x + \Delta x$ (рис. 75.2). Если сечение с координатой x имеет в некоторый момент времени смещение ξ , то смещение сечения с координатой $x + \Delta x$ будет равно $\xi + \Delta \xi$. Поскольку смещения сечений с разными значениями координаты x неодинаковы, рассматриваемый элемент стержня оказывается деформированным — он получает удлинение $\Delta \xi$ ($\Delta \xi$ — алгебраическая величина, при сжатии элемента $\Delta \xi < 0$). Отношение $\Delta \xi / \Delta x$ дает среднее значение $\langle \epsilon \rangle$ относительного

удлинения элемента стержня Δx . Чтобы получить деформацию ε в сечении x , нужно устремить Δx к нулю. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (75.2)$$

(символ частной производной взят потому, что ξ зависит не только от x , но и от t).

Наличие деформации растяжения (сжатие есть отрицательное растяжение) свидетельствует о существовании в сечении x нормального напряжения σ , которое согласно формуле (13.7) 1-го тома равно

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (75.3)$$

(E — модуль Юнга материала стержня). Относительная деформация $\partial \xi / \partial x$, а следовательно, и напряжение σ в фиксированный момент времени зависят от x (см. рис. 75.1). Там, где смещения сечений от положения равновесия максимальны, деформация и напряжение равны нулю. В местах, где сечения проходят через положения равновесия, деформация и напряжение достигают наибольшего значения, причем положительная и отрицательная деформации (т. е. растяжения и сжатия) чередуются друг с другом. В соответствии с этим, как уже отмечалось, продольная волна состоит из чередующихся растяжений и сжатий среды.

Напишем для изображенного на рис. 75.2 элемента стержня уравнение движения. Возьмем Δx столь малым, чтобы проекцию ускорения на ось x можно было считать для всех точек элемента стержня одинаковой и равной $\partial^2 \xi / \partial t^2$. Масса элемента равна $\rho S \Delta x$, где S — площадь поперечного сечения, а ρ — плотность недеформированного стержня. Проекция на ось x силы, действующей на элемент стержня, равна произведению S на разность нормальных напряжений в сечениях $x + \Delta x$ и x :

$$F_x = SE \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x \right].$$

Ввиду малости Δx можно считать, что

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)_x \Delta x.$$

Следовательно, мы пришли к выражению

$$F_x = SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x.$$

Подставим найденные значения ускорения, массы и силы в уравнение второго закона Ньютона:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x.$$

Наконец, сократив на $S\Delta x$, придем к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (75.4)$$

Сравнение с уравнением (74.6) дает для фазовой скорости продольной упругой волны в стержне выражение

$$v = \sqrt{E/\rho}. \quad (75.5)$$

Таким образом, фазовая скорость продольных упругих волн в стержне равна корню квадратному из модуля Юнга, деленного на плотность материала стержня.

Аналогичные вычисления для поперечных волн приводят к формуле

$$v = \sqrt{G/\rho}, \quad (75.6)$$

где G — модуль сдвига.

§ 76. Энергия упругой волны

Найдем потенциальную энергию упруго деформированного стержня. Для этого вычислим работу, которую нужно совершить, чтобы сообщить стержню длины l_0 удлинение Δl . Растяжение будем осуществлять медленно для того, чтобы силу F , вызывающую растяжение, можно было считать в каждый момент времени равной упругой силе

$$F_{\text{упр}} = S\sigma = SE \frac{x}{l_0}.$$

Здесь S — площадь поперечного сечения стержня, σ — нормальное напряжение в стержне, E — модуль Юнга, x — удлинение стержня (см. § 13 1-го тома),

Чтобы вызвать удлинение Δl , нужно совершить работу

$$A = \int_0^{\Delta l} F_{\text{упр}} dx = \int_0^{\Delta l} SE \frac{x}{l_0} dx = \frac{SE}{l_0} \frac{\Delta l^2}{2} = \\ = \frac{E}{2} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 (Sl_0) = \frac{Ee^2}{2} V,$$

где e — относительное удлинение, а V — объем стержня.

Возвращаясь в недеформированное состояние, стержень может совершить над внешними телами такую же работу A , какая была совершена при его растяжении. Следовательно, в деформированном состоянии стержень обладает в расчете на единицу объема потенциальной энергией

$$w_p = \frac{Ee^2}{2}. \quad (76.1)$$

Предположим, что в некоторой твердой среде распространяется в направлении оси x плоская продольная волна:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + a). \quad (76.2)$$

Выделим в среде элементарный объем ΔV , настолько малый, чтобы скорость движения и деформацию во всех его точках можно было считать одинаковыми и равными соответственно $d\xi/dt$ и $d\xi/dx$ (см. формулу (75.2)).

Выделенный объем обладает кинетической энергией

$$\Delta W_k = \frac{\rho}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 \Delta V \quad (76.3)$$

($\rho \Delta V$ — масса объема, $d\xi/dt$ — его скорость).

Согласно формуле (76.1) рассматриваемый объем обладает также потенциальной энергией упругой деформации:

$$\Delta W_p = \frac{Ee^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \Delta V$$

($e = d\xi/dx$ — относительная деформация объема, E — модуль Юнга среды). Заменим в соответствии с (75.5) модуль Юнга через ρv^2 (ρ — плотность среды,

v — фазовая скорость волны). Тогда выражение для потенциальной энергии объема ΔV примет вид

$$\Delta W_p = \frac{\rho v^2}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V. \quad (76.4)$$

Сумма выражений (76.3) и (76.4) дает полную энергию ΔW объема ΔV :

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_p = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V.$$

Разделив эту энергию на ΔV , получим плотность энергии:

$$\omega = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (76.5)$$

Дифференцирование уравнения (76.2) один раз по t , другой раз по x дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -A\omega \sin(\omega t - kx + \alpha), \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} &= Ak \sin(\omega t - kx + \alpha). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в формулу (76.5) и учитя, что $k^2 v^2 = \omega^2$, получим плотность энергии, возникающей в упругой среде при распространении в ней плоской продольной волны:

$$\omega = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha). \quad (76.6)$$

Можно показать, что для поперечной волны плотность энергии определяется такой же формулой, как для продольной (в этой формуле нет величин, которые указывали бы на характер волны). В случае волновых поверхностей любой формы в пределах малого объема волну можно приближенно считать плоской. Следовательно, выражение (76.6) справедливо для гармонических волн любого вида (сферических, цилиндрических и т. п.). Это выражение справедливо также и для затухающих волн.

Из (76.6) следует, что плотность энергии в каждый момент времени в разных точках пространства различна. В одной и той же точке плотность энергии изменяется со временем по закону квадрата синуса. Среднее значение квадрата синуса равно $1/2$.

Соответственно среднее по времени значение плотности энергии в данной точке среды равно

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2. \quad (76.7)$$

Плотность энергии (76.6) и ее среднее значение (76.7) пропорциональны плотности среды ρ , квадрату амплитуды A и квадрату частоты ω волны.

Итак, среда, в которой распространяется упругая волна, обладает дополнительной механической энергией. Эта энергия доставляется от источника колебаний в различные точки среды самой волной. Следовательно, волна переносит с собой энергию. Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется потоком энергии через эту поверхность. Если через поверхность переносится за время dt энергия dW , то поток энергии Φ равен

$$\Phi = dW/dt. \quad (76.8)$$

Поток энергии — скалярная величина, размерность которой равна размерности энергии, деленной на размерность времени, т. е. совпадает с размерностью мощности. В соответствии с этим поток энергий измеряется в ваттах.

Поток энергии в разных точках пространства может обладать различной интенсивностью. Для характеристики течения энергии в разных точках пространства используется векторная величина, называемая плотностью потока энергии. Эта величина численно равна потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии.

Если через площадку ΔS_{\perp} , перпендикулярную к направлению распространения волны, переносится за время Δt энергия ΔW , то плотность потока энергии равна

$$J = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_{\perp}} = \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \Delta t} \quad (76.9)$$

(см. (76.8)). Через площадку ΔS_{\perp} (рис. 76.1) будет перенесена за время Δt энергия ΔW , заключенная в

объеме цилиндра с основанием ΔS_{\perp} и высотой $v\Delta t$ (v — фазовая скорость волны). Если ΔS_{\perp} и $v\Delta t$ достаточно малы для того, чтобы плотность энергии во всех точках цилиндра можно было считать одинаковой, то ΔW равна произведению плотности энергии w на объем цилиндра $\Delta S_{\perp}v\Delta t$:

$$\Delta W = w \Delta S_{\perp} v \Delta t.$$

Подстановка этого выражения в (76.9) дает для модуля плотности потока энергии формулу

$$j = wv. \quad (76.10)$$

Наконец, введя вектор v , модуль которого равен фазовой скорости волны, а направление совпадает с направлением распространения волны (и переноса энергии), получим

$$j = wv. \quad (76.11)$$

Мы получили выражение для вектора плотности потока энергии. Для упругих волн этот вектор был введен Н. А. Умовым¹) и называется вектором Умова. Этот вектор, вообще говоря, различен в разных точках пространства, а в данной точке изменяется со временем по закону квадрата синуса. Его среднее значение равно

$$\langle j \rangle = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v \quad (76.12)$$

(см. (76.7)). Выражение (76.12), так же как и (76.7), справедливо для волн любого вида (сферических, затухающих и т. д.).

Отметим, что под интенсивностью волны в данной точке подразумевается среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной.

Если известен вектор j во всех точках произвольной поверхности S , можно вычислить поток энергии через эту поверхность. Разобьем поверхность на эле-

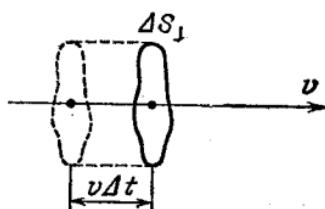


Рис. 76.1. Через площадку ΔS_{\perp} проходит за время Δt энергия, заключенная в цилиндре высоты $v\Delta t$

¹⁾ Николай Алексеевич Умов (1846—1915) — русский физик,

ментарные участки dS . За время dt через площадку dS пройдет энергия dW , заключенная в изображенном на рис. 76.2 косом цилиндре объема $dV = v dt dS \cos \varphi$. В цилиндре содержится энергия $dW = w dV = w v dt dS \cos \varphi$ (w — мгновенное значение плотности энергии в том месте, где расположена площадка dS). Представим энергию в виде

$$dW = j dt dS \cos \varphi = j d\mathbf{S} dt$$

($d\mathbf{S} = n dS$, $j = wv$). Отсюда для потока энергии $d\Phi$ через площадку dS получается выражение

$$d\Phi = dW/dt = j d\mathbf{S}. \quad (76.13)$$

Полный поток энергии через поверхность S равен сумме элементарных потоков (76.13):

$$\Phi = \int_S j d\mathbf{S}. \quad (76.14)$$

Рис. 76.2. К вычислению потока энергии $d\Phi$ через площадку dS

Заменив в этой формуле вектор j его средним по времени значением, получим среднее значение потока энергии:

$$\langle \Phi \rangle = \int_S \langle j \rangle d\mathbf{S}. \quad (76.15)$$

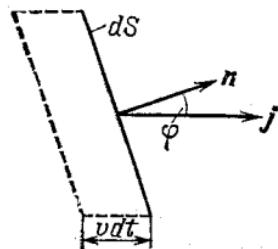
Найдем среднее значение потока энергии через одну из волновых поверхностей незатухающей сферической волны. В каждой точке этой поверхности векторы j и $d\mathbf{S}$ совпадают по направлению. Кроме того, модуль вектора j для всех точек поверхности одинаков. Следовательно,

$$\langle \Phi \rangle = \oint_S \langle j \rangle d\mathbf{S} = \langle j \rangle S = \langle j \rangle \cdot 4\pi r^2$$

(r — радиус волновой поверхности). Согласно (76.12) $\langle j \rangle = (1/2)\rho A^2 \omega^2 v$. Поэтому

$$\langle \Phi \rangle = 2\pi\rho\omega^2 v A_r^2 r^2$$

(A_r — амплитуда волны на расстоянии r от источни-



ка). Поскольку энергия волны не поглощается средой, средний поток энергии через сферу любого радиуса должен иметь одинаковое значение, т. е. должно выполняться условие

$$A^2 r^2 = \text{const.}$$

Отсюда следует, что амплитуда A , незатухающей сферической волны обратно пропорциональна расстоянию r от источника (см. формулу (73.16)). Соответственно средняя плотность потока энергии $\langle j \rangle$, т. е. интенсивность волны, обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника.

В случае плоской затухающей волны амплитуда убывает с расстоянием по закону $A = A_0 \exp(-\gamma x)$ (см. формулу (73.15)). Соответственно интенсивность волны убывает по закону:

$$\langle j \rangle = \langle j_0 \rangle e^{-\kappa x}. \quad (76.16)$$

Здесь $\kappa = 2\gamma$ — коэффициент поглощения волны. Его размерность обратна размерности длины. Величина, обратная κ , равна расстоянию, на котором интенсивность волны уменьшается в e раз.

§ 77. Звуковые волны

Характеристики звука. Если упругие волны в воздухе имеют частоту в пределах от 16 до 20 000 Гц, то, достигнув человеческого уха, они вызывают ощущение звука. Поэтому упругие волны в любой среде, имеющие частоту, заключенную в указанных пределах, называют звуковыми волнами или просто звуком. Упругие волны с частотами, меньшими 16 Гц, называются инфразвуком, а с частотами, превышающими 20 000 Гц, — ультразвуком. Инфра- и ультразвуки человеческое ухо не слышит.

Люди различают звуки по высоте, тембру и громкости. Каждой из этих субъективных оценок соответствует определенная физическая характеристика звуковой волны.

Всякий реальный звук является наложением гармонических колебаний с определенным набором

частот. Этот набор называется акустическим спектром звука. Если в звуке присутствуют колебания всех частот, заключенных в некотором интервале от v' до v'' , то спектр называется сплошным. Если звук состоит из колебаний дискретных частот v_1, v_2, v_3 и т. д., то спектр называется линейчатым. Сплошным акустическим спектром обладают шумы. Колебания с линейчатым спектром вызывают ощущение звука с более или менее определенной высотой. Такой звук называется тональным.

Высота тонального звука определяется основной (наименьшей) частотой. Относительная интенсивность обертона (т. е. колебаний с частотами v_2, v_3 и т. д.) определяет окраску, или тембр, звука. Различный спектральный состав звуков, возбуждаемых разными музыкальными инструментами, позволяет отличить на слух, например, флейту от скрипки или рояля.

Как и для всякой волны, под интенсивностью звука понимают среднее по времени значение плотности

потока энергии, которую несет с собой звуковая волна. Для того чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью, которая называется порогом слышимости. Порог слышимости несколько различен для разных лиц и зависит от частоты звука. Наиболее чувствительно человеческое ухо к частотам от 1000 до 4000 Гц. В этой области частот порог слышимости составляет в среднем около 10^{-12} Вт/м².

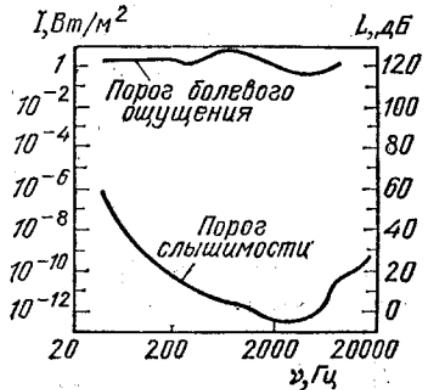


Рис. 77.1. Зависимость порога слышимости (нижняя кривая) и порога болевого ощущения (верхняя кривая) от частоты звука

При других частотах порог слышимости лежит выше (см. рис. 77.1).

При интенсивностях порядка 1—10 Вт/м² волна перестает восприниматься как звук, вызывая в ухе

лишь ощущение боли и давления. Значение интенсивности, при котором это происходит, называется порогом болевого ощущения (см. рис. 77.1; данные, приведенные на этом рисунке, относятся к среднему нормальному слуху).

Субъективно оцениваемая громкость звука возрастает гораздо медленнее, чем интенсивность звуковых волн. При возрастании интенсивности в геометрической прогрессии громкость возрастает приблизительно в арифметической прогрессии, т. е. линейно. Поэтому уровень громкости L определяется как логарифм отношения интенсивности I данного звука к интенсивности I_0 , принятой за исходную:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (77.1)$$

Исходная интенсивность I_0 принимается равной 10^{-12} Вт/м², так что порог слышимости при частоте порядка 1000 Гц лежит на нулевом уровне ($L = 0$).

Единица уровня громкости, определяемого формулой (77.1), называется белом (Б). Обычно пользуются в 10 раз меньшей единицей — децибелом (дБ). Значение L в децибелях определяется формулой

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (77.2)$$

Отношение двух любых интенсивностей I_1 и I_2 также может быть выражено в децибелях:

$$L_{12} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \quad (77.3)$$

Посредством этой формулы можно выразить в децибалах уменьшение интенсивности (затухание) волны на некотором пути. Например, затухание в 20 дБ означает, что интенсивность уменьшается в 100 раз.

Диапазон интенсивностей, при которых волна вызывает в человеческом ухе звуковое ощущение (от 10^{-12} до 10 Вт/м²), соответствует значениям уровня громкости от 0 до 130 дБ. Ниже приведены ориенти-

ровочные значения уровня громкости для некоторых звуков:

| Звук | Уровень громкости, дБ |
|--|-----------------------|
| Тикание часов | 20 |
| Шепот на расстоянии 1 м | 30 |
| Тихий разговор | 40 |
| Речь средней громкости | 60 |
| Громкая речь | 70 |
| Крик | 80 |
| Шум самолетного двигателя: на расстоянии 5 м | 120 |
| на расстоянии 3 м | 130 |

Энергия звуковых волн крайне мала. Если предположить, что стакан с водой полностью поглощает всю падающую на него энергию плоской звуковой волны с уровнем громкости в 70 дБ (в этом случае количество поглощаемой водой в секунду энергии равно примерно $2 \cdot 10^{-7}$ Вт), то на нагревание воды от комнатной температуры до кипения понадобится время порядка 10 000 лет.

Ультразвуковые волны можно получать в виде направленных пучков, подобных световым пучкам. Ультразвуковые пучки применяются для целей локации (обнаружения предметов и определения расстояния до них) в воде. Впервые идея ультразвуковой локации была высказана французским физиком П. Ланжевеном и разработана им во время первой мировой войны для обнаружения подводных лодок. Теперь ультразвуковые локаторы используются для обнаружения айсбергов, косяков рыбы и т. п.

Известно, что, крикнув и определив время до прихода эха, т. е. звука, отраженного от препятствия (скалы, леса, поверхности воды в колодце и т. д.), можно, умножив половину этого времени на скорость звука, найти расстояние до препятствия. На этом принципе устроен упомянутый выше локатор, а также ультразвуковой эхолот, который применяется для измерения глубины и снятия рельефа морского дна.

Ультразвуковая локация позволяет летучей мыши хорошо ориентироваться в темноте. Летучая мышь периодически испускает ультразвуковые импульсы и по воспринимаемым с помощью органа слуха отра-

женным сигналам с большой точностью судит о расстоянии до различных предметов.

Скорость звуковых волн в газах. Эту скорость можно определить по формуле (75.5), если найти для газа величину, аналогичную модулю Юнга для твердых тел.

Сопоставим сжатие столба газа со сжатием жесткого стержня (рис. 77.2). Будем исходить из формулы

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{dl}{l} \quad (77.4)$$

(см. (75.3)). В исходном состоянии давление газа на поршень уравновешивается давлением внешнего воздуха. Этому состоянию газа соответствует недеформированное состояние стержня. Перемещение поршня под действием внешней, дополнительной к давлению воздуха силы вызовет приращение давления газа dp , которое уравновесит внешнюю силу (в случае стержня

внешняя сила уравновешивается нормальным напряжением σ). При этом объем газа получает относительное приращение dV/V ($dV < 0$). Аналогично под действием внешней силы стержень получает относительное удлинение $\varepsilon = dl/l$ ($dl < 0$). Следовательно, в случае газа в формулу (77.4) вместо σ нужно подставить dp , а вместо ε — отношение dV/V .

Таким образом, в случае газа формулу (77.4) нужно написать в виде

$$dp = -K \frac{dV}{V}, \quad (77.5)$$

где K — аналог модуля Юнга E . Знак минус обусловлен тем, что dp и dV имеют разные знаки, в то время как коэффициент K , подобно E , должен быть положительным.

Из формулы (77.5) вытекает, что

$$K = -V \frac{dp}{dV}.$$

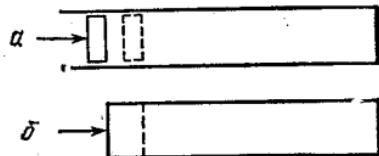


Рис. 77.2. Сжатие столба газа (a) подобно сжатию стержня (b)

Подставив это значение K в формулу (75.5) вместо E , получим для скорости звука в газах выражение

$$v = \sqrt{-\frac{V}{\rho} \frac{dp}{dV}}. \quad (77.6)$$

Чтобы определить dp/dV , нужно знать характер зависимости p от V . При изотермическом процессе $pV = \text{const}$, откуда $pdV + Vdp = 0$, так что $dp/dV = -p/V$. Подстановка этого значения производной в (77.6) дает формулу

$$v = \sqrt{\frac{p}{\rho}}.$$

Такую формулу получил Ньютона. Однако вычисления по этой формуле приводят к неверному результату (290 м/с вместо 340 м/с).

В звуковой волне сжатия и расширения газа следуют друг за другом так часто, что смежные участки среды не успевают обмениваться теплотой и процесс изменения объема можно считать адиабатическим. При адиабатическом процессе связь между давлением и объемом данной массы газа дается уравнением

$$pV^\gamma = \text{const},$$

где γ — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и при постоянном объеме (см. формулу (69.8) 1-го тома). В этом случае $p\gamma V^{\gamma-1}dV + V^\gamma dp = 0$, откуда $dp/dV = -\gamma p/V$. Подстановка этого значения в (77.6) приводит к формуле

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad (77.7)$$

хорошо согласующейся с экспериментальными данными.

При атмосферном давлении и обычных температурах большинство газов близко по своим свойствам к идеальному газу. Из уравнения состояния идеального газа $pV = (m/M)RT$ (см. формулу (62.6) 1-го тома) следует, что

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho M}{RT}.$$

Подставив это выражение для плотности в (77.7), получим окончательную формулу для скорости звуковых волн в газах:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (77.8)$$

(R — газовая постоянная, T — термодинамическая температура, M — молярная масса газа). Таким образом, скорость звука в газах пропорциональна корню квадратному из температуры и не зависит от давления.

Вычислим значение скорости звука в воздухе при 290 К (комнатная температура). Для воздуха $\gamma = 1,40$, $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Газовая постоянная равна 8,31 Дж/(моль·К). Подставим эти данные в формулу (77.8):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1,40 \cdot 8,31 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3}}} = 340 \text{ м/с.}$$

Полученное значение хорошо согласуется со значением, полученным опытным путем.

Эффект Доплера для звуковых волн. Назовем приемником устройство, способное воспринимать звуковые колебания среды. Если источник и приемник неподвижны относительно среды, в которой распространяется волна, то частота колебаний, воспринимаемых приемником, будет равна частоте v_0 колебаний источника. Если же источник или приемник либо оба они движутся, то частота v , воспринимаемая приемником, может оказаться отличной от v_0 . Это явление называется эффектом Доплера.

Предположим, что источник и приемник движутся вдоль соединяющей их прямой. Скорость источника $v_{\text{ист}}$ будем считать положительной, если он движется по направлению к приемнику, и отрицательной, если он движется в направлении от приемника. Аналогично скорость приемника $v_{\text{пр}}$ будем считать положительной, если он движется по направлению к источнику, и отрицательной, если он движется в направлении от источника.

Если источник неподвижен и колеблется с частотой v_0 , то к моменту, когда он будет завершать v_0 -е колебание, порожденный первым колебанием «гребень» волны успеет пройти в среде путь v (v — ско-

рость распространения волны относительно среды). Поэтому порожденные источником за секунду v_0 «гребней» и «впадин» волны уложатся на длине v . Если же источник движется относительно среды со скоростью $v_{ист}$, то в момент, когда источник будет завершать v_0 -е колебание, «горб», порожденный первым колебанием, будет находиться от источника на расстоянии $v - v_{ист}$ (рис. 77.3). Следовательно, v_0 «горбов» и «впадин» волны уложатся на отрезке $v - v_{ист}$, так что длина волны будет равна

$$\lambda = \frac{v - v_{ист}}{v_0}. \quad (77.9)$$

Мимо неподвижного приемника пройдут за секунду «горбы» и «впадины», укладывающиеся на

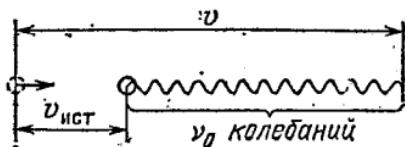


Рис. 77.3. Если источник движется в направлении распространения волны, то возбуждаемые им за секунду v_0 «горбов» и «впадин» волны укладываются на длине, численно равной $v - v_{ист}$

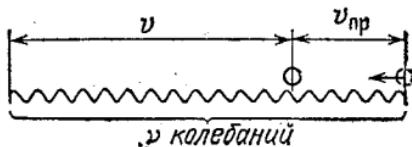


Рис. 77.4. Если приемник движется навстречу волне, то он воспринимает за секунду v «горбов» и «впадин», укладывающихся на длине, численно равной $v + v_{пр}$

длине v . Если приемник движется со скоростью $v_{пр}$, то в конце промежутка времени в 1 с он будет воспринимать «впадину», которая в начале этого промежутка отстояла от его теперешнего положения на расстояние v . Таким образом, приемник воспримет за секунду колебания, отвечающие «горбам» и «впадинам», укладывающимся на длине $v + v_{пр}$ (рис. 77.4), и будет колебаться с частотой

$$v = \frac{v + v_{пр}}{\lambda}.$$

Подставив выражение (77.9) для λ , получим формулу

$$v = v_0 \frac{v + v_{пр}}{v - v_{ист}}. \quad (77.10)$$

Из этой формулы вытекает, что при таком движении источника и приемника, при котором расстояние ме-

жду ними уменьшается, воспринимаемая приемником частота v оказывается больше частоты источника v_0 . Если расстояние между источником и приемником увеличивается, v будет меньше v_0 .

В случае, когда направления скоростей $v_{ист}$ и $v_{пр}$ не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, вместо $v_{ист}$ и $v_{пр}$ в формулу (77.10) нужно подставлять проекции векторов $v_{ист}$ и $v_{пр}$ на направление этой прямой.

Эффект Доплера для звуковых волн определяется скоростями движения источника и приемника относительно среды, в которой распространяется звуковая волна. Для световых волн также наблюдается эффект Доплера, однако формула для изменения частоты выглядит иначе, чем (77.10). Это обусловлено тем, что для световых волн не существует вещественной среды, колебания которой представляли бы собой свет. Поэтому скорости источника и приемника относительно «среды» не имеют смысла. В случае света можно говорить лишь об относительной скорости приемника и источника. Эффект Доплера зависит от модуля и направления этой скорости (см. § 83).

§ 78. Стоячие волны

При одновременном распространении нескольких волн колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершили бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. Следовательно, волны просто накладываются одна на другую, не возмущая друг друга. Это утверждение называется принципом суперпозиции (наложения) волн.

Принцип суперпозиции соблюдается обычно с большой точностью и нарушается, только если амплитуда (т. е. интенсивность) волны очень велика. В этом случае возникают нелинейные эффекты, в частности нарушается пропорциональность между деформацией и напряжением в среде (нарушается закон Гука).

Если колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой из точек среды, обладают постоянной разностью фаз, то волны называются когерентными. При сложении когерентных волн возникает

явление интерференции, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других точках ослабляют друг друга.

Важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Возникающий в результате колебательный процесс называется стоячей волной. Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преград. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях:

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad \xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

Преобразовав сумму этих выражений по формуле для суммы косинусов, придем к уравнению стоячей волны:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right). \quad (78.1)$$

Чтобы упростить уравнение, выберем начало отсчета x так, чтобы разность $\alpha_2 - \alpha_1$ стала равной нулю, а начало отсчета t — так, чтобы оказалась равной нулю сумма $\alpha_1 + \alpha_2$. Кроме того, заменим волновое число k его значением $2\pi/\lambda$. Тогда уравнение стоячей волны примет вид

$$\xi = \left(2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t. \quad (78.2)$$

Из уравнения (78.2) видно, что в каждой точке стоячей волны совершаются гармонические колебания той же частоты, что и у встречных волн, причем амплитуда зависит от x :

$$\text{амплитуда} = \left|2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right|.$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (78.3)$$

амплитуда колебаний максимальна. Эти точки называются пучностями стоячей волны. Из (78.3)

получаются значения координат пучностей:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (78.4)$$

Надо иметь в виду, что пучность представляет собой не точку, а плоскость, точки которой имеют значение x , определяемое формулой (78.4).

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

амплитуда равна нулю. Эти точки называются узлами стоячей волны. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают. Координаты узлов имеют значения:

$$x_{\text{узл}} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (78.5)$$

Узел, как и пучность, представляет собой не точку, а плоскость, точки которой имеют значения координаты x , определяемые формулой (78.5).

Из (78.4) и (78.5) следует, что расстояние между соседними пучностями, так же как и расстояние между соседними узлами, равно $\lambda/2$. Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны.

Множитель $2A \cos(2\pi x/\lambda)$ при переходе через нулевое значение меняет знак, вследствие чего фаза колебаний по разные стороны от узла отличается на π . Это означает, что точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе. Все точки, находящиеся между двумя соседними узлами, колеблются синфазно (т. е. в одинаковой фазе). На рис. 78.1 дан ряд «моментальных фотографий» отклонений точек от положений равновесия. Первая из них соответствует моменту, когда отклонения достигли наибольшего значения. Последующие сделаны с интервалами в четверть периода.

Дифференцирование уравнения (78.2) один раз по t , а другой раз по x дает выражения для скорости частиц ξ и для деформации среды ϵ :

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = - \left(2A\omega \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \sin \omega t, \quad (78.6)$$

$$\epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = - \left(2A \frac{2\pi}{\lambda} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t. \quad (78.7)$$

Уравнение (78.6) описывает стоячую волну скорости, а (78.7) — стоячую волну деформации.

На рис. 78.2 сопоставлены значения смещения, скорости и деформации для моментов времени 0 и $T/4$. Из графиков следует, что узлы и пучности скорости совпадают с узлами и пучностями смещения; узлы же и пучности деформации совпадают с пучностями и узлами смещения. В то время как ξ и ϵ достигают максимальных значений, $\dot{\xi}$ обращается в нуль, и наоборот. Соответственно дважды за период

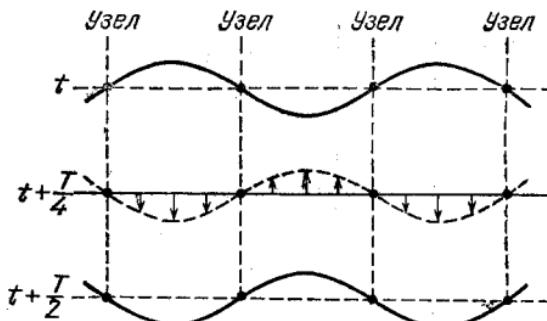


Рис. 78.1. По вертикали отложены отклонения частиц среды от положения равновесия в стоячей волне для моментов времени, отличающихся на четверть периода. Стрелками показаны скорости частиц

происходит превращение энергии стоячей волны то полностью в кинетическую, сосредоточенную в основном вблизи пучностей волны (где находятся пучности скорости), то полностью в потенциальную, сосредоточенную в основном вблизи узлов волны (где находятся пучности деформации). В результате происходит переход энергии от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. Средний по времени поток энергии в любом поперечном сечении волны равен нулю.

В закрепленной с обоих концов натянутой струне при возбуждении поперечных колебаний устанавливается стоячая волна, причем в местах закрепления струны образуются узлы. Поэтому в струне возбуждаются с заметной интенсивностью только такие колебания, половина длины волны которых укладывается на струне целое число раз (рис. 78.3). Отсюда вытекает условие

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{или} \quad \lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (78.8)$$

(l — длина струны). Этим длинам волн соответствуют частоты

$$v_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (78.9)$$

(v — фазовая скорость волны, определяемая силой натяжения струны и массой единицы длины, т. е. линейной плотностью струны).

Частоты v_n называются собственными частотами струны. Они являются кратными частоте

$$v_1 = v/2l,$$

которую называют основной частотой.

Гармонические колебания с частотами (78.9)

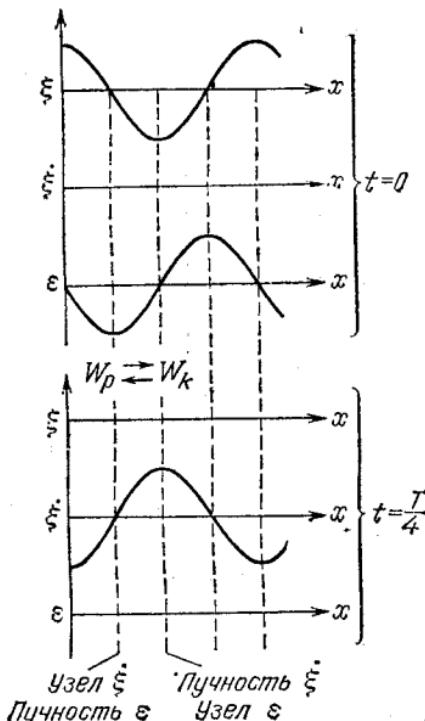


Рис. 78.2. Графики смещения ξ , скорости $\dot{\xi}$ и деформации $\varepsilon = d\xi/dx$ в стоячей волне для моментов времени 0 и $T/4$. Стрелками показан переход энергии из потенциальной, средоточенной в узлах, в кинетическую, сосредоточенную в пучностях, и обратно

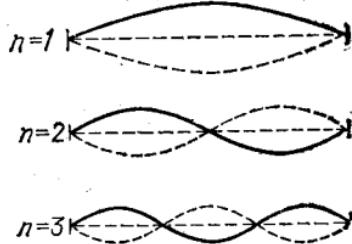


Рис. 78.3. Нормальные колебания (гармоники) струны

называются собственными или нормальными колебаниями. Их называют также гармониками. В общем случае колебание струны представляет собой наложение различных гармоник.

Колебания струны примечательны в том отношении, что для них по классическим представлениям получаются дискретные значения одной из характе-

ризующих колебания величин (частоты). Для классической физики такая дискретность оказывается исключением. Для квантовой физики дискретность является скорее правилом, чем исключением.

§ 79. Волновой пакет. Групповая скорость

Волна, имеющая форму короткого импульса («всплеска»), может быть представлена как суперпозиция (наложение) гармонических волн, частоты

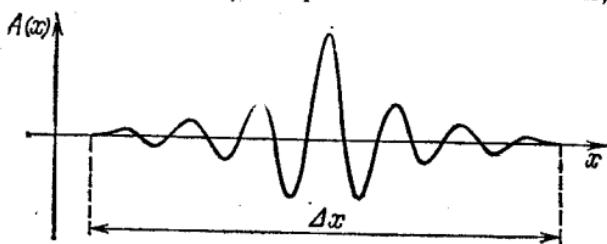


Рис. 79.1. Волновой пакет, распространяющийся вдоль оси x :
 Δx — ширина пакета

которых заключены в некотором интервале $\Delta\omega$. Такое образование называется волновым пакетом (или группой волн) (рис. 79.1). Уравнение волнового пакета имеет вид

$$\int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A_\omega \cos(\omega t - k_\omega x + \alpha_\omega) d\omega,$$

где A_ω — амплитуда, приходящаяся на единичный интервал частот, ω_0 — основная частота, $\Delta\omega$ — интервал частот, представленных в пакете. В пределах пакета образующие его гармонические волны в большей или меньшей степени усиливают друг друга. Вне пакета эти волны практически гасят друг друга.

Интервалу частот $\Delta\omega$ соответствует интервал волновых чисел Δk . Расчет дает, что ширина пакета Δx связана с интервалом волновых чисел Δk соотношением

$$\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi. \quad (79.1)$$

Согласно (73.6) фазовая скорость волны

$$v = \omega/k. \quad (79.2)$$

Отсюда следует, что чем больше $\Delta\omega$, тем больше Δk . Таким образом, чем уже волновой пакет, тем больше

должен быть интервал частот гармонических волн, представленных в пакете.

При сложении бегущих волн различной частоты нужно иметь в виду возможность дисперсии волн, т. е. зависимости фазовой скорости гармонической волны от частоты ω (или, что то же самое, от длины волны λ).

Дисперсия обычно характеризуется с помощью дисперсионного соотношения

$$k = k(\omega) = \omega/v(\omega), \quad (79.3)$$

где k — волновое число, $v(\omega)$ — фазовая скорость. Для волн, распространяющихся в недиспергирующих средах, v не зависит от частоты и k пропорциональна ω . Для диспергирующих сред k зависит от ω по нелинейному закону.

В отсутствие дисперсии все волны, образующие пакет, распространяются с одинаковой фазовой скоростью. Очевидно, что с такой же скоростью перемещается и волновой пакет, причем форма его не изменяется. Можно показать, что в диспергирующей среде пакет со временем расплывается — ширина его увеличивается. Если дисперсия невелика, расплывание пакета происходит не слишком быстро. В этом случае пакету можно приписать скорость u , под которой понимается скорость перемещения центра пакета, т. е. точки с максимальным значением амплитуды. Эту скорость называют групповой.

В диспергирующих средах групповая скорость оказывается отличной от фазовой. Покажем это на примере наложения двух волн с частотами $\omega_0 - \Delta\omega/2$ и $\omega_0 + \Delta\omega/2$ (соответственно с волновыми числами $k_0 - \Delta k/2$ и $k_0 + \Delta k/2$). Амплитуды волн будем считать одинаковыми. В этом случае уравнение результирующей волны имеет вид

$$A \cos [(\omega_0 - \Delta\omega/2)t - (k_0 - \Delta k/2)x] + A \cos [(\omega_0 + \Delta\omega/2)t - (k_0 + \Delta k/2)x].$$

Воспользовавшись формулой для суммы косинусов, преобразуем это выражение следующим образом:

$$2A \cos [(\Delta\omega/2)t - (\Delta k/2)x] \cos (\omega_0 t - k_0 x).$$

Полученное выражение можно рассматривать как уравнение бегущей гармонической волны с амплитуд-

дой, изменяющейся по закону

$$2A \cos [(\Delta\omega/2)t - (\Delta k/2)x].$$

Максимальное значение амплитуды получается при условии, что величина, стоящая под знаком косинуса, равна нулю. Отсюда следует, что координата x_m центра волнового пакета в момент времени t определяется из соотношения

$$(\Delta\omega/2)t - (\Delta k/2)x_m = 0.$$

Разделив x_m на t , найдем скорость перемещения центра волнового пакета, т. е. групповую скорость:

$$u = x_m/t = \Delta\omega/\Delta k.$$

В случае наложения волн с непрерывным набором частот групповая скорость определяется выражением

$$u = d\omega/dk \quad (79.4)$$

(ср. с формулой (79.2)).

Заменив согласно (79.2) ω через vk , выражение (79.4) можно представить в виде

$$u = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}. \quad (79.5)$$

По определению $k = 2\pi/\lambda$, т. е. $\lambda = 2\pi/k$. Следовательно, $d\lambda/dk = -2\pi/k^2 = -\lambda/k$. Подстановка этого значения $d\lambda/dk$ в (79.5) приводит к формуле

$$u = v - \lambda (dv/d\lambda). \quad (79.6)$$

В отсутствие дисперсии $dv/d\lambda = 0$ и $u = v$.

Энергия волны пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому скорость переноса энергии волной равна групповой скорости.

Надо иметь в виду, что понятие групповой скорости применимо только при условии, что поглощение энергии волны в данной среде невелико. При значительном затухании волны понятие групповой скорости утрачивает смысл.

§ 80. Электромагнитные волны

Мы знаем, что переменные электрическое и магнитное поля взаимно порождают друг друга: переменное магнитное поле порождает электрическое (см. уравнение (62.1)), переменное электрическое поле

порождает магнитное (см. уравнение (62.3)). Таким образом, если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то в окружающем заряды пространстве возникает последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс будет периодическим во времени и в пространстве и, следовательно, представляет собой волну.

Покажем, что существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла. Мы сделаем это на примере плоской волны, распространяющейся в однородной и изотропной нейтральной ($\rho = 0$) непроводящей ($j = 0$) среде с постоянными проницаемостями ϵ и μ .

