З. Г. ШЕФТЕЛЬ

# Теорія ймовірностей

2-ге видання,
перероблене і доповнене

Затверджено
Міністерством
освіти України
як підручник
для студентів
педагогічних навчальних закладів,
що вивчають дисципліну
«Теорія ймовірностей»



КИЇВ
«ВИЩА ШКОЛА»
1994

ББК 22.171я73
Ш53
УДК 519.21 (075.8)

Рецензент — чл.-кор. Академії наук України *М. Й. Ядренко* (Київський університет)

Редакція літератури з математики, фізики, інформатики
Редактор *Г. Г. Рубан*

3822296

**Шефтель З. Г.**

Ш53 Теорія ймовірностей: Підручник.— 2-ге вид., перероб. і допов.— К.: Вища шк., 1994.— 192 с.: іл.
ISBN 5-11-004271-3.

Розглянуто основні розділи комбінаторики і теорії ймовірностей, а також найпростіші питання математичної статистики і теорії випадкових процесів. Наведено багато розібраних прикладів і задач, а також вправи для самостійного розв'язування.

Друге видання (1-ше вид.— 1977 р.) доповнене значною кількістю задач для самостійного розв'язування.

Для студентів педагогічних навчальних закладів, що вивчають дисципліну «Теорія ймовірностей».

ББК 22.171я73

Ш $\frac{1602090000-011}{211-94}$ 53—94

ISBN 5-11-004271-3



## ПЕРЕДМОВА ДО ДРУГОГО ВИДАННЯ

У другому виданні усунено всі помічені недоліки першого видання, деякі питання викладено по-іншому, додано ряд нових питань і нових прикладів. Оскільки до книги включено значну кількість вправ для самостійного розв'язування, то її можна використовувати і як збірник задач.

**До уваги читача.** Знак ■ в тексті означає кінець доведення. Нумерація означень, теорем, формул, вправ у кожному розділі самостійна. При посиланні на теорему або формулу в тому самому розділі вказується лише її номер; при посиланні на теорему або формулу в іншому розділі вказується також номер розділу.

## З ПЕРЕДМОВИ ДО ПЕРШОГО ВИДАННЯ

В основу цієї книги покладено лекції, які автор протягом багатьох років читав на фізико-математичному і математичному факультетах Дрогобицького та Чернігівського педагогічних інститутів. Вона написана відповідно до програми з теорії ймовірностей для спеціальності «Математика» педагогічних інститутів, автором якої є акад. А. М. Колмогоров. Крім традиційних тем з теорії ймовірностей в книгу, згідно з програмою, включено також елементи математичної статистики.

Оскільки цей посібник призначений для майбутніх учителів математики, то в ньому особливу увагу приділено питанням, які можна використати на уроках у школі. Це такі питання, як основні поняття комбінаторики, застосування комбінаторики до розв'язування ймовірнісних задач, задачі на геометричні ймовірності. Майбутній учитель повинен чітко уявляти собі логічну структуру кожного математичного курсу, який він вивчає. Тому в книзі приділено увагу також аксіоматичній побудові теорії ймовірностей. Проте, враховуючи, що в програмах педагогічних інститутів не передбачено вивчення загальної теорії міри, автор обмежився елементарним викладом.

У книзі вміщено також значну кількість докладних розв'язань прикладів, що дає змогу використати їх для самостійного вивчення теорії ймовірностей, зокрема студентами-заочниками.

Автор щиро вдячний рецензентам В. С. Королюку, А. В. Скороходу, Ю. П. Студнєву та М. Й. Ядренку за критичні зауваження, які сприяли поліпшенню книги.

Розділ I

# ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

## § 1. Предмет комбінаторики. Правила суми і добутку

У багатьох галузях людської діяльності доводиться зустрічатися з задачами, в яких треба знайти число можливих розміщень заданих предметів, число способів, якими можна здійснити деякий вибір тощо. Такі задачі вивчає комбінаторика — галузь математики, предметом якої є теорія скінченних множин. Окремі комбінаторні задачі розглядалися ще в стародавні часи, але перші теоретичні дослідження в цій галузі були зроблені в XVII ст. Б. Паскалем і П. Ферма у зв'язку з підрахунком числа різних можливостей в азартних іграх (карточні ігри, ігри з кубиком тощо). Ряд задач комбінаторики розв'язав Л. Ейлер.