Направим ось x перпендикулярно к волновым поверхностям. Тогда E и H , а значит, и их компоненты по координатным осям не будут зависеть от координат y и z . Поэтому уравнения (62.5)–(62.8) упрощаются следующим образом:

$$0 = \mu_0\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (80.1)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \mu_0\mu \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad (80.2)$$

$$0 = \epsilon_0\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon_0\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon_0\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (80.3)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \epsilon_0\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (80.4)$$

(В силу сделанных предположений $\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\mu H_x) = \mu_0\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}$ и т. д.)

Первое из уравнений (80.3) и уравнение (80.4) показывают, что E_x не зависит ни от t , ни от x . Первое из уравнений (80.1) и уравнение (80.2) дают такой же результат для H_x . Следовательно, отличные от нуля E_x и H_x могут быть обусловлены только постоянными однородными полями, накладывающими на электромагнитное поле волны. Само поле волны не имеет составляющих вдоль оси x . Это означает, что векторы E и H перпендикулярны к направ-

лению распространения волны, т. е. что электромагнитные волны поперечны. В дальнейшем мы будем считать постоянные поля отсутствующими и подавать $E_x = H_x = 0$.

Два последних уравнения (80.1) и два последних уравнения (80.3) можно объединить в две независимые группы:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (80.5)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (80.6)$$

Первая группа уравнений связывает компоненты E_y и H_z , вторая — компоненты E_z и H_y . Предположим, что первоначально было создано переменное электрическое поле E_y , направленное вдоль оси y . Согласно второму из уравнений (80.5) это поле создаст магнитное поле H_z , направленное вдоль оси z . В соответствии с первым уравнением (80.5) поле H_z создаст электрическое поле E_y , и т. д. Ни поле E_z , ни поле H_y при этом не возникают. Аналогично, если первоначально было создано поле E_z , то согласно уравнениям (80.6) появится поле H_y , которое возбудит поле E_z , и т. д. В этом случае не возникают поля E_y и H_z . Таким образом, для описания плоской электромагнитной волны достаточно взять одну из систем уравнений (80.5) или (80.6), положив компоненты, фигурирующие в другой системе, равными нулю.

Возьмем для описания волны уравнения (80.5), положив $E_z = H_y = 0$. Продифференцируем первое уравнение по x и произведем замену: $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_z}{\partial x}$. Подставив затем $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ из второго уравнения, получим для E_y уравнение

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (80.7)$$

(мы заменили $\epsilon_0 \mu_0$ через $1/c^2$ (см. (37.10)). Продифференцировав по x второе из уравнений (80.5), найдем после аналогичных преобразований уравнение для H_z :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (80.8)$$

Надо иметь в виду, что уравнения (80.7) и (80.8) должны рассматриваться совместно, так как они получены из уравнений (80.5), каждое из которых содержит и E , и H .

Уравнения (80.7) и (80.8) представляют собой типичные волновые уравнения (см. (74.6)). Всякая функция, удовлетворяющая такому уравнению, описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при производной по времени, дает фазовую скорость этой волны. Следовательно, уравнения (80.7) и (80.8) указывают на то, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых равна

$$v = c/\sqrt{\epsilon\mu}. \quad (80.9)$$

В вакууме (т. е. при $\epsilon = \mu = 1$) скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света c .

Напомним, что $E_x = E_z = 0$ и $H_x = H_y = 0$, так что $E_y = E$ и $H_z = H$. Мы сохранили в уравнениях (80.7) и (80.8) индексы y и z при E и H , чтобы подчеркнуть, что векторы E и H направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей y и z .

Простейшим решением уравнения (80.7) является функция

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1). \quad (80.10)$$

Решение уравнения (80.8) имеет аналогичный вид:

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (80.11)$$

В этих формулах ω — частота волны, k — волновое число, равное ω/v , α_1 и α_2 — начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$.

Подстановка функций (80.10) и (80.11) в уравнения (80.5) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} kE_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) &= \mu_0 \mu \omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2), \\ kH_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) &= \epsilon_0 \epsilon \omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1). \end{aligned}$$

Для того чтобы эти соотношения удовлетворялись при любых значениях t и x , необходима одинаковость начальных фаз α_1 и α_2 . Кроме того, должны выполняться равенства

$$kE_m = \mu_0 \mu \omega H_m, \quad \epsilon_0 \epsilon \omega E_m = kH_m.$$

Перемножив эти равенства, найдем, что

$$\epsilon_0 \epsilon E_m^2 = \mu_0 \mu H_m^2. \quad (80.12)$$

Таким образом, колебания электрического и магнитного векторов происходят с одинаковой фазой ($\alpha_1 = \alpha_2$), а амплитуды этих векторов связаны соотношением

$$E_m \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_m \sqrt{\mu_0 \mu}. \quad (80.13)$$

Для волны, распространяющейся в вакууме,

$$E_m / H_m = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = \\ = \sqrt{(4\pi)^2 \cdot 900} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом.} \quad (80.14)$$

Умножив уравнение (80.10) на орт оси y ($E_y e_y = E$), а уравнение (80.11) на орт оси z ($H_z e_z = H$),

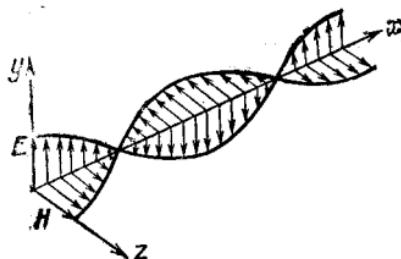


Рис. 80.1. «Моментальная фотография» плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси x . Вектор E колеблется вдоль оси y , вектор H — вдоль оси z . С течением времени вся картина перемещается в направлении оси x с фазовой скоростью волны

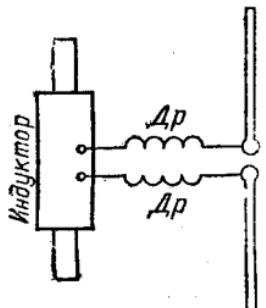


Рис. 80.2. Вибратор Герца, подключенный через дроссели D_r к индукционной катушке. Дроссели предотвращали ответвление высокочастотного тока в обмотку индуктора

получим уравнения плоской электромагнитной волны в векторном виде:

$$\mathbf{E} = E_m \cos(\omega t - kx), \quad \mathbf{H} = H_m \cos(\omega t - kx) \quad (80.15)$$

(мы положили $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$).

На рис. 80.1 видно, что векторы E и H образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. В фиксированной точке пространства векторы E и H изменяются со временем по гармоническому закону. Они одновременно увеличиваются от нуля, затем через $1/4$ периода достигают наибольше-

го значения, причем если \mathbf{E} направлен вверх, то \mathbf{H} направлен вправо (смотрим вдоль направления распространения волны). Еще через $1/4$ периода оба вектора одновременно обращаются в нуль. Затем опять достигают наибольшего значения, но на этот раз \mathbf{E} направлен вниз, а \mathbf{H} влево. И, наконец, по завершении периода колебания векторы снова обращаются в нуль. Такие изменения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} происходят во всех точках пространства, но со сдвигом по фазе, определяемым расстоянием между точками, отсчитанным вдоль оси x .

Максвелл предсказал теоретически существование электромагнитных волн в 1865 г. Первые опыты с несветовыми электромагнитными волнами были осуществлены Г. Герцем в 1888 г. Для получения волн Герц применил изобретенный им вибратор, состоящий из двух стержней, разделенных искровым промежутком (рис. 80.2). При подаче на вибратор высокого напряжения от индукционной катушки в промежутке проскачивала искра. Она закорачивала промежуток, и в вибраторе возникали затухающие электрические колебания. За время горения искры успевало совершиться большое число колебаний, порождавших цуг электромагнитных волн, длина которых приблизительно в два раза превышала длину вибратора. Помещая вибраторы разной длины в фокусе вогнутого параболического зеркала, Герц получал направленные плоские волны, длина которых составляла от 0,6 до 10 м.

Исследование волн Герц осуществлял также с помощью полуволнового вибратора с небольшим искровым промежутком посередине. При расположении такого вибратора параллельно вектору напряженности электрического поля волны в нем возбуждались колебания тока и напряжения. Поскольку длина вибратора выбиралась равной $\lambda/2$, колебания в нем вследствие резонанса достигали такой интенсивности, что вызывали проскачивание в искровом промежутке небольших искр.

С помощью больших металлических зеркал и асфальтовой призмы (размера более 1 м и массы 1200 кг) Герц осуществил отражение и преломление электромагнитных волн и обнаружил, что оба эти явления подчиняются законам, установленным в оптике

для световых волн. Отразив бегущую волну с помощью металлического зеркала в обратном направлении, Герц получил стоячую волну. Расстояние между узлами и пучностями волны позволяло определить длину волны λ . Умножив λ на частоту колебаний вибратора, можно было найти скорость электромагнитных волн, которая оказалась близкой к c . Рассматривая на пути волны решетку из параллельных друг другу медных проволок, Герц обнаружил, что при вращении решетки вокруг луча интенсивность волн, прошедших сквозь решетку, сильно изменяется. Когда проволоки, образующие решетку, были перпендикулярны к вектору E , волна проходила сквозь решетку без помех. При расположении проволок параллельно вектору E волна сквозь решетку не проходила. Таким образом была доказана поперечность электромагнитных волн.

Опыты Герца были продолжены Лебедевым¹⁾, который в 1894 г. получил электромагнитные волны длины 6 мм и исследовал прохождение их в кристаллах. При этом было обнаружено двойное преломление волн (см. § 100).

В 1896 г. Попов²⁾ впервые осуществил с помощью электромагнитных волн передачу сообщения на расстояние около 250 м (были переданы слова «Генрих Герц»). Тем самым были заложены основы радиотехники.

§ 81. Энергия и импульс электромагнитной волны

Распространение всякой волны связано с переносом энергии. Электромагнитные волны также переносят энергию. В отсутствие дисперсии скорость переноса энергии равна фазовой скорости v , и плотность потока энергии можно получить, умножив плотность энергии w на v (см. формулу (76.10)). В случае электромагнитных волн вектор плотности потока энергии принято обозначать буквой S . Следовательно, модуль вектора S равен

$$S = wv. \quad (81.1)$$

¹⁾ Петр Николаевич Лебедев (1866—1912) — русский физик.

²⁾ Александр Степанович Попов (1859—1906) — русский физик и электротехник.

Плотность энергии электромагнитного поля слагается из плотности энергии электрического поля и плотности энергии магнитного поля:

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} \quad (81.2)$$

(см. формулы (23.2) и (58.9)).

В вакууме и в непроводящей среде векторы **E** и **H** изменяются в каждой точке пространства в одинаковой фазе. Поэтому соотношение (80.13) между амплитудами напряженностей электрического и магнитного полей справедливо и для их мгновенных значений:

$$E \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H \sqrt{\mu_0 \mu}.$$

На этом основании можно написать, что

$$\frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{EH}{2} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu} = \frac{EH}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{c}} = \frac{EH}{2v},$$

где v — фазовая скорость волны ($\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$; $c/\sqrt{\epsilon \mu} = v$; см. формулы (37.10) и (80.9)).

Таким образом, выражение (81.2) можно представить в виде

$$\omega = \frac{EH}{v}.$$

Умножив найденное выражение для ω на скорость волны v , получим модуль плотности потока энергии:

$$S = \omega v = EH. \quad (81.3)$$

Векторы **E** и **H** взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны право-винтовую систему. Поэтому направление вектора **[EH]** совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен EH . Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение **E** и **H**:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}]. \quad (81.4)$$

Вектор **S** называется вектором Пойнтинга¹⁾.

Поскольку векторы **E** и **H** изменяются со временем по закону косинуса, модуль вектора Пойнтинга

¹⁾ Джон Генри Пойнтинг (1852—1914) — английский физик,

в каждой точке изменяется по закону квадрата косинуса. За период S дважды достигает максимального значения и дважды обращается в нуль. Среднее за период значение модуля S равно $EH/2$.

Поглощаясь в каком-либо теле, электромагнитная волна сообщает этому телу некоторый импульс, т. е. оказывает на него давление. Это можно показать на следующем примере. Пусть плоская волна падает по нормали на плоскую поверхность слabo проводящего

тела с ϵ и μ , равными единице (рис. 81.1). Электрическое поле волны возбудит в теле ток плотности $j = \sigma E$. Магнитное поле волны будет действовать на каждый из носителей тока с силой $F = e'[uB]$ (e' — заряд носителя, u — его скорость; см. формулу (37.4)). Сила, действующая на все n носителей, находящихся в единице объема, определяется выражением

$$\begin{aligned} F_{\text{ед. об}} &= ne' [u B] = \\ &= [(ne'u), B] = [j B] = \mu_0 [j H], \end{aligned}$$

Рис. 81.1. Электрическое поле E волны возбуждает в теле ток j . Магнитное поле H действует на этот ток с силой F

где $j = ne'u$ — плотность тока (см. формулу (24.4)). На рис. 81.1 видно, что направление этой силы совпадает с направлением распространения волны.

Поверхностному слою с площадью, равной единице, и толщиной dl сообщается в единицу времени импульс

$$dK = F_{\text{ед. об}} dl = \mu_0 j H dl \quad (81.5)$$

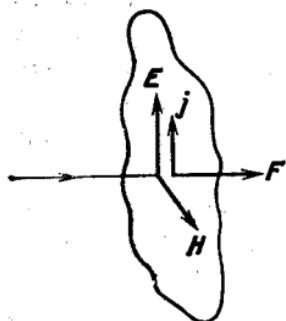
(векторы j и H взаимно перпендикулярны). В этом же слое в единицу времени поглощается энергия

$$dW = jE dl, \quad (81.6)$$

выделяющаяся в виде теплоты.

Импульс (81.5) и энергия (81.6) сообщаются слою той «частью» волны, которая поглощается в этом слое. Возьмем их отношение, опустив символ d :

$$\frac{K}{W} = \mu_0 \frac{H}{E}.$$



Приняв во внимание, что $\mu_0 H^2 = \epsilon_0 E^2$, получим

$$\frac{K}{W} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}.$$

Отсюда следует, что электромагнитная волна, несущая энергию W , обладает импульсом

$$K = \frac{1}{c} W. \quad (81.7)$$

Такая же связь между энергией и импульсом имеет место для частиц с нулевой массой (см. формулу (53.1) 1-го тома). Это не удивительно, поскольку согласно квантовым представлениям электромагнитная волна эквивалентна потоку фотонов, т. е. частиц, масса которых равна нулю.

Из (81.7) вытекает, что плотность импульса (т. е. импульс единицы объема) электромагнитного поля равна

$$K_{\text{ед. об}} = \frac{1}{c} \omega. \quad (81.8)$$

Плотность энергии ω связана с модулем вектора Пойнтинга соотношением $S = \omega c$. Заменив в (81.8) ω через S/c и учитя, что направления векторов K и S совпадают, можно написать

$$K_{\text{ед. об}} = \frac{1}{c^2} S = \frac{1}{c^2} [E \cdot H]. \quad (81.9)$$

Предположим, что падающая нормально на некоторое тело электромагнитная волна полностью поглощается этим телом. Тогда единице поверхности тела сообщается в единицу времени импульс волны, заключенный в цилиндре с площадью основания, равной единице, и высотой c . Согласно (81.8) этот импульс равен $(\omega/c)c = \omega$. Импульс, сообщаемый единице поверхности в единицу времени, равен давлению p на поверхность. Следовательно, в случае поглощающей поверхности $p = \omega$. Эта величина пульсирует с очень большой частотой. Поэтому практически может быть измерено ее среднее по времени значение. Таким образом,

$$p = \langle \omega \rangle. \quad (81.10)$$

Для идеально отражающей поверхности давление будет в два раза больше.

Световое давление было измерено П. Н. Лебедевым. Осуществив опыты, потребовавшие большой изобретательности и мастерства, Лебедев измерил в 1900 г. давление света на твердые тела, а в 1910 г.— на газы. Результаты измерений оказались в полном согласии с теорией Максвелла.

§ 82. Излучение диполя

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является колеблющийся электрический диполь. Примером такой системы может служить неподвижный точечный заряд $+q$ и колеблющийся около него точечный заряд $-q$ (рис. 82.1).

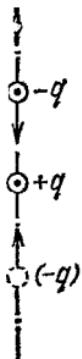


Рис. 82.1. Электрический диполь, образованный неподвижным зарядом $+q$ и колеблющимся около него зарядом $-q$

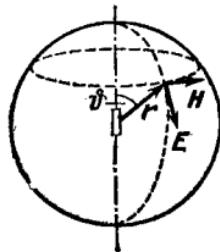


Рис. 82.2. Структура электромагнитной волны в волновой зоне

Дипольный электрический момент этой системы изменяется со временем по закону

$$\mathbf{p} = -qr = -qle \cos \omega t = -\mathbf{p}_m \cos \omega t, \quad (82.1)$$

где r — радиус-вектор заряда $-q$, l — амплитуда колебаний, e — единичный вектор, направленный вдоль оси диполя, $\mathbf{p}_m = -qle$.

Подобная излучающая система представляет особый интерес в связи с тем, что многие вопросы взаимодействия излучения с веществом могут быть объяснены классически, исходя из представлений об атомах как о системах зарядов, в которых содержатся электроны, способные совершать гармонические колебания около положения равновесия.

Рассмотрим излучение диполя, размеры которого малы по сравнению с длиной волны ($l \ll \lambda$). Такой диполь называется элементарным. В непосредственной близости от диполя картина электромагнитного поля очень сложна. Она сильно упрощается в так называемой волновой зоне диполя, которая начинается на расстоянии r , значительно превышающем длину волны ($r \gg \lambda$). Если волна распространяется в однородной и изотропной среде, то волновые поверхности в волновой зоне имеют сферическую форму (рис. 82.2). Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} в каждой точке перпендикулярны к лучу, т. е. к радиус-вектору, проведенному в данную точку из центра диполя.

Назовем сечения волновых поверхностей плоскостями, проходящими через ось диполя, меридианами, а плоскостями, перпендикулярными к оси диполя, — параллелями. Тогда можно сказать, что вектор \mathbf{E} в каждой точке волновой зоны направлен по касательной к меридиану, а вектор \mathbf{H} — по касательной к параллели. Если смотреть вдоль луча, то картина волны будет такой же, как на рис. 80.1, с тем отличием, что амплитуда при перемещении вдоль луча постепенно убывает.

В каждой точке векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} колеблются по закону $\cos(\omega t - kr)$. Амплитуды E_m и H_m зависят от расстояния r до излучателя и от угла ϑ между направлением радиус-вектора \mathbf{r} и осью диполя (см. рис. 82.2). Для вакуума эта зависимость имеет вид

$$E_m \propto H_m \propto \frac{1}{r} \sin \vartheta.$$

Среднее значение плотности потока энергии $\langle S \rangle$ пропорционально произведению $E_m H_m$, следовательно,

$$\langle S \rangle \propto \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta. \quad (82.2)$$

Из этой формулы вытекает, что интенсивность волны изменяется вдоль луча (при $\vartheta = \text{const}$) обратно пропорционально квадрату расстояния от излучателя. Кроме того, она зависит от угла ϑ . Сильнее всего излучает диполь в направлениях, перпендикулярных к его оси ($\vartheta = \pi/2$). В направлении оси ($\vartheta = 0$ и π) диполь не излучает. Зависимость интенсивности

излучения от угла θ наглядно изображается с помощью диаграммы направленности диполя (рис. 82.3).

Теоретический расчет дает, что мощность излучения диполя P (т. е. энергия, излучаемая по

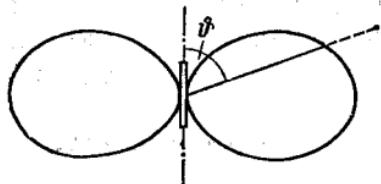


Рис. 82.3. Диаграмма направленности излучения диполя. Отрезок, отсекаемый диаграммой на луче, характеризует интенсивность излучения в данном направлении. Полная «диаграмма» получится, если привести лепестки во вращение вокруг оси диполя

всем направлениям в единицу времени) пропорциональна квадрату второй производной дипольного момента по времени:

$$P \propto \ddot{p}^2. \quad (82.3)$$

Согласно формуле (82.1) $\ddot{p}^2 = p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$. Подстановка этого значения в (82.3) дает

$$P \propto p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t. \quad (82.4)$$

Усреднив это выражение по времени, получим

$$\langle P \rangle \propto p_m^2 \omega^4. \quad (82.5)$$

Таким образом, средняя мощность излучения диполя пропорциональна квадрату амплитуды электрического момента диполя и четвертой степени частоты. Поэтому при малой частоте излучение электрических систем (например, линий передачи переменного тока промышленной частоты) бывает незначительным.

Согласно (82.1) $\ddot{p} = -q\dot{r} = -qa$, где a — ускорение колеблющегося заряда. Подстановка этого выражения для \ddot{p} в формулу (82.3) дает, что мощность излучения пропорциональна квадрату заряда и квадрату его ускорения:

$$P \propto q^2 a^2. \quad (82.6)$$

Эта формула определяет мощность излучения не только при колебаниях, но и при произвольном движении заряда. Всякий заряд, движущийся с ускорением, возбуждает электромагнитные волны, причем мощность излучения пропорциональна квадрату за-

ряда и квадрату ускорения. (Если скорость заряда превышает скорость электромагнитных волн в данной среде, то заряд излучает, двигаясь без ускорения; см. § 104.)

Заряд, совершающий гармонические колебания, излучает монохроматическую волну с частотой, равной частоте колебаний заряда. Если же ускорение заряда a изменяется не по гармоническому закону, излучение состоит из набора волн различных частот.

§ 83. Эффект Доплера для электромагнитных волн

В § 77 мы отмечали, что не существует особой среды, колебания которой представляли бы собой электромагнитную волну, в частности свет. Поэтому доплеровское смещение частоты световых волн определяется относительной скоростью источника и приемника волн.

Связем с приемником света начало координат инерциальной системы отсчета K , а с источником — начало координат системы K' (рис. 83.1). Оси x и x' направим, как обычно, вдоль вектора скорости V , с которой система K' (т. е. источник) движется относительно системы K (т. е. приемника). Уравнение плоской световой волны, испускаемой источником по направлению к приемнику, в системе K' имеет вид

$$E'(x', t') = A' \cos \left[\omega' \left(t' + \frac{x'}{c} \right) + \alpha' \right], \quad (83.1)$$

где ω' — частота волны, наблюдаемая в системе отсчета, связанной с источником, т. е. частота, с которой колебляется источник. Поскольку мы предполагаем, что световая волна распространяется в вакууме, фазовая скорость равна c . От источника к приемнику волна распространяется в направлении, противоположном оси x' ; поэтому перед x'/c стоит знак плюс.

Согласно принципу относительности законы природы имеют одинаковый вид во всех инерциальных

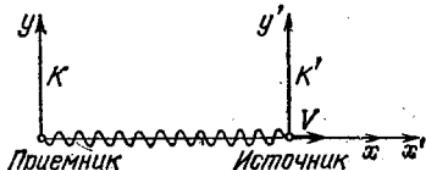


Рис. 83.1. Источник света движется относительно приемника в радиальном направлении со скоростью V

системах отсчета. Следовательно, в системе K волна (83.1) описывается уравнением

$$E(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{c} \right) + \alpha \right], \quad (83.2)$$

где ω — частота, регистрируемая в системе K , т. е. частота, воспринимаемая приемником. Напомним, что скорость c одинакова во всех системах отсчета; поэтому в уравнении (83.1) штрих при c отсутствует.

Уравнение волны в системе K можно получить из уравнения в системе K' , перейдя от x' и t' к x и t с помощью преобразований Лоренца. Согласно формулам (46.10) 1-го тома

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

($\beta = V/c$). Подставив эти значения в уравнение (83.1), получим

$$E'(x, t) = A' \cos \left\{ \omega' \left[\frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} + \frac{x - Vt}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right] + \alpha' \right\}.$$

Это выражение можно привести к виду

$$E'(x, t) = A' \cos \left[\omega' \frac{1 - V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \left(t + \frac{x}{c} \right) + \alpha' \right]. \quad (83.3)$$

Уравнения (83.2) и (83.3) описывают в системе K одну и ту же волну. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$\omega = \omega' \frac{1 - V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \omega' \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}.$$

Изменим обозначения: частоту источника ω' обозначим через ω_0 , а скорость источника относительно приемника обозначим буквой v . В результате формула примет вид

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad (83.4)$$

Скорость v в этой формуле есть величина алгебраическая. При удалении источника $v > 0$ и согласно (83.4) $\omega < \omega_0$; при приближении источника к приемнику $v < 0$, так что $\omega > \omega_0$.

В случае, если $v \ll c$, формулу (83.4) можно приближенно написать следующим образом:

$$\omega \approx \omega_0 \frac{1 - (1/2) v/c}{1 + (1/2) v/c} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c}\right) = \\ = \omega_0 \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{v^2}{4c^2}\right).$$

Ограничившись членами порядка v/c , получим

$$\omega = \omega_0 (1 - v/c). \quad (83.5)$$

По этой формуле можно найти относительное изменение частоты:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{v}{c} \quad (83.6)$$

$$(\Delta\omega = \omega - \omega_0).$$

Кроме продольного эффекта, для электромагнитных волн существует поперечный эффект Доплера. Он заключается в уменьшении регистрируемой приемником частоты, наблюдающемся в том случае, когда вектор относительной скорости направлен перпендикулярно к прямой, проходящей через приемник и источник (например, когда источник движется по окружности, в центре которой находится приемник). В этом случае частота ω_0 источника связана с частотой ω , регистрируемой приемником, соотношением

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (83.7)$$

Относительное изменение частоты при поперечном эффекте Доплера

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (83.8)$$

пропорционально квадрату отношения v/c и, следовательно, значительно меньше, чем при продольном эффекте, для которого относительное изменение частоты пропорционально первой степени v/c .

Существование поперечного эффекта Доплера было доказано экспериментально Айвсом в 1938 г. В опытах Айвса определялось изменение частоты излучения пучка атомов водорода, движущихся со скоростью $2 \cdot 10^6$ м/с. Эти опыты представляют собой непосредственное экспериментальное подтверждение справедливости преобразований Лоренца.

В общем случае относительную скорость можно разложить на две составляющие, одна из которых направлена вдоль луча, а другая — перпендикулярно к лучу. Первая составляющая обусловит продольный, вторая — поперечный эффект Доплера.

Продольный эффект Доплера используется для определения радиальной скорости звезд. Измерив относительное смещение линий в спектрах звезд, можно по формуле (83.4) определить v . В частности, таким способом было обнаружено разбегание галактик, о котором шла речь в § 58 1-го тома.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Напишите уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении оси z .
2. От каких величин зависит скорость звука в газе?
3. Что такое вектор Умова?
4. При каком условии групповая скорость волны совпадет с фазовой?
5. Что такое вектор Пойнтинга?
6. Как связаны энергия и импульс электромагнитной волны?

Примеры решения задач

1. Предположим, что температура воздуха изменяется с высотой h по линейному закону от значения $T_1 = 300$ К при $h_1 = 0$ до значения $T_2 = 250$ К на высоте $h_2 = 10,0$ км. Сколько времени t потребуется возбужденной на высоте h_2 звуковой волне, чтобы достичь земной поверхности?

Решение. Температура воздуха изменяется по закону $T = T_1 - kh$, где $k = (T_1 - T_2)/h_2$; поэтому скорость звука

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = a \sqrt{T_1 - kh},$$

где $a = \sqrt{\gamma R/M}$. Время, затрачиваемое волной на прохождение пути dh , равно dh/v . Следовательно, искомое время

$$\begin{aligned} t &= \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{v} = \frac{1}{a} \int_0^{h_2} \frac{dh}{\sqrt{T_1 - kh}} = \frac{-2}{ka} \sqrt{T_1 - kh} \Big|_0^{h_2} = \\ &= \frac{-2}{ka} (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}) = \frac{-2h_2}{T_1 - T_2} \sqrt{\frac{M}{\gamma R}} (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}) = \\ &= \frac{2h_2}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} \sqrt{\frac{M}{\gamma R}} = \frac{2 \cdot 10,0 \cdot 10^3}{\sqrt{300} + \sqrt{250}} \sqrt{\frac{29 \cdot 10^{-3}}{1,40 \cdot 8,31}} = 30 \text{ с.} \end{aligned}$$

2. В вакууме распространяется вдоль оси x плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны $H_m = 0,0500 \text{ A/m}$. Определить интенсивность волны I .

Решение. Интенсивностью I электромагнитной волны в данной точке пространства называется модуль среднего по времени значения вектора Пойнтинга:

$$I = |\langle \mathbf{S} \rangle| = |\langle [\mathbf{E}\mathbf{H}] \rangle|.$$

Амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны в вакууме связаны соотношением $\epsilon_0 E_m^2 = \mu_0 H_m^2$. Отсюда

$$E_m = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} H_m. \quad (1)$$

В случае плоской волны направление вектора Пойнтинга в любой точке остается неизменным; поэтому модуль его среднего значения равен среднему от модуля. Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \langle |[\mathbf{E}\mathbf{H}]| \rangle = \langle E_m \cos(\omega t - kx) \cdot H_m \cos(\omega t - kx) \rangle = \\ &= E_m H_m \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = E_m H_m / 2. \end{aligned}$$

С учетом формулы (1)

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_m^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{1/4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 0,0500^2} = 0,47 \text{ Вт/м}^2.$$

ЧАСТЬ 3

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Глава 12. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

§ 84. Предварительные сведения

Оптикой называется раздел физики, изучающий свойства и взаимодействие с веществом света, т. е. электромагнитных волн, длина которых лежит в пределах от 1 до 10^5 нм, включающих ультрафиолетовую, видимую и инфракрасную области спектра.

Свет представляет собой сложное явление: в одних случаях он ведет себя как электромагнитная волна, в других — как поток особых частиц (фотонов). Такое свойство называется корпускулярно-волновым дуализмом (корпускула — частица, дуализм — двойственность). В данном томе излагается волновая оптика, т. е. круг явлений, в основе которых лежит волновая природа света. Совокупность явлений, обусловленных корпускулярной природой света, будет рассмотрена в 3-м томе.

Длина волны видимого света заключена в пределах

$$\lambda_0 = 400 - 760 \text{ нм.} \quad (84.1)$$

Ультрафиолетовым называется излучение с длиной волны, меньшей 400 нм, инфракрасным — излучение с длиной волны, большей 760 нм.

Отношение скорости c световой волны в вакууме к фазовой скорости v в некоторой среде называется абсолютным показателем преломления этой среды и обозначается буквой n :

$$n = c/v. \quad (84.2)$$

Сравнение с формулой (80.9) дает, что $n = \sqrt{\epsilon\mu}$. Для подавляющего большинства прозрачных веществ μ практически не отличается от единицы. Поэтому можно считать, что

$$n = \sqrt{\epsilon}. \quad (84.3)$$

Эта формула связывает оптические свойства вещества с его электрическими свойствами.

Показатель преломления характеризует оптическую плотность среды. Среда с большим n называется оптически более плотной, чем среда с меньшим n . Соответственно среда с меньшим n называется оптически менее плотной, чем среда с большим n .

Значения (84.1) относятся к световым волнам в вакууме. В веществе длина световых волн иная. В случае колебаний частоты v длина волны в вакууме равна $\lambda_0 = c/v$. В среде, в которой фазовая скорость световой волны $v = c/n$, длина волны имеет значение $\lambda = v/v = c/vn = \lambda_0/n$. Следовательно, длина λ световой волны в среде с показателем преломления n связана с длиной λ_0 волны в вакууме соотношением

$$\lambda = \lambda_0/n. \quad (84.4)$$

В электромагнитной волне колеблются векторы E и H . Опыт показывает, что физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и другие действия света вызываются колебаниями электрического вектора. В соответствии с этим говорят о световом векторе, подразумевая под ним вектор напряженности электрического поля.

Амплитуду светового колебания мы будем обозначать, как правило, буквой A (иногда E_m). Соответственно изменение во времени и пространстве проекции светового вектора на направление, вдоль которого он колебается, описывается уравнением

$$E = A \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (84.5)$$

Здесь k — волновое число, r — расстояние, отсчитываемое вдоль направления распространения световой волны. Для плоской волны, распространяющейся в непоглощающей свет среде, $A = \text{const}$, для сферической волны A убывает как $1/r$, и т. д.

Гюйгенс¹⁾ предложил в 1690 г. способ построения фронта волны в момент времени $t + \Delta t$ по известному положению фронта в момент времени t . Согласно принципу Гюйгена каждый элемент

¹⁾ Христиан Гюйгенс (1629—1695) — нидерландский ученый.

поверхности, которой достигла в данный момент волна, является центром вторичных волн; огибающая этих волн дает положение волнового фронта в следующий момент (рис. 84.1).

Пусть плоская световая волна падает наклонно на плоскую поверхность раздела двух однородных и изотропных сред с показателями преломления n_1 и n_2 (рис. 84.2). Фазовая скорость волны в первой среде равна $v_1 = c/n_1$, во второй среде $v_2 = c/n_2$. Расстояние l_1 между точками 3 и 3' волна проходит за

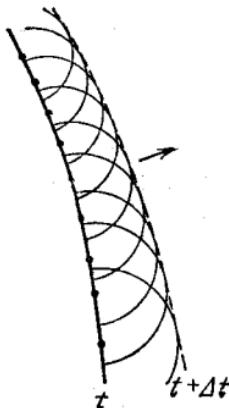


Рис. 84.1. Построение фронта волны по принципу Гюйгенса. Среда предполагается изотропной, но неоднородной — скорость волны в нижней части рисунка больше, чем в верхней

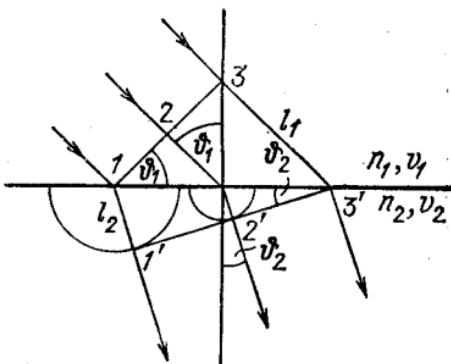


Рис. 84.2. Преломление плоской волны на границе раздела двух сред

время $t = l_1/v_1$. За это время вторичная волна, возбужденная в точке 1, пройдет до точки 1' путь $l_2 = v_2 t$. Из рисунка следует, что

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{v_2} \frac{v_1}{c} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}.$$

Мы получили закон преломления световых лучей, согласно которому отношение синуса угла падения (θ_1) к синусу угла преломления (θ_2) есть постоянная величина, равная относительному показателю преломления n_{12} второй среды относительно первой.

Хотя световые волны поперечны, они обычно не обнаруживают асимметрии относительно луча. Это обусловлено тем, что в естественном свете

(т. е. в свете, испускаемом обычными источниками) с равной вероятностью представлены колебания, совершающиеся в самых различных направлениях, перпендикулярных к лучу (рис. 84.3). В гл. 12—14 мы будем иметь дело с естественным светом. Поэтому направление колебаний светового вектора нас не будет интересовать.

Воспользовавшись условиями на границе двух диэлектриков (см. § 15), можно показать, что при отражении световой волны от границы среды оптически менее плотной со средой оптически более плотной (при $n_1 < n_2$) фаза колебаний светового вектора претерпевает изменение на π . При отражении от границы раздела среды оптически более плотной со средой оптически менее плотной (при $n_1 > n_2$) такого изменения фазы не происходит.

Световая волна, описываемая уравнением (84.5) (т. е. волна с точно определенной частотой), представляет собой процесс, не ограниченный во времени и в пространстве. Поэтому такая волна практически реализоваться не может. всякая реальная световая волна является наложением волн с длинами, заключенными в некотором интервале $\Delta\lambda$. В белом свете $\Delta\lambda$ охватывает весь диапазон воспринимаемых глазом электромагнитных волн, т. е. простирается от 400 до 760 нм. Свет, у которого $\Delta\lambda \ll \lambda$, называется квазимонохроматическим (латинская приставка «квази» означает «мнимо»).

Действие света на глаз (световое ощущение) сильно зависит от длины волны. Это легко понять, если учесть, что электромагнитные волны с λ , меньшей 400 нм и большей 760 нм, совсем не вызывают зрительного ощущения. Чувствительность среднего нормального человеческого глаза к излучению разной длины волны дается кривой относительной спектральной чувствительности (рис. 84.4). Наиболее чувствителен глаз к излучению с длиной волны 555 нм (зеленая часть спектра). Функция $V(\lambda)$ для этой длины волны принята равной единице. При том же потоке энергии оцениваемая

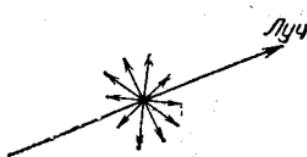


Рис. 84.3. В естественном свете все направления колебаний светового вектора, перпендикулярные к лучу, равновероятны

зрительно интенсивность света для других длин волн оказывается меньшей. Соответственно и $V(\lambda)$ для этих длин волн меньше единицы. Например, $V(\lambda) = 0,5$ означает, что для получения зрительного ощущения такой же интенсивности свет данной длины волны должен иметь плотность потока энергии в два раза большую, чем свет, для которого $V(\lambda) = 1$. Вне интервала видимых длин волн $V(\lambda)$ равна нулю.

Частота видимых световых волн лежит в пределах

$$v = (0,39 - 0,75) \cdot 10^{15} \text{ Гц.} \quad (84.6)$$

Частота изменений плотности потока энергии, переносимой волной, еще больше (она равна $2v$). Ни глаз, ни какой-либо иной приемник световой энергии

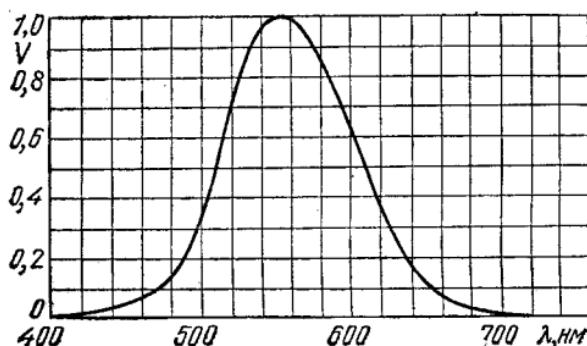


Рис. 84.4. Кривая относительной спектральной чувствительности человеческого глаза. По горизонтальной оси отложена длина волны λ , по вертикальной оси — относительная спектральная чувствительность $V(\lambda)$

не могут уследить за столь частыми изменениями потока энергии, вследствие чего они регистрируют усредненный по времени поток. Модуль среднего по времени значения плотности потока энергии, переносимой световой волной, называется интенсивностью света I в данной точке пространства. Плотность потока электромагнитной энергии определяется вектором Пойнтинга \mathbf{S} . Следовательно,

$$I = |\langle \mathbf{S} \rangle| = |\langle [E\mathbf{H}] \rangle|. \quad (84.7)$$

Измеряется интенсивность либо в энергетических единицах ($\text{Вт}/\text{м}^2$), либо в световых единицах, носящих название «люмен на квадратный метр» (см. ниже).

Согласно формуле (80.13) модули амплитуд векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в электромагнитной волне связаны соотношением $E_m \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_m \sqrt{\mu_0 \mu} = H_m \sqrt{\mu_0}$ (мы положили $\mu = 1$). Отсюда вытекает, что

$$H_m = \sqrt{\epsilon} E_m \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} = n E_m \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0},$$

где n — показатель преломления среды, в которой распространяется волна. Таким образом, H_m пропорциональна E_m и n : $H_m \propto n E_m$. Модуль среднего значения вектора Пойнтинга пропорционален $E_m H_m$. Поэтому можно написать, что

$$I \propto n E_m^2 = n A^2. \quad (84.8)$$

Следовательно, интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды световой волны и показателю преломления среды.

Заметим, что при рассмотрении распространения света в однородной среде можно считать, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды световой волны:

$$I \propto A^2. \quad (84.9)$$

Однако в случае прохождения света через границу раздела сред выражение для интенсивности, не учитывающее множитель n , приводит к несохранению светового потока.

Линии, вдоль которых распространяется световая энергия, называются лучами. Усредненный вектор Пойнтинга $\langle \mathbf{S} \rangle$ направлен в каждой точке по касательной к лучу. В изотропных средах направление $\langle \mathbf{S} \rangle$ совпадает с нормалью к волновой поверхности, т. е. с направлением волнового вектора \mathbf{k} . Следовательно, лучи перпендикулярны к волновым поверхностям. В анизотропных средах нормаль к волновой поверхности, вообще говоря, не совпадает с направлением вектора Пойнтинга, так что лучи не ортогональны волновым поверхностям.

Для характеристики интенсивности света с учетом его способности вызывать зрительное ощущение вводится величина Φ , называемая световым потоком. Для интервала $d\lambda$ световой поток определяется как произведение потока энергии $d\Phi$, на соответствующее значение функции $V(\lambda)$:

$$d\Phi = V(\lambda) d\Phi_s.$$

Поскольку функция $V(\lambda)$ — безразмерная величина, размерность светового потока совпадает с размерностью потока энергии. Это позволяет определить световой поток как поток световой энергии, оцениваемый по зрительному ощущению.

Единицей светового потока является люмен (лм). Экспериментально установлено, что световому потоку в 1 лм, образованному излучением с длиной волны 555 нм, соответствует поток энергии в 0,00146 Вт. Величина 0,00146 Вт/лм называется механическим эквивалентом света.

Отметим, что единицей освещенности является люкс (лк), равный освещенности, создаваемой потоком в 1 лм, равномерно распределенным по поверхности в 1 м².

В заключение напомним свойства тонкой собирающей линзы. Простейшая собирающая линза пред-

ставляет собой прозрачное (обычно стеклянное) тело, ограниченное двумя выпуклыми сферическими поверхностями (в частном случае одна из поверхностей может быть плоской). Линза называется тонкой, если ее толщиной можно пренебречь по сравнению с меньшим из радиусов кривизны ограничивающих линзу поверхностей. Прямая, проходящая через центры поверхностей, называется оптической осью линзы.

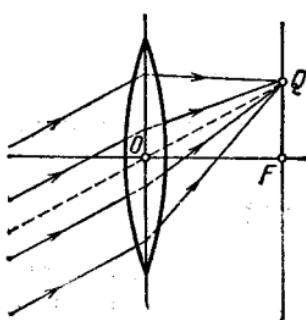


Рис. 84.5. Пучок параллельных лучей собирается линзой в точке Q фокальной плоскости

ны тонкой линзы, одинаков, то любой луч, идущий через центр линзы O , не изменяет своего направления.

Лучи, параллельные оптической оси, собираются в лежащей на оси точке F , называемой фокусом линзы. Проходящая через фокус перпендикулярная к оси плоскость называется фокальной. Направленный косо параллельный луч собирается линзой в одной из точек фокальной плоскости (рис. 84.5). Чтобы определить положение этой точки, нужно продолжить идущий через центр линзы луч до

пересечения его с фокальной плоскостью (см. изображенный штриховой линией луч OQ). В точке пересечения собираются и остальные лучи.

§ 85. Когерентность

Когерентностью называется согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов. Строго когерентными могут быть только монохроматические волны, т. е. волны, описываемые уравнением вида (84.5). У монохроматической волны амплитуда, частота и начальная фаза остаются постоянными неограниченно долго. Поэтому разность фаз двух монохроматических волн одинаковой частоты в каждой точке также остается постоянной.

Пусть две монохроматические волны одинаковой частоты, накладываясь друг на друга, возбуждают в некоторой точке пространства колебания одинакового направления:

$$A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Амплитуда A результирующего колебания в данной точке определяется выражением

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \delta,$$

где $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ (см. формулу (67.2)). В случае когерентных волн $\cos \delta$ имеет постоянное во времени (но свое для каждой точки пространства) значение, так что

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (85.1)$$

(интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды; см. (84.9)). Последнее слагаемое в этой формуле носит название интерференционного члена. В тех точках пространства, для которых $\cos \delta > 0$, I превышает $I_1 + I_2$; в точках, для которых $\cos \delta < 0$, I будет меньше $I_1 + I_2$. Таким образом, при наложении когерентных световых волн происходит перераспределение светового потока в пространстве, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других — минимумы интенсивности. Это явление называется интерференцией волн. Особенно отчетливо проявляется интерференция в том случае, когда интенсивность обеих интерферирующих волн

одинакова: $I_1 = I_2$. Тогда согласно (85.1) в максимумах $I = 4I_1$, в минимумах же $I = 0$.

У реальной световой волны амплитуда, частота и фаза непрерывно хаотически изменяются во времени. Если разность фаз δ двух таких волн принимает с равной вероятностью любые значения, то среднее по времени значение $\cos \delta$ равно нулю. Поэтому

$$\langle A^2 \rangle = \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle.$$

Отсюда заключаем, что интенсивность, наблюдаемая при наложении некогерентных волн, равна сумме интенсивностей, создаваемых каждой из волн в отдельности:

$$I = I_1 + I_2. \quad (85.2)$$

Если фазы двух волн изменяются беспорядочно, но их разность δ остается постоянной, то колебания, создаваемые волнами, будут когерентными и интенсивность определяется по формуле (85.1).

Временная когерентность. Из повседневного опыта известно, что при освещении какой-либо поверхности несколькими источниками света (например, двумя лампочками) освещенность монотонно убывает по мере удаления от источников света, и никакой интерференционной картины с характерным для нее чередованием максимумов и минимумов интенсивности не наблюдается. Это объясняется тем, что естественные источники света не когерентны.

Некогерентность естественных источников света обусловлена тем, что излучение светящегося тела слагается из волн, испускаемых многими атомами. Процесс излучения отдельного атома продолжается около 10^{-8} с. За это время успевает образоваться цуг волн протяженностью примерно 3 м. «Погаснув», атом через некоторое время «вспыхивает» вновь. Одновременно «вспыхивает» много атомов. Возбужденные ими цуги волн, налагаясь друг на друга, образуют испускаемую телом световую волну. Фаза нового цуга никак не связана с фазой предыдущего цуга. В испускаемой телом световой волне излучение одной группы атомов через время порядка 10^{-8} с сменяется излучением другой группы, причем фаза результирующей волны претерпевает случайные изменения.

Сменяет друг друга в некоторой точке пространства в данный момент времени относительно небольшое число цугов. Основная масса цугов проходит через рассматриваемую точку, не прерываясь. Поэтому фаза волны, образованной наложением огромного числа цугов, порождаемых отдельными атомами, не может совершать больших скачков. Она изменяется случайным образом небольшими шагами.

Когда некоторая величина x изменяется скачками, равными b , причем приращения $+b$ и $-b$ являются равновероятными, то говорят, что эта величина совершает случайные блуждания. Положим начальное значение x равным нулю. Если после N шагов величина равна x_N , то после $(N+1)$ -го шага она будет равна $x_{N+1} = x_N \pm b$, причем оба знака равновероятны. Допустим, что случайные блуждания совершаются многократно, начинаясь каждый раз с $x = 0$, и найдем среднее значение $\langle x_{N+1}^2 \rangle$:

$$\langle x_{N+1}^2 \rangle = \langle x_N^2 \rangle + \langle \pm 2x_N b \rangle + \langle b^2 \rangle = \langle x_N^2 \rangle + b^2$$

(удвоенное произведение при усреднении исчезает). Следовательно, независимо от значения N среднее значение x^2 увеличивается на b^2 . Поэтому $\langle x_N^2 \rangle = Nb^2$. Таким образом, величина, совершающая случайные блуждания, в среднем все больше удаляется от первоначального значения.

То же самое происходит и в том случае, если «шаги», совершаемые при случайных блужданиях, неодинаковы. Хотя оба направления при блужданиях равновероятны, величина в среднем все больше удаляется от первоначального значения.

Фаза волны совершает случайные блуждания. Время $t_{\text{ког}}$, за которое случайное изменение фазы волны достигает значения порядка π , называется временем когерентности. За это время колебание как бы забывает свою первоначальную фазу и становится некогерентным по отношению к самому себе.

Соответствующий расчет дает, что время когерентности обратно интервалу частот $\Delta\nu$, представленных в данной световой волне:

$$t_{\text{ког}} \sim 1/\Delta\nu \quad (85.3)$$

[знак « \sim » означает: «по порядку величины равно»].

Из соотношения (85.3) следует, что чем шире интервал частот, представленных в данной световой волне, тем меньше время когерентности этой волны. Для монохроматической волны $\Delta\nu = 0$ и время когерентности бесконечно велико.

Расстояние $l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}}$, на которое перемещается волна за время когерентности, называется длиной когерентности (или длиной цуга). Длина когерентности есть то расстояние, на котором случайное изменение фазы достигает значения порядка π .

Частота связана с длиной волны в вакууме соотношением $v = c/\lambda_0$. Продифференцировав это соотношение, найдем, что $\Delta v = c \Delta \lambda_0 / \lambda_0^2 \approx c \Delta \lambda / \lambda^2$ (знак минус, получающийся при дифференцировании, мы опустили, кроме того, положили $\lambda_0 \approx \lambda$). Заменив в формуле (85.3) Δv его выражением через λ и $\Delta\lambda$, получим для времени когерентности выражение

$$t_{\text{ког}} \sim \lambda^2 / c \Delta \lambda. \quad (85.4)$$

Отсюда для длины когерентности вытекает значение

$$l_{\text{ког}} \sim \lambda^2 / \Delta \lambda. \quad (85.5)$$

Оценим время и длину когерентности для случая $\lambda = 500 \text{ нм}$ (зеленая часть спектра) и $\Delta\lambda = 1 \text{ нм}$ ($1/360$ часть видимого спектра). Согласно (85.5),

$$l_{\text{ког}} \sim 500^2 / 1 = 25 \cdot 10^4 \text{ нм} = 25 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,25 \text{ мм}.$$

Соответственно

$$t_{\text{ког}} \sim l_{\text{ког}} / c = 25 \cdot 10^{-5} / (3 \cdot 10^8) \approx 10^{-12} \text{ с.}$$

Независимо от того, в какой среде (в частности, в вакууме) распространяется цуг, он содержит одно и тоже число «горбов» и «впадин», т. е. длин волн. Поэтому согласно формуле (84.4) длина цуга зависит от показателя преломления среды n — в среде с показателем преломления n длина цуга будет в n раз меньше, чем в вакууме. Следовательно, путь s в среде эквивалентен пути $s_0 = ns$ в вакууме. Имеющая размерность длины величина

$$L = ns \quad (85.6)$$

(где s — геометрическая длина пути) называется оптической длиной пути. В неоднородной среде

оптическая длина пути определяется формулой

$$L = \int n ds.$$

Интеграл берется вдоль пути, по которому распространяется свет.

Очевидно, что оптическая длина цуга во всех средах одинакова и равна оптической (или геометрической) длине цуга в вакууме.

В среде с показателем преломления n длина когерентности $l'_{\text{ког}} = vt_{\text{ког}} = (c/n)t_{\text{ког}} = l_{\text{ког}}/n$. Отсюда следует равенство $l'_{\text{ког}}n = l_{\text{ког}}$. Таким образом, оптическая длина когерентности во всех средах совпадает с оптической длиной когерентности данной волны в вакууме. В дальнейшем, говоря о длине когерентности, мы будем иметь в виду эту длину в вакууме.

Пространственная когерентность. В реальной световой волне амплитуда и фаза колебаний изменяются не только вдоль направления распространения волны, но и в плоскости, перпендикулярной к этому направлению. Случайные изменения разности фаз в двух точках этой плоскости увеличиваются с расстоянием между ними. Расстояние $\rho_{\text{ког}}$, на котором разность фаз достигает значения порядка π , называется длиной пространственной когерентности или радиусом когерентности.

Нарушение пространственной когерентности обусловлено тем, что различные участки протяженного источника света излучают несогласованно — со случайно изменяющейся разностью фаз. При прочих равных условиях длина пространственной когерентности уменьшается при увеличении размеров источника.

Если источник света имеет форму диска, диаметр которого виден из данной точки под углом ϕ , то, как показывают расчеты,

$$\rho_{\text{ког}} \sim \lambda/\phi, \quad (85.7)$$

где λ — длина волны. Для точечного источника $\phi = 0$ и длина пространственной когерентности бесконечно велика.

Угловой размер Солнца составляет около 0,01 рад, длина световых волн равна примерно 500 нм. Следовательно, радиус когерентности приходящих от

Солнца световых волн имеет значение порядка

$$r_{\text{ког}} \sim 500/0,01 = 5 \cdot 10^4 \text{ нм} = 0,05 \text{ мм.} \quad (85.8)$$

Радиус когерентности световой волны вблизи поверхности излучающего ее тела составляет несколько длин волн. По мере удаления от источника длина пространственной когерентности возрастает. Излучение лазера обладает огромной временной и пространственной когерентностью. У выходного отверстия лазера пространственная когерентность наблюдается во всем поперечном сечении светового пучка.

§ 86. Интерференционная картина от двух источников

Волны, излучаемые обычными (нелазерными) источниками света, являются некогерентными, вследствие чего получить интерференцию волн от таких источников нельзя¹⁾.

Когерентные световые волны можно получить, разделив (с помощью отражений или преломлений) волну, излучаемую одним источником, на две части. Если затем наложить эти две волны друг на друга, наблюдается интерференция. Разность оптических длин путей, проходимых волнами, не должна быть большой, так как складывающиеся колебания должны принадлежать одному и тому же результирующему цугу волн. Если эта разность составит заметную часть длины когерентности исходной волны, то наложатся колебания, принадлежащие разным цугам, и их разность фаз будет изменяться хаотическим образом.

Предположим, что разделение на две когерентные волны происходит в точке O (рис. 86.1). До точки P первая волна проходит в среде с показателем преломления n_1 путь s_1 , вторая волна проходит в среде с показателем преломления n_2 путь s_2 . Если в точке O фаза колебания равна ωt , то первая волна возбудит в точке P колебание $A_1 \cos \omega(t - s_1/v_1)$, а вторая волна — колебание $A_2 \cos \omega(t - s_2/v_2)$

¹⁾ Излучение лазера обладает столь большой временной и пространственной когерентностью, что интерференцию можно наблюдать при наложении световых волн, испускаемых двумя лазерами.

($v_1 = c/n_1$ и $v_2 = c/n_2$ — фазовые скорости волн). Следовательно, разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами в точке P , будет равна

$$\delta = \omega \left(\frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (n_2 s_2 - n_1 s_1).$$

Заменив ω/c через $2\pi v/c = 2\pi/\lambda_0$ (λ_0 — длина волны в вакууме), выражению для разности фаз можно придать вид

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad (86.1)$$

где

$$\Delta = n_2 s_2 - n_1 s_1 = L_2 - L_1 \quad (86.2)$$

есть величина, равная разности оптических длин проходимых волнами путей и называемая оптической разностью хода (см. формулу (85.6)).

Из формулы (86.1) видно, что если оптическая разность хода равна целому числу длин волн в вакууме

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (86.3)$$

то разность фаз δ оказывается кратной 2π и колебания, возбуждаемые в точке P обеими волнами, будут происходить с одинаковой фазой. Таким образом, соотношение (86.3) определяет условие интерференционного максимума.

Если оптическая разность хода равна полузелому числу длин волн в вакууме

$$\Delta = \pm (m + 1/2)\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (86.4)$$

то $\delta = \pm (2m + 1)\pi$, так что колебания в точке P совершаются в противофазе. Следовательно, соотношение (86.4) определяет условие интерференционного минимума.

Рассмотрим две цилиндрические когерентные световые волны, исходящие из источников S_1 и S_2 , имеющих вид параллельных тонких светящихся нитей

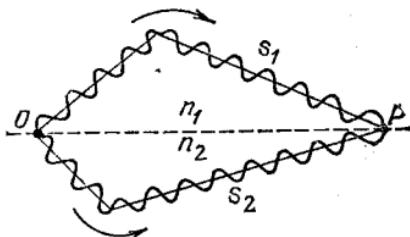


Рис. 86.1. Световая волна разделяется в точке O на две волны, которые интерферируют в точке P . Первая волна проходит путь s_1 в среде с показателем преломления n_1 , вторая волна — путь s_2 в среде с показателем преломления n_2

либо узких щелей (рис. 86.2). Область, в которой эти волны перекрываются, называется полем интерференции. В этой области наблюдается чередование мест с максимальной и минимальной интенсивностью света. Если в поле интерференции внести экран, то на нем будет видна интерференционная картина, которая имеет вид чередующихся светлых и

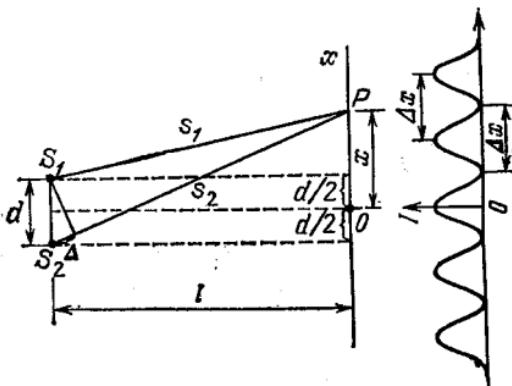


Рис. 86.2. Интерференция двух цилиндрических монохроматических волн. Справа показано изменение интенсивности I с расстоянием x от середины интерференционной картины

темных полос. Вычислим координаты этих полос в предположении, что экран параллелен плоскости, в которой лежат источники S_1 и S_2 . Возьмем на экране координатную ось x , перпендикулярную к S_1 и S_2 . Начало координат поместим в точке O , относительно которой S_1 и S_2 расположены симметрично. Источники будем считать колеблющимися в одинаковой фазе. На рис. 86.2 видно, что

$$s_1^2 = l^2 + (x - d/2)^2, \quad s_2^2 = l^2 + (x + d/2)^2.$$

Отсюда

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 + s_1)(s_2 - s_1) = 2xd.$$

Ниже будет выяснено, что для получения различной интерференционной картины расстояние d между источниками должно быть значительно меньше расстояния l до экрана. Расстояние x , в пределах которого образуются интерференционные полосы, также бывает значительно меньше l . При этих условиях можно положить $s_2 + s_1 \approx 2l$. Тогда $s_2 - s_1 =$

$= xd/l$. Умножив $s_2 - s_1$ на показатель преломления среды n , получим оптическую разность хода:

$$\Delta = n \frac{xd}{l}. \quad (86.5)$$

Подстановка этого значения Δ в условие (86.3) дает, что максимумы интенсивности будут наблюдаться при значениях x , равных

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (86.6)$$

Здесь $\lambda = \lambda_0/n$ — длина волны в среде, заполняющей пространство между источниками света и экраном.

Подставив значение (86.5) в условие (86.4), получим координаты минимумов интенсивности:

$$x_{\min} = \pm (m + 1/2) \frac{l}{d} \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (86.7)$$

Назовем расстояние между двумя соседними максимумами интенсивности расстоянием между интерференционными полосами, а расстояние между соседними минимумами интенсивности — шириной интерференционной полосы. Из формул (86.6) и (86.7) следует, что расстояние между полосами и ширина полосы имеют одинаковое значение, равное

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda. \quad (86.8)$$

Согласно формуле (86.8) расстояние между полосами растет с уменьшением расстояния d между источниками. При d , сравнимом с l , расстояние между полосами было бы того же порядка, что и λ , т. е. составляло бы примерно 500 нм ($5 \cdot 10^{-4}$ мм). В этом случае полосы были бы совершенно неразличимыми. Для того чтобы интерференционная картина стала отчетливой, необходимо соблюдение упоминавшегося выше условия: $d \ll l$.

Если интенсивность интерферирующих волн одинакова ($I_1 = I_2 = I_0$), то согласно (85.1) результирующая интенсивность в точках, для которых разность фаз равна δ , определяется выражением

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2(\delta/2).$$

Поскольку δ пропорциональна Δ , то в соответствии с (86.5) δ растет пропорционально x . Следовательно,

интенсивность изменяется вдоль экрана по закону квадрата косинуса (см. график на рис. 86.2).

Ширина интерференционных полос и расстояние между ними зависят от длины волны λ . Только в середине картины, при $x = 0$, совпадают максимумы всех длин волн. По мере удаления от середины картины максимумы разных цветов все больше и больше смещаются друг относительно друга. Это приводит к смазыванию интерференционной картины при наблюдении ее в белом свете. В квазимонохроматическом свете число различимых полос интерференции растет с уменьшением интервала частот $\Delta\nu$, представленных в этом свете.

Измерив расстояние Δx между полосами и зная l и d , можно по формуле (86.8) вычислить λ . Именно из опытов по интерференции света были впервые определены длины волн для световых лучей разного цвета.

Для получения интерференционной картины путем деления естественной световой волны на две части необходимо, чтобы оптическая разность хода Δ была меньше, чем длина когерентности. Это требование ограничивает число различимых интерференционных полос, наблюдаваемых по схеме, изображенной на рис. 86.2. С увеличением номера полосы m разность хода растет, вследствие чего четкость полос делается все хуже и хуже.

Из формулы (86.3) вытекает, что разность хода, при которой получается максимум m -го порядка, определяется соотношением

$$\Delta_m = \pm m\lambda_0 \approx \pm m\lambda.$$

Когда Δ_m достигает значения порядка длины когерентности, полосы исчезают. Следовательно, предельный наблюдаемый порядок интерференции определяется условием

$$m_{\text{пред}}\lambda \sim l_{\text{ког}} \sim \lambda^2/\Delta\lambda$$

(см. формулу (85.5)). Отсюда

$$m_{\text{пред}} \sim \lambda/\Delta\lambda. \quad (86.9)$$

Можно было бы, казалось, наблюдать интерференцию, пропустив свет от произвольного источника через два отверстия или две щели в непрозрачном

экране. Однако при малой пространственной когерентности волны, падающей на щели, пучки прошедшего через щели света окажутся некогерентными и интерференционная картина будет отсутствовать. Юнг¹⁾ получил в 1802 г. интерференцию от двух щелей, увеличив пространственную когерентность падающего на щели света. Такое увеличение Юнг осуществил, пропустив предварительно свет через небольшое отверстие в непрозрачном экране. Прошедшим через это отверстие светом освещались щели в другом непрозрачном экране. Таким способом Юнг впервые наблюдал интерференцию световых волн и определил их длины.

Рассмотрим две реальные интерференционные схемы, одна из которых использует для разделения

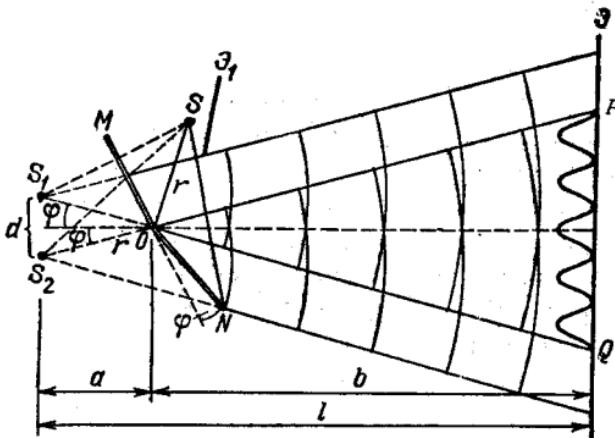


Рис. 86.3. Зеркала Френеля. Интерференция наблюдается в области OPQ , в которой отраженные волны накладываются друг на друга

световой волны на две части отражение, а другая — преломление света.

Зеркала Френеля²⁾. Два плоских соприкасающихся зеркала OM и ON располагаются так, что их отражающие поверхности образуют угол, близкий к π (рис. 86.3). Соответственно угол φ очень мал. Параллельно линии пересечения зеркал O на расстоянии r от нее помещается прямолинейный источник света S (например, узкая светящаяся щель). Зеркала отбра-

¹⁾ Томас Юнг (1773—1829) — английский ученый.

²⁾ Огюстен Жан Френель (1788—1827) — французский физик.

сывают на экран \mathcal{E} две цилиндрические когерентные волны, распространяющиеся так, как если бы они исходили из мнимых источников S_1 и S_2 . Непрозрачный экран \mathcal{E}_1 преграждает свету путь от источника S к экрану \mathcal{E} .

Луч OQ представляет собой отражение луча SO от зеркала OM , луч OP — отражение луча SO от зеркала ON . Угол между лучами OP и OQ , очевидно, равен 2φ . Поскольку S и S_1 расположены относительно зеркала OM симметрично, длина отрезка OS_1 равна OS , т. е. r . Аналогичные рассуждения приводят к тому же результату для отрезка OS_2 . Таким образом, расстояние между мнимыми источниками S_1 и S_2 равно

$$d = 2r \sin \varphi \approx 2r\varphi.$$

На рис. 86.3 видно, что $a = r \cos \varphi \approx r$. Следовательно,

$$l = r + b,$$

где b — расстояние от линии пересечения зеркал O до экрана \mathcal{E} .

Подстановка найденных значений d и l в формулу (86.8) дает ширину интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{r + b}{2r\varphi} \lambda. \quad (86.10)$$

Бипризма Френеля. Изготовленные из одного куска стекла две призмы с малым преломляющим углом ϑ имеют общую грань (рис. 86.4). Параллельно этой грани на расстоянии a от нее располагается прямолинейный источник света S .

Можно показать, что в случае, когда преломляющий угол ϑ призмы очень мал и углы падения лучей

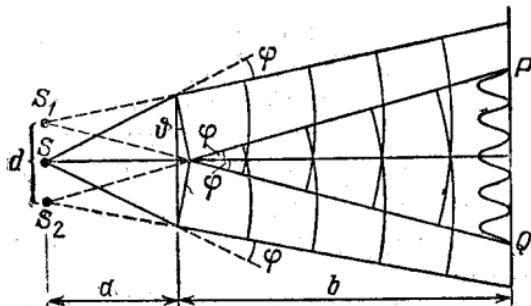


Рис. 86.4. Бипризма Френеля

на грань призмы не очень велики, все лучи отклоняются призмой на практически одинаковый угол, равный

$$\varphi = (n - 1) \theta$$

(n — показатель преломления призмы). Угол падения лучей на бипризму невелик. Поэтому все лучи отклоняются каждой из половин бипризмы на одинаковый угол φ . В результате образуются две когерентные цилиндрические волны, исходящие из мнимых источников S_1 и S_2 , лежащих в одной плоскости с источником S . Расстояние между мнимыми источниками равно

$$d = 2a \sin \varphi \approx 2a\varphi = 2a(n - 1)\theta.$$

Расстояние от источников до экрана

$$l = a + b.$$

Ширину интерференционной полосы находим по формуле (86.8):

$$\Delta x = \frac{a + b}{2a(n - 1)\theta} \lambda. \quad (86.11)$$

§ 87. Интерференция света при отражении от тонких пленок

При падении световой волны на тонкую прозрачную пленку или пластинку происходит отражение от обеих поверхностей пленки. В результате возникают две световые волны, которые при известных условиях могут интерферировать.

Пусть на прозрачную плоскопараллельную пластинку падает плоская световая волна, которую можно рассматривать как параллельный пучок лучей. На рис. 87.1 изображен один из лучей этого пучка. Пластинка отбрасывает вверх два параллельных пучка света, один из которых (пучок 1) образуется за счет отражения от верхней поверхности пластиинки, другой (пучок 2) — вследствие отражения от нижней поверхности (на рисунке каждый из этих пучков представлен только одним лучом). При входе в пластинку и при выходе из нее второй пучок претерпевает преломление.

Коэффициент отражения на границах воздух — пластинка и пластинка — воздух одинаков и для

стекла ($n = 1,5$) равен примерно 0,05 (5 %). Поэтому интенсивность обоих отраженных пучков практически одинакова. Кроме пучков 1 и 2 пластина отбросит вверх пучки, возникающие в результате трех-, пяти- и т. д. кратного отражения от поверхностей пластиинки.

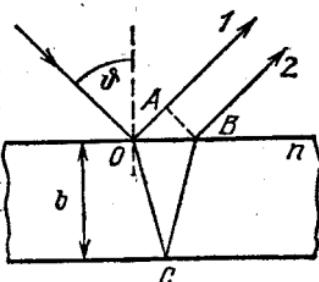


Рис. 87.1. Отражение луча от поверхностей прозрачной пластиинки. В точке O падающий луч разделяется на лучи 1 и 2

Однако ввиду их малой интенсивности эти пучки можно не принимать во внимание. (После двух отражений интенсивность будет равна $0,05 \cdot 0,05$, или 0,25 % интенсивности первоначального пучка. После трех отражений — $0,05 \cdot 0,05 \cdot 0,05$, или 0,0125 %, что составляет $1/400$ интенсивности однократно отраженного пучка.)

Если оптическая разность хода лучей 1 и 2 (см. рис. 87.1) будет существенно меньше

длины когерентности исходной волны, то волны, представленные этими лучами, будут когерентными и смогут интерферировать. На дальнейшем пути лучей от точек A и B разность фаз волн 1 и 2 не изменяется. Поэтому оптическая разность хода лучей 1 и 2

$$\Delta = ns_2 - s_1, \quad (87.1)$$

где s_1 — длина отрезка OA , s_2 — суммарная длина отрезков OC и CB , n — показатель преломления пластиинки. Показатель преломления среды, окружающей пластиинку, полагаем равным единице.

Оценим по порядку величины максимальную толщину пластиинки, при которой возможна интерференция. Очевидно, что разность хода (87.1) является функцией угла падения лучей на пластиинку. Для нормального падения лучей $\Delta = n \cdot 2b$. При наклонном падении оптическая разность хода будет того же порядка; поэтому можно положить $\Delta \sim 2bn \sim 2b$ (n — величина порядка единицы).

Для того чтобы волны могли интерферировать, их оптическая разность хода должна быть меньше длины когерентности, равной $\lambda^2/\Delta\lambda \approx \lambda_0^2/\Delta\lambda_0$ (см. формулу (85.5)). Следовательно, должно соблюдаться

условие $2b < \lambda_0^2 / \Delta\lambda_0$ (удвоенная толщина пластинки должна быть меньше длины когерентности падающей световой волны). Отсюда

$$b < \lambda_0^2 / 2\Delta\lambda_0. \quad (87.2)$$

При наблюдении в белом свете интервал $\Delta\lambda_0$ определяется способностью глаза различать оттенки света близких длин волн. Лучи, отличающиеся по длине волны менее чем на 2 нм, средний глаз воспринимает как имеющие одинаковый цвет. Поэтому для оценки толщины пластинки нужно считать $\Delta\lambda_0$ равным 2 нм. Положив $\lambda_0 = 500$ нм, получим предельное значение толщины пластинки:

$$b \sim 500^2 / (2 \cdot 2) \approx 6 \cdot 10^4 \text{ нм} = 0,06 \text{ мм.}$$

Таким образом, интерференция при освещении пластинки или пленки солнечным светом наблюдается только в том случае, если их толщина не превышает нескольких сотых миллиметра. При освещении светом с большей степенью когерентности интерференция наблюдается и при отражении от более толстых пластинок или пленок.

При вычислении разности фаз δ между колебаниями в лучах 1 и 2 нужно, кроме оптической разности хода, учесть возможность изменения фазы волны при отражении (см. § 84). В точке O отражение происходит от границы раздела среды, оптически менее плотной, со средой, оптически более плотной. Поэтому фаза волны изменяется на π . В точке C отражение происходит от границы раздела среды, оптически более плотной, со средой, оптически менее плотной, так что изменения фазы не происходит. В итоге между лучами 1 и 2 возникает дополнительная разность фаз, равная π . Ее можно учесть, добавив к разности хода половину длины волны в вакууме. В результате получим

$$\Delta = \Delta(\theta) + \lambda_0/2, \quad (87.3)$$

где $\Delta(\theta)$ — значение оптической разности хода, определяемое формулой (87.1).

При падении исходной волны под углами θ , для которых

$$\Delta = \Delta(\theta) + \lambda_0/2 = m\lambda_0, \text{ или } \Delta(\theta) = (m - 1/2)\lambda_0 \quad (87.4)$$

(где m — целое число), амплитуды отраженных волн складываются и интенсивность результирующей отраженной волны максимальна. При падении под углами, для которых

$$\Delta(\theta) + \lambda_0/2 = (m + 1/2)\lambda_0, \text{ или } \Delta(\theta) = m\lambda_0, \quad (87.5)$$

отраженные волны гасят друг друга, так что свет практически не отражается. Это явление лежит в основе просветления оптики. Прохождение света через каждую преломляющую поверхность линзы сопровождается отражением примерно 5 % падающего света. В сложных объективах такие отражения совершаются многократно и суммарная потеря светового потока достигает заметной величины. Кроме того, отражения от поверхностей линз приводят к возникновению бликов. В просветленной оптике для устранения отражения света на каждую свободную поверхность линзы наносится тонкая пленка вещества с показателем преломления иным, чем у линзы. Толщина пленки подбирается так, чтобы волны, отраженные от обеих ее поверхностей, погашали друг друга. Особенно хороший результат достигается в том случае, если показатель преломления пленки равен квадратному корню из показателя преломления линзы. При этом условии интенсивность обеих отраженных от поверхностей пленки волн одинакова.

Пусть тонкая плоскопараллельная пластинка освещается рассеянным квазимонохроматическим светом (рис. 87.2). Расположим параллельно пластинке линзу, в фокальной плоскости которой поместим экран. В рассеянном свете имеются лучи самых разнообразных направлений. Лучи, параллельные плоскости рисунка и падающие на пластинку под углом θ' , после отражения от поверхностей пластинки, собираются линзой в точке P' и создадут в этой точке освещенность, определяемую значением оптической разности хода. Лучи, идущие в других плоскостях, но падающие на пластинку под тем же углом θ' , собираются линзой в других точках, отстоящих от центра экрана O на такое же расстояние, как и точка P' . Освещенность во всех этих точках будет одинакова. Таким образом, лучи, падающие на пластинку под одинаковым углом θ' , создадут на экране со-

купность одинаково освещенных точек, расположенных по окружности с центром в O . Аналогично лучи, падающие под другим углом ϑ'' , создадут на экране совокупность одинаково (но иначе, поскольку Δ иная) освещенных точек, расположенных по окружности другого радиуса. В результате на экране возникнет система чередующихся светлых и темных круговых полос с общим центром в точке O . Каждая полоса образована лучами, падающими на пластинку

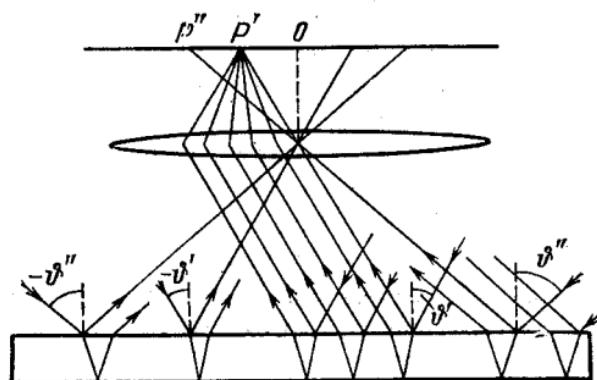


Рис. 87.2. Образование полос равного наклона в фокальной плоскости линзы

под одинаковым углом ϑ . Поэтому такие интерференционные полосы называются **полосами равного наклона**. При ином расположении линзы относительно пластиинки форма полос будет другой.

Каждая точка интерференционной картины обусловлена лучами, образующими до прохождения через линзу параллельный пучок. Поэтому при наблюдении полос равного наклона экран должен располагаться в фокальной плоскости линзы, т. е. так, как его располагают для получения на нем изображения бесконечно удаленных предметов. В соответствии с этим говорят, что полосы равного наклона локализованы в бесконечности. Роль линзы может играть хрусталик, а экрана — сетчатка глаза. В этом случае для наблюдения полос равного наклона глаз должен быть аккомодирован так, как при рассматривании очень удаленных предметов.

Согласно формуле (86.4) положение максимумов зависит от длины волны. Поэтому в белом свете

получается совокупность смешенных друг относительно друга полос, образованных лучами разных цветов, и интерференционная картина приобретает радужную окраску.

Рассмотрим пластинку в виде клина с углом при вершине ϕ (рис. 87.3). Пусть на нее падает параллельный пучок лучей. Теперь лучи, отразившиеся от

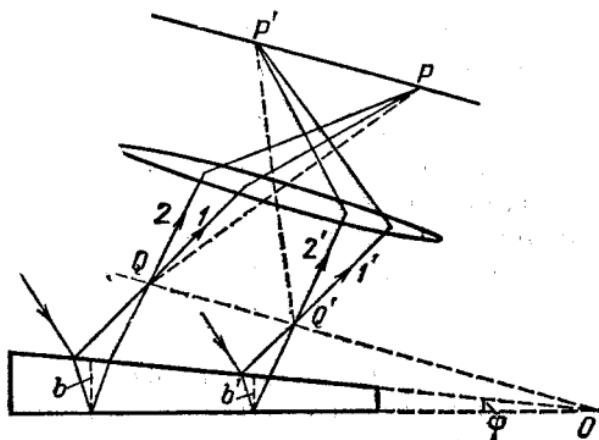


Рис. 87.3. Образование полос равной толщины

разных поверхностей пластиинки, не будут параллельными. Они пересекаются в точках Q , Q' и т. д. Можно показать, что эти и другие аналогичные им точки лежат в одной плоскости, проходящей через вершину клина O . При малом угле клина ϕ разность хода лучей можно с достаточной точностью вычислять по формуле (87.1), беря в качестве b толщину пластиинки в месте падения на нее лучей. Поскольку разность хода для лучей, отразившихся от различных участков клина, теперь неодинакова, освещенность экрана будет неравномерной — на экране появятся светлые и темные полосы. Каждая из таких полос возникнет в результате отражения от участков клина с одинаковой толщиной, вследствие чего их называют полосами равной толщины.

Интерференционная картина, получающаяся при отражении от клина плоской волны, локализована вблизи поверхности клина (см. штриховую линию Q , Q' , ... на рис. 87.3). По мере приближения к вершине клина условия когерентности становятся более благоприятными. Поэтому отчетливость интерферен-

ционной картины уменьшается при перемещении от вершины клина к его основанию. Может случиться, что картина наблюдается только для более тонкой части клина. Для остальной части на экране возникает равномерная освещенность.

Практически полосы равной толщины наблюдают, поместив вблизи клина линзу и за ней экран (см. рис. 87.3). Роль линзы может играть хрусталик, а роль экрана — сетчатка глаза.

При наблюдении в белом свете полосы будут окрашенными, так что поверхность пластинки или пленки представляется имеющей радужную окраску. Такую окраску имеют, например, расплывшиеся на поверхности воды тонкие пленки нефти или масла, а также мыльные пленки. Цвета побежалости, возникающие на поверхности стальных изделий при их закалке, также обусловлены интерференцией от пленки прозрачных окислов.

Сопоставим два случая интерференции при отражении от тонких пленок. Полосы равного наклона получаются при освещении пластинки постоянной толщины ($b = \text{const}$) рассеянным светом, в котором содержатся лучи различных направлений (ϑ варьирует в более или менее широких пределах). Локализованы полосы равного наклона в бесконечности. Полосы равной толщины наблюдаются при освещении пластинки непостоянной толщины (b изменяется) параллельным пучком света ($\vartheta = \text{const}$). Локализованы полосы равной толщины вблизи пластинки. В реальных условиях, например при наблюдении радужных цветов на мыльной или масляной пленке, изменяется как угол падения лучей, так и толщина пленки. В этом случае наблюдаются полосы смешанного типа.

Заметим, что интерференция от тонких пленок может наблюдаться не только в отраженном, но и в проходящем свете.

Классическим примером полос равной толщины являются кольца Ньютона. Они наблюдаются при отражении света от соприкасающихся толстой плоскопараллельной пластинки и плосковыпуклой линзы с большим радиусом кривизны (рис. 87.4). Роль тонкой пленки, от поверхностей которой отражаются когерентные волны, играет воздушный зазор

между пластинкой и линзой (вследствие большой толщины пластинки и линзы за счет отражений от других поверхностей интерференционные полосы не возникают). При нормальном падении света полосы равной толщины имеют вид концентрических окружностей, при наклонном падении — эллипсов. Найдем радиусы колец Ньютона, получающихся при падении света по нормали к пластинке. В этом случае оптическая разность хода равна удвоенной толщине зазора (предполагается, что в зазоре $n = 1$). Из рис. 87.4 следует, что

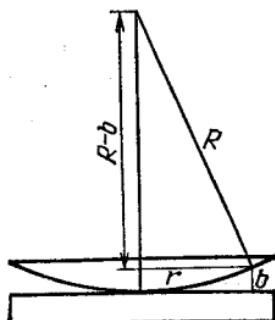


Рис. 87.4. Кольца Ньютона возникают при наложении волн, отраженных от сферической поверхности линзы и верхней поверхности плоской стеклянной пластиинки

(87.6) $b = r^2/2R$. Следовательно, $\Delta(\theta) = r^2/R$. Подстановка этого значения b в формулы (87.4) и (87.5) дает условие

$$r^2/R = (m - 1/2)\lambda_0, \text{ или } r = \sqrt{R\lambda_0(2m - 1)/2}, \\ (m = 1, 2, \dots)$$

для светлых колец и

$$r^2/R = m\lambda_0, \text{ или } r = \sqrt{R\lambda_0 2m/2}, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

для темных колец. Оба условия можно объединить в одно:

$$r = \sqrt{R\lambda_0 m'/2} \quad (m' = 1, 2, 3, \dots).$$

При нечетных m' получаются радиусы светлых колец, при четных — радиусы темных колец. Значению $m' = 0$ соответствует $r = 0$, т. е. точка в месте касания пластиинки и линзы. В этой точке наблюдается минимум интенсивности, обусловленный изменением фазы на π при отражении световой волны от пластиинки.