Проте в справжню математичну науку комбінаторика перетворилася лише в наш час. Підвищення інтересу до комбінаторики викликано бурхливим розвитком обчислювальної техніки і пов'язаним з ним загальним розвитком дискретної математики. Зокрема, багато задач теорії ймовірностей розв'язується за допомогою комбінаторики.

Введемо позначення. Множини позначатимемо великими латинськими буквами: $A, B, C, \ldots$, їхні елементи — малими: $a, b, c, \ldots$. Об'єднання, переріз і різницю множин $A$, $B$ позначатимемо відповідно: $A \cup B$, $AB$ (або $A \cap B$) та $A \setminus B$; $\varnothing$ — порожня множина.

У цьому розділі розглядатимемо лише скінченні множини; через $N(A)$ позначається число елементів множини $A$: якщо $N(A) = n$, то множину $A$ називають $n$-множиною.

Значне число теорем і формул комбінаторики грунтується на двох елементарних правилах, які називаються правилами суми і добутку.

Правило суми. *Якщо деякий об'єкт $a$ можна вибрати $m$ способами, а об'єкт $b$ — $n$ способами, причому ніякий вибір $a$ не збігається з жодним з виборів $b$, то один з об'єктів $a$ або $b$ можна вибрати $m + n$ способами.*

Це правило стає зовсім очевидним, якщо сформулювати його так: *якщо $N(A) = m$, $N(B) = n$, $AB = \varnothing$, то $N(A \cup B) = m + n$.*



Правило добутку. *Якщо об'єкт $a$ можна вибрати $m$ способами і при кожному виборі об'єкта $a$ об'єкт $b$ можна вибрати $n$ способами, то вибір пари $(a, b)$ можна здійснити $mn$ способами.*

Доведення. Нехай різні можливі вибори об'єкта $a$ є $a_1, \ldots, a_m$, а різні можливі вибори об'єкта $b$ при виборі $a_i$ є $b_{i1}, \ldots, b_{in}$; тоді всі можливі вибори пари $(a, b)$ утворюють прямокутну таблицю

$$\begin{array}{cccc} (a_1, b_{11}), & (a_1, b_{12}), & \ldots, & (a_1, b_{1n}), \\ (a_2, b_{21}), & (a_2, b_{22}), & \ldots, & (a_2, b_{2n}), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_m, b_{m1}), & (a_m, b_{m2}), & \ldots, & (a_m, b_{mn}). \end{array}$$

Ця таблиця, очевидно, складається з $mn$ елементів. ■

Узагальнене правило добутку. *Якщо об'єкт $a_1$ можна вибрати $m_1$ способами, об'єкт $a_2$ — $m_2$ способами, ..., об'єкт $a_r$ — $m_r$ способами, то вибір впорядкованої системи об'єктів $(a_1, \ldots, a_r)$ можна здійснити $m_1 m_2 \ldots m_r$ способами.*

Це правило легко доводиться індукцією по $r$.

**Приклад.** Нехай з пункту $A$ до пункту $B$ є $m$ доріг, з $A$ до $C$ — $n$ доріг, з $B$ до $D$ — $k$ доріг, з $C$ до $D$ — $l$ доріг; $B$ і $C$ між собою дорогами не сполучені. Скількома дорогами можна потрапити з $A$ до $D$?

Згідно з правилом добутку з $A$ до $D$ через $B$ веде $mk$ доріг, а через $C$ — $nl$ доріг; тому за правилом суми число всіх доріг з $A$ до $D$ є $mk + nl$.

**Вправи**

1. У їдальні є 3 перші страви, 5 других і 2 треті страви. Скількома способами можна скласти з них обід?
2. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?
3. Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо всі цифри утвореного числа повинні бути різними?
4. У школі навчається 1200 учнів. Довести, що принаймні двоє з них мають однакові ініціали.