§ 88. Многолучевая интерференция

В предыдущих параграфах мы рассматривали интерференцию двух волн, т. е. двухлучевую интерференцию. Теперь исследуем случай, когда интерферирует много световых лучей.

Допустим, что в данную точку экрана приходит N лучей с одинаковой амплитудой A_0 , причем фаза каждого следующего луча сдвинута относительно

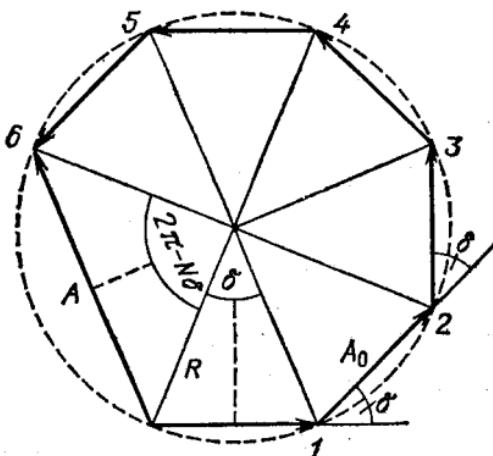


Рис. 88.1. Векторная диаграмма для определения амплитуды A суммы N колебаний с одинаковой амплитудой A_0 , сдвинутых по фазе друг относительно друга на один и тот же угол δ . Рисунок выполнен для $N = 6$

фазы предыдущего луча на одну и ту же величину δ . Найдем амплитуду A результирующего колебания с помощью векторной диаграммы (рис. 88.1; см. § 67). Векторы складываемых колебаний образуют часть многоугольника, вписанного в окружность радиуса R . Из рисунка следует, что

$$A_0/2 = R \sin(\delta/2),$$

$$A/2 = R \sin[(2\pi - N\delta)/2] = R \sin(\pi - N\delta/2) = R \sin(N\delta/2).$$

Исключив R из этих уравнений, придем к соотношению

$$A = A_0 \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}, \quad (88.1)$$

которое выражает амплитуду A через амплитуду A_0 и сдвиг по фазе δ .

При значениях $\delta = 2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) числитель и знаменатель в (88.1) обращаются в нуль, т. е. выражение для A становится неопределенным. Однако ясно, что в этом случае все колебания совершаются синфазно (с одинаковой фазой), вследствие чего

$$A = NA_0. \quad (88.2)$$

Такой же результат получается, если раскрыть неопределенность выражения (88.1) по правилу Лопитала (которое нужно применить дважды).

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому из (88.1) следует, что интенсивность результирующего колебания

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}, \quad (88.3)$$

где I_0 — интенсивность, создаваемая каждым из лучей в отдельности.

Согласно (88.2) $A^2 = N^2 A_0^2$. Следовательно, при

$$\delta = 2\pi m \quad \text{или} \quad \Delta = m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (88.4)$$

(Δ — оптическая разность хода) результирующая интенсивность

$$I = N^2 I_0. \quad (88.5)$$

Таким образом, интенсивность результирующего колебания в максимуме в N^2 раз больше интенсивности отдельного колебания.

Максимумы, интенсивность которых определяется по формуле (88.5), называются главными. Их положение определяется условием (88.4). Число m называют порядком главного максимума.

Рассмотрим промежуток между двумя соседними главными максимумами, например между максимумами нулевого ($m = 0$) и первого ($m = 1$) порядков. В этом промежутке δ изменяется от нуля до 2π , а $\delta/2$ от нуля до π . Знаменатель выражения (88.3) всюду, кроме концов промежутка, отличен от нуля, причем в середине промежутка достигает наибольшего значения, равного единице. Величина $N\delta/2$ принимает в рассматриваемом промежутке все значения от нуля до $N\pi$. При значениях $\pi, 2\pi, \dots, (N-1)\pi$ числитель выражения (88.3) становится равным нулю,

Следовательно, в промежутке между соседними главными максимумами располагаются $N - 1$ минимумов интенсивности с $I = 0$. Положение этих минимумов определяется условием

$$\delta = \frac{k'}{N} \cdot 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta = \frac{k'}{N} \lambda_0 \quad (k' = 1, 2, \dots, N - 1). \quad (88.6)$$

В промежутках между $N - 1$ минимумами располагаются $N - 2$ вторичных максимумов. Наибольшей интенсивностью обладают вторичные максимумы, ближайшие к главным. Соответствующий расчет дает, что их интенсивность примерно в 22 раза меньше интенсивности главного максимума. Остальные вторичные максимумы еще слабее.

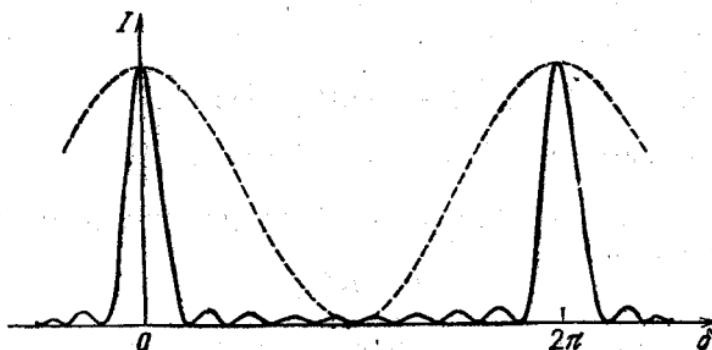


Рис. 88.2. Главные и вторичные максимумы в случае десятилучевой интерференции. Штриховой линией показана интенсивность в случае двухлучевой интерференции

На рис. 88.2 изображен график функции $I(\delta)$ для $N = 10$. Для сравнения показан график интенсивности для $N = 2$ (двулучевая интерференция; см. кривую $I(x)$ на рис. 86.2). Из рисунка следует, что с увеличением числа интерферирующих лучей главные максимумы делаются все более узкими. Вторичные максимумы настолько слабы, что практически интерференционная картина имеет вид узких ярких линий на темном фоне.

Мы рассмотрели случай, когда амплитуда интерферирующих лучей одинакова. Такие условия осуществляются, например, в дифракционной решетке (см. § 94). Теперь допустим, что амплитуда (а

следовательно, и интенсивность) интерферирующих лучей убывает в геометрической прогрессии:

$$A_2 = A_1 \rho, \quad A_3 = A_2 \rho = A_1 \rho^2 \text{ и т. д.}$$

($\rho < 1$). Расчет, который выходит за рамки данной книги, приводит к зависимости I от δ , изображенной

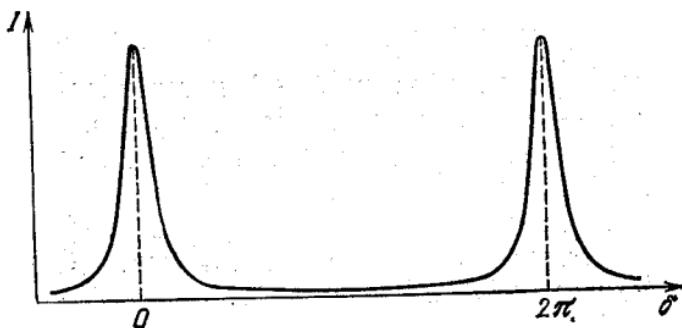


Рис. 88.3. Интенсивность в случае интерференции лучей, амплитуда которых убывает в геометрической прогрессии. Рисунок выполнен для $\rho = 0,8$

на рис. 88.3. Интерференционная картина имеет вид узких резких линий на практически темном фоне. В отличие от рис. 88.2 вторичные максимумы отсутствуют.

Случай большого числа лучей с убывающей в геометрической прогрессии интенсивностью осуществляется в интерферометре

Фабри — Перо¹). Этот прибор состоит из двух стеклянных или кварцевых пластинок, разделенных воздушным промежутком (рис. 88.4). Тщательной обработкой добиваются того, чтобы неровности внутренних поверхностей пластинок не

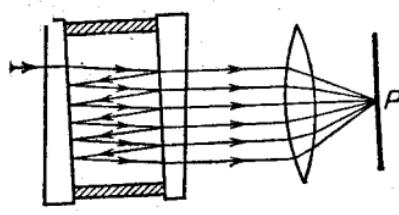


Рис. 88.4. Ход луча в эталоне Фабри — Перо

превышали нескольких волн. Затем на частично прозрачные металлические пленки, обладающие большой отражательной способностью. Внешние поверхности пла-

¹⁾ Шарль Фабри (1867—1945) — французский физик, Альфред Перо (1863—1925) — французский физик,

стинок делают слегка скошенными относительно внутренних, чтобы устраниТЬ блики, обусловленные отражением света от этих поверхностей. В первоначальной конструкции интерферометра одна из пластинок могла перемещаться относительно другой неподвижной пластиинки с помощью микрометрического

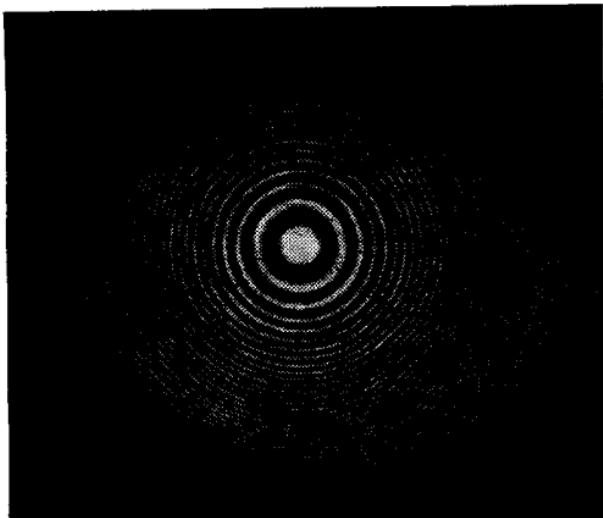


Рис. 88.5. Полосы равного наклона, получающиеся в эталоне Фабри — Перо

винта. Однако ненадежность такой конструкции привела к тому, что она вышла из употребления. В современных конструкциях пластиинки закреплены неподвижно. Параллельность внутренних рабочих плоскостей достигается тем, что между пластиинками устанавливается кольцо из инвара или кварца (оба эти материала отличает крайне малый температурный коэффициент расширения). Кольцо имеет с каждой стороны по три выступа с тщательно отшлифованными торцами. Пластиинки прижимаются к кольцу пружинами. Такое устройство надежно обеспечивает строгую параллельность внутренних плоскостей пластиинок и постоянство расстояния между ними. Подобный интерферометр с фиксированным расстоянием между пластиинками называется эталоном Фабри — Перо. При пропускании сквозь прибор расходящегося пучка света в фокальной плоскости

линзы возникают полосы равного наклона, имеющие вид резких колец (рис. 88.5).

Интерферометр Фабри — Перо используется в спектроскопии для изучения тонкой структуры спектральных линий. Он нашел также широкое применение в метрологии для сравнения длины стандартного метра с длинами волн отдельных спектральных линий.

§ 89. Интерферометры

Интерферометрами называются оптические измерительные приборы, действие которых основано на интерференции световых волн. Они применяются для измерения длин волн спектральных линий,

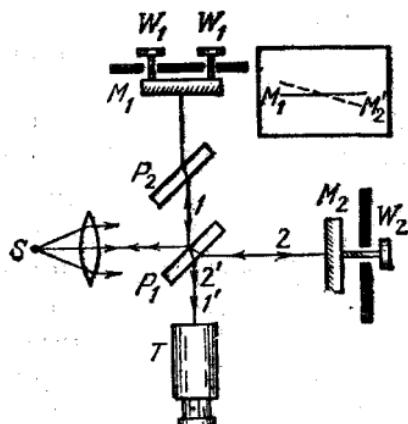
показателей преломления сред, длин, углов, для контроля качества оптических поверхностей и т. п.

Имеется много разновидностей интерферометров. Мы рассмотрим интерферометр Майкельсона¹⁾ схема которого изображена на рис. 89.1. Пучок света от источника S падает на полупрозрачную пластинку P_1 , покрытую тонким слоем серебра. Половина упавшего светового потока отражается пластинкой P_1 в направлении луча 1, половина проходит сквозь пластинку и распространяется в направлении луча 2. Пучок 1 отражается от зеркала M_1 и возвращается к пластинке P_1 , где он делится на два равных по интенсивности пучка. Один из них проходит сквозь пластинку и образует пучок 1', второй отражается в направлении к источнику S ; этот пучок

Рис. 89.1. Схема интерферометра Майкельсона. В рамке показано пересечение зеркала M_1 с мнимым изображением M'_2 зеркала M_2

проходит сквозь пластинку и распространяется в направлении луча 2. Пучок 1' отражается от зеркала M_1 и возвращается к пластинке P_1 , где он делится на два равных по интенсивности пучка. Один из них проходит сквозь пластинку и образует пучок 1', второй отражается в направлении к источнику S ; этот пучок

¹⁾ Альберт Абрахам Майкельсон (1852—1931) — американский физик.



нас интересовать больше не будет. Пучок 2, отразившись от зеркала M_2 , тоже возвращается к пластинке P_1 , где он делится на две части: отразившийся от полупрозрачного слоя пучок 2' и прошедший сквозь слой пучок, которым мы также интересоваться не будем. Пучки света 1' и 2' имеют одинаковую интенсивность.

При соблюдении условий когерентности пучки 1' и 2' будут интерферировать. Результат интерференции зависит от оптической разности хода от пластинки P_1 до зеркал M_1 и M_2 и обратно. Луч 2 проходит толщу пластинки P_1 трижды, луч 1 — только один раз. Чтобы скомпенсировать возникающую за счет этого разную (вследствие дисперсии) для различных длин волн оптическую разность хода, на пути луча 1 ставится точно такая, как P_1 , но не посеребренная пластинка P_2 . Тем самым уравниваются пути лучей 1 и 2 в стекле. Интерференционная картина наблюдается с помощью зрительной трубы T .

Заменим мысленно зеркало M_2 его мнимым изображением M'_2 в полупрозрачной пластинке P_1 . Тогда лучи 1' и 2' можно рассматривать как возникшие за счет отражения от прозрачной пластинки, ограниченной плоскостями M_1 и M'_2 . С помощью юстировочных винтов W_1 можно изменять угол между этими плоскостями, в частности их можно устанавливать строго параллельно друг другу. Вращая микрометрический винт W_2 , можно плавно перемещать зеркало M_2 , не изменяя его наклона. Тем самым можно изменять толщину «пластинки», в частности можно заставить плоскости M_1 и M'_2 пересечься друг с другом.

Характер интерференционной картины зависит от юстировки зеркал и от расходимости пучка света, падающего на прибор. Если пучок параллелен, а плоскости M_1 и M'_2 образуют угол, отличный от нуля, то в поле зрения трубы наблюдаются прямолинейные полосы равной толщины, расположенные параллельно линии пересечения плоскостей M_1 и M'_2 . В белом свете все полосы, кроме совпадающей с линией пересечения полосы нулевого порядка, будут окрашенными. Нулевая полоса оказывается черной, так как луч 1 отражается от пластинки P_1 снаружи, а луч

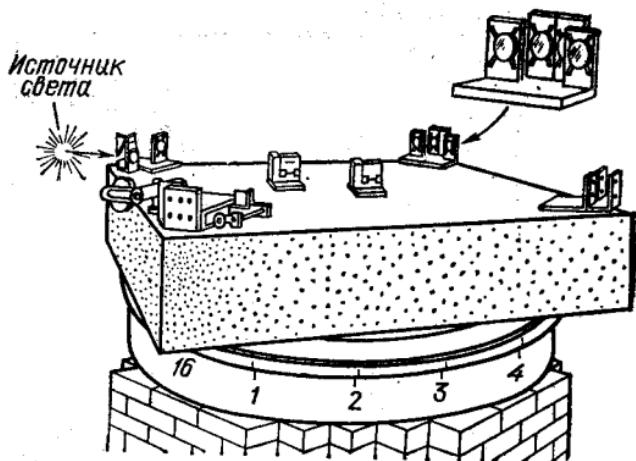


Рис. 89.2. Общий вид прибора, построенного Майкельсоном и Морли для обнаружения эфирного ветра

2 — изнутри, вследствие чего между ними возникает разность фаз, равная π . В белом свете полосы наблюдаются лишь при малой толщине «пластинки» $M_1 M'_2$ (см. (87.2)). В монохроматическом свете, соответствующем красной линии кадмия, Майкельсон наблюдал отчетливую интерференционную картину при разности хода около 500 000 длин волн. Расстояние между M_1 и M'_2 составляет в этом случае приблизительно 150 мм.

При слегка расходящемся пучке света и строго параллельном расположении плоскостей M_1 и M'_2 получаются полосы равного наклона, имеющие вид концентрических колец.

С помощью изобретенного им интерферометра Майкельсон осуществил несколько вошедших в историю физики экспериментов, в частности произвел первое сравнение длины волны красной линии кадмия с длиной нормального (эталонного) метра.

В 1881 г. Майкельсон осуществил знаменитый опыт, с помощью которого он рассчитывал обнаружить движение Земли относительно гипотетической среды, названной мировым эфиром (эфирный ветер). В то время предполагали, что свет представляет собой колебания этой среды. В 1887 г. Майкельсон повторил свой опыт совместно с Морли¹⁾, на более со-

¹⁾ Эдвард Морли (1838—1923) — американский химик.

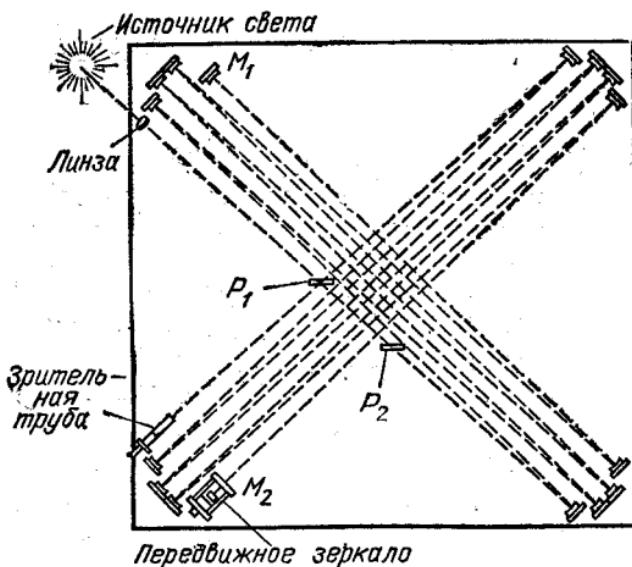


Рис. 89.3. Схема хода лучей в приборе Майкельсона — Морли. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 89.1

вершенном приборе, изображенном на рис. 89.2. Кирпичное основание поддерживало кольцевой чугунный желоб с ртутью. На ртути плавал деревянный поплавок, имеющий форму нижней половины разрезанного вдоль бублика. На этот поплавок устанавливалась массивная квадратная каменная плита. Такое устройство позволяло плавно поворачивать плиту вокруг вертикальной оси прибора. На плите монтировался интерферометр Майкельсона, видоизмененный так, что оба луча, прежде чем вернуться к полупрозрачной пластинке, несколько раз проходили туда и обратно путь, совпадающий с диагональю плиты. Схема хода лучей показана на рис. 89.3.

В основе опыта лежали следующие соображения. Предположим, что плечо PM_2 интерферометра совпадает с направлением движения Земли относительно эфира (рис. 89.4). Тогда время, необходимое лучу 1,

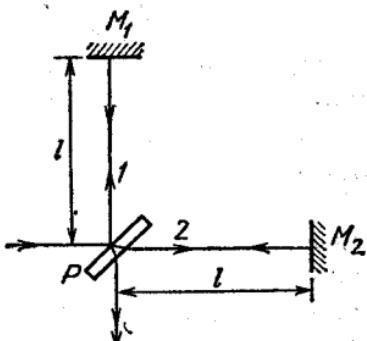


Рис. 89.4. Упрощенная схема интерферометра Майкельсона

чтобы пройти путь до зеркала M_1 и обратно, будет отлично от времени, требуемого для прохождения пути PM_2P лучом 2. В результате, даже при равенстве длин обоих плеч, лучи 1 и 2 приобретут некоторую разность хода. Если повернуть прибор на 90° , плечи поменяются местами и разность хода изменит знак. Это должно привести к смещению интерференционной картины. Чтобы вычислить это смещение, найдем времена прохождения соответствующих путей лучами 1 и 2.

Пусть скорость Земли относительно эфира равна v . Если эфир не увлекается Землей и скорость света относительно эфира равна c , то скорость света относительно прибора будет равна $c - v$ для направления PM_2 и $c + v$ для направления M_2P . Следовательно, время для луча 2 определяется выражением

$$t_2 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \\ = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (89.1)$$

(скорость движения Земли по орбите равна 30 км/с, поэтому $v^2/c^2 = 10^{-8} \ll 1$).

Прежде чем приступить к вычислению времени t_1 , рассмотрим следующий пример. Пусть лодке, которая развивает скорость c относительно воды, требуется пересечь реку, текущую со скоростью v , в направлении, точно перпендикулярном к ее берегам

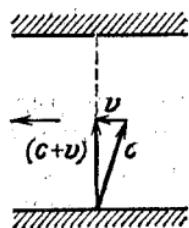


Рис. 89.5. Для того чтобы лодку не сносило вниз по течению, скорость лодки c должна быть направлена так, чтобы ее сумма со скоростью течения реки v была направлена перпендикулярно к берегам

(рис. 89.5). Для того чтобы лодка перемещалась в заданном направлении, ее скорость c относительно воды должна быть направлена так, как показано на рисунке. Поэтому скорость лодки относительно берегов будет равна $|c + v| = \sqrt{c^2 + v^2}$. Такова же будет (как предполагал Майкельсон) скорость луча 1 от-

носительно прибора. Следовательно, время для луча I равно

$$t_1 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (89.2)$$

(Мы воспользовались формулами $\sqrt{1-x} \approx 1-x/2$ и $1/(1-x) \approx 1+x$, справедливыми для $x \ll 1$.)

Согласно (85.6) оптическая длина пути $L = ns$. Геометрическая длина пути $s = vt$, где v — скорость света в данной среде, а t — время, затрачиваемое светом на прохождение пути s . Следовательно, $L = nvt = ct$. Отсюда для оптической разности хода получается выражение $\Delta = L_2 - L_1 = c(t_2 - t_1)$. Подставив сюда значения (89.1) и (89.2) для t_2 и t_1 , получим разность хода лучей 2 и 1:

$$\Delta = 2l \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \right] = l \frac{v^2}{c^2}.$$

При повороте прибора на 90° разность хода изменит знак. Следовательно, число полос, на которое сместится интерференционная картина, составит

$$\Delta N = \frac{2\Delta}{\lambda_0} = 2 \frac{l}{\lambda_0} \frac{v^2}{c^2}. \quad (89.3)$$

Длина плеча l (учитывая многократные отражения) была равна 11 м. Длина волны света в опыте Майкельсона и Морли равнялась 590 нм. Подстановка этих значений в (89.3) дает

$$\Delta N = 2 \frac{11}{590 \cdot 10^{-9}} \cdot 10^{-8} = 0,37 \approx 0,4 \text{ полосы.}$$

Прибор позволял обнаружить смещение порядка 0,01 полосы. Однако никакого смещения интерференционной картины обнаружено не было. Чтобы исключить возможность того, что в момент измерений плоскость горизонта окажется перпендикулярной к вектору орбитальной скорости Земли, опыт повторялся в разное время суток. Впоследствии опыт производился в разное время года (за год орбитальная скорость Земли поворачивается в пространстве на 360°) и неизменно давал отрицательные результаты. Обнаружить эфирный ветер не удавалось.

Было предпринято несколько попыток объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона — Морли, не отказываясь от гипотезы о мировом эфире. Однако эти попытки оказались несостоятельными. Исчерпывающее непротиворечивое объяснение всех опытных фактов, в том числе и результатов опыта Майкельсона и Морли, было дано Эйнштейном в 1905 г. Эйнштейн пришел к выводу, что мирового эфира, т. е. особой среды, которая могла бы служить абсолютной системой отсчета, не существует. В соответствии с этим Эйнштейн распространил механический принцип относительности на все без исключения физические явления. Далее Эйнштейн постулировал, что скорость света в вакууме не зависит от движения источников и приемников света и, следовательно, одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Принцип относительности и принцип постоянства скорости света образуют основу созданной Эйнштейном специальной теории относительности (см. гл. 7 1-го тома).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем определяется цветовое восприятие света — частотой или длиной волны?
2. В каком случае луч, идущий через центр тонкой линзы, не изменяет своего направления?
3. Что такое когерентность?
4. Как связано время когерентности с интервалом частот, представленных в световой волне?
5. Что такое интерференция?
6. Зачем в опыте Юнга понадобилось поставить перед преградой с двумя отверстиями дополнительную преграду с одним малым отверстием?
7. Каким способом были впервые определены длины световых волн?

Примеры решения задач

1. Источник света диаметра $d = 30,0$ см находится от места наблюдения на расстоянии $l = 200$ м. В излучении источника содержатся длины волн в интервале от $\lambda_1 = 490$ нм до $\lambda_2 = 510$ нм. Оценить для этого излучения: а) время когерентности t_{kog} , б) длину когерентности l_{kog} , в) радиус когерентности r_{kog} .

Решение.

а) $t_{\text{ког}} \cong \frac{\lambda^2}{c \Delta \lambda}$ (\cong означает «по порядку величины равно»).

Приняв $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, можно написать, что

$$t_{\text{ког}} \cong \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{4c(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{(490 + 510)^2 \cdot 10^{-18}}{4 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot (510 - 490) \cdot 10^{-9}} = 4 \cdot 10^{-14} \text{ с};$$

б) $l_{\text{ког}} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{4(\lambda_2 - \lambda_1)} \approx 10^{-5} \text{ м};$

в) диаметр источника виден из точки наблюдения под углом $\varphi = d/l$. С учетом этого

$$\rho_{\text{ког}} \cong \frac{\lambda}{\varphi} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) l}{2d} = \frac{(490 + 510) \cdot 10^{-9} \cdot 200}{2 \cdot 0,300} =$$

$$= 3 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,3 \text{ мм.}$$

2. На стеклянную пластинку положена выпуклой стороной плосковыпуклая линза. При нормальном падении на плоскую границу линзы красного света ($\lambda_0 = 610 \text{ нм}$) радиус пятого светлого кольца Ньютона $r_5 = 5,00 \text{ мм}$. Определить: а) радиус кривизны R выпуклой границы линзы, б) радиус r_3 третьего светлого кольца.

Решение. Радиус колец Ньютона определяется формулой

$$r = \sqrt{R \lambda_0 m / 2}, \quad (1)$$

где R — радиус кривизны линзы, λ_0 — длина световой волны в вакууме, m — целое число. Нечетным m соответствуют светлые, а четным — темные кольца. Пятому светлому кольцу соответствует $m = m_5 = 9$, а третьему $m = m_3 = 5$.

а) Напишем соотношение (1) для пятого светлого кольца:

$$r_5 = \sqrt{R \lambda_0 m_5 / 2}.$$

Отсюда

$$R = \frac{2r_5^2}{\lambda_0 m_5} = \frac{2 \cdot 5,00^2 \cdot 10^{-6}}{610 \cdot 10^{-9} \cdot 9} = 9,1 \text{ м.}$$

б) Согласно формуле (1) радиусы колец пропорциональны корню из m . Следовательно,

$$r_3/r_5 = \sqrt{m_3/m_5},$$

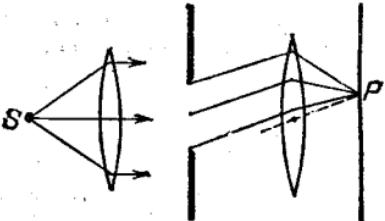
откуда

$$r_3 = r_5 \sqrt{m_3/m_5} = 5,00 \sqrt{5/9} = 3,7 \text{ мм.}$$

Глава 13. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

§ 90. Принцип Гюйгенса — Френеля

Дифракцией называется совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями (вблизи границ непрозрачных или прозрачных тел, сквозь малые отверстия и т. п.) и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики. Дифракция, в частности, приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрической тени.



Между интерференцией и дифракцией нет существенного физического различия. Оба явления заключаются в перераспределении светового потока в результате суперпозиции волн. По историческим причинам перераспределение интенсивности, возникающее в результате суперпозиции волн, возбуждаемых конечным числом дискретных когерентных источников, принято называть интерференцией волн. Перераспределение интенсивности, возникающее вследствие суперпозиции волн, возбуждаемых когерентными источниками, расположенным непрерывно, принято называть дифракцией волн. Поэтому говорят, например, об интерференционной картине от двух узких щелей и о дифракционной картине от одной щели.

Различают два вида дифракции. Если источник света S и точка наблюдения P расположены от препятствия настолько далеко, что лучи, падающие на препятствие, и лучи, идущие в точку P , образуют практически параллельные пучки, говорят о дифракции в параллельных лучах или о дифракции Фраунгофера¹⁾. В противном случае говорят о дифракции Френеля. Дифракцию Фраунгофера можно наблюдать, поместив за источником света S и перед точкой наблюдения P по-

противоположные стороны препятствия линзы и зеркало, так что изображение источника света будет находиться за препятствием, а изображение точки наблюдения — перед препятствием. Тогда изображение источника света будет находиться за препятствием, а изображение точки наблюдения — перед препятствием. Тогда изображение источника света будет находиться за препятствием, а изображение точки наблюдения — перед препятствием.

¹⁾ Иозеф Фраунгофер (1787—1826) — немецкий физик.

линзе так, чтобы точки S и P оказались в фокальной плоскости соответствующей линзы (рис. 90.1).

Проникновение света в область геометрической тени объясняет принцип Гюйгенса (см. § 84). Пусть на плоскую преграду с отверстием падает параллельный ей фронт волны (рис. 90.2). По Гюйгенсу

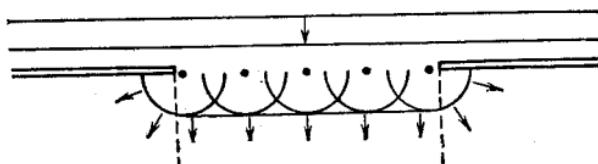


Рис. 90.2. Построение по Гюйгенсу фронта волны, прошедшей через отверстие. Штриховыми линиями показаны границы геометрической тени

каждая точка выделяемого отверстием участка волнового фронта служит центром вторичных волн, которые в однородной и изотропной среде будут сферическими. Построив огибающую вторичных волн, мы обнаруживаем, что за отверстием волна проникает в область геометрической тени, огибая края отверстия. Однако принцип Гюйгенса не дает никаких указаний об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях. Этот недостаток был устранен Френелем.

Согласно принципу Гюйгенса — Френеля каждый элемент волновой поверхности S (рис. 90.3) служит источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна площади элемента dS . Амплитуда сферической волны убывает с расстоянием r от источника по закону $1/r$ (см. формулу (73.16)). Следовательно, от каждого элемента dS волновой поверхности в точку P , лежащую перед этой поверхностью, приходит колебание

$$dE = K(\phi) \frac{A dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (90.1)$$

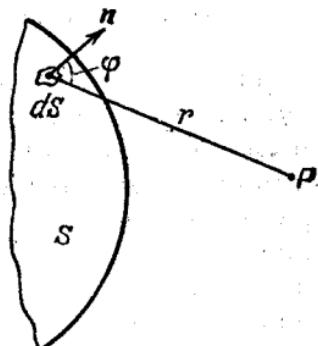


Рис. 90.3. К нахождению амплитуды колебания, возбуждаемого в точке P элементом волновой поверхности

В этом выражении $(\omega t + \alpha)$ — фаза колебания в месте расположения волновой поверхности S , k — волновое число, r — расстояние от элемента поверхности dS до точки P . Множитель A определяется амплитудой светового колебания в том месте, где находится dS . Коэффициент $K(\phi)$ зависит от угла ϕ между нормалью n к площадке dS и направлением от dS к точке P . При $\phi = 0$ этот коэффициент максимальен, при $\phi = \pi/2$ он обращается в нуль.

Результирующее колебание в точке P представляет собой суперпозицию колебаний (90.1), взятых для всей волновой поверхности S :

$$E = \int_S K(\phi) \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS. \quad (90.2)$$

Эта формула является аналитическим выражением принципа Гюйгенса — Френеля.

§ 91. Зоны Френеля

Вычисления по формуле (90.2) представляют собой в общем случае очень трудную задачу. Однако, как показал Френель, в случаях, отличающихся симметрией, нахождение амплитуды результирующего колебания может быть осуществлено простым алгебраическим или геометрическим суммированием.

Чтобы понять суть метода, разработанного Френелем, определим амплитуду светового колебания, возбуждаемого в точке P сферической волной, распространяющейся в однородной и изотропной среде из точечного источника S (рис. 91.1). Волновые поверхности такой волны симметричны относительно прямой SP . Воспользовавшись этим, разобъем изображенную на рисунке волновую поверхность на кольцевые зоны, построенные так, что расстояния от краев каждой зоны до точки P отличаются на $\lambda/2$ (λ — длина волны в той среде, в которой распространяется волна). Обладающие таким свойством зоны называются зонами Френеля.

На рис. 91.1 видно, что расстояние b_m от внешнего края m -й зоны до точки P равно

$$b_m = b + m \frac{\lambda}{2} \quad (91.1)$$

(b — расстояние от вершины волновой поверхности O до точки P).

Колебания, приходящие в точку P от аналогичных точек двух соседних зон (т. е. от точек, лежащих

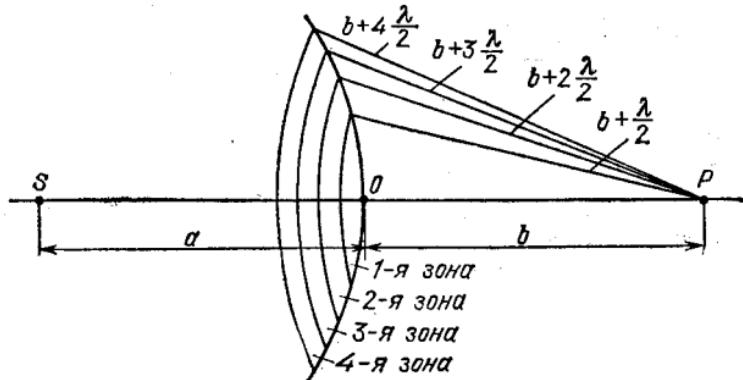


Рис. 91.1. Разбиение сферического волнового фронта на зоны Френеля

в середине зон или у внешних краев зон и т. д.), находятся в противофазе. Поэтому и результирующие колебания, создаваемые каждой из зон в целом, будут для соседних зон отличаться по фазе на π .

Вычислим площадь зон. Внешняя граница m -й зоны выделяет на волновой поверхности сферический сегмент высоты h_m (рис. 91.2). Обозначим площадь этого сегмента через S_m . Тогда площадь m -й зоны можно представить в виде

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1},$$

где S_{m-1} — площадь сферического сегмента, выделяемого внешней границей $(m-1)$ -й зоны.

Из рис. 91.2 следует, что

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = (b + m\lambda/2)^2 - (b + h_m)^2$$

(a — радиус волновой поверхности, r_m — радиус внешней границы m -й зоны). Возведя скобки в квадрат, получим

$$r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2 - 2bh_m - h_m^2. \quad (91.2)$$

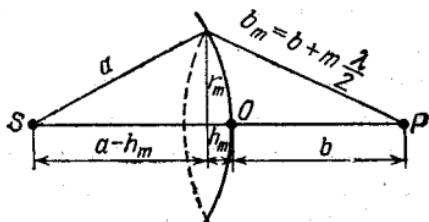


Рис. 91.2. К вычислению площади зон Френеля

Отсюда

$$h_m = \frac{bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2}{2(a+b)}. \quad (91.3)$$

Ограничевшись рассмотрением не слишком больших m , можно ввиду малости λ пренебречь слагаемым, содержащим λ^2 . В этом приближении

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}. \quad (91.4)$$

Площадь сферического сегмента равна $2\pi Rh$ (R — радиус сферы, h — высота сегмента). Следовательно,

$$S_m = 2\pi ah_m = \frac{\pi ab}{a+b} m\lambda,$$

а площадь m -й зоны

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

Полученное нами выражение не зависит от m . Это означает, что при не слишком больших m площади зон Френеля примерно одинаковы.

Из равенства (91.2) можно найти радиусы зон. При не слишком больших m высота сегмента $h_m \ll a$, поэтому можно считать, что $r_m^2 = 2ah_m$. Подставив значение (91.4) для h_m , получим для радиуса внешней границы m -й зоны выражение

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda. \quad (91.5)$$

Если положить $a = b = 1$ м и $\lambda = 500$ нм, то для радиуса первой (центральной) зоны получается значение $r_1 = 0,5$ мм. Радиусы последующих зон возрастают как \sqrt{m} .

Мы выяснили, что площади зон Френеля примерно одинаковы. Расстояние b_m от зоны до точки P медленно растет с номером зоны m . Угол ϕ между нормалью к элементам зоны и направлением на точку P также растет с m . Все это приводит к тому, что амплитуда A_m колебания, возбуждаемого m -й зоной в точке P , монотонно убывает с ростом m . Даже при очень больших m , когда площадь зоны начинает заметно расти с m (см. (91.3)), убывание множителя $K(\phi)$ перевешивает рост ΔS_m , так что A_m продол-

жает убывать. Таким образом, амплитуды колебаний, возбуждаемых в точке P зонами Френеля, образуют монотонно убывающую последовательность:

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots$$

Фазы колебаний, возбуждаемых соседними зонами, отличаются на π . Поэтому амплитуда A результирующего колебания в точке P может быть представлена в виде

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \quad (91.6)$$

В это выражение все амплитуды от нечетных зон входят с одним знаком, а от четных зон — с другим.

Напишем выражение (91.6) следующим образом:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \quad (91.7)$$

Вследствие монотонного убывания A_m можно считать, что

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Тогда выражения в скобках будут равны нулю, и формула (91.7) упрощается:

$$A = \frac{A_1}{2}. \quad (91.8)$$

Согласно (91.8) амплитуда, создаваемая в некоторой точке P всей сферической волновой поверхностью, равна половине амплитуды, создаваемой одной лишь центральной зоной. Если на пути волны поставить непрозрачный экран с отверстием, оставляющим открытой только центральную зону Френеля, амплитуда в точке P будет равна A_1 , т. е. в два раза превзойдет амплитуду (91.8). Соответственно интенсивность света в точке P будет в этом случае в четыре раза больше, чем в отсутствие препятствия между точками S и P .

Решим задачу о распространении света от источника S к точке P методом графического сложения амплитуд. Разобьем волновую поверхность на кольцевые зоны, аналогичные зонам Френеля, но гораздо меньшие по ширине (разность хода от краев зоны до точки P составляет одинаковую для всех зон малую

долю λ). Колебание, создаваемое в точке P такой зоной, изобразим в виде вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а угол, образуемый вектором с направлением принятым за начало отсчета, дает начальную фазу колебания (см. § 67). Амплитуда колебаний, создаваемых такими зонами в точке P , медленно убывает при переходе от зоны к зоне. Каждое следующее колебание отстает от предыдущего по фазе на одну и ту же величину. Следовательно, векторная диаграмма, получающаяся при сложении колебаний, возбуждаемых отдельными зонами, имеет вид, показанный на рис. 91.3.



Рис. 91.3. Векторная диаграмма колебаний, возбуждаемых элементами первой и второй зон Френеля



Рис. 91.4. Векторная диаграмма для нахождения колебаний, возбуждаемых разными зонами Френеля

Если бы амплитуды, создаваемые отдельными зонами, были одинаковыми, конец последнего из изображенных на рис. 91.3 векторов совпал бы с началом первого вектора.

В действительности значение амплитуды, хотя и очень слабо, но убывает, вследствие чего векторы образуют не замкнутую фигуру, а ломаную спиралевидную линию.

В пределе, при стремлении ширины кольцевых зон к нулю (число их будет при этом неограниченно возрастать) векторная диаграмма примет вид спирали, закручивающейся к точке C (рис. 91.4). Фазы колебаний в точках O и 1 отличаются на π (бесконечно малые векторы, образующие спираль, направлены в этих точках в противоположные стороны). Следовательно, участок спирали $O—1$ соответствует первой зоне Френеля. Вектор, проведенный из точки O в точку 1 (рис. 91.5а), изображает колебание, возбужденное в точке P этой зоной. Аналогично вектор, проведенный из точки 1 в точку 2 (рис. 91.5б), изображает колебание, возбужденное второй зоной Френеля. Колебания от первой и второй зон находятся в противофазе; в соответствии с этим векторы $O1$ и 12 направлены в противоположные стороны,

Колебание, возбуждаемое в точке P всей волновой поверхностью, изображается вектором OC (рис. 91.5 α). На рисунке видно, что амплитуда в этом случае равна половине амплитуды, создаваемой первой зоной. Этот результат мы получили ранее алгебраически (см. формулу (91.8)). Отметим, что колебание, возбуждаемое внутренней половиной первой

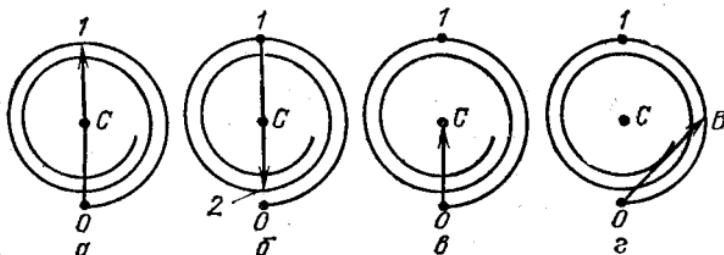


Рис. 91.5. Векторная диаграмма для нахождения амплитуды в центре дифракционной картины на круглом отверстии

зоны Френеля, изображается вектором OB (рис. 91.5 δ). Таким образом, действие внутренней половины первой зоны Френеля не эквивалентно половине действия первой зоны. Вектор OB в $\sqrt{2}$ раз больше вектора OC . Следовательно, интенсивность света, созданная внутренней половиной первой зоны Френеля, в два раза превышает интенсивность, созданную всей волновой поверхностью.

Колебания от четных и нечетных зон Френеля находятся в противофазе, вследствие чего взаимно ослабляют друг друга. Если поставить на пути световой волны пластинку, которая перекрывала бы все четные или нечетные зоны, то интенсивность света в точке P резко возрастает. Такая пластина, называемая зонной, действует подобно собирающей линзе. На рис. 91.6 изображена пластина, перекрывающая четные зоны. Еще большего эффекта можно достичь, не перекрывая четные (или нечетные) зоны, а изменяя фазу их колебаний на π . Это можно осуществить с помощью прозрачной пластины, толщина которой

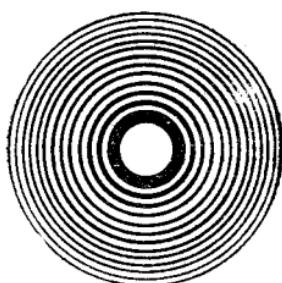


Рис. 91.6. Зонная пластина, перекрывающая четные зоны Френеля

в местах, соответствующих четным или нечетным зонам, отличается на надлежащим образом подобранную величину. Такая пластина называется фазовой зонной пластинкой. По сравнению с перекрывающей зоны амплитудной зонной пластинкой фазовая дает дополнительное увеличение амплитуды в два раза, а интенсивности света — в четыре раза.

§ 92. Дифракция Френеля на простейших преградах

Дифракция на круглом отверстии. Поместим на пути сферической световой волны непрозрачный экран с вырезанным в нем круглым отверстием радиуса R , расположив его так, чтобы перпендикуляр, опущенный из источника света S , попал в центр отверстия (рис. 92.1). На продолжении этого перпендикуляра возьмем точку P . При радиусе отверстия R ,

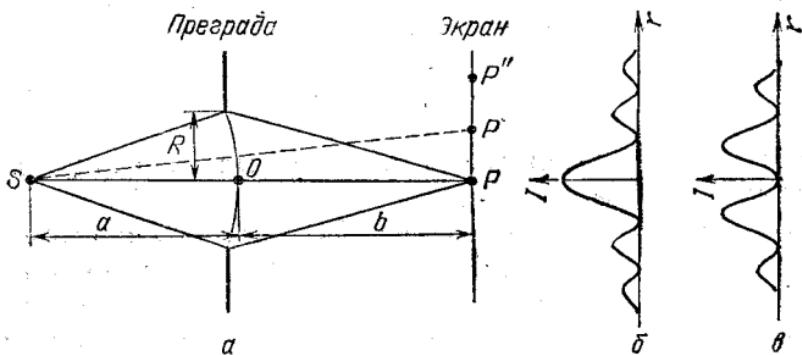


Рис. 92.1. Схема получения дифракции на круглом отверстии (а) и графики интенсивности в случае нечетного (б) и четного (в) числа открытых зон Френеля

значительно меньшем, чем указанные на рисунке длины a и b , длину a можно считать равной расстоянию от источника S до преграды, а длину b — расстоянию от преграды до точки P . Если расстояния a и b удовлетворяют соотношению

$$R = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda, \quad (92.1)$$

где m — целое число, то отверстие оставит открытыми ровно m первых зон Френеля, построенных для

точки P (см. формулу (91.5)). Следовательно, число открытых зон Френеля определяется выражением

$$m = \frac{R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (92.2)$$

Согласно (91.6) амплитуда в точке P будет равна

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m. \quad (92.3)$$

Перед A_m берется знак плюс, если m нечетное, и минус, если m четное. Представив (92.3) в виде, аналогичном (91.7), и положив выражения в скобках равными нулю, придем к формулам

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2} \quad (m \text{ нечетное}),$$

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m \quad (m \text{ четное}).$$

Амплитуды от двух соседних зон практически одинаковы. Поэтому $(A_{m-1}/2) - A_m$ можно заменить через $-A_m/2$. В результате получится

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}, \quad (92.4)$$

где знак плюс берется для нечетных, а минус для четных m .

Для малых m амплитуда A_m мало отличается от A_1 . Следовательно, при нечетных m амплитуда в точке P будет приближенно равна A_1 , при четных m — нулю. Этот результат легко получить с помощью векторной диаграммы, изображенной на рис. 91.4.

Если убрать преграду, амплитуда в точке P станет равной $A_1/2$ (см. (91.8)). Таким образом, преграда с отверстием, открывающим небольшое нечетное число зон Френеля, не только не ослабляет освещенность в точке P , но, напротив, приводит к увеличению амплитуды почти в два раза, а интенсивности — почти в четыре раза.

Выясним характер дифракционной картины, которая будет наблюдаться на экране, помещенном за преградой (см. рис. 92.1). Вследствие симметричного расположения отверстия относительно прямой SP освещенность в разных точках экрана будет зависеть только от расстояния r до точки P . В самой этой точке интенсивность будет достигать максимума или

минимума в зависимости от того, каким — четным или нечетным — является число открытых зон Френеля. Пусть, например, это число равно трем. Тогда в центре дифракционной картины получится максимум интенсивности. Картина зон Френеля для точки P дана на рис. 92.2 a . Теперь сместимся по экрану в точку P' . Ограниченная краями отверстия картина зон Френеля для точки P' имеет вид, показанный на

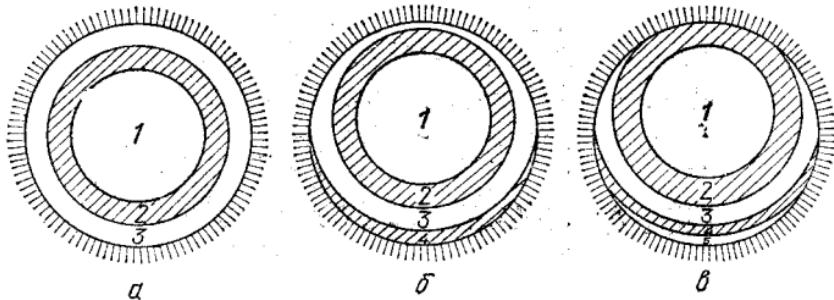


Рис. 92.2. Картина открытых зон Френеля для точек P (α), P' (β) и P'' (γ). Точки P , P' и P'' те же, что и на рис. 92.1

рис. 92.2 β . Края отверстия закроют часть 3-й зоны, одновременно частично откроется 4-я зона. В итоге интенсивность света уменьшится и при некотором положении точки P' достигнет минимума. Если сместиться по экрану в точку P'' , края отверстия частично закроют не только 3-ю, но и 2-ю зону Френеля, одновременно частично откроется 5-я зона (рис. 92.2 γ). В итоге действие открытых участков нечетных зон перевесит действие открытых участков четных зон и интенсивность достигнет максимума, правда, более слабого, чем максимум, наблюдающийся в точке P .

Таким образом, дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид чередующихся светлых и темных концентрических колец. В центре картины будет либо светлое (m нечетное), либо темное (m четное) пятно (рис. 92.3). Ход интенсивности I с расстоянием r от центра картины изображен на рис. 92.1. При перемещении экрана параллельно самому себе вдоль прямой SP картины, изображенные на рис. 92.3, будут сменять друг друга (согласно (92.2) при изменении b значения m становятся то нечетными, то четными).

Если отверстие открывает лишь часть центральной зоны Френеля, на экране получается размытое светлое пятно; чередования светлых и темных колец в этом случае не возникает. Если отверстие открывает большое число зон, чередование светлых и темных колец наблюдается лишь в очень узкой области

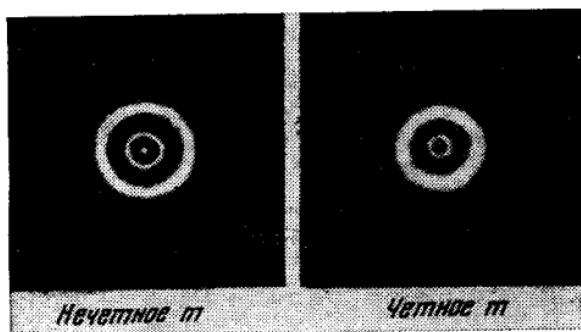


Рис. 92.3. Картина, получающаяся при дифракции на круглом отверстии

на границе геометрической тени; внутри этой области освещенность оказывается практически равномерной.

Дифракция на диске. Поместим между источником света S и точкой P непрозрачный диск радиуса R (рис. 92.4). Если диск закроет m первых зон Френеля, амплитуда в точке P будет равна

$$\begin{aligned} A &= A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \\ &= \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots \end{aligned}$$

Выражения в скобках можно положить равными нулю; следовательно,

$$A = A_{m+1}/2. \quad (92.5)$$

Выясним характер картины, получающейся на экране. Очевидно, что освещенность может зависеть только от расстояния r до точки P (рис. 92.4). При небольшом числе закрытых зон амплитуда A_{m+1} мало отличается от A_1 . Поэтому интенсивность в точке P будет почти такая же, как в отсутствие преграды между источником S и точкой P (см. (91.8)). Для точки P' , смещенной относительно точки P в любом

радиальном направлении, диск будет перекрывать часть $(m+1)$ -й зоны Френеля, одновременно открывается часть m -й зоны. Это вызовет уменьшение интенсивности. При некотором положении точки P' интенсивность достигает минимума. Если сместиться от

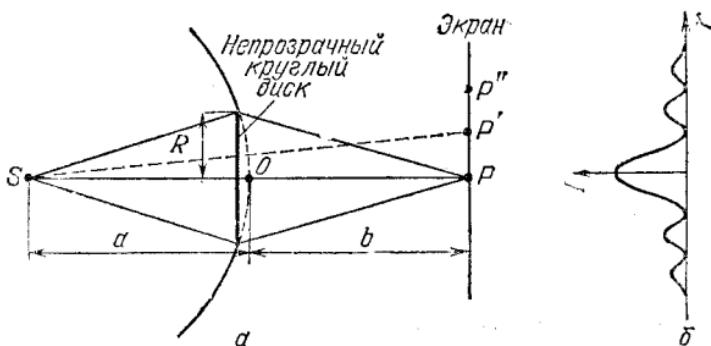


Рис. 92.4. а — Схема получения дифракции на диске; б — график интенсивности

центра картины еще дальше, диск перекроет дополнительно часть $(m+2)$ -й зоны, одновременно открывается часть $(m-1)$ -й зоны. В результате интенсивность возрастает и в точке P'' достигнет максимума.

Таким образом, в случае непрозрачного диска дифракционная картина имеет вид чередующихся светлых и темных концентрических колец. В центре картины находится светлое пятно (рис. 92.5). Изменение интенсивности света I с расстоянием r от центра картины изображено на рис. 92.4б.

Если диск закрывает лишь небольшую часть центральной зоны Френеля, он совсем не отбрасывает тени — освещен-

ность экрана всюду остается такой же, как в отсутствие преград. Если диск закрывает много зон Френеля, чередование светлых и темных колец наблюдается только в узкой области на границе геометрической тени. В этом случае $A_{m+1} \ll A_1$, так что светлое пятно в центре отсутствует и освещенность в

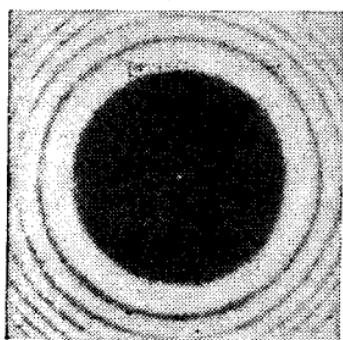


Рис. 92.5. Картина, получающаяся при дифракции на диске

области геометрической тени практически всюду равна нулю.

Светлое пятнышко в центре тени, отбрасываемой диском, послужило причиной инцидента, произшедшего между Пуассоном и Френелем. Парижская академия наук предложила дифракцию света в качестве темы на премию за 1818 г. Устроители конкурса были сторонниками корпускулярной теории света и рассчитывали, что конкурсные работы принесут окончательную победу их теории. Однако Френелем была представлена работа, в которой все известные к тому времени оптические явления объяснялись с волновой точки зрения. Рассматривая эту работу, Пуассон, бывший членом конкурсной комиссии, обратил внимание на то, что из теории Френеля вытекает «нелепый» вывод: в центре тени, отбрасываемой небольшим диском, должно находиться светлое пятно. Араго¹⁾ тут же произвел опыт и обнаружил, что такое пятно действительно существует. Это принесло победу и всеобщее признание волновой теории света.

Дифракция на крае полуплоскости. Поместим на пути плоской световой волны перпендикулярную к направлению ее распространения непрозрачную полуплоскость с прямолинейным краем. На расстоянии

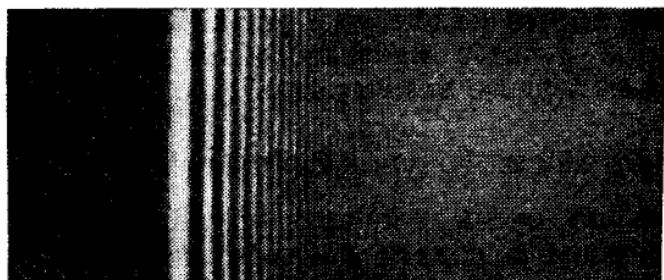


Рис. 92.6. Картина, получающаяся при дифракции на крае полуплоскости

за полуплоскостью поставим параллельный ей экран. Дифракционная картина, которая наблюдается в этом случае на экране, показана на рис. 92.6. Из рисунка следует, что при переходе в область геоме-

¹⁾ Доминик Франсуа Араго (1786—1853) — французский ученый.

трической тени интенсивность изменяется не скачком, а постепенно стремится к нулю. Справа от границы геометрической тени расположен ряд чередующихся максимумов и минимумов интенсивности.

Возьмем на экране перпендикулярную к краю полуплоскости ось x , начало которой совместим с границей геометрической тени. Зависимость интенсивности света от координаты x дана на рис. 92.7. Интенсивность на границе геометрической тени составляет $1/4$ интенсивности I_0 , получающейся на экране в отсутствие полуплоскости. Вычисления дают, что при $b = 1$ м и $\lambda = 500$ нм координаты максимумов имеют значения: $x_1 = 0,61$ мм, $x_2 = 1,17$ мм, $x_3 = 1,54$ мм, $x_4 = 1,85$ мм и т. д. С изменением расстояния b

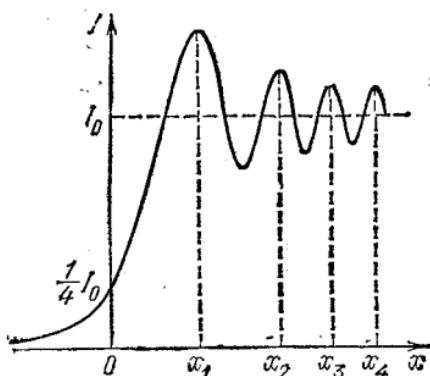


Рис. 92.7. Изменение интенсивности вблизи границы геометрической тени при дифракции на крае полуплоскости, находящейся слева от точки $x = 0$

от полуплоскости до экрана значения координат максимумов изменяются как \sqrt{b} . Из приведенных данных следует, что максимумы располагаются довольно густо. Для первого максимума получается значение $1,37 I_0$, для первого минимума $0,78 I_0$.

§ 93. Дифракция Фраунгофера на щели

Пусть на очень длинную узкую прямоугольную щель ширины b падает по нормали к ней плоская световая волна (рис. 93.1). Поместим за щелью собирающую линзу, а в фокальной плоскости линзы экран. Волновые поверхности падающей волны, плоскость щели и экран параллельны друг другу. Согласно принципу Гюйгенса — Френеля элементарные участки открытой части волновой поверхности являются источниками вторичных волн. Разобъем открытую часть волновой поверхности на N параллельных краям щели элементарных зон ширины b/N . Каждая зона создает в точке P колебание, амплитуда которого, очевидно, обратно пропорциональна

числу зон N :

$$\Delta A = A_0/N \quad (93.1)$$

(смысл коэффициента A_0 выяснится в дальнейшем). Линза собирает в фокальной плоскости плоские (а не сферические) волны. Поэтому множитель $1/r$ (см. (90.1)) в выражении для амплитуды будет отсутствовать. Имея в виду, что углы φ невелики, мы пренебрегли также зависимостью множителя $K(\varphi)$ в (90.1) от угла φ , а сам множитель включили в A_0 .

Разность хода лучей, идущих от краев щели, $\Delta = b \sin \varphi$ (см. рис. 93.1). Следовательно, разность хода для двух соседних зон равна $(b/N) \sin \varphi$. Соответственно разность фаз колебаний, возбуждаемых в точке P соседними зонами,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{N} \sin \varphi. \quad (93.2)$$

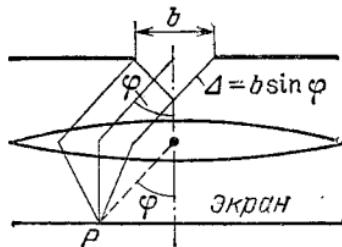


Рис. 93.1. Схема наблюдения дифракции Фраунгофера на щели

Итак, в точке P интерферируют N волн с одинаковой амплитудой A_0/N , сдвинутых друг относительно друга по фазе на угол δ , определяемый формулой (93.2). Таким образом, мы имеем дело с многолучевой интерференцией и можем для нахождения амплитуды A_φ в точке P воспользоваться формулой (88.1). Вместо A_0 в эту формулу нужно подставить выражение (93.1), а вместо δ — выражение (93.2). В результате получим, что

$$A_\varphi = \frac{A_0}{N} \frac{\sin [(\pi b/\lambda) \sin \varphi]}{\sin [(\pi b/N\lambda) \sin \varphi]}.$$

Это выражение является приближенным. Оно будет тем точнее, чем уже элементарные зоны, т. е. чем больше N . При очень больших N синус в знаменателе можно заменить углом. Поэтому окончательное выражение для амплитуды в точке P имеет вид

$$A_\varphi = A_0 \frac{\sin [(\pi b/\lambda) \sin \varphi]}{(\pi b/\lambda) \sin \varphi} \quad (93.3)$$

(индекс φ указывает на то, что имеется в виду амплитуда, создаваемая лучами, идущими под углом φ к нормали к щели).

При α , стремящемся к нулю, $\lim (\sin \alpha / \alpha) = 1$ (при малых α можно полагать $\sin \alpha \approx \alpha$). Поэтому при $\varphi = 0$ дробь в выражении (93.3) превращается в единицу. Отсюда следует, что A_0 есть амплитуда в середине дифракционной картины (против центра линзы).

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно,

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2 [(\pi b / \lambda) \sin \varphi]}{[(\pi b / \lambda) \sin \varphi]^2}, \quad (93.4)$$

где I_0 — интенсивность в середине интерференционной картины (при $\varphi = 0$), I_φ — интенсивность в точке, положение которой определяется данным значением φ .

Из формулы (93.4) вытекает, что при значениях φ , удовлетворяющих условию: $(\pi b / \lambda) \sin \varphi = \pm k\pi$, т. е. в случае, если

$$b \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (93.5)$$

интенсивность обращается в нуль. Таким образом, условие (93.5) определяет положения минимумов интенсивности. Отметим, что $b \sin \varphi$ представляет собой разность хода Δ лучей, идущих в точку P от краев щели (см. рис. 93.1).

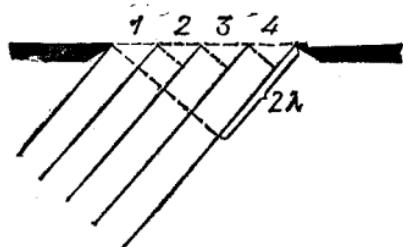


Рис. 93.2. Разность хода для соседних зон равна $\lambda/2$; поэтому колебания от зон 1 и 2, а также от зон 3 и 4 погашают друг друга

Условие (93.5) легко получить из следующих соображений. Если разность хода Δ от краев щели равна $\pm k\lambda$, открытую часть волновой поверхности можно разбить

на $2k$ равных по ширине зон, причем разность хода от краев каждой зоны будет равна $\lambda/2$ (см. рис. 93.2, выполненный для $k=2$). Колебания от каждой пары соседних зон взаимно погашают друг друга, так что результирующая амплитуда равна нулю. Если для точки P разность хода Δ равна $\pm(k + 1/2)\lambda$, число зон будет нечетным, действие одной из них окажется некомпенсированным и наблюдается максимум интенсивности.

График функции (93.4) изображен на рис. 93.3. По оси абсцисс отложены значения $\sin \varphi$, по оси ординат — интенсивность I_φ . Количество минимумов интенсивности определяется отношением ширины щели b к длине волны λ . Из условия (93.5) следует,

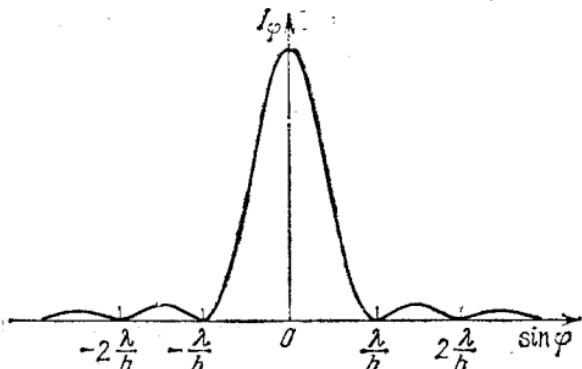


Рис. 93.3. Дифракционная картина от одной щели (зависимость I_φ от $\sin \varphi$)

что $\sin \varphi = \pm k\lambda/b$. Модуль синуса не может превысить единицу. Поэтому $k\lambda/b \leq 1$, откуда

$$k \leq b/\lambda. \quad (93.6)$$

При ширине щели, меньшей длины волны, минимумы вообще не возникают. В этом случае интенсивность света монотонно убывает от середины дифракционной картины к ее краям.

Краям центрального максимума соответствуют значения угла φ , получающиеся из условия $b \sin \varphi = \pm \lambda$. Эти значения равны $\pm \arcsin(\lambda/b)$. Следовательно, угловая ширина центрального максимума равна

$$\delta\varphi = 2 \arcsin(\lambda/b). \quad (93.7)$$

В случае, когда $b \gg \lambda$, значение $\sin(\lambda/b)$ можно положить равным λ/b . Тогда формула (93.7) упрощается следующим образом:

$$\delta\varphi = 2\lambda/b. \quad (93.8)$$

Решим задачу о дифракции Фраунгофера на щели методом графического сложения амплитуд. Разобьем открытую часть волновой поверхности на очень узкие зоны одинаковой ширины. Колебание, возбуждаемое каждой такой зоной, имеет одинаковую амплитуду ΔA и отстает по фазе от предыдущего

колебания на одну и ту же величину δ , зависящую от угла ϕ , определяющего направление на точку наблюдения P . При $\phi = 0$ разность фаз δ равна нулю и векторная диаграмма имеет вид, показанный на рис. 93.4a. Амплитуда результирующего колебания A_0 равна сумме амплитуд складываемых колебаний. Если $\Delta = b \sin \phi = \lambda/2$, колебания от краев щели находятся в противофазе. Соответственно векторы ΔA располагаются вдоль полуокружности длины A_0

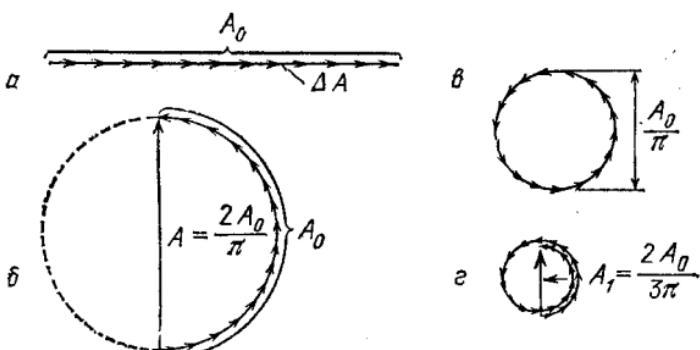


Рис. 93.4. Векторная диаграмма колебаний от элементов щели для случаев $\phi = 0$ (a), $b \sin \phi = \lambda/2$ (б), $b \sin \phi = \lambda$ (в) и $b \sin \phi = 3\lambda/2$ (г)

(рис. 93.4б). Следовательно, результирующая амплитуда равна $2A_0/\pi$. В случае, когда $\Delta = b \sin \phi = \lambda$, колебания от краев щели отличаются по фазе на 2π . Соответствующая векторная диаграмма изображена на рис. 93.4в. Векторы ΔA располагаются вдоль окружности длины A_0 . Результирующая амплитуда равна нулю — получается первый минимум. Первый максимум получается при $\Delta = b \sin \phi = 3\lambda/2$. В этом случае колебания от краев щели отличаются по фазе на 3π . Строки последовательно векторы ΔA , мы обойдем полтора раза окружность диаметра $A_1 = (2/3\pi)A_0$ (рис. 93.4г). Диаметр этой окружности и есть амплитуда первого максимума. Таким образом, интенсивность первого максимума равна $I_1 = (2/3\pi)^2 I_0 \approx 0,045 I_0$. Аналогично можно найти и относительную интенсивность остальных максимумов. В итоге получится соотношение:

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 : \dots = 1 : \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{7\pi}\right)^2 : \dots = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008 : \dots \quad (93.9)$$

Таким образом, центральный максимум значительно превосходит по интенсивности остальные максимумы; в нем сосредоточивается основная доля светового потока, проходящего через щель.

Плоскую световую волну, т. е. пучок параллельных лучей, можно получить, поместив точечный источник (т. е. источник малых размеров) в фокус линзы, расположенной перед щелью (см. рис. 90.1). В этом случае дифракционные максимумы имеют вид светлых точек. Если взять источник в виде узкой светящейся щели, параллельной щели в преграде, то в каждом перпендикулярном к щели сечении будет наблюдаться картина, описываемая графиком на рис. 93.3. Следовательно, максимумы на экране будут иметь вид параллельных щели светлых полос.

§ 94. Дифракционная решетка

Дифракционной решеткой называется оптический прибор, состоящий из большого числа одинаковых, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние щелей (рис. 94.1). Расстояние d между серединами соседних щелей называется периодом решетки.

Расположим параллельно решетке собирающую линзу, в фокальной плоскости которой поместим экран. Выясним характер дифракционной картины, получающейся на экране при падении на решетку плоской световой волны (для простоты будем считать, что волна падает на решетку нормально). Каждая из щелей дает на экране картину, описываемую кривой, изображенной на рис. 93.3. Картину от всех щелей придется на одно и то же место экрана (независимо от положения щели, центральный максимум лежит против центра линзы). Если бы колебания, приходящие в точку P экрана от различных щелей, были некогерентными, результирующая картина от N щелей отличалась бы от картины, создаваемой одной щелью, лишь тем, что интенсивность всех максимум-

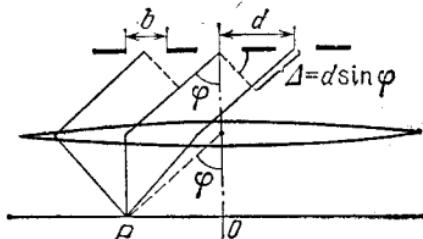


Рис. 94.1. Схема спектрального прибора с дифракционной решеткой

мов возросла бы в N раз. Однако колебания от различных щелей являются в большей или меньшей степени когерентными; поэтому результирующая интенсивность будет отлична от NI_Φ (I_Φ — интенсивность, создаваемая одной щелью; см. (93.4)).

В дальнейшем мы будем предполагать, что длина пространственной когерентности падающей волны намного превышает длину решетки, так что колебания от всех щелей можно считать когерентными. В этом случае результирующее колебание в точке P , положение которой определяется углом φ , представляет собой суперпозицию N колебаний с одинаковой амплитудой A_Φ , сдвинутых друг относительно друга по фазе на одну и ту же величину δ . Согласно формуле (88.3) интенсивность при этих условиях равна

$$I_{\text{реш}} = I_\Phi \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \quad (94.1)$$

(в данном случае роль I_0 играет I_Φ).

На рис. 94.1 видно, что разность хода от соседних щелей $\Delta = d \sin \varphi$. Следовательно, разность фаз

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi, \quad (94.2)$$

где λ — длина волны в данной среде.

Подставив в формулу (94.1) выражения (93.4) для I_Φ и (94.2) для δ , получим

$$I_{\text{реш}} = I_0 \frac{\sin^2[(\pi b/\lambda) \sin \varphi]}{[(\pi b/\lambda) \sin \varphi]^2} \frac{\sin^2[(N\pi d/\lambda) \sin \varphi]}{\sin^2[(\pi d/\lambda) \sin \varphi]} \quad (94.3)$$

(I_0 — интенсивность, создаваемая одной щелью против центра линзы).

Первый множитель в (94.3) обращается в нуль в точках, для которых

$$b \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (94.4)$$

В этих точках интенсивность, создаваемая каждой из щелей в отдельности, равна нулю (см. условие (93.5)).

Второй множитель в (94.3) принимает значение N^2 в точках, удовлетворяющих условию

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (94.5)$$

(см. (88.5)). Для направлений, определяемых этим условием, колебания от отдельных щелей взаимно усиливают друг друга, вследствие чего амплитуда колебаний в соответствующей точке экрана равна

$$A_{\max} = N A_\phi \quad (94.6)$$

(A_ϕ — амплитуда колебания, посылаемого одной щелью под углом ϕ).

Условие (94.5) определяет положения максимумов интенсивности, называемых главными. Число N дает порядок главного максимума. Максимум нулевого порядка только один. Максимумов 1-го, 2-го и т. д. порядков имеется по два.

Возведя равенство (94.6) в квадрат, получим, что интенсивность I_{\max} в N^2 раз больше интенсивности I_ϕ , создаваемой в направлении ϕ одной щелью:

$$I_{\max} = N^2 I_\phi. \quad (94.7)$$

Кроме минимумов, определяемых условием (94.4), в промежутках между соседними главными максимумами имеется $N - 1$ добавочных минимумов. Они возникают в тех направлениях, для которых колебания от отдельных щелей взаимно погашают друг друга. В соответствии с формулой (88.6) направления добавочных минимумов определяются условием

$$d \sin \phi = \pm \frac{k'}{N} \lambda \quad (94.8)$$

($k' = 1, 2, \dots, N - 1, N + 1, \dots, 2N - 1, 2N + 1, \dots$). В формуле (94.8) k' принимает все целочисленные значения, кроме $0, N, 2N, \dots$, т. е. кроме тех, при которых условие (94.8) переходит в (94.5).

Условие (94.8) можно получить методом графического сложения колебаний. Колебания от отдельных щелей изображаются векторами одинаковой длины. Согласно (94.8) каждый из последующих векторов повернут относительно предыдущего на один и тот же угол

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \phi = \frac{2\pi}{N} k'.$$

Поэтому в тех случаях, когда k' не является целым кратным N , мы, пристраивая начало следующего вектора к концу предыдущего, получим замкнутую ломаную линию, которая делает k' (при $k' \leq N/2$) или

$N - k'$ (при $k' > N/2$) оборотов, прежде чем конец N -го вектора упрется в начало 1-го. Соответственно результирующая амплитуда оказывается равной нулю (рис. 94.2).

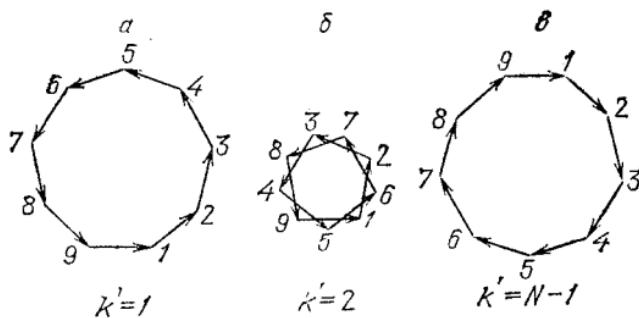


Рис. 94.2. Векторные диаграммы для минимумов, соответствующих $k' = 1$ ($\delta = 2\pi/9$) (а), $k' = 2$ ($\delta = 4\pi/9$) (б) и $k' = 8$ ($\delta = 16\pi/9$) (в). Число щелей $N = 9$

Между дополнительными минимумами располагаются слабые вторичные максимумы. Число таких максимумов, приходящееся на промежуток между соседними главными максимумами, равно $N - 2$. В § 88

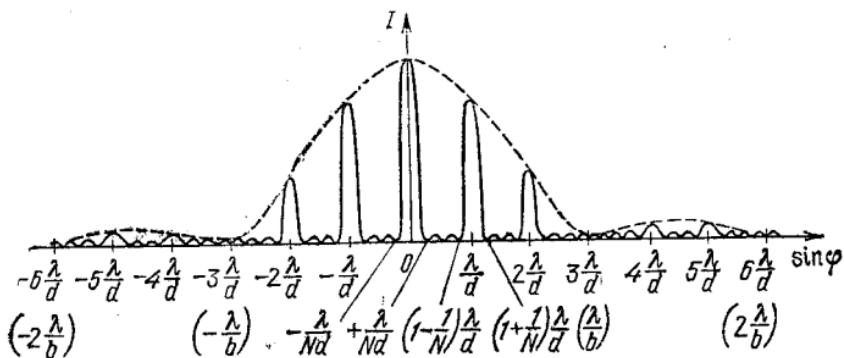


Рис. 94.3. Дифракционная картина от решетки для $N = 4$ и $d/b = 3$. Штриховой линией показана интенсивность I_ϕ от одной щели, умноженная на N^2 . Главные максимумы 3-го и 6-го порядков пришлись на минимумы интенсивности от одной щели

было указано, что интенсивность вторичных максимумов не превышает $1/22$ интенсивности ближайшего главного максимума.

На рис. 94.3 приведен график функции (94.3) для $N = 4$ и $d/b = 3$. Штриховая линия, проходящая через вершины главных максимумов, изображает ин-

тенсивность от одной щели, умноженную на N^2 (см. (94.7)). При $d/b = 3$ главные максимумы 3-го, 6-го и т. д. порядков приходятся на минимумы интенсивности от одной щели, вследствие чего эти максимумы пропадают.

Количество наблюдаемых главных максимумов определяется отношением периода решетки к длине волны. Модуль $\sin \phi$ не может превысить единицу. Поэтому из формулы (94.5) вытекает, что

$$m \leq d/\lambda. \quad (94.9)$$

Определим угловую ширину центрального максимума. Положения ближайших к нему дополнительных минимумов определяются условием $d \sin \phi = \pm \lambda/N$ (см. формулу (94.8)). Следовательно, этим минимумам соответствуют значения ϕ , равные $\pm \arcsin(\lambda/Nd)$. Отсюда для угловой ширины центрального максимума получается выражение

$$\delta\phi = 2 \arcsin(\lambda/Nd) \approx 2\lambda/Nd \quad (94.10)$$

(мы воспользовались тем, что $\lambda/Nd \ll 1$). Ширина остальных максимумов примерно такого же порядка.

Произведение Nd дает длину дифракционной решетки. Следовательно, угловая ширина главных максимумов обратно пропорциональна длине решетки.

Положение главных максимумов (кроме центрального) зависит от длины волны λ . Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы ненулевого порядка разложатся в спектр, фиолетовый конец которого обращен к центру дифракционной картины, а красный — наружу. Таким образом, дифракционная решетка представляет собой спектральный прибор. Заметим, что в то время как стеклянная призма сильнее всего отклоняет фиолетовые лучи, дифракционная решетка, напротив, сильнее отклоняет красные лучи.

На рис. 94.4 изображены схематически спектры разных порядков, даваемые решеткой при пропускании через нее белого света. В центре лежит узкий максимум нулевого порядка; у него окрашены только края (согласно (94.10) $\delta\phi$ зависит от λ). По обе стороны от центрального максимума расположены два спектра 1-го порядка, затем два спектра 2-го по-

рядка и т. д. Положения красного конца спектра m -го порядка и фиолетового конца спектра $(m+1)$ -го порядка определяются соотношениями

$$\sin \varphi_{kp} = m \frac{760}{d}, \quad \sin \varphi_{fiol} = (m+1) \frac{400}{d},$$

где d выражено в нанометрах. При условии, что

$$760m > 400(m+1),$$

спектры m -го и $(m+1)$ -го порядков частично перекрываются. Из неравенства получается, что

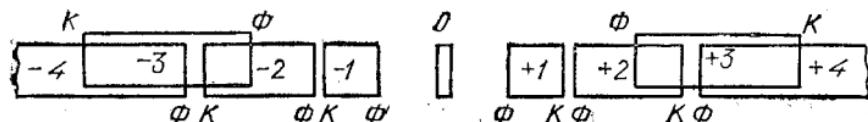


Рис. 94.4. Схема расположения спектров разных порядков. Для наглядности спектры смещены друг относительно друга по вертикали

$m > 10/9$. Следовательно, частичное перекрывание начинается со спектров 2-го и 3-го порядков.

§ 95. Разрешающая способность оптических приборов

В предыдущем параграфе мы выяснили, что дифракционная решетка, подобно призме, разлагает свет в спектр. Характеристиками спектрального прибора являются его дисперсия и разрешающая способность. Дисперсия определяет угловое (или линейное) расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на единицу (например, на 1 нм). Разрешающая способность определяет минимальную разность длин волн $\delta\lambda$, при которой две линии воспринимаются в спектре раздельно.

Угловой дисперсией называется величина

$$D = \delta\varphi/\delta\lambda, \quad (95.1)$$

где $\delta\varphi$ — угловое расстояние между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на $\delta\lambda$.

Линейной дисперсией называют величину

$$D_{lin} = \delta l/\delta\lambda,$$

где δl — расстояние на экране или на фотопластинке между спектральными линиями, длины волн которых отличаются на $\delta\lambda$.

Чтобы найти угловую дисперсию дифракционной решетки, продифференцируем условие (94.5) главного максимума слева по φ , а справа по λ . Опустив знак минус, получим

$$d \cos \varphi \delta\varphi = m\delta\lambda.$$

Отсюда

$$D = \delta\varphi/\delta\lambda = m/d \cos \varphi.$$

В пределах небольших углов $\cos \varphi \approx 1$; поэтому можно положить

$$D \approx m/d. \quad (95.2)$$

Таким образом, угловая дисперсия обратно пропорциональна периоду решетки d . Чем выше порядок спектра m , тем больше дисперсия.

Разрешающей способностью спектрального прибора называют безразмерную величину

$$R = \lambda/\delta\lambda, \quad (95.3)$$

где $\delta\lambda$ — минимальная разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются раздельно.

Возможность разрешения (т. е. раздельного восприятия) двух близких спектральных линий зависит не только от расстояния между ними (которое определяется дисперсией прибора), но также и от ширины спектрального максимума. На рис. 95.1 показана результатирующая интенсивность (сплошные кривые), наблюдающаяся при наложении двух близких максимумов (штриховые кривые). В случае *a* оба максимума воспринимаются как один. В случае *b* между максимумами лежит минимум. Два близких максимума воспринимаются глазом раздельно в том случае, если интенсивность в промежутке между

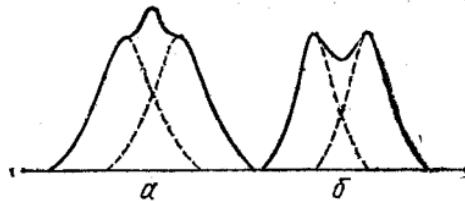


Рис. 95.1. *a* — Две близкие спектральные линии сливаются в одну; *b* — если край одного максимума совпадает с серединой другого, спектральные линии воспринимаются раздельно

ними составляет не более 80 % от интенсивности максимума. Согласно критерию, предложенному Рэлеем¹⁾, такое соотношение интенсивности имеет место в том случае, если середина одного максимума совпадает с краем другого (рис. 95.1б). Такое взаимное расположение максимумов получается при определенном (для данного прибора) значении $\delta\lambda$.

Найдем разрешающую способность дифракционной решетки. Положение середины m -го максимума для длины волны $\lambda + \delta\lambda$ определяется условием

$$d \sin \Phi_{\max} = m(\lambda + \delta\lambda).$$

Края m -го максимума для длины волны λ располагаются под углами, определяемыми соотношением

$$d \sin \Phi_{\min} = (m \pm 1/N)\lambda.$$

Середина максимума для длины волны $\lambda + \delta\lambda$ совпадет с краем максимума для длины волны λ в том случае, если

$$m(\lambda + \delta\lambda) = (m + 1/N)\lambda.$$

Отсюда

$$m \delta\lambda = \lambda/N.$$

Найдя из этого равенства отношение λ к $\delta\lambda$, получим выражение для разрешающей способности:

$$R = mN. \quad (95.4)$$

Таким образом, разрешающая способность дифракционной решетки пропорциональна числу щелей N и порядку спектра m .

На рис. 95.2 сопоставлены дифракционные картины, получающиеся для двух спектральных линий с помощью решеток, отличающихся значениями дисперсии и разрешающей способности. Решетки I и II обладают одинаковой разрешающей способностью (у них одинаковое число щелей N), но различной дисперсией (у решетки I период d в два раза больше, соответственно дисперсия D в два раза меньше, чем у решетки II). Решетки II и III имеют одинаковую дисперсию (у них одинаковый период d), но разную разрешающую способность (у решетки II число щелей вдвадцать раз больше, чем у решетки III).

¹⁾ Барон Рэлей (до получения титула Джон Уильям Стретт) (1842—1919) — английский физик.

лей N и разрешающая способность R в два раза больше, чем у решетки III).

Дифракционные решетки изготавливаются путем нанесения алмазным резцом на поверхность стеклянной пластинки равноотстоящих штрихов. Роль щелей играют промежутки между штрихами. Лучшие решетки имеют до 1200 штрихов на 1 мм ($d \approx 800$ нм).

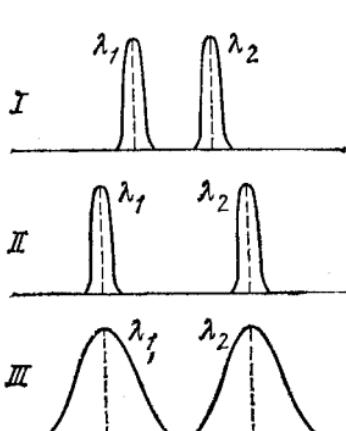


Рис. 95.2. Решетки I и II обладают одинаковой разрешающей способностью, но разной дисперсией; решетки II и III обладают одинаковой дисперсией, но разной разрешающей способностью

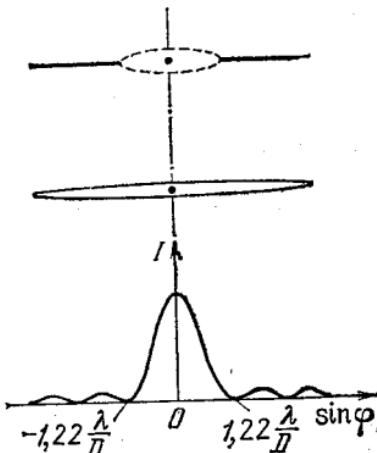


Рис. 95.3. Плоская световая волна падает по нормали на преграду с круглым отверстием. Внизу показана интенсивность света на экране, расположеннном в фокальной плоскости линзы

Из формулы (94.9) следует, что спектры второго и более высоких порядков в видимом свете при таком периоде не наблюдаются. Общее число штрихов у подобных решеток достигает 200 000 (длина около 200 мм). Длина видимого спектра на фотопластинке составляет в этом случае более 700 мм.

Разрешающей способностью объектива называется величина R , обратная наименьшему угловому расстоянию $\delta\phi$ между точками, при котором они еще воспринимаются раздельно:

$$R = 1/\delta\phi. \quad (95.5)$$

На рис. 95.3 показана картина дифракции Фраунгофера на круглом отверстии. Она имеет вид центрального светлого пятна, окруженного чередующимися темными и светлыми кольцами. Соответствующий

расчет дает, что первый минимум отстоит от центра дифракционной картины на угловое расстояние

$$\Phi_{\min} = \arcsin (1,22\lambda/D), \quad (95.6)$$

где D — диаметр отверстия (ср. с (93.8)). Если $D \gg \lambda$, можно считать, что

$$\Phi_{\min} = 1,22\lambda/D. \quad (95.7)$$

Подавляющая часть (около 84 %) светового потока, проходящего через отверстие, попадает в область центрального светлого пятна. Интенсивность первого светлого кольца составляет всего 1,74 %, а второго — 0,41 % от интенсивности центрального пятна. Интенсивность остальных светлых колец еще меньше. Поэтому в первом приближении дифракционную картину можно считать состоящей из одного лишь светлого пятна с угловым радиусом, определяемым формулой (95.6). Это пятно является, по существу, изображением бесконечно удаленного точечного источника света (на отверстие падает плоская световая волна).

Дифракционная картина не зависит от расстояния между отверстием и линзой. В частности, она будет такой же и в случае, когда края отверстия совмещены с краями линзы. Отсюда вытекает, что самая совершенная линза не может дать идеального оптического изображения. Вследствие волновой природы света изображение точки, даваемое линзой, имеет вид пятнышка, представляющего собой центральный максимум дифракционной картины. Угловой размер этого пятнышка уменьшается при увеличении диаметра оправы линзы.

При очень малом угловом расстоянии между двумя точками их изображения, получающиеся с помощью какого-либо оптического прибора, наложатся друг на друга и дадут одно светящееся пятно. Следовательно, две очень близкие точки не будут восприниматься с помощью прибора раздельно, или, как говорят, не будут разрешаться прибором. Поэтому, как бы ни было велико изображение, на нем не будут видны соответствующие детали.

Найдем разрешающую способность объектива зрительной трубы или фотоаппарата для случая, ко-

гда рассматриваются или фотографируются очень удаленные предметы. При этом условии лучи, идущие в объектив от каждой точки предмета, можно считать параллельными и пользоваться формулой (95.6). Согласно критерию Рэлея две близкие точки будут еще разрешены, если середина центрального дифракционного максимума для одной точки совпадает с краем центрального максимума (т. е. первым минимумом) для другой точки. На рис. 95.4 видно, что это произойдет, если угловое расстояние между точками $\delta\phi$ окажется равным их угловому радиусу (95.6). Диаметр оправы объектива D много больше длины волны λ . Поэтому можно считать, что

$$\delta\phi = 1,22\lambda/D \approx \lambda/D, \quad (95.8)$$

откуда

$$R \approx D/\lambda. \quad (95.9)$$

Следовательно, разрешающая способность объектива пропорциональна его диаметру.

Диаметр зрачка глаза при нормальном освещении равен приблизительно 2 мм. Подставив это значение в формулу (95.8) и положив $\lambda = 500$ нм, получим

$$\delta\phi \approx 500 \cdot 10^{-9} / (2 \cdot 10^{-3}) = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx 1'.$$

Таким образом, минимальное угловое расстояние между точками, при котором глаз воспринимает их еще раздельно, равно одной угловой минуте. Любопытно, что расстояние между соседними светочувствительными элементами сетчатки глаза соответствует этому угловому расстоянию.

§ 96. Дифракция на пространственных структурах

Поместим две дифракционные решетки одну за другую так, чтобы их штрихи были взаимно перпендикулярными. Первая решетка (штрихи которой, скажем, вертикальны) даст в горизонтальном

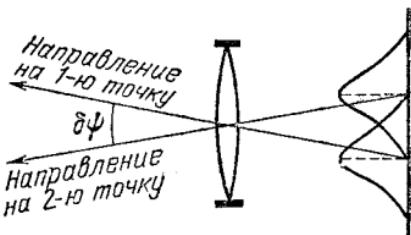


Рис. 95.4. Если край одного максимума совпадает с серединой другого, точки воспринимаются раздельно

направлении ряд максимумов, положения которых определяются условием

$$d_1 \sin \varphi_1 = \pm m_1 \lambda \quad (m_1 = 0, 1, 2, \dots). \quad (96.1)$$

Вторая решетка (с горизонтальными штрихами) разобьет каждый из образованных первой решеткой пучков на расположенные по вертикали максимумы, положения которых определяются условием

$$d_2 \sin \varphi_2 = \pm m_2 \lambda \quad (m_2 = 0, 1, 2, \dots). \quad (96.2)$$

В итоге дифракционная картина будет иметь вид правильно расположенных пятен, каждому из которых соответствуют два целочисленных индекса m_1 и m_2 (рис. 96.1).

Такая же дифракционная картина получится, если вместо двух раздельных решеток взять одну прозрачную пластинку с нанесенными на нее двумя системами взаимно перпендикулярных штрихов. Подобная пластина представляет собой двумерную

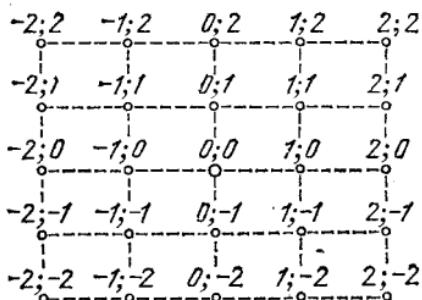


Рис. 96.1. Дифракционная картина от двумерной периодической структуры

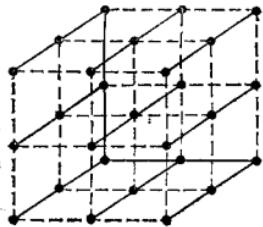


Рис. 96.2. Трехмерная периодическая структура (кристалл)

периодическую структуру (обычная решетка — одномерную структуру). Измерив углы φ_1 и φ_2 , определяющие положения максимумов, и зная длину волны λ , можно найти по формулам (96.1) и (96.2) периоды структуры d_1 и d_2 . Если направления, в которых структура периодична (например, направления, перпендикулярные к штрихам решеток), образуют угол α , отличный от нуля, дифракционные максимумы расположатся не в вершинах прямоугольников (как на рис. 96.1), а в вершинах параллелограммов. В этом случае по дифракционной

картине можно определить не только периоды d_1 и d_2 , но и угол α .

Дифракционную картину, аналогичную изображенной на рис. 96.1, дают любые двумерные периодические структуры, например система небольших отверстий или система непрозрачных маленьких шариков.

Для возникновения дифракционных максимумов необходимо, чтобы период структуры d был больше λ . В противном случае условия (96.1) и (96.2) могут быть удовлетворены только при значениях m_1 и m_2 , равных нулю (модуль $\sin \phi$ не может превышать единицу).

Дифракция наблюдается также на трехмерных структурах, т. е. пространственных образованиях, обнаруживающих периодичность по трем не лежащим в одной плоскости направлениям (рис. 96.2). Подобными структурами являются все кристаллические тела. Однако их период (порядка 0,1 нм) слишком мал для того, чтобы можно было наблюдать дифракцию в видимом свете. В случае кристаллов условие $d > \lambda$ выполняется только для рентгеновских лучей. Впервые дифракция рентгеновских лучей на кристаллах наблюдалась в 1913 г. в опыте Лауз, Фридриха и Книппинга¹⁾ (Лауз принадлежит идея, остальным авторам — осуществление опыта).

Русский ученый Вульф²⁾ и английские ученые У. Г. и У. Л. Брэгги³⁾ показали независимо друг от друга, что расчет дифракционной картины от кристаллической решетки можно осуществить следующим способом. Проведем через узлы кристаллической решетки параллельные равноотстоящие плоскости (рис. 96.3), которые мы будем называть атомными слоями. Если падающая на кристалл волна плоская, огибающая вторичных волн, порождаемых атомами, лежащими в таком слое, также будет плоской. Таким

¹⁾ Макс фон Лауз (1879—1960) — немецкий физик. Вальтер Фридрих (1883—1968) — немецкий физик. Пауль Книппинг (1883—1935) — немецкий физик.

²⁾ Георгий (Юрий) Викторович Вульф (1863—1925) — советский кристаллограф.

³⁾ Уильям Генри Брэгг (1862—1942) — английский физик. Уильям Лоренс Брэгг (1890—1971) — английский физик, сын У. Г. Брэгга.

образом, суммарное действие атомов, лежащих в одном и том же слое, можно представить в виде плоской волны, отразившейся от атомного слоя по обычному закону отражения.

Плоские вторичные волны, отразившиеся от разных атомных слоев, когерентны и будут интерферировать друг с другом подобно волнам, посыпаемым в данном направлении различными щелями дифракционной решетки. При этом, как и в случае решетки,

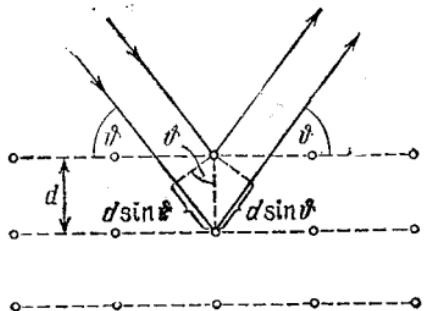


Рис. 96.3. Разность хода волн, отраженных от двух соседних атомных слоев, равна $2d \sin \theta$

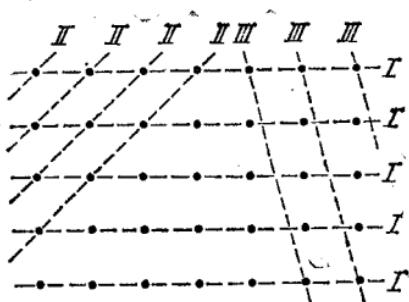


Рис. 96.4. Три системы атомных слоев, отличающихся густотой атомов

вторичные волны будут практически погашать друг друга во всех направлениях, кроме тех, для которых разность хода между соседними волнами является кратной λ . На рис. 96.3 видно, что разность хода двух волн, отразившихся от соседних атомных слоев, равна $2d \sin \theta$, где d — период идентичности кристалла в направлении, перпендикулярном к рассматриваемым слоям, θ — угол, дополнительный к углу падения и называемый углом скольжения падающих лучей. Следовательно, направления, в которых получаются дифракционные максимумы, определяются условием

$$2d \sin \theta = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (96.3)$$

Это соотношение называется формулой Брэгга — Вульфа.

Атомные слои в кристалле можно провести множеством способов (рис. 96.4). Каждая система слоев может дать дифракционный максимум, если для нее окажется выполненным условие (96.3). Однако заметную интенсивность имеют только те максимумы,

которые получаются за счет отражений от слоев, достаточно густо усеянных атомами (например, от слоев I и II на рис. 96.4).

Дифракция рентгеновского излучения на кристаллах находит два основных применения. Она используется для исследования спектрального состава рентгеновского излучения (рентгеновская спектроскопия) и для изучения структуры кристаллов (рентгеноструктурный анализ).

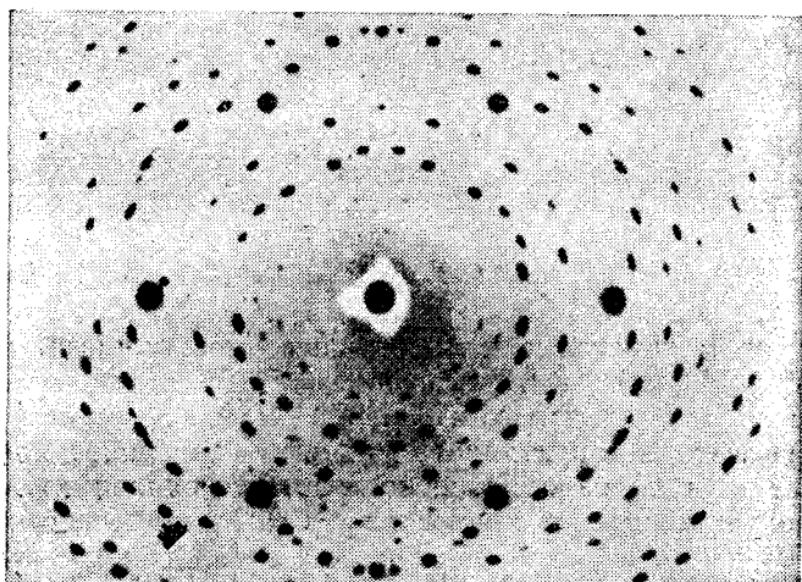


Рис. 96.5. Лауэграмма берилла

Определяя направления максимумов, получающихся при дифракции исследуемого рентгеновского излучения на кристаллах с известной структурой, можно вычислить длины волн. Первоначально для определения длин волн были использованы кристаллы кубической системы, причем межплоскостные расстояния определялись из плотности и относительной молекулярной массы кристалла.

В методе структурного анализа, предложенном Лауэ, пучок «белого» рентгеновского излучения направлялся на неподвижный монокристалл. Для каждой системы слоев, достаточно густо усеянных атомами, находится в излучении длина волны, при которой выполняется условие (96.3). Поэтому на поме-

щенной за кристаллом фотопластинке получается (после проявления) совокупность темных пятнышек. Взаимное расположение пятнышек отражает симметрию кристалла. По расстояниям между пятнышками и по их интенсивности удается найти размещение

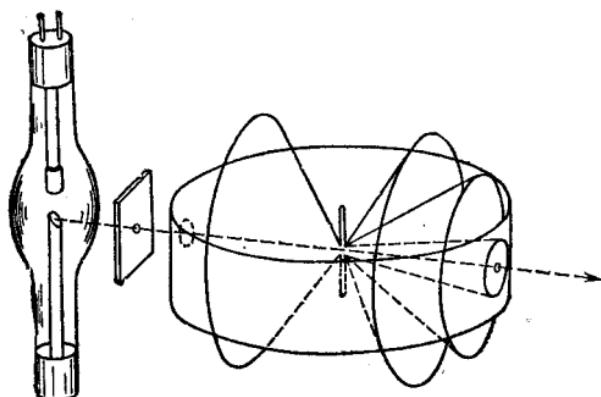


Рис. 96.6. Получение рентгенограммы по методу Дебая и Шерера

атомов в кристалле и расстояния между ними. На рис. 96.5 приведена лаузограмма берилла (минерала из группы силикатов).

В методе структурного анализа, разработанном Дебаем и Шерером¹), используется монохроматическое рентгеновское излучение и поликристаллические

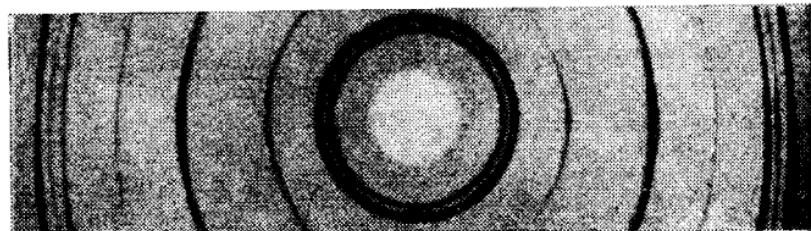


Рис. 96.7. Дебаеграмма

образцы. Исследуемое вещество измельчается в порошок, из которого прессуется образец в виде проволочки. Образец устанавливается по оси цилиндрической камеры, на боковую поверхность которой укладывается фотопленка (рис. 96.6). В огромном количестве беспорядочно ориентированных кристалли-

¹) Пауль Шерер (1890—1970) — швейцарский физик,

ков найдется много таких, для которых окажется выполненным условие (96.3), причем дифрагированный луч для разных кристалликов будет лежать во всех возможных плоскостях. В результате для каждой системы атомных слоев и каждого значения t получится не одно направление максимума, а конус направлений, ось которого совпадает с направлением падающего пучка (см. рис. 96.6). Получающаяся на пленке картина (дебаеграмма) имеет вид, показанный на рис. 96.7. Каждая пара симметрично расположенных линий соответствует одному из дифракционных максимумов, удовлетворяющих условию (96.3) при некотором значении t . Расшифровка рентгенограммы позволяет определить структуру кристалла.

§ 97. Понятие о голограммии

Голограммия («полная запись», от греческого: голос — весь, графо — пишу) есть особый способ фиксирования на фотопластинке структуры световой волны, отраженной предметом. При освещении этой пластиинки (голограммы) пучком света зафиксированная на ней волна восстанавливается в почти первоначальном виде, так что при восприятии восстановленной волны глазом зрительное ощущение бывает практически таким, каким оно было бы при наблюдении самого предмета.

Голограммия была изобретена в 1947 г. Габором¹⁾. Однако полное осуществление идеи Габора стало возможным только после появления в 1960 г. источников света высокой степени когерентности — лазеров. Исходная схема Габора была усовершенствована американскими физиками Э. Лейтом и Дж. Ю. Упатниексом, которые получили в 1963 г. первые лазерные голограммы. Денисюк²⁾ предложил в 1962 г. оригинальный метод фиксирования голограмм на толстослойной эмульсии. Этот метод, в отличие от голограмм на тонкослойной эмульсии, даёт цветное изображение предметов.

¹⁾ Денис Габор (1900—1979) — физик. По национальности венгр, с 1927 г. в Германии, с 1934 г. в Великобритании, с 1967 г. в США.

²⁾ Юрий Николаевич Денисюк (р. 1927) — советский физик.

Мы ограничимся элементарным рассмотрением метода получения голограмм на тонкослойной эмульсии. На рис. 97.1 a дана схема установки для получения голограммы, а на рис. 97.1 b — схема восстановления изображения. Испускаемый лазером световой пучок,

расширенный с помощью системы линз, делится на две части. Одна часть отражается зеркалом к фотопластинке, образуя так называемый опорный пучок 1. Вторая часть попадает на пластинку, отразившись от фотографируемого предмета; она образует предметный пучок 2. Пучки должны быть когерентными. Это требование выполняется, так как излучение лазера обладает высокой степенью пространственной когерентности (световые колебания когерентны по всему поперечному сечению лазерного пучка). Опорный и предметный пучки, налагааясь друг на друга,

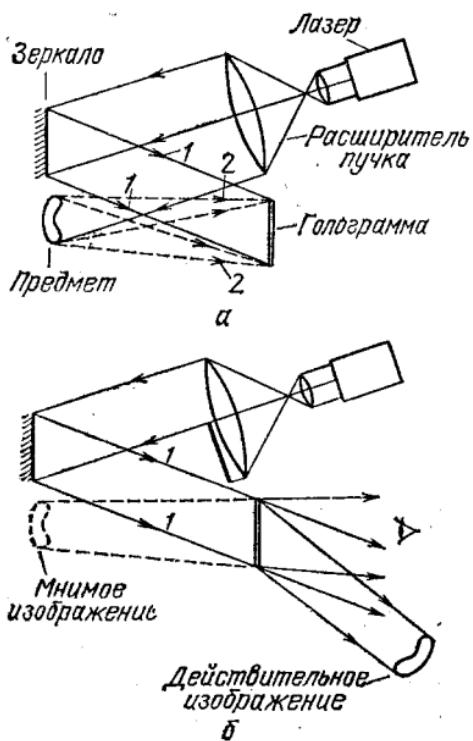


Рис. 97.1. Схема получения голограммы (а) и восстановления изображения (б)

образуют интерференционную картину, которая фиксируется фотопластинкой. Экспонированная таким способом и проявленная фотопластинка и есть голограмма. В образовании голограммы участвуют два пучка света, в связи с чем описанная схема получения голограмм называется двухлучевой.

Для восстановления изображения голограмму располагают относительно источника света так, как она была расположена при фотографировании, и освещают опорным пучком света (часть лазерного пучка, которая освещала при фотографировании предмет, перекрывается). Опорный пучок дифрагирует на голограмме, в результате чего возникает волна, имею-

щая точно такую структуру, как волна, отразившаяся от предмета. Эта волна дает мнимое изображение предмета, которое воспринимается глазом наблюдателя. Наряду с волной, образующей мнимое изображение, возникает еще одна волна, которая дает действительное изображение предмета. Действительное изображение псевдоскопично; это означает, что оно имеет рельеф, обратный рельефу предмета. — выпуклые места заменены вогнутыми и наоборот.

Рассмотрим характер голограммы и процесс восстановления изображения. Пусть на фотопластинку падают два когерентных параллельных пучка световых лучей, идущих под углом ψ друг к другу (рис. 97.2). Пучок 1 является опорным, пучок 2 — предметным (предмет в данном случае представляет собой бесконечно удаленную точку). Для простоты предположим, что пучок 1 падает на пластинку нормально. Все полученные при этом результаты остаются справедливыми и при наклонном падении опорного пучка, однако формулы в этом случае более громоздки.

Вследствие интерференции опорного и предметного пучков на пластинке образуется система чередующихся прямолинейных максимумов и минимумов интенсивности. Пусть точки A и B соответствуют серединам соседних максимумов. Тогда разность хода Δ' лучей предметного пучка до этих точек равна λ . На рис. 97.2 видно, что $\Delta' = d \sin \psi$; следовательно,

$$d \sin \psi = \lambda. \quad (97.1)$$

Зафиксировав на пластинке интерференционную картину, направим на нее опорный пучок 1. Пластина для этого пучка играет роль дифракционной решетки с периодом d , определяемым формулой (97.1). Особенностью этой решетки является то обстоятель-

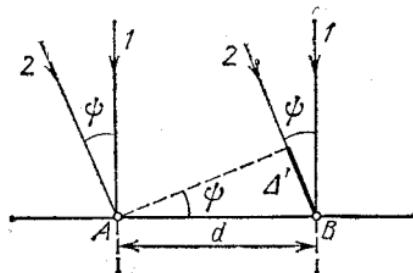


Рис. 97.2. При получении голограммы опорный пучок 1—1, интерфеiriруя с предметным пучком 2—2, образует на фотопластинке интерференционную картину

ство, что ее пропускательная способность изменяется в направлении, перпендикулярном к «штрихам», по закону косинуса (у рассматривавшихся в § 94 решеток она изменялась скачком: просвет — темно — прозрачный — темно и т. д.). Эта особенность приводит к тому, что интенсивность всех дифракционных максимумов порядка выше первого практически равна нулю.

При освещении пластиинки опорным пучком (рис. 97.3) возникает дифракционная картина, максимумы которой образуют с нормалью к пластиинке углы ϕ , определяемые условием

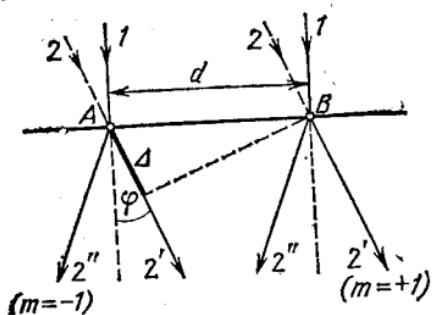


Рис. 97.3. При восстановлении изображения опорный пучок 1—1', дифрагируя на голограмме, дает максимум 2'—2' в направлении показанного штриховой линией предметного пучка 2—2 (который при восстановлении отсутствует), и максимум 2''—2''

Кроме того, возникает максимум, отвечающий

$$m = -1.$$

Полученный нами результат справедлив и в том случае, когда предметный пучок 2 является не параллельным, а расходящимся. При этом максимум, соответствующий $m = +1$, имеет вид расходящегося пучка лучей 2' (он дает мнимое изображение точки, из которой выходили лучи 2 при экспонировании); максимум же, отвечающий $m = -1$, имеет характер расходящегося пучка лучей 2'' (он образует действительное изображение точки, из которой выходили лучи 2 при экспонировании).

При получении голограммы пластиинка освещается опорным пучком 1 и множеством расходящихся пучков 2, отраженных разными точками предмета. На пластиинке возникает сложная интерференционная картина, образуемая в результате наложения кар-

$$d \sin \phi = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1) \quad (97.2)$$

(ср. с формулой (94.5)). Максимум, отвечающий $m = 0$, лежит на продолжении опорного пучка. Максимум, отвечающий $m = +1$, имеет такое же направление, какое имел при экспонировании предметный пучок 2 (ср. формулы (97.1) и (97.2)).

максимум, отвечающий

тин, даваемых каждым из пучков в отдельности. При освещении голограммы опорным пучком 1 оказываются восстановленными все пучки 2, т. е. полная световая волна, отражавшаяся предметом (ей отвечает $m = +1$). Кроме нее, возникают еще две волны (отвечающие $m = 0$ и $m = -1$). Но эти волны распространяются в других направлениях и не мешают восприятию волны, дающей мнимое изображение предмета (см. рис. 97.1).

Изображение предмета, даваемое голограммой, является объемным. Если при съемке близкие предметы закрывали более удаленные, то, сместившись в сторону, можно заглянуть за ближайший предмет (вернее, за его изображение) и увидеть скрытые до того предметы. Это объясняется тем, что, сместившись в сторону, мы воспринимаем изображение, восстановленное от периферической части голограммы, на которую при экспонировании падали также и лучи, отраженные от скрытых предметов. Рассматривая изображения близких и дальних предметов, приходится, как и при рассматривании самих предметов, по-разному аккомодировать глаз.

Если голограмму расколоть на несколько кусков, то каждый из них при просвечивании дает такую же картину, что и исходная голограмма. Однако чем меньшая часть голограммы используется для восстановления изображения, тем меньше его четкость. Это легко понять, приняв во внимание, что при уменьшении числа штрихов дифракционной решетки ее разрешающая способность уменьшается (см. формулу (95.4)).

Возможные применения голографии весьма разнообразны. Далеко не полный их перечень образуют голографические кино и телевидение, голографический микроскоп, контроль качества обработки изделий. В литературе можно встретить утверждение, что изобретение голографии сравнимо по его последствиям с созданием радиосвязи.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем дифракция отличается от интерференции света?
2. Что такое зона Френеля?
3. Как устроена фазовая зонная пластинка?

4. Чем примечательна картина, получающаяся при дифракции на малом непрозрачном диске?
5. Что произойдет с дифракционной картиной от щели при уменьшении ширины щели в два раза?
6. Что называется разрешающей способностью спектрального прибора?

Примеры решения задач

1. На непрозрачную преграду с отверстием радиуса $r = 1,000$ мм падает квазимохроматическая плоская световая волна. Когда расстояние от преграды до установленного за ней экрана равно $b_1 = 0,575$ м, в центре дифракционной картины наблюдается максимум интенсивности. При увеличении расстояния до значения $b_2 = 0,862$ м максимум интенсивности сменяется минимумом. Определить длину волны λ света.

Решение. В случае, когда радиус отверстия удовлетворяет условию

$$r^2 = b m \lambda$$

(b — расстояние от преграды до экрана, λ — длина волны, m — целое число), оказываются открытыми m зон Френеля. Пусть при $b = b_1$ открыто m зон. Тогда

$$r^2 = b_1 m \lambda \quad (1)$$

(поскольку речь идет о максимуме интенсивности, m является четным). При увеличении расстояния до $b = b_2$ число зон уменьшается на одну ($b m = \text{const}$) и становится нечетным:

$$r^2 = b_2 (m - 1) \lambda. \quad (2)$$

Исключив m из уравнений (1) и (2), получим, что

$$\begin{aligned} \lambda = r^2 \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} \right) &= 1,000^2 \cdot 10^{-6} \left(\frac{1}{0,575} - \frac{1}{0,862} \right) = \\ &= 58 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 580 \text{ нм}. \end{aligned}$$

2. Свет, падающий нормально на дифракционную решетку, состоит из двух резких спектральных линий с длинами волн $\lambda_1 = 490$ нм (голубой цвет) и $\lambda_2 = 600$ нм (оранжевый цвет). Первый дифракционный максимум для линии с длиной волны λ_1 располагается под углом $\varphi_1 = 10,0^\circ$. Найти угловое расстояние $\Delta\varphi$ между линиями в спектре второго порядка.

Решение. Условие первого максимума для длины волны λ_1 имеет вид

$$d \sin \varphi_1 = \lambda_1, \quad \text{откуда} \quad d = \lambda_1 / \sin \varphi_1, \quad (3)$$

где d — период решетки. Напишем условие второго максимума для обеих длин волн:

$$d \sin \varphi'_1 = 2\lambda_1, \quad d \sin \varphi'_2 = 2\lambda_2.$$

Отсюда

$$\Delta\varphi = \varphi'_2 - \varphi'_1 = \arcsin \frac{2\lambda_2}{d} - \arcsin \frac{2\lambda_1}{d}.$$

Подставив значение (3) для d , получим

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \arcsin \left(2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin \varphi_1 \right) - \arcsin (2 \sin \varphi_1) = \\ &= \arcsin \left(2 \frac{600}{490} \sin 10,0^\circ \right) - \arcsin (2 \sin 10,0^\circ) = 4,8^\circ. \end{aligned}$$

Г л а в а 14. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

§ 98. Естественный и поляризованный свет

В естественном свете колебания различных перпендикулярных к лучу направлений быстро и беспорядочно сменяют друг друга. Поэтому все направления колебаний равновероятны (см. рис. 84.3). Свет, у которого направления колебаний упорядочены каким-либо образом, называется поляризованным. Если колебания светового вектора происходят только в одной проходящей через луч плоскости, свет называется плоско- (или линейно-) поляризованным. Упорядоченность колебаний может заключаться в том, что вектор E поворачивается вокруг луча, одновременно пульсируя по величине. В результате конец вектора E описывает эллипс. Такой свет называется эллиптически поляризованным. Если конец вектора E описывает окружность, свет называется поляризованным по кругу.

Рассмотрим два взаимно перпендикулярных электрических колебания, совершающихся вдоль осей x и y и отличающихся по фазе на δ :

$$E_x = A_1 \cos \omega t, \quad E_y = A_2 \cos (\omega t + \delta). \quad (98.1)$$

Результирующая напряженность E является векторной суммой напряженностей E_x и E_y (рис. 98.1). Угол

ϕ между направлением вектора E и осью x определяется выражением

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_2 \cos(\omega t + \delta)}{A_1 \cos \omega t}. \quad (98.2)$$

Если разность фаз δ претерпевает случайные хаотические изменения, то и угол ϕ , т. е. направление светового вектора E , будет испытывать скачкообразные неупорядоченные изменения. Следовательно, естественный свет можно представить как наложение двух

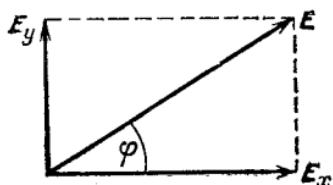


Рис. 98.1. Разложение светового вектора E на составляющие вдоль осей x и y

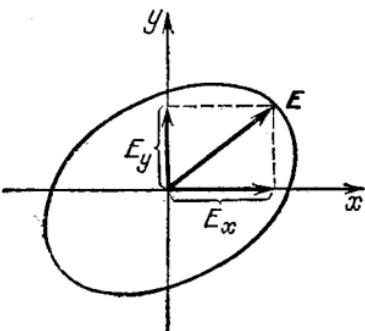


Рис. 98.2. В эллиптически поляризованном свете конец вектора E движется по эллипсу

некогерентных электромагнитных волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеющих одинаковую интенсивность. Такое представление намного упрощает рассмотрение прохождения естественного света через поляризационные устройства.

Допустим, что световые волны (98.1) когерентны, причем δ равна нулю или π . Тогда согласно (98.2)

$$\operatorname{tg} \phi = \pm A_2/A_1 = \text{const.}$$

Следовательно, результирующее колебание совершается в фиксированном направлении — свет оказывается плоскополяризованным.

В случае, когда $A_1 = A_2$ и $\delta = \pm\pi/2$,

$$\operatorname{tg} \phi = \mp \operatorname{tg} \omega t$$

$(\cos(\omega t \pm \pi/2) = \mp \sin \omega t)$. Отсюда вытекает, что плоскость колебаний поворачивается вокруг направления луча с угловой скоростью, равной частоте колебаний ω . Свет в этом случае поляризован по кругу.

В § 69 мы установили, что при сложении взаимно перпендикулярных электрических колебаний E_x и E_y , совершающихся с постоянной разностью фаз (т. е. когерентных), конец результирующего вектора E в общем случае движется по эллипсу (рис. 98.2), в частности, может получиться движение по прямой или окружности. Следовательно, две когерентные плоскополяризованные световые волны, плоскости колебаний которых взаимно перпендикулярны, при наложении друг на друга дают эллиптически поляризованную световую волну. При разности фаз δ , равной нулю или π , эллипс вырождается в прямую и получается плоскополяризованный свет. При $\delta = \pm\pi/2$ и равенстве амплитуд складываемых волн эллипс превращается в окружность — получается свет, поляризованный по кругу. В зависимости от направления вращения вектора E различают правую и левую эллиптическую и круговую поляризацию.

Плоскость, в которой колеблется световой вектор в плоскополяризованной волне, называется плоскостью колебаний или плоскостью поляризации.

Плоскополяризованный свет можно получить из естественного с помощью приборов, называемых поляризаторами. Эти приборы свободно пропускают колебания, параллельные плоскости, которую мы будем называть плоскостью поляризатора, и полностью или частично задерживают колебания, перпендикулярные к этой плоскости. Поляризатор, задерживающий перпендикулярные к его плоскости колебания только частично, мы будем называть несовершенным. Просто поляризатором мы будем называть идеальный поляризатор, полностью задерживающий колебания, перпендикулярные к его плоскости, и не ослабляющий колебаний, параллельных плоскости.

На выходе из несовершенного поляризатора получается свет, в котором колебания одного направления преобладают над колебаниями других направлений. Такой свет называется частично поляризованным. Его можно рассматривать как смесь естественного и плоскополяризованного. Частично поляризованный свет, как и естественный, можно представить в виде наложения двух некогерентных

плоскополяризованных волн с взаимно перпендикулярными плоскостями колебаний. Отличие заключается в том, что в случае естественного света интенсивность этих волн одинакова, а в случае частично поляризованного — разная.

Если пропустить частично поляризованный свет через поляризатор, то при вращении прибора вокруг

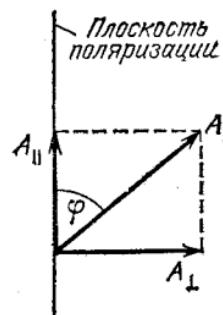


Рис. 98.3. Разложение светового колебания с амплитудой A на параллельное плоскости поляризатора колебание с амплитудой A_{\parallel} и перпендикулярное к плоскости колебание с амплитудой A_{\perp}

направления луча интенсивность прошедшего света будет изменяться в пределах от I_{\max} до I_{\min} , причем переход от одного из этих значений к другому будет

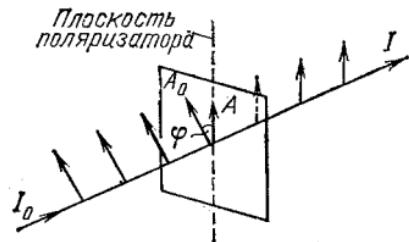


Рис. 98.4. Поляризатор пропускает только составляющую светового колебания, имеющую амплитуду $A = A_0 \cos \varphi$

совершаться при повороте на угол, равный $\pi/2$ (за один полный поворот два раза будет достигаться максимальное и два раза минимальное значение интенсивности). Выражение

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (98.3)$$

называется степенью поляризации. Для плоскополяризованного света $I_{\min} = 0$ и $P = 1$; для естественного света $I_{\max} = I_{\min}$ и $P = 0$. К эллиптически поляризованному свету понятие степени поляризации неприменимо (у такого света колебания полностью упорядочены).

Колебание амплитуды A , совершающееся в плоскости, образующей с плоскостью поляризатора угол φ , можно разложить на два колебания с амплитуда-

ми $A_{\parallel} = A \cos \phi$ и $A_{\perp} = A \sin \phi$ (рис. 98.3; луч перпендикулярен к плоскости рисунка). Первое колебание пройдет через прибор, второе будет задержано. Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому если на поляризатор падает плоскополяризованный свет интенсивности I_0 , то интенсивность прошедшего света определяется выражением

$$I = I_0 \cos^2 \phi \quad (98.4)$$

(рис. 98.4; ϕ — угол между плоскостью колебаний падающего света и плоскостью поляризатора). Соотношение (98.4) носит название закона Малюса¹.

§ 99. Поляризация света при отражении и преломлении

Если угол падения света на границу раздела двух прозрачных диэлектриков (например, на поверхность стеклянной пластиинки) отличен от нуля, то отраженный и преломленный лучи оказываются частично поляризованными. В отраженном луче преобладают

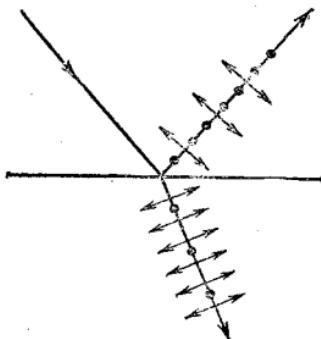


Рис. 99.1. В отраженном свете преобладают колебания, перпендикулярные к плоскости падения (они изображены точками), в преломленном свете — колебания, параллельные плоскости падения (они изображены двусторонними стрелками)

колебания, перпендикулярные к плоскости падения, в преломленном луче — колебания, параллельные плоскости падения (рис. 99.1). Степень поляризации зависит от угла падения.

Обозначим через θ_{Br} угол, определяемый условием

$$\operatorname{tg} \theta_{Br} = n_{12} \quad (99.1)$$

(n_{12} — показатель преломления второй среды относительно первой). При угле падения, равном θ_{Br} , отраженный луч полностью поляризован (он содержит

¹) Этьенни Луи Малюс (1775—1812) — французский физик.

только колебания, перпендикулярные к плоскости падения). Степень поляризации преломленного луча при угле падения, равном θ_{Br} , достигает наибольшего значения, однако этот луч остается поляризованным только частично.

Соотношение (99.1) носит название закона Брюстера¹), а угол θ_{Br} называется углом Брюстера. Легко убедиться в том, что при падении света под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.

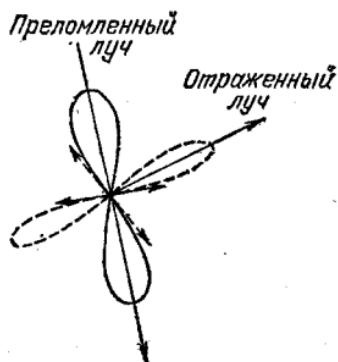
Явление поляризации света при отражении и преломлении объясняет электромагнитная теория Максвелла. Мы ограничимся качественным объяснением. Предположим для простоты, что отражение и преломление происходят на границе диэлектрика с вакуумом. Падающая световая волна, проникнув в диэлектрик, заставляет оптические электроны атомов совершать вынужденные колебания. Колеблющиеся электроны излучают электромагнитные волны, которые мы назовем вторичными. Вне диэлектрика вторичные волны, налагаясь друг на друга, дают отраженную волну. Внутри диэлектрика вторичные волны складываются с падающей (первой) волной. Результирующая первичной и вторичной волн образует преломленную волну. Вынужденные колебания электронов совершаются в направлении вектора E этой результирующей волны.

Рассмотрим один из электронов, излучающих вторичную волну. Разложим колебание электрона на два колебания, одно из которых совершается в плоскости падения, второе — в направлении, перпендикулярном к этой плоскости. Первое колебание изображено на рис. 99.2 сплошной двусторонней стрелкой, второе — штриховой стрелкой. Каждому из колебаний соответствует плоскополяризованная вторичная волна. Сильнее всего электрон излучает в направлении, перпендикулярном к направлению колебаний; в направлении колебаний электрон не излучает (см. рис. 82.3). Из рис. 99.2 следует, что в направлении отраженного луча интенсивность вторичной волны с плоскостью колебаний, перпендикулярной к плоскости падения (штриховой лепесток), намного

¹⁾ Дэвид Брюстер (1781—1868) — шотландский физик.

превышает интенсивность вторичной волны, в которой вектор E колебается в плоскости падения (сплошной лепесток). Следовательно, в отраженном луче колебания, перпендикулярные к плоскости падения, преобладают над колебаниями иных направлений; поэтому отраженный луч оказывается частично поляризованным. При падении света под углом Брюстера направление колебаний электронов, параллельных плоскости падения (сплошная двусторонняя

Рис. 99.2. Диаграммы направленности излучений, обусловленных составляющей колебаний электрона, параллельной плоскости падения (сплошной лепесток, лежащий в плоскости рисунка), и составляющей, перпендикулярной к этой плоскости (штриховой лепесток, лежащий в плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка). Составляющие колебаний электрона изображены двусторонними стрелками



стрелка), совпадает с направлением отраженного луча, так что интенсивность вторичной волны с соответствующим направлением колебаний обращается в нуль — отраженный луч оказывается полностью поляризованным.

В естественном падающем луче интенсивность колебаний различных направлений одинакова. Энергия этих колебаний распределяется между отраженной и преломленной волнами. Поэтому если в отраженном луче будет больше интенсивность колебаний одного направления, то в силу закона сохранения энергии в преломленном луче должна быть больше интенсивность колебаний другого направления. Отсюда следует, что преломленный луч будет частично поляризован.

§ 100. Поляризация света при двойном лучепреломлении

При прохождении света через все прозрачные кристаллы, за исключением принадлежащих к кубической системе, наблюдается явление, заключающееся в том, что упавший на кристалл луч разделяется

внутри кристалла на два луча, распространяющихся, вообще говоря, с разными скоростями и в различных направлениях. Это явление, получившее название двойного лучепреломления, впервые наблюдалось в 1669 г. Бартолином¹⁾ для исландского шпата (разновидность углекислого кальция CaCO_3 — кристаллы гексагональной системы).

Кристаллы, обладающие двойным лучепреломлением, подразделяются на одноосные и двуосные. У одноосных кристаллов один из преломленных лучей подчиняется обычному закону преломления,

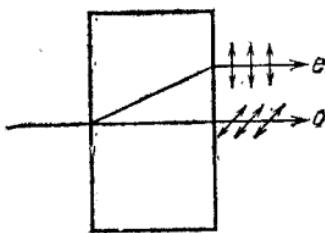


Рис. 100.1. Обыкновенный луч o поляризован в плоскости, перпендикулярной к главному сечению кристалла (плоскости рисунка), необыкновенный луч e — в плоскости главного сечения

в частности он лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности. Этот луч называется **обыкновенным** и обозначается буквой o . Для другого луча, называемого **необыкновенным** (его обозначают буквой e), отношение синусов угла падения и угла преломления не остается постоянным при изменении угла падения. Даже при нормальном падении света на кристалл необыкновенный луч, вообще говоря, отклоняется от нормали

(рис. 100.1). Кроме того, необыкновенный луч не лежит, как правило, в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности. Примерами одноосных кристаллов могут служить исландский шпат, кварц и турмалин (минерал сложного состава). У двуосных кристаллов (слюда, гипс) оба луча необыкновенные — показатели преломления у них зависят от направления в кристалле. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только одноосных кристаллов.

У одноосных кристаллов имеется направление, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются, не разделяясь, и с одинаковой скоростью. Это направление называется **оптиче-**

¹⁾ Эразм Бартолин (1625—1698) — датский физик и математик.

ской осью кристалла. Следует иметь в виду, что оптическая ось — это не прямая линия, проходящая через какую-то точку кристалла, а определенное направление в кристалле. Любая прямая, параллельная данному направлению, является оптической осью кристалла.

Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется главным сечением или главной плоскостью кристалла. Обычно рассматривают главное сечение, проходящее через световой луч.

Исследование обыкновенного и необыкновенного лучей показывает, что оба луча полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях (см. рис. 100.1). Плоскость колебаний обыкновенного луча перпендикулярна к главному сечению кристалла. В необыкновенном луче колебания светового вектора совершаются в плоскости, совпадающей с главным сечением. По выходе из кристалла оба луча отличаются друг от друга только направлением поляризации, так что названия «обыкновенный» и «необыкновенный» луч имеют смысл только внутри кристалла.

В некоторых кристаллах один из лучей поглощается сильнее другого. Это явление называется дихроизмом. Очень сильным дихроизмом в видимых лучах обладает кристалл турмалина. В нем обыкновенный луч практически полностью поглощается на длине 1 мм. В кристаллах сульфата йодистого хинина один из лучей поглощается на пути примерно в 0,1 мм. Это обстоятельство использовано для изготовления поляризационного устройства, называемого поляроидом. Оно представляет собой целлулоидную пленку, в которую введено большое количество одинаково ориентированных кристаллов сульфата йодистого хинина.

На явлении двойного лучепреломления основано действие поляризационного устройства, называемого призмой Николя¹⁾ (или просто николем). Оно представляет собой призму из исландского шпата (рис. 100.2), разрезанную по диагонали и склеен-

¹⁾ Уильям Николь (1768—1851) — шотландский учёный.

ную канадским бальзамом¹⁾). Показатель преломления n канадского бальзами лежит между показателями преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в исландском шпатае ($n_o > n > n_e$). Угол падения подбирается таким, чтобы обыкновенный луч претерпевал на прослойке бальзами полное внутреннее отражение и отклонялся в сторону, необыкновенный же луч свободно проходил через эту прослойку и выходил из призмы.

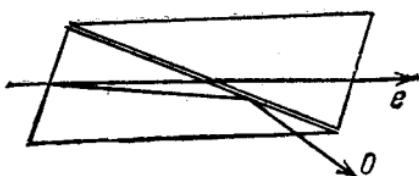


Рис. 100.2. Призма Николя

Используемое для исследования характера поляризации света, называют анализатором.

Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов. В кристаллах некубической системы диэлектрическая проницаемость ϵ оказывается зависящей от направления. В одноосных кристаллах ϵ в направлении оптической оси и в направлениях, перпендикулярных к ней, имеет значения ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} . В других направлениях ϵ имеет промежуточные значения. Если откладывать из некоторой точки отрезки, длина которых равна значению ϵ в данном направлении, то концы отрезков образуют эллипсоид вращения, ось которого совпадает с оптической осью кристалла. Согласно формуле (84.3) $n = \sqrt{\epsilon}$. Следовательно, из анизотропии ϵ вытекает, что электромагнитным волнам с различными направлениями колебаний вектора E соответствуют разные значения показателя преломления n . Поэтому скорость световых волн зависит от направления колебаний светового вектора E .

В обыкновенном луче колебания светового вектора происходят в направлении, перпендикулярном к главному сечению кристалла (на рис. 100.3 эти колебания изображены точками на соответствующем луче). Поэтому при любом направлении обыкновенного луча (на рисунке указаны три направления:

¹⁾ Канадским бальзамом называется смелообразное вещество, добываемое из канадской пихты. Показатель преломления этого вещества близок к показателю преломления стекла, поэтому канадский бальзам применяется для склеивания стеклянных частей в оптических приборах.

1, 2, 3) вектор E образует с оптической осью кристалла прямой угол, и скорость световой волны будет одна и та же, равная $v_0 = c/\sqrt{\epsilon_{\perp}}$. Изображая скорость обыкновенного луча в виде отрезков, отложенных по разным направлениям, мы получим сферическую поверхность. На рис. 100.3 показано пересечение этой

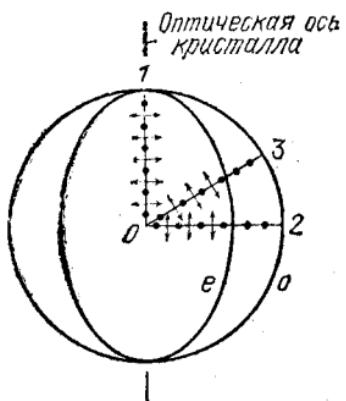


Рис. 100.3. Приведя рисунок во вращение вокруг оптической оси кристалла, получим сферическую волновую поверхность обыкновенного луча и имеющую форму эллипсоида волновую поверхность необыкновенного луча

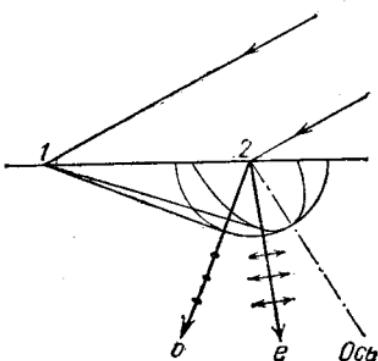


Рис. 100.4. Построение с помощью принципа Гюйгенса волновых поверхностей обыкновенного (o) и необыкновенного (e) лучей. Необыкновенный луч e не совпадает с нормалью к волновой поверхности

поверхности с плоскостью чертежа. Такая картина, как на рисунке, наблюдается в любом главном сечении, т. е. в любой плоскости, проходящей через оптическую ось. Представим себе, что в точке O внутри кристалла помещается точечный источник света. Тогда построенная нами сфера будет волновой поверхностью обыкновенных лучей.

Колебания в необыкновенном луче совершаются в главном сечении. Поэтому для разных лучей направления колебаний вектора E (на рис. 100.3 эти направления изображены двусторонним стрелками) образуют с оптической осью разные углы α . Для луча 1 угол α равен $\pi/2$, вследствие чего скорость имеет значение $v_o = c/\sqrt{\epsilon_{\perp}}$, для луча 2 угол $\alpha = 0$ и скорость равна $v_e = c/\sqrt{\epsilon_{\parallel}}$. Для луча 3 скорость имеет

промежуточное значение. Можно доказать, что волновая поверхность необыкновенных лучей представляет собой эллипсоид вращения. В местах пересечения с оптической осью кристалла этот эллипсоид и сфера, построенная для обыкновенных лучей, соприкасаются.

Одноосные кристаллы характеризуют показателем преломления обыкновенного луча $n_o = c/v_o$ и показателем преломления необыкновенного луча, перпендикулярного к оптической оси, $n_e = c/v_e$. Последнюю величину называют просто показателем преломления необыкновенного луча.

Ход обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле можно определить с помощью принципа Гюйгенса. На рис. 100.4 построены волновые поверхности обыкновенного и необыкновенного лучей с центром в точке 2, лежащей на поверхности кристалла. Построение выполнено для момента времени, когда волновой фронт падающей плоской волны достигает точки 1. Огибающие всех вторичных волн (волны, центры которых лежат в промежутке между точками 1 и 2, на рисунке не показаны) для обыкновенного и необыкновенного лучей, очевидно, представляют собой плоскости. Преломленные лучи *o* и *e*, вышедшие из точки 2, проходят через точку касания огибающей с соответствующей волновой поверхностью.

Напомним, что лучами называются линии, вдоль которых распространяется энергия световой волны (см. § 84). Из рис. 100.4 следует, что обыкновенный луч *o* совпадает с нормалью к соответствующей волновой поверхности. Необыкновенный же луч *e* заметно отклоняется от нормали к волновой поверхности.

На рис. 100.5 изображены три случая нормального падения света на поверхность кристалла, отличающихся направлением оптической оси. В случае *a* лучи *o* и *e* распространяются вдоль оптической оси и поэтому идут не разделяясь. На рис. 100.5б видно, что даже при нормальном падении света на преломляющую поверхность необыкновенный луч может отклониться от нормали к этой поверхности. На рис. 100.5в оптическая ось кристалла параллельна преломляющей поверхности. В этом случае при нор-

мальном падении света обычный и необыкновенный лучи идут по одному и тому же направлению, но распространяются с разной скоростью, вследствие чего между ними возникает все возрастающая разность фаз.

Рассмотрим кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси. При нормальном падении плоскополяризованного света на такую пластинку из нее выйдут два когерентных луча, поляризованных взаимно перпендикулярных направлениях. Отношение амплитуд этих лучей зависит от угла Φ

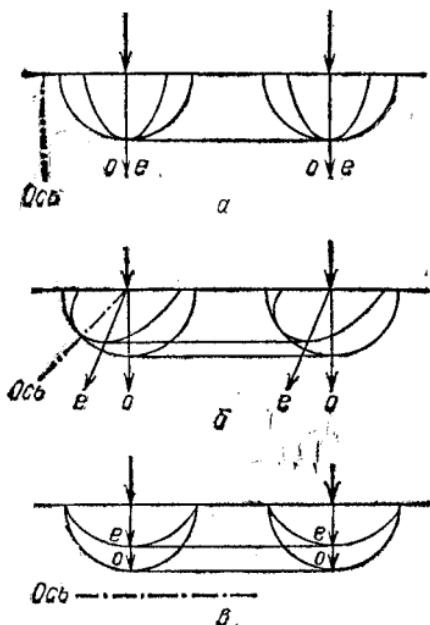


Рис. 100.5. Построение обычного (o) и необыкновенного (e) лучей для случая нормального падения света на поверхность кристалла и различных ориентаций оптической оси

из рисунка. На рисунке a показано, что при нормальном падении света на плоскую поверхность кристалла из нее выходит один луч, поляризованный вдоль оптической оси. На рисунке b показано, что при падении света на кривую поверхность кристалла из нее выходит два луча, поляризованных вдоль оптической оси. На рисунке c показано, что при нормальном падении света на плоскую поверхность кристалла из нее выходит один луч, поляризованный вдоль оптической оси.

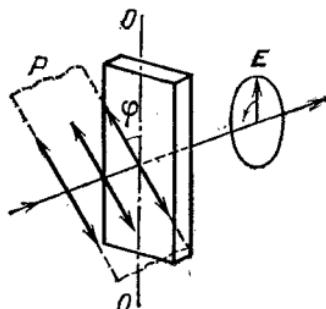


Рис. 100.6. Схема получения эллиптически поляризованного света и света, поляризованного по кругу. Рисунок выполнен для случая, когда $\phi = 45^\circ$, так что получается круговая поляризация

между плоскостью колебаний в падающем луче и оптической осью пластиинки (рис. 100.6). При $\phi = \pi/4$ амплитуды будут одинаковыми. Поскольку обычный и необыкновенный лучи распространяются с разной скоростью, между ними возникает разность фаз, зависящая от толщины пластиинки и разности показателей преломления $n_o - n_e$. Пластиинка, у которой возникающая при прохождении через нее разность хода лучей o и e равна $\lambda/4$ (соответственно разность фаз $\pi/2$), называется пластиинкой в четверть волны,

Таким образом, при падении на пластинку в четверть волны плоскополяризованного света из пластиинки выходят два световых колебания, совершаемых во взаимно перпендикулярных направлениях и сдвинутых по фазе на $\pi/2$. В этом случае конец результирующего вектора E движется по эллипсу. Следовательно, вышедший из пластиинки свет будет эллиптически поляризованным. В частном случае, когда $\phi = 45^\circ$, свет будет поляризован по кругу.

На свойстве пластиинки в четверть волны основан способ получения эллиптически поляризованного света (и света, поляризованного по кругу). Он заключается в последовательном пропускании естественного света через поляризатор и пластиинку в четверть волны. Вращая пластиинку вокруг направления луча, можно изменять отношение полуосей эллипса. Отметим, что при $\phi = 0$ или $\pi/2$ из пластиинки выходит плоскополяризованный свет.

§ 101. Искусственная оптическая анизотропия

В прозрачных аморфных телах, а также в кристаллах кубической системы может возникать двойное лучепреломление под влиянием внешних воздействий. В частности, это происходит при механических деформациях тел. Мерой возникающей оптической анизотропии служит разность показателей преломления обычного и необыкновенного лучей. Экспериментально установлено, что эта разность пропорциональна напряжению σ в данной точке тела (т. е. силе, приходящейся на единицу площади):

$$n_o - n_e = k\sigma \quad (101.1)$$

(k — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств вещества).

Поместим стеклянную пластиинку Q между скрещенными поляризаторами P и P' (рис. 101.1). Пока стекло не деформировано, такая система света не пропускает. Если же пластиинку подвергнуть сжатию, то свет через пластиинку начинает проходить, причем наблюдаемая в прошедших лучах картина оказывается испещренной цветными полосами. Каждая полоса соответствует одинаково деформированным местам пластиинки. Следовательно, по расположению

полос можно судить о распределении напряжений внутри пластинки. На этом основывается оптический метод исследования напряжений. Изготовленная из прозрачного изотропного материала (например, из плексигласа) модель какой-либо детали или конструкции помещается между скрещенными поляризаторами. Модель подвергается действию нагрузок, подобных тем, какие будет испытывать само изделие. Наблюдаемая при этом в проходящем свете картина

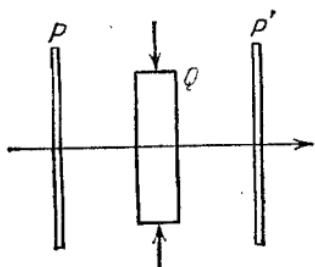


Рис. 101.1. Сжатие стеклянной пластины Q , находящейся между скрещенными поляризаторами P и P'

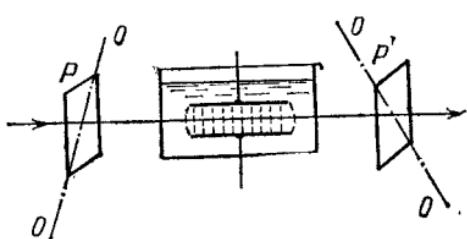


Рис. 101.2. Ячейка Керра, помещенная между скрещенными поляризаторами

позволяет определить распределение напряжений, а также судить об их значениях.

В 1875 г. Керром¹⁾ было обнаружено возникновение двойного лучепреломления в жидкостях и в аморфных твердых телах под воздействием электрического поля. Это явление получило название эффекта Керра. В 1930 г. этот эффект был наблюден также и в газах.

На рис. 101.2 показана схема установки для исследования эффекта Керра в жидкостях. Установка состоит из ячейки Керра, помещенной между скрещенными поляризаторами P и P' . Ячейка Керра представляет собой герметичный сосуд с жидкостью, в которую введены пластины конденсатора. При подаче на пластины напряжения между ними возникает практически однородное электрическое поле. Под его действием жидкость приобретает свойства одноосного кристалла с оптической осью, ориентированной вдоль поля.

¹⁾ Джон Керр (1824—1907) — шотландский физик.

Возникающая разность показателей преломления n_o и n_e пропорциональна квадрату напряженности поля E :

$$n_o - n_e = kE^2. \quad (101.2)$$

На пути l между обыкновенным и необыкновенным лучами возникает разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e) l = klE^2$$

или разность фаз

$$\delta = \frac{\Delta}{\lambda_0} \cdot 2\pi = 2\pi \frac{k}{\lambda_0} l E^2.$$

Это выражение принято записывать в виде

$$\delta = 2\pi BIE^2, \quad (101.3)$$

где B — характерная для вещества величина, называемая постоянной Керра.

Из известных жидкостей наибольшей постоянной Керра обладает нитробензол ($C_6H_5NO_2$). Постоянная Керра зависит от температуры вещества и от частоты (или длины волны) света.

Эффект Керра объясняется различной поляризумостью молекул по разным направлениям. В отсутствие поля молекулы ориентированы хаотическим образом, поэтому жидкость в целом не обнаруживает анизотропии. Под действием поля молекулы поворачиваются так, чтобы в направлении поля были ориентированы либо их дипольные электрические моменты (у полярных молекул), либо направления наибольшей поляризуемости (у неполярных молекул). В результате жидкость становится оптически анизотропной. Ориентирующему действию поля противится тепловое движение молекул. Этим обусловливается уменьшение постоянной Керра с повышением температуры.

Время, в течение которого устанавливается (при включении поля) или исчезает (при выключении поля) преимущественная ориентация молекул, составляет $10^{-13} — 10^{-10}$ с. Поэтому ячейка Керра, помещенная между скрещенными поляризаторами, может служить практически безынерционным световым затвором. В отсутствие напряжения на пластинах конденсатора затвор будет закрыт. При включении

напряжения затвор пропускает значительную часть света, падающего на первый поляризатор.

Ячейка Керра применяется в скоростной фото- и киносъемке, в оптической телефонии, в геодезических дальномерных устройствах, в схемах для управления оптическими квантовыми генераторами (лазерами), а также в научных исследованиях.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем отличается поляризованный свет от естественного?
2. Что такое степень поляризации света?
3. Дайте определение угла Брюстера.
4. Каково направление колебаний обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле?
5. Как получить свет, поляризованный по кругу?

Примеры решения задач

1. Несовершенный поляризатор пропускает в своей плоскости $\alpha_1 = 0,90$ часть интенсивности соответствующего колебания, а в перпендикулярной плоскости $\alpha_2 = 0,10$ часть интенсивности соответствующего колебания. Определить степень поляризации P света, прошедшего через поляризатор, если первоначально свет был естественным.

Решение. Естественный свет может быть представлен как наложение двух некогерентных волн одинаковой интенсивности, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. При таком представлении интенсивность естественного света I_0 равна сумме интенсивностей I_1 и I_2 этих волн:

$$I_0 = I_1 + I_2, \text{ причем } I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_0.$$

Возьмем в качестве волны, имеющей интенсивность I_1 , волну, поляризованную в плоскости поляризатора. Тогда волна, имеющая интенсивность I_2 , будет поляризована в плоскости, перпендикулярной к плоскости поляризатора.

За поляризатором интенсивность первой волны будет равна $\alpha_1 I_1 = \alpha_1 I_0/2$ (это I_{\max}), а второй волны $\alpha_2 I_2 = \alpha_2 I_0/2$ (это I_{\min}). По определению

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0,90 - 0,10}{0,90 + 0,10} = 0,8.$$

2. Естественный свет пропускают через систему из двух одинаковых несовершенных поляризаторов. Каждый из них пропу-

сказет в своей плоскости $\alpha_1 = 0,95$ часть интенсивности соответствующего колебания и обусловливает степень поляризации $P = 0,90$. Какую долю η первоначальной интенсивности света составит интенсивность света, прошедшего через эту систему, если плоскости поляризаторов взаимно перпендикулярны (поляризаторы скрещены)?

Решение. Пусть каждый поляризатор пропускает α_2 часть интенсивности колебания, перпендикулярного к его плоскости. Тогда степень поляризации света, прошедшего через один поляризатор, определится выражением

$$P = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

откуда

$$\alpha_2 = \alpha_1 \frac{1 - P}{1 + P}. \quad (1)$$

Представим падающий на систему естественный свет как наложение двух некогерентных волн одинаковой интенсивности, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. В качестве одной плоскости возьмем плоскость, параллельную плоскости первого поляризатора (и, следовательно, перпендикулярную к плоскости второго поляризатора), а в качестве другой — плоскость, перпендикулярную к плоскости первого поляризатора (и, следовательно, параллельную плоскости второго поляризатора). Обозначив интенсивности волн через I_1 и I_2 , можно написать, что

$$I_0 = I_1 + I_2, \quad I_1 = I_2 = I_0/2,$$

где I_0 — интенсивность падающего на первый поляризатор естественного света.

Интенсивность первой волны после прохождения через первый поляризатор станет равной $\alpha_1 I_1$, а после прохождения через второй поляризатор $\alpha_2 \alpha_1 I_1 = \alpha_2 \alpha_1 I_0/2$. Интенсивности второй волны равны соответственно $\alpha_2 I_2$ и $\alpha_1 \alpha_2 I_2 = \alpha_1 \alpha_2 I_0/2$. Интенсивность обеих волн после прохождения через систему оказывается одинаковой. Следовательно, свет будет естественным, а его интенсивность

$$I = \alpha_2 \alpha_1 I_0/2 + \alpha_1 \alpha_2 I_0/2 = \alpha_1 \alpha_2 I_0.$$

Подставив сюда значение (1) для α_2 и взяв отношение I к I_0 , получим, что

$$\eta = \frac{I}{I_0} = \alpha_1^2 \frac{1 - P}{1 + P} = 0,95^2 \frac{1 - 0,90}{1 + 0,90} = 0,048.$$

Глава 15. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ВЕЩЕСТВЕ

§ 102. Дисперсия света

Дисперсией света называется зависимость показателя преломления n вещества от частоты ω (или длины волны λ). Эту зависимость можно охарактеризовать функцией

$$n = f(\omega). \quad (102.1)$$

Для всех прозрачных бесцветных веществ функция (102.1) имеет в видимой части спектра характер, показанный на рис.

102.1. С увеличением частоты показатель прелом-

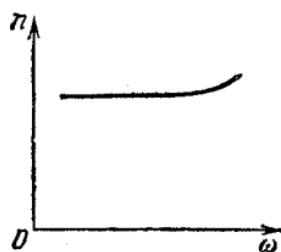


Рис. 102.1. Зависимость показателя преломления n от частоты света ω для случая нормальной дисперсии

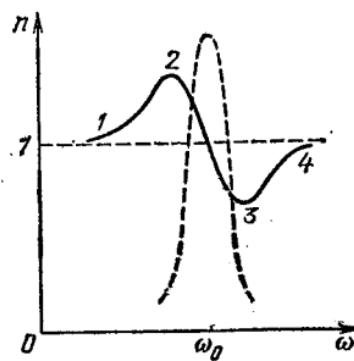


Рис. 102.2. Аномальный ход функции $n(\omega)$ в области поглощения. Штриховой линией показана зависимость коэффициента поглощения света от частоты

ления возрастает: $dn/d\omega > 0$. В этом случае дисперсия называется нормальной.

Если вещество поглощает часть лучей, то в области поглощения дисперсия обнаруживает аномалию — показатель преломления при увеличении частоты уменьшается: $dn/d\omega < 0$ (рис. 102.2). Такой ход зависимости n от ω называется аномальной дисперсией.

Дисперсия света может быть объяснена на основе электромагнитной теории и электронной теории вещества. Для этого нужно рассмотреть процесс взаимодействия света с веществом. Движение электронов в атоме подчиняется законам квантовой механики. В частности, понятие траектории электрона в атоме теряет смысл. Однако, как показал Г. А. Лоренц,

для качественного понимания многих оптических явлений достаточно ограничиться гипотезой о существовании внутри атомов электронов, связанных квазиупруго. Будучи выведенными из положения равновесия, такие электроны начинают колебаться, постепенно теряя энергию колебания на излучение электромагнитных волн. В результате колебания будут затухающими. Затухание можно учесть, введя «силу трения излучения», пропорциональную скорости электрона.

При прохождении через вещество электромагнитной волны каждый электрон оказывается под воздействием лоренцевой силы

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} - e[\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}] = -e\mathbf{E} - e\mu_0[\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}] \quad (102.2)$$

(см. формулу (37.6); заряд электрона равен $-e$). Согласно (80.14) отношение напряженностей магнитного и электрического полей в волне равно $H/E = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$. Следовательно, для отношения магнитной и электрической сил, действующих на электрон, получается из (102.2) значение

$$\frac{\mu_0 v H}{E} = \mu_0 v \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = v \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{v}{c}.$$

Даже если бы амплитуда колебаний электрона A достигла значения порядка 10^{-10} м, т. е. порядка размеров атома, амплитуда скорости электрона $A\omega$ составила бы примерно $10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{15} = 3 \cdot 10^5$ м/с (согласно (84.6) $\omega = 2\pi\nu$ равна приблизительно $3 \cdot 10^{15}$ с⁻¹). Таким образом, отношение v/c заведомо меньше 10^{-3} , так что вторым слагаемым в (102.2) можно пренебречь.

Итак, можно считать, что при прохождении через вещество электромагнитной волны каждый электрон находится под воздействием силы

$$F = -eE_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad (102.3)$$

(E_0 — амплитуда напряженности электрического поля волны, α — величина, определяемая координатами данного электрона).

Видимый свет оказывает заметное воздействие только на внешние, слабее других связанные с атомом электроны, называемые валентными или

оптическими электронами. Собственные частоты внутренних электронов сильно отличаются от частот оптического диапазона. Поэтому колебания внутренних электронов световой волной практически не возбуждаются.

Для простоты рассмотрим случай, когда в атоме имеется только один оптический электрон. Кроме того, будем считать, что атомы не взаимодействуют друг с другом (что в первом приближении справедливо для газообразных веществ).

Чтобы облегчить вычисления, затуханием за счет излучения вначале пренебрежем. Впоследствии мы учтем затухание, внеся в полученные формулы соответствующие поправки. Уравнение движения электрона в этом случае имеет вид

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = - (e/m) E_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad (102.4)$$

(см. формулу (71.2); ω_0 — собственная частота колебаний электрона).

Легко проверить подстановкой, что решением уравнения (102.4) будет функция

$$r(t) = \frac{(-e/m) E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \alpha) = \frac{(-e/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} E(t),$$

где $E(t)$ — напряженность электрического поля световой волны (см. (102.3)).

Чтобы упростить задачу, будем считать молекулы неполярными. Кроме того, поскольку массы ядер велики по сравнению с массой электрона, пренебрежем смещениями ядер из положений равновесия под действием поля волны. В этом приближении дипольный электрический момент молекулы можно представить в виде

$$p(t) = -er(t) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} E(t). \quad (102.5)$$

Обозначим число молекул в единице объема буквой N . Произведение $Np(t)$ дает поляризованность вещества $P(t)$. Согласно формулам (14.5) и (12.4) диэлектрическая проницаемость равна

$$\epsilon = 1 + \kappa = 1 + \frac{P(t)}{\epsilon_0 E(t)} = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \frac{p(t)}{E(t)}.$$

Подставив сюда отношение $\rho(t)/E(t)$, получающееся из (102.5), и заменив ϵ через n^2 (см. (84.3)), приходим к формуле

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (102.6)$$

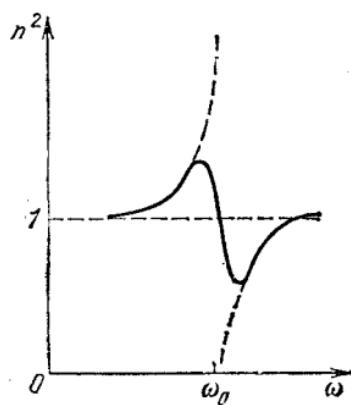
При частотах ω , заметно отличающихся от собственной частоты ω_0 , выражение (102.6) будет мало по сравнению с единицей, так что $n^2 \approx 1$. Вблизи

собственной частоты функция (102.6) терпит разрыв: при стремлении ω к ω_0 слева она обращается в $+\infty$, при стремлении справа — в $-\infty$ (см. рис. 102.3). Такое поведение функции обусловлено тем, что мы пренебрели трением излучения (напомним, что при пренебрежении трением амплитуда вынужденных колебаний при резонансе обращается в бесконечность; см. формулу (71.16)). Учет трения излучения приводит к зависимости n^2 от ω , показанной на рис. 102.3 сплошной кривой. Перейдя от n^2 к n , получим кривую, изобра-

Рис. 102.3. Зависимость n^2 от ω в области поглощения. Если пренебречь трением излучения, функция $n^2(\omega)$ терпит разрыв при резонансной частоте ω_0 колебаний оптического электрона атома

женную на рис. 102.2. Участок 1—2 аналогичен кривой, приведенной на рис. 102.1. Участки 1—2 и 3—4 соответствуют нормальной дисперсии ($dn/d\omega > 0$). На участке 2—3 дисперсия аномальна ($dn/d\omega < 0$).

В области 3—4 показатель преломления меньше единицы, следовательно, фазовая скорость волны превышает c . Однако это не противоречит теории относительности, основывающейся на утверждении, что скорость передачи сигнала не может превзойти c . Передача сигнала с помощью идеально монохроматической волны невозможна. Передача же энергии (т. е. сигнала) с помощью квазимонохроматической волны (группы волн) осуществляется с групповой скоростью, определяемой формулой (79.6). В обла-



сти нормальной дисперсии $dv/d\lambda > 0$ (dn и dv имеют разные знаки, а $dn/d\lambda < 0$), так что, хотя $v > c$, групповая скорость оказывается меньшей c . В области аномальной дисперсии понятие групповой скорости утрачивает смысл (поглощение очень велико, и волна быстро затухает). Поэтому вычисленное по формуле (79.6) значение u не будет характеризовать скорость передачи энергии. Соответствующий расчет дает и в этой области для скорости передачи энергии значение, меньшее c .

§ 103. Поглощение и рассеяние света

Поглощение света. При прохождении световой волны через вещество часть энергии волны затрачивается на возбуждение колебаний электронов. Частично эта энергия вновь возвращается излучению в виде вторичных волн, порождаемых колеблющимися электронами; частично же она переходит в энергию движения атомов, т. е. во внутреннюю энергию вещества (в результате чего вещество нагревается). Поэтому интенсивность света при прохождении через вещество уменьшается — свет поглощается в веществе. Вынужденные колебания электронов, а следовательно, и поглощение света становятся особенно интенсивными при резонансной частоте (см. изображенную штриховой линией кривую поглощения на рис. 102.2).

Опытным путем установлено, что интенсивность света при прохождении через вещество убывает по экспоненциальному закону:

$$I = I_0 e^{-\alpha l}. \quad (103.1)$$

Здесь I_0 — интенсивность света на входе в поглащающий слой (на границе или в каком-то месте внутри вещества), l — толщина слоя, α — постоянная, зависящая от свойств поглащающего вещества и называемая коэффициентом поглощения. Зависимость (103.1) носит название закона Бугера¹⁾.

Дифференцирование соотношения (103.1) приводит к формуле

$$dI = -\alpha I_0 e^{-\alpha l} dl = -\alpha I dl, \quad (103.2)$$

¹⁾ Пьер Бугер (1698—1758) — французский ученый.

из которой следует, что убыль интенсивности на пути dl пропорциональна длине этого пути и значению самой интенсивности. Коэффициентом пропорциональности служит коэффициент поглощения.

Согласно формуле (103.1) при $l = 1/\alpha$ интенсивность I оказывается в e раз меньше, чем I_0 . Таким образом, коэффициент поглощения есть величина, обратная толщине слоя, при прохождении которого интенсивность света уменьшается в e раз.

Коэффициент поглощения зависит от частоты ω (или длины волны λ) света. У веществ, атомы (или молекулы) которых практически не взаимодействуют друг с другом (газы и пары металлов при невысоком давлении), коэффициент поглощения для большинства длин волн близок к нулю и лишь для очень узких спектральных областей (ширина в несколько тысячных нанометра) обнаруживает резкие максимумы (рис. 103.1). Эти максимумы соответствуют

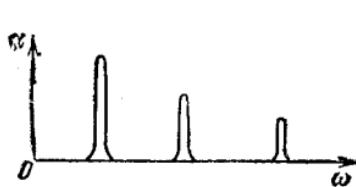


Рис. 103.1. Зависимость коэффициента поглощения света α от частоты ω для газов

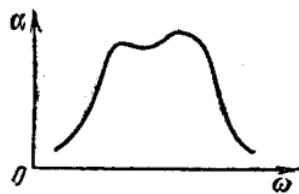


Рис. 103.2. Зависимость коэффициента поглощения света α от частоты ω для плотных сред

резонансным частотам колебаний электронов внутри атомов. В случае многоатомных молекул обнаружаются также частоты, соответствующие колебаниям атомов внутри молекул. Поскольку массы атомов в десятки тысяч раз больше массы электрона, молекулярные частоты бывают намного меньше атомных — они попадают в инфракрасную область спектра.

Газы при высоких давлениях, а также жидкости и твердые тела имеют широкие полосы поглощения (рис. 103.2). По мере повышения давления газов максимумы поглощения, первоначально очень узкие (см. рис. 103.1), все более расширяются, и при высоких давлениях спектр поглощения газов приближается по характеру к спектрам поглощения жидкостей.

Этот факт указывает на то, что расширение полос поглощения есть результат взаимодействия атомов друг с другом.

Металлы практически непрозрачны для света (α для них имеет значение порядка 10^6 м^{-1} ; для сравнения укажем, что для стекла $\alpha \approx 1 \text{ м}^{-1}$). Это обусловлено наличием в металлах свободных электронов. Под действием электрического поля световой волны свободные электроны приходят в движение — в металле возникают быстропеременные токи, сопровождающиеся выделением ленц-джоулевой теплоты. В результате энергия световой волны быстро убывает, превращаясь во внутреннюю энергию металла.

Рассеяние света. С классической точки зрения процесс рассеяния света заключается в том, что свет, проходящий через вещество, вызывает колебания электронов в атомах. Колеблющиеся электроны возбуждают вторичные волны, распространяющиеся по всем направлениям. Это явление, казалось бы, должно при всех условиях приводить к рассеянию света. Однако вторичные волны являются когерентными, так что необходимо учесть их взаимную интерференцию.

Соответствующий расчет дает, что в случае однородной среды вторичные волны полностью гасят друг друга во всех направлениях, кроме направления распространения первичной волны. Поэтому перераспределения света по направлениям, т. е. рассеяния света, не происходит.

Вторичные волны не погашают друг друга в боковых направлениях только при распространении света в неоднородной среде. Дифрагируя на неоднородностях среды, световые волны дают дифракционную картину, характеризующуюся довольно равномерным распределением интенсивности по всем направлениям. Такую дифракцию на мелких неоднородностях называют рассеянием света.

Среды с явно выраженной оптической неоднородностью носят название мутных сред. К их числу относятся: 1) дымы, т. е. взвеси в газах мельчайших твердых частиц; 2) туманы — взвеси в газах мельчайших капелек жидкости; 3) взвеси или суспензии, образованные плавающими в жидкости твердыми частичками; 4) эмульсии, т. е. взвеси мельчайших

капелек одной жидкости в другой, не растворяющей первую (примером эмульсии может служить молоко, представляющее собой взвесь капелек жира в воде); 5) твердые тела вроде перламутра, опалов, молочных стекол и т. п.

Если размеры неоднородностей малы по сравнению с длиной световой волны (не более чем $0,1\lambda$), интенсивность рассеянного света I оказывается пропорциональной четвертой степени частоты или обратно пропорциональной четвертой степени длины волны:

$$I \propto \omega^4 \propto 1/\lambda^4. \quad (103.3)$$

Эта зависимость носит название закона Рэлея. Ее происхождение легко понять, если учесть, что мощность излучения колеблющегося заряда пропорциональна четвертой степени частоты (см. формулу (82.5)).

Если размеры неоднородностей сравнимы с длиной волны, электроны, находящиеся в различных местах неоднородности, колеблются с заметным сдвигом по фазе. Это усложняет явление и приводит к иной закономерности — интенсивность рассеянного света становится пропорциональной лишь квадрату частоты (т. е. обратно пропорциональной квадрату длины волны).

Даже тщательно очищенные от посторонних примесей и загрязнений жидкости и газы в некоторой степени рассеивают свет. Мандельштам¹⁾ и Смолуховский²⁾ установили, что причиной возникновения оптических неоднородностей являются в этом случае флуктуации плотности вещества (т. е. наблюдаемые в пределах малых объемов отклонения плотности от ее среднего значения). Эти флуктуации вызваны беспорядочным движением молекул вещества; поэтому обусловленное ими рассеяние света называется молекулярным.

Молекулярным рассеянием объясняется голубой цвет неба. Непрерывно возникающие в атмосфере вследствие беспорядочного молекулярного движения

¹⁾ Леонид Исаакович Мандельштам (1879—1944) — советский физик.

²⁾ Мариан Смолуховский (1872—1917) — польский физик-теоретик.

места сгущения и разрежения воздуха рассеивают солнечный свет. При этом в соответствии с законом Рэлея (см. (103.3)) голубые и синие лучи рассеиваются сильнее, чем желтые и красные, обусловливая голубой цвет неба. Когда Солнце находится низко над горизонтом, распространяющиеся непосредственно от него лучи проходят большую толщу рассеивающей среды, в результате чего они оказываются обедненными меньшими длинами волн. По этой причине небо на заре окрашивается в красные тона.

§ 104. Эффект Вавилова — Черенкова

В 1934 г. Черенков¹⁾, работавший под руководством Вавилова²⁾, обнаружил особый вид свечения жидкостей под действием γ -лучей радия. Вавилов высказал правильное предположение, что источником излучения служат быстрые электроны, создаваемые γ -лучами. Это явление получило название эффекта Вавилова — Черенкова. Его полное теоретическое объяснение было дано в 1937 г. Таммом³⁾ и Франком⁴⁾. (В 1958 г. работа Черенкова, Тамма и Франка была отмечена Нобелевской премией.)

Согласно электромагнитной теории заряд, движущийся равномерно, не излучает электромагнитных волн (см. § 82). Однако, как доказали Тамм и Франк, это справедливо только в том случае, если скорость v заряженной частицы не превышает фазовую скорость c/n электромагнитных волн в той среде, в которой движется частица. При условии, что $v > c/n$, даже двигаясь равномерно, заряженная частица излучает электромагнитные волны. В действительности частица теряет энергию на излучение, вследствие чего движется с отрицательным ускорением. Но это ускорение является не причиной (как в случае $v < c/n$), а следствием излучения. Если бы потеря энергии за счет излучения восполнялась каким-либо способом, то частица, движущаяся равномерно со

¹⁾ Павел Алексеевич Черенков (р. 1904) — советский физик.

²⁾ Сергей Иванович Вавилов (1891—1951) — советский физик.

³⁾ Игорь Евгеньевич Тамм (1895—1971) — советский физик-теоретик.

⁴⁾ Илья Михайлович Франк (р. 1908) — советский физик-теоретик.

скоростью $v > c/n$, все равно была бы источником излучения.

Эффект Вавилова — Черенкова наблюдался экспериментально для электронов, протонов и мезонов при их движении в жидких и твердых средах.

В излучении Вавилова — Черенкова преобладают короткие волны, вследствие чего оно имеет голубую окраску. Наиболее характерным свойством этого излучения является то, что оно испускается не по всем направлениям, а лишь вдоль образующих конуса, ось которого совпадает с направлением скорости частицы (рис. 104.1).

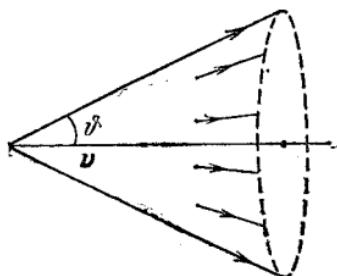


Рис. 104.1. Излучение Вавилова — Черенкова испускается вдоль образующих конуса, раствор которого увеличивается с ростом скорости v частицы

Угол θ между направлениями распространения излучения и скоростью частицы определяется соотношением

$$\cos \theta = \frac{c/n}{v} = \frac{c}{nv}. \quad (104.1)$$

Эффект Вавилова — Черенкова находит широкое применение в экспериментальной технике. В так называемых черенковских счетчиках световая

вспышка, порождаемая быстровдвижущейся заряженной частицей, превращается с помощью фотоумножителя¹⁾ в импульс тока. Для того чтобы заставить сработать такой счетчик, энергия частицы должна превысить пороговое значение, определяемое условием $v = c/n$. Поэтому черенковские счетчики позволяют не только регистрировать частицы, но и судить об их энергии. Удаётся также определить угол θ между направлением вспышки и скоростью частицы, что дает возможность вычислить по формуле (104.1) скорость (а следовательно, и энергию) частицы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая дисперсия называется аномальной?
2. Каков физический смысл коэффициента поглощения света?

¹⁾ Фотоумножителем называется электронный умножитель, первый электрод которого (фотокатод) способен испускать электроны под действием света.

3. Сформулируйте закон Рэлея.
 4. Чем объясняется голубой цвет неба?

Примеры решения задач

1. Имеется прозрачная пластина толщины $a = 10,0$ см. Для некоторой длины волны коэффициент поглощения пластины изменяется линейно от значения $\alpha_1 = 0,80$ у одной поверхности пластины до $\alpha_2 = 1,20$ у другой поверхности. Определить ослабление (в процентах) света данной длины волны при прохождении им толщи пластины.

Решение. Возьмем перпендикулярную к пластине ось x , начало которой совместим с поверхностью, вблизи которой коэффициент поглощения равен α_1 . Изменение коэффициента поглощения в пластине характеризуется линейной функцией $\alpha = f(x)$, у которой $f(0) = \alpha_1$, а $f(a) = \alpha_2$. Согласно закону поглощения приращение интенсивности на пути dx равно $dI = -If(x)dx$, где I — интенсивность в точке с координатой x . Отсюда следует, что

$$dI/I = -f(x) dx.$$

Проинтегрировав обе части равенства по всей толщине пластины, получим соотношение

$$\ln I - \ln I_0 = - \int_0^a f(x) dx$$

(I — интенсивность света перед выходом из пластины). Потенцирование дает

$$I = I_0 \exp \left[- \int_0^a f(x) dx \right]. \quad (1)$$

Поскольку функция $f(x)$ линейна,

$$\int_0^a f(x) dx = \frac{f(0) + f(a)}{2} a = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} a.$$

Подстановка этого значения в (1) приводит к результату

$$I = I_0 \exp \left(- \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} a \right) = I_0 \exp \left(- \frac{0,80 + 1,20}{2} 0,100 \right) = 0,90 I_0.$$

Следовательно, уменьшение интенсивности составляет 10 %.

2. На стеклянную пластинку толщины $a = 10,0$ см падает по нормали плоская световая волна интенсивности $I_0 = 100$ лм/м². Показатель преломления пластинки для данной длины волны

$n = 1,50$, коэффициент поглощения $\alpha = 1,00 \text{ м}^{-1}$. Найти интенсивность I света, прошедшего через пластинку.

Решение. На границе раздела двух прозрачных сред свет частично отражается. Отношение интенсивности отраженного света к интенсивности падающего света называется коэффициентом отражения ρ . Соответствующий расчет дает, что

$$\rho = \left(\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2, \quad (1)$$

где $n_{12} = n_2/n_1$ — показатель преломления второй среды по отношению к первой. Замена в формуле (1) n_{12} на обратную ему величину $n_{21} = n_1/n_2$ не изменяет значения ρ . Следовательно, коэффициент отражения поверхности раздела двух данных сред для обоих направлений распространения света имеет одинаковое значение.

Показатель преломления стекол близок к 1,5. Подстановка в формулу (1) значения $n_{12} = 1,5$ дает $\rho = 0,04$. Таким образом, если стеклянная пластинка находится в воздухе, то при входе в нее и при выходе из нее отражается около 4 % светового потока.

На первой границе пластиинки отражается волна интенсивности ρI_0 . Следовательно, интенсивность волны, проникшей в пластинку, равна $I' = (1 - \rho)I_0$. Из-за поглощения в пластинке интенсивность волны, упавшей на вторую границу, окажется равной

$$I'' = I' \exp(-\alpha a) = (1 - \rho)I_0 \exp(-\alpha a).$$

Часть ρ этой интенсивности отражается в обратном направлении. Поэтому интенсивность волны, вышедшей из пластиинки, будет равна $(1 - \rho)I'' = (1 - \rho)^2I_0 \exp(-\alpha a)$. Подставив значение (1) для ρ и произведя преобразования, получим ответ:

$$\begin{aligned} I &= I_0 \left[\frac{4n}{(n+1)^2} \right]^2 \exp(-\alpha a) = \\ &= 100 \left[\frac{4 \cdot 1,5}{(1,50+1)^2} \right]^2 \exp(-1,00 \cdot 0,100) = 83 \text{ лм/м}^2. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Гауссова система единиц

До введения в 1960 г. Международной системы единиц (СИ) в физике использовалась преимущественно гауссова система единиц. В теоретической физике эта система используется и теперь. Гауссова система объединяет две СГС-системы (т. е. системы, основными единицами которых являются сантиметр, грамм и секунда). В основу одной из них, называемой электростатической и обозначаемой СГСЭ, кроме сантиметра, грамма и секунды положена единица заряда, определяемая так, чтобы коэффициент пропорциональности в законе Кулона (см. формулу (2.1)) был равен единице (r измеряется в сантиметрах, а F — в динах¹). СГСЭ-единица заряда в $3 \cdot 10^9$ раз меньше кулона. В основу другой системы, называемой электромагнитной и обозначаемой СГСМ, кроме сантиметра, грамма и секунды положена единица силы тока, определяемая так, чтобы коэффициент пропорциональности в формуле (37.3) для силы взаимодействия прямых токов был равен единице (вместо $\mu_0/4\pi$). СГСМ-единица заряда в $3 \cdot 10^{10}$ раз больше СГСЭ-единицы и равна 10 А. Отметим, что число $3 \cdot 10^{10}$ равно скорости света в вакууме, выраженной в сантиметрах в секунду.

В гауссовой системе единиц электрические величины (заряд, потенциал, сила тока, электрический дипольный момент и т. д.) измеряются в СГСЭ-единицах, а магнитные величины (магнитная индукция, магнитный момент и т. д.) — в СГСМ-единицах. Главное достоинство гауссовой системы состоит в том, что основные величины, характеризующие поля, — E , D , B и H — имеют одинаковую размерность. Кроме того, вместо двух «искусственных» постоянных² ϵ_0 и μ_0 в гауссову систему входит только одна постоянная c , имеющая ясный физический смысл, — она равна скорости света в вакууме. Недостатком гауссовой системы являются неудобные единицы электрических и магнитных величин. Применимые в экспериментальной физике, в технике и в быту ампер, вольт, ом, фарад, генри и т. п. в гауссовой системе не используются. Вместе с тем, эти единицы органически входят в СИ.

Единица заряда и соответственно сила тока в СГСЭ в $3 \cdot 10^{10}$ (т. е. в c) раз меньше единиц этих величин в СГСМ. Следовательно, число, выражающее заряд и ток в СГСМ, в c раз

¹⁾ Сила в одну дину сообщает телу с массой 1 г ускорение 1 см/ s^2 .

²⁾ В некоторых книгах пытаются придать физический смысл величинам ϵ_0 и μ_0 , называя их электрической и магнитной проницаемостями вакуума. Однако физический смысл имеют только относительные проницаемости, равные для вакуума единице. Проницаемости вакуума, отличные от единицы, — это «рогатая курица» (т. е. нонсенс — бессмыслица).

меньше числа, выражающего эти величины в СГСЭ. Таким образом, имеются соотношения

$$q_{\text{СГСМ}} = (1/c) q_{\text{СГСЭ}}, \quad I_{\text{СГСМ}} = (1/c) I_{\text{СГСЭ}},$$

где c — скорость света в вакууме. В соответствии с этими соотношениями во все формулы, содержащие наряду с магнитными величинами заряд или силу тока, входит по одному множителю $1/c$ на каждую фигурирующую в формуле величину q или I . Этот множитель превращает значение соответствующей величины (q или I), выраженное в единицах СГСЭ, в значение, выраженное в единицах СГСМ (система СГСМ построена так, что коэффициенты пропорциональности во всех формулах равны единице).

В приложении II сопоставлены единицы СИ и гауссовой системы, а в приложении III приведены основные формулы электромагнетизма, написанные в СИ и в гауссовой системе.

II. Единицы электрических и магнитных величин в СИ и в гауссовой системе

Соотношения между единицами даны приближенно. Чтобы получить более точные значения, нужно в соотношениях, приведенных в последнем столбце, заменить 3 на 2,997925 и 9 на 2,997925².

| Величина и ее обозначение | Единица и ее обозначение | | Соотношение между единицами |
|---|--|------------------|--|
| | СИ | Гауссова система | |
| Сила F | ньютон (Н) | дина (дин) | $1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин}$ |
| Работа A и энергия W | дюйм (Дж) | эрз (эрз) | $1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрз}$ |
| Заряд q | кулон (Кл) | СГСЭ-ед. | $1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед.}$ |
| Напряженность электрического поля E | вольт на метр (В/м) | СГСЭ-ед. | $1 \text{ СГСЭ-ед.} = 3 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ |
| Потенциал ϕ , напряжение U и ЭДС \mathcal{E} | вольт (В) | СГСЭ-ед. | $1 \text{ СГСЭ-ед.} = 300 \text{ В}$ |
| Электрический dipольный момент p | кулон-метр (Кл · м) | СГСЭ-ед. | $1 \text{ Кл} \cdot \text{м} = 3 \cdot 10^{11} \text{ СГСЭ-ед.}$ |
| Поляризованность P | кулон на квадратный метр (Кл · м ⁻²) | СГСЭ-ед. | $1 \text{ Кл}/\text{м}^2 = 3 \cdot 10^5 \text{ СГСЭ-ед.}$ |
| Диэлектрическая восприимчивость κ | СИ-ед. | СГСЭ-ед. | $1 \text{ СГСЭ-ед.} = 4\pi \text{ СИ-ед.}$ |

Продолжение

| Величина и ее обозначение | Единица и ее обозначение | | Соотношение между единицами |
|---|---|---------------------------|--|
| | СИ | Гауссова система | |
| Электрическое смещение (электрическая индукция) D | кулон на квадратный метр ($\text{Кл}/\text{м}^2$) | СГСЭ-ед. | $1 \text{ Кл}/\text{м}^2 = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ СГСЭ-ед.}$ |
| Поток электрического смещения (поток электрической индукции) Φ | кулон (Кл) | СГСЭ-ед. | $1 \text{ Кл} = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед.}$ |
| Электрическая емкость C | фарад (Φ) | санти-метр (см) | $1 \Phi = 9 \cdot 10^{11} \text{ см}$ |
| Сила тока I | ампер (A) | СГСЭ-ед. | $1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед.}$ |
| Плотность тока j | ампер на квадратный метр ($\text{А}/\text{м}^2$) | СГСЭ-ед. | $1 \text{ А}/\text{м}^2 = 3 \cdot 10^5 \text{ СГСЭ-ед.}$ |
| Электрическое сопротивление R | ом (Ω) | СГСЭ-ед. | $1 \text{ СГСЭ-ед.} = 9 \cdot 10^{11} \text{ Ом}$ |
| Удельное сопротивление ρ | ом-метр ($\Omega \cdot \text{м}$) | СГСЭ-ед. | $1 \text{ СГСЭ-ед.} = 9 \cdot 10^9 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ |
| Удельная проводимость σ | сименс на метр ($\text{См}/\text{м}$) | СГСЭ-ед. | $1 \text{ См}/\text{м} = 9 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед.}$ |
| Магнитная индукция B | tesla (Tл) | гаусс (Гс) | $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$ |
| Магнитный поток Φ и потокосцепление Ψ | вебер (Bб) | максвелл (Мкс) | $1 \text{ Вб} = 10^8 \text{ Мкс}$ |
| Магнитный момент p_m | ампер-квадратный метр ($\text{А} \cdot \text{м}^2$) | СГСМ-ед. | $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2 = 10^3 \text{ СГСМ-ед.}$ |
| Намагниченность J | ампер на метр ($\text{А}/\text{м}$) | СГСМ-ед. | $1 \text{ СГСМ-ед.} = 10^3 \text{ А}/\text{м}$ |
| Напряженность магнитного поля H | ампер на метр ($\text{А}/\text{м}$) | эрстед (\mathcal{E}) | $1 \text{ А}/\text{м} = 4\pi \cdot 10^{-3} \mathcal{E}$ $1 \mathcal{E} = 79,6 \text{ А}/\text{м}$ |
| Магнитная восприимчивость χ | Си-ед. | СГСМ-ед. | $1 \text{ СГСМ-ед.} = 4\pi \text{ СИ-ед.}$ |
| Индуктивность L и взаимная индуктивность L_{12} | генри (Гн) | санти-метр (см) | $1 \text{ Гн} = 10^9 \text{ см}$ |

III. Основные формулы электромагнетизма в СИ и в гауссовой системе

| Наименование | СИ | Гауссова система |
|--|---|---|
| Закон Кулона | $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ | $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ |
| Напряженность электрического поля (определение) | | $E = \frac{F}{q}$ |
| Напряженность поля точечного заряда | $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2}$ | $E = \frac{q}{\epsilon r^2}$ |
| Напряженность поля между заряженными плоскостями и вблизи поверхности заряженного проводника | $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$ | $E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$ |
| Потенциал (определение) | | $\varphi = \frac{W_p}{q}$ |
| Потенциал поля точечного заряда | $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r}$ | $\varphi = \frac{q}{\epsilon r}$ |
| Работа сил поля над зарядом | | $A = q (\varphi_1 - \varphi_2)$ |
| Связь между E и φ | | $E = -\operatorname{grad} \varphi$ |
| Связь между φ и E | | $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl$ |
| Ротор вектора E для электростатического поля | | $\operatorname{rot} E = 0$ |
| Циркуляция вектора E для электростатического поля | | $\oint E dl = 0$ |
| Электрический момент диполя | | $p = ql$ |
| Механический момент, действующий на диполь в электрическом поле | | $N = [pE]$ |

Продолжение

| Наименование | СИ | Гауссова система |
|---|------------------------------------|--|
| Энергия диполя в электрическом поле | | $W = -pE$ |
| Дипольный момент «упругой» молекулы | $p = \beta \epsilon_0 E$ | $p = \beta E$ |
| Поляризованность (определение) | | $P = \frac{1}{\Delta V} \sum p$ |
| Связь между P и E | $P = \kappa \epsilon_0 E$ | $P = \kappa E$ |
| Связь между P и объемной плотностью связанных зарядов | | $\rho' = -\operatorname{div} P$ |
| Связь между P и поверхностью плотностью связанных зарядов | | $\sigma' = P_n$ |
| Электрическое смещение (электрическая индукция) (определение) | $D = \epsilon_0 E + P$ | $D = E + 4\pi P$ |
| Дивергенция вектора D | $\operatorname{div} D = \rho$ | $\operatorname{div} D = 4\pi \rho$ |
| Теорема Гаусса для D | $\oint D dS = \sum q$ | $\oint D dS = 4\pi \sum q$ |
| Связь между диэлектрической проницаемостью ϵ и диэлектрической восприимчивостью κ | $\epsilon = 1 + \kappa$ | $\epsilon = 1 + 4\pi \kappa$ |
| Связь между значениями κ в СИ и в гауссовой системе | | $\kappa_{\text{СИ}} = 4\pi \kappa_{\text{ГС}}$ |
| Связь между D и E | $D = \epsilon \epsilon_0 E$ | $D = \epsilon E$ |
| Связь между D и E в вакууме | $D = \epsilon_0 E$ | $D = E$ |
| Электрическое смещение поля точечного заряда | $D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}$ | $D = \frac{q}{r^3}$ |
| Емкость конденсатора (определение) | | $C = \frac{q}{U}$ |

Продолжение

| Наименование | СИ | Гауссова система |
|--|---|---|
| Емкость плоского конденсатора | $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$ | $C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$ |
| Энергия системы зарядов | $W = \frac{1}{2} \sum q\Phi$ | |
| Энергия заряженного конденсатора | | $W = \frac{CU^2}{2}$ |
| Плотность энергии электрического поля | $w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$ | $w = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$ |
| Сила тока (определение) | | $I = \frac{dq}{dt}$ |
| Плотность тока (определение) | | $j = \frac{dI}{dS_{\perp}}$ |
| Уравнение непрерывности | | $\operatorname{div} j = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$ |
| Напряжение (определение) | | $U = \Phi_1 - \Phi_2 + \mathcal{E}_{12}$ |
| Закон Ома | | $I = \frac{1}{R} U$ |
| Закон Ома в дифференциальной форме | | $j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E$ |
| Закон Джоуля—Ленца | | $Q = \int_0^t RI^2 dt$ |
| Закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме | | $Q = \rho j^2$ |
| Сила взаимодействия двух параллельных токов в вакууме (в расчете на единицу длины) | $F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}$ | $F = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2}{b}$ |
| Поле свободно движущегося заряда | $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [vr]}{r^3}$ | $B = \frac{1}{c} \frac{q [vr]}{r^3}$ |

Продолжение

| Наименование | СИ | Гауссова система |
|--|---|---|
| Закон Био—Савара | $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [dl, \mathbf{r}]}{r^3}$ | $d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{I [dl, \mathbf{r}]}{r^3}$ |
| Сила Лоренца | $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q [\mathbf{v}\mathbf{B}]$ | $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]$ |
| Закон Ампера | $d\mathbf{F} = I [dl, \mathbf{B}]$ | $d\mathbf{F} = \frac{1}{c} I [dl, \mathbf{B}]$ |
| Магнитный момент контура с током | $p_m = IS$ | $p_m = \frac{1}{c} IS$ |
| Механический момент, действующий на магнитный момент в магнитном поле | | $N = [p_m \mathbf{B}]$ |
| «Механическая» энергия магнитного момента в магнитном поле | | $W = -p_m \mathbf{B}$ |
| Дивергенция вектора \mathbf{B} | | $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ |
| Теорема Гаусса для \mathbf{B} | | $\oint \mathbf{B} dS = 0$ |
| Намагниченность (определение) | | $\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum p_m$ |
| Напряженность магнитного поля (определение) | $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{J}$ | $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}$ |
| Связь между \mathbf{J} и \mathbf{H} | | $\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}$ |
| Связь между магнитной проницаемостью μ и магнитной восприимчивостью χ | $\mu = 1 + \chi$ | $\mu = 1 + 4\pi\chi$ |
| Связь между значениями χ в СИ и в гауссовой системе | | $\chi_{\text{СИ}} = 4\pi\chi_{\text{ГС}}$ |
| Связь между \mathbf{B} и \mathbf{H} | $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$ | $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ |
| Связь между \mathbf{B} и \mathbf{H} в вакууме | $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ | $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ |

Продолжение

| Наименование | СИ | Гауссова система |
|---|---|--|
| Ротор вектора \mathbf{H} в случае стационарного поля | $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ | $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ |
| Циркуляция вектора \mathbf{H} в случае стационарного поля | $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum I$ | $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \sum I$ |
| Напряженность магнитного поля прямого тока | $H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{b}$ | $H = \frac{1}{c} \frac{2I}{b}$ |
| Напряженность магнитного поля в центре кругового тока | $H = \frac{I}{2R}$ | $H = \frac{1}{c} \frac{2\pi I}{R}$ |
| Напряженность поля соленоида | $H = nI$ | $H = \frac{4\pi}{c} nI$ |
| Магнитный поток (определение) | $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$ | |
| Работа, совершаемая над контуром с током при перемещении его в магнитном поле | $A = I \Delta \Phi$ | $A = \frac{1}{c} I \Delta \Phi$ |
| Потокосцепление, или полный магнитный поток (определение) | | $\Psi = \sum \Phi$ |
| ЭДС индукции | $\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt}$ | $\mathcal{E}_i = - \frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt}$ |
| Индуктивность (определение) | $L = \frac{\Psi}{I}$ | $L = c \frac{\Psi}{I}$ |
| Индуктивность соленоида | $L = \mu_0 \mu_n^2 l S$ | $L = 4\pi \mu_n^2 l S$ |
| ЭДС самоиндукции (в отсутствие ферромагнетиков) | $\mathcal{E}_s = - L \frac{dI}{dt}$ | $\mathcal{E}_s = - \frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt}$ |
| Энергия магнитного поля тока | $W = \frac{LI^2}{2}$ | $W = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2}$ |

Продолжение

| Наименование | СИ | Гауссова система |
|---|---|--|
| Плотность энергии магнитного поля | $w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$ | $w = \frac{\mu H^2}{8\pi}$ |
| Энергия связанных контуров с током | $W = \frac{1}{2} \sum L_{ik} I_i I_k$ | $W = \frac{1}{2c^2} \sum L_{ik} I_i I_k$ |
| Плотность тока смещения | $j_{cm} = \dot{D}$ | $j_{cm} = \frac{1}{4\pi} \dot{D}$ |
| Уравнения Максвелла | $\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}$ $\text{div } B = 0$ $\text{rot } H = j + \frac{\partial D}{\partial t}$ $\text{div } D = \rho$ | $\text{rot } E = - \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$ $\text{div } B = 0$ $\text{rot } H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$ $\text{div } D = 4\pi\rho$ |
| Скорость электромагнитных волн | | $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ |
| Соотношение между амплитудами векторов E и H в электромагнитной волне | $E_m \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_m \sqrt{\mu_0 \mu}$ | $E_m \sqrt{\epsilon} = H_m \sqrt{\mu}$ |
| Вектор Пойнтинга | $S = [EH]$ | $S = \frac{c}{4\pi} [EH]$ |
| Плотность импульса электромагнитного поля | $K = \frac{1}{c^2} [EH]$ | $K = \frac{1}{4\pi c} [EH]$ |

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Числа в квадратных скобках указывают страницы 1-го тома, на которых приведены сведения об ученых

- Айвс 335
Ампёр 95, 135, 169
Араго 391
- Барнетт 182, 184
Бартолайн 426
Бейнбридж 160
Биб 129
Бор 181
Брэгг У. Г. 409
Брэгг У. Л. 409
Брюстер 424
Бугэр 441
- Вавилов 445
Вебер 202
Вейс 194
Вайдеман 111
Вольта 38
Вульф 409
- Габор 413
Гаусс 25, 27
Гейзенберг [184], 192
Генри 203
Герц 241, 325, 326
Гюйгенс 339, 430
- Дебай 119, 412
Денисиок 413
Де Хаас 182
Джбуль [67], 105
Дира克 139
Доплер 311, 333
Друде 108
- Камерлинг-Оннес 101
Керр 433
Кирхгоф 103
Кнейпинг 409
Кобеко 73
Кулон 11
Курчáтов 73
Кюри 75, 189
- Ланжеvén 186, 189, 308
Лаплás 129, [339]
Лáрмор 187
Лáуэ 409, 411
Лéбедев 326
Лейт 413
Ленгмиóр 120
Ленц 105, 197
Лиссажú 264
Лóренц 137, [156], 437—438
Лóуренс 162
- Мáйкельсон 370, 372
Мáксвелл [183], 231, 233, 325
Малиóс 423
Мандельштáм 107, 444
Мильликен 156
Мóрли 372
- Неель 194
Николь 427
Ньютон [12], 310, 363
- Ом 99
Острогráдский 25
- Папалéкси 107
Перó 368
Петróв 122, 123
Пойнтинг 327
Попóв 326
Пуассón 391
- Рéзерфорд 180
Рíкке 106
Рýчардсон 117
Рэлей 404, 444
- Савáр 129
Сýменс 101
Смолухóвский 103, 444
Стокс 224

- Столетов 190
Стретт 404
Стюарт 107
- Тамм 445
Тесла 129
Толмен 107
Томсон Дж., 158—160
Тонкс 120
- Умов 303
Упатниекс 413
- Фабри 368
Фарадей 196
Франк И. М., 445
Франц 111
- Фраунгофер 378
Френель 355, 378—380, 391
Френкель 192
Фридрих 409
Фукó [129], 198
- Холл 164
- Черенков 445
- Шерер 412
Штейнер 251
- Эйнштейн [122], 182, 376
Эрстед 127
- Юнг 355

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 239
Ампер 95, 136, 174
Амплитуда волны 291, 295, 318
— колебаний 240
Апериодический процесс 268, 269
- Бел 307
Бипризма Френеля 356
- Вебер 202
Вектор Пойнтинга 327, 329, 342
Векторная диаграмма 257, 265, 275, 282, 365, 384, 396, 400
Волновое число 292, 319, 339
Волновой вектор 293, 343
— пакет 318
Вольт 38, 39
Восприимчивость диэлектрическая 57, 64
— магнитная 174, 186, 191
- Гармонический осциллятор 241
Генри 203, 210
Герц 241
Гиромагнитное отношение 182
Гистерезис 74, 190, 191, 193
Группа волн 318
- Декремент затухания 267
Децибел 307
Дивергенция 17, 23—25, 30, 61—63, 65, 140, 216, 222, 232
Дисперсионное соотношение 319
Дисперсия света 437, 441
— спектрального прибора 402, 403
Длина волны 290
— когерентности 348, 354
— пространственной когерентности 349
— цуга 348
Добротность 267, 270, 283
Домены 74, 193
- Единица заряда 19, 136
— индуктивности 203
— напряженности магнитного поля 174
— — электрического поля 16
— освещенности 344
— потенциала 38
— светового потока 344
— силы тока 95, 136
— сопротивления 100
— частоты 241
— электродвижущей силы 98
— электропроводности 101
Емкость плоского конденсатора 84
— шара 81
Естественные единицы 185
- Закон Ома 99, 101—103, 108, 114, 252, 253
— сохранения электрического заряда 10, 11, 228, 229
Заряд электрический 10, 11, 15, 27, 65
— элементарный 9, 10, 158, 161, 181
Заряды свободные 55
— связанные 55, 60—63, 65
— сторонние 55
Зеркала Френеля 355
Зонная пластинка 385, 386
Зоны Френеля 380—383, 386—390
- Индуктивность 203—205, 270
Интерферометр Майкельсона 370, 373
- Когерентность 345
— временная 346, 347, 350
— пространственная 349, 350
Кольца Ньютона 363, 364
Корпускулярно-волновой дуализм 338
Критерий Рэлея 404, 407
Кулон 13, 136

- Линза 344, 406
 Логарифмический декремент затухания 267, 271
 Лоренцева сила 137, 438
 Луч 343, 426—432
 Люкс 344
 Люмен 344
- Магнетон Бора 185
 Магнитная индукция 127, 129, 131, 173, 185
 — постоянная 131, 204
 Магнитомеханическое отношение 182, 184
 Мировой эфир 372, 376
 Молекулярные токи 169, 180
 Молния 119, 125
 Монополи Дирака 139
 Момент дипольный системы зарядов 47, 56
 — магнитный 128, 129, 147, 185
 — — орбитальный 181, 184, 185
 — — собственный 184, 185, 192
 Момент механический орбитальный 182
 — — собственный 184
- Намагниченность 170, 189
 Напряжение 83, 99
 Напряженность магнитного поля 127, 172, 173, 175, 179
 — электрического поля 15, 16, 38—40
- Огни святого Эльма 125
 Ом 100
 Оптическая длина пути 348
 — плотность среды 339
 — разность хода 351, 354
 Опыт Айвса 335
 — Араго 391
 — Барнетта 182—184
 — Лауз, Фридриха и Книппинга 409
 — Майкельсона и Морли 372—376
 — Милликена 157
 — Томсона 158—160
 — Эйнштейна и де Хааса 182—184
 — Эрстеда 127
 — Юнга 355
 Опыты Герца 325, 326
 Относительная спектральная чувствительность глаза 341, 342
- Плазма 118, 120, 122—124, 166
 Плотность энергии магнитного поля 213
 — — электрического поля 92, 213
 Показатель преломления абсолютный 338, 428, 430, 437
 — — относительный 340, 423
 Поле вихревое 142, 202, 225, 227
 — магнитное 127, 142, 173
 — — движущегося заряда 134
 — — соленоидальное 142
 Полный магнитный поток 202, 203
 — ток 231, 233
 Поляризатор 421, 422, 432, 433
 Поляризованность диэлектрика 56, 439
 Поляроид 427
 Постоянная Больцмана 118
 — магнитная 191, 192
 — Планка 116, 185
 — электрическая 14
 Потенциал электростатического поля 35, 37—40, 42, 98, 142
 Поток вектора 17, 19, 216
 — световой 343
 — энергии 304
 Потокосцепление 202
 Правило Ленца 197, 198, 204, 205
 Призма Николя 427, 428
 Принцип Гюйгенса 339, 340, 379, 429, 430
 — Гюйгенса—Френеля 379, 380, 392
 — суперпозиции волн 313
 — — магнитных полей 128
 — — электрических полей 17, 38
 Проводимость 109, 110
 Проницаемость диэлектрическая 64, 73, 176, 428, 439
 — магнитная 174—176, 191, 192
- Работа выхода 117, 118
 Радиус когерентности 349, 350
 Разность потенциалов 83
 Разрешающая способность глаза 407
 — — дифракционной решетки 404
 — — объектива 405—407

- Разрешающая способность спектрального прибора 402, 403
 Резонанс 276, 279
 Резонансные кривые 277, 278, 283
 Ротор 216—223, 225, 227
 Самоиндукция 203, 205
 Сверхпроводимость 101
 Свет 338
 — естественный 340, 341, 419—421, 425
 — квазимонохроматический 341, 354
 — поляризованный 419—422, 431, 432
 Световой вектор 339, 419, 428
 — поток 378
 Сила квазиупругая 243
 — Лоренца 137
 — магнитная 137, 139, 153, 199, 201
 — тока 95, 96, 99
 Сименс 101
 Скорость групповая 319, 320, 440, 441
 — звуковых волн в газах 311
 — фазовая 292, 317—319, 440, 445
 Случайные блуждания 347
 Соленоид 142—145, 177, 202, 212
 Сопротивление электрическое 100, 101, 253, 270
 — активное 253
 Специальная теория относительности 376, 440
 Спин 184, 185
 Суперпозиция волн 313, 318
 — полей 17, 38, 128
 Теорема Гаусса 27, 29, 30, 65
 — Остроградского — Гаусса 25, 65, 236
 — Стокса 223—225, 230, 236
 Теория Максвелла 227, 233, 330, 424
 Тесла 129
 Ток смещения 231—233
 Токи Фуко 198, 199
 Точка Кюри 75, 193, 194
 — Нееля 194
 Удельный заряд 107, 154
 Уравнение волновое 295, 296, 323
 — волны 290, 291, 293—295
 — непрерывности 229
 Ускорители заряженных частиц 161
 Фаза колебаний 240, 291
 Фарад 82
 Фигуры Лиссажу 264
 Формула Брэгга — Вульфа 410
 — Ричардсона — Дэшмана 117
 — Томсона 256
 Фронт волны 289
 Циркуляция 36, 140, 216—219
 Цуг волн 286
 Частота биений 260
 — колебаний 241
 — круговая 241
 — основная 317
 — резонансная 276—278
 — собственная 241, 256, 265, 270, 278, 317
 — циклическая 241
 Электрическая индукция 64
 Электрический момент диполя 43
 — ток 95
 — — квазистационарный 253
 Электрическое смещение 64, 173
 Электродвижущая сила 98
 — — индукции 196, 200
 — — самоиндукции 204, 206, 207
 Электромагнит 179, 180
 Электрон 9, 10, 107
 —, заряд 158
 —, масса 160
 Электронвольт 39
 Эталон Фабри — Перо 368, 369
 Эфирный ветер 372, 375

Учебное издание

САВЕЛЬЕВ Игорь Владимирович

КУРС ФИЗИКИ

Том 2

**Электричество. Колебания и волны.
Волновая оптика**

Заведующий редакцией Л. И. Гладнева

Редактор Н. А. Михалина

Младший редактор В. А. Кузнецова

Художественный редактор Т. Н. Кольченко

Технический редактор Л. В. Лихачева

Корректоры Е. Ю. Рычагова, Т. С. Вайсбера

ИБ № 32578

Сдано в набор 24.06.88. Подписано к печати 27.01.89.

Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2.

Гарнитура литературная. Печать высокая.

Усл. печ. л. 24,36. Усл. кр.-отт. 24,57. Уч.-изд. л. 23,77.

Тираж 245 000 экз. Заказ № 1102. Цена 95 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени

издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

**Ленинградская типография № 2 головное предприятие
ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского
объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколо-
вой Союзполиграфпрома при Государственном комитете
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной
торговли.
198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект 29.**

NAUKA PUBLISHERS

**Main Editorial Board for Literature
on Physics and Mathematics**

Leninski prospect, 15, Moscow W-71, 117071, USSR

PHYSICS

The Textbook for general engineering colleges

VOLUMES 1—3

Igor V. SAVELYEV, D. Sc. (Phys. & Math.)

Moscow Institute of Engineering Physics

VOLUME 2

1989, 464 pages. ISBN 5-02-014052-X : 5-02-014431-2

READERSHIP. Higher school students.

THE BOOK: The accent is placed not on imparting information, but on the formation of physical thinking by students and on their mastering the ideas and methods of the science of physics. Methodically more improved ways of treating a number of questions have been found. This made the expounding of the material stricter, and the same time simpler and easier to understand.

CONTENTS: Preface. **Electricity:** Electric Field in a Vacuum. Electric Field in Dielectrics. Conductors in an Electric Field. Energy of an Electric Field. Steady Electric Current. Magnetic Field in a Vacuum. Magnetic Field in a Substance. Electromagnetic Induction. Maxwell's Equations. **Oscillations and Waves:** Oscillatory Processes. Wave Processes. **Wave Optics:** Interference of Light. Diffraction of Light. Polarization of Light. Propagation of Light in a Substance.

THE AUTHOR: Igor V. Savelyev has been head of Department of General Physics at the Moscow Institute of Engineering Physics for over 25 years, after devoting a few years to experimental physics. He is the author of three-volumed textbook «Physics, a General Course» (intended for higher schools with an extended syllabus in physics), two-volumed textbook «Fundamentals of Theoretical Physics» and textbook «Questions and Problems in General Physics». Professor Savelyev holds the title of Honoured Scientist of the RSFSR and is a USSR State Prize winner.