## § 2. Упорядковані множини. Розміщення (без повторень). Перестановки

Множину $M$ називають упорядкованою, коли в ній встановлено відношення порядку $\prec$, що має такі властивості: 1) для будь-яких $a, b \in M$ або $a \prec b$ ($a$ передує $b$), або $b \prec a$; 2) якщо $a \prec b$, $b \prec c$, то $a \prec c$. Вибір відношення порядку в даній множині називають її впорядкуванням; так, наприклад, множина натуральних чисел стає впорядкованою, якщо впорядкувати числа за величиною, тобто вважати $m < n$ тоді і тільки тоді, коли $m < n$. Для впорядкування скінченної $n$-множини досить кожному її елементу приписати один з номерів 1, ..., $n$ або просто виписати її елементи в певному порядку.

Ту саму множину можна, очевидно, впорядкувати по-різному; так, для множини, що складається з трьох елементів $a$, $b$, $c$, можливі такі впорядкування: $(a, b, c)$, $(a, c, b)$, $(b, a, c)$, $(b, c, a)$, $(c, a, b)$, $(c, b, a)$. *Дві впорядковані множини вважаються рівними, якщо вони складаються з тих самих елементів і однаково впорядковані.* Наприклад, $(a, b, c)$ і $(a, c, b)$ — це різні впорядковані множини.

Означення 1. Нехай $M$ є $n$-множиною, $k \leqslant n$. *Розміщенням з $n$ елементів по $k$* називають будь-яку впорядковану $k$-підмножину множини $M$. Число розміщень з $n$ елементів по $k$ позначається так: $A_n^k$ ($A$ — це перша буква французького слова arrangement — розміщення, впорядкування).

Отже, два розміщення вважаються різними не тільки тоді, коли вони відрізняються деякими елементами, але й тоді, коли вони складаються з однакових елементів, але відрізняються їх порядком.

***Теорема 1.*** *Для будь-яких натуральних чисел $n$ і $k$ ($k \leqslant n$) має місце формула:*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1). \qquad (1)$$

Доведення. Виведемо спочатку таку рекурентну формулу:

$$A_n^{k+1} = A_n^k (n-k) \quad (k \leqslant n-1). \qquad (2)$$

Для того щоб дістати будь-яке розміщення з $n$ елементів по $k+1$, тобто впорядковану $(k+1)$-підмножину $n$-множини $M$, досить до якої-небудь впорядкованої $k$-підмножини $M_1 \subset M$ приєднати будь-який з елементів $a \in M \setminus M_1$. Оскільки множину $M_1$ можна вибрати $A_n^k$ способами, а елемент $a$ $n-k$ способами, то за правилом добутку пару $(M_1, a)$ можна вибрати $A_n^k (n-k)$ способами, що доводить формулу (2).

Тепер формулу (1) легко довести індукцією по $k$ (при фіксованому $n$). Справді, при $k = 1$ ця формула очевидна ($A_n^1 = n$, тобто $n$-множина має $n$ одноелементних підмножин). Нехай формула (1) має місце для деякого $k < n$, тоді, згідно з формулою (2), маємо $A_n^{k+1} = A_n^k (n-k) = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)(n-k)$, тобто формула (1) має місце і для $k+1$; тому ця формула справджується для всіх $k \leqslant n$. ■

**Приклад.** Скільки треба мати словників, щоб можна було безпосередньо робити переклади з будь-якої з п'яти мов: російської, української, англійської, німецької, французької на будь-яку іншу з них?

Очевидно, число словників дорівнює $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Означення 2. Розміщення з $n$ елементів по $n$ називаються *перестановками* з $n$ елементів. Число перестановок з $n$ елементів позначається через $P_n$ ($P$ — перша буква французького слова permutation — перестановка).

Як бачимо з цього означення, різні перестановки з $n$ елементів відрізняються лише порядком елементів (бо кожна з них містить усі елементи даної $n$-множини). Тому можна сказати, що $P_n$ — це число різних способів, якими можна впорядкувати $n$-множину. Оскільки $P_n = A_n^n$, то з теореми 1 безпосередньо випливає така теорема:

***Теорема 2.*** *Число перестановок з $n$ елементів дорівнює добутку всіх натуральних чисел від 1 до $n$:*

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot\ \ldots\ \cdot n = n!. \qquad (3)$$

**Зауваження.** Формулу (3) неважко довести і безпосередньо на основі означення перестановок. Розглянемо спочатку ті перестановки з $n$ елементів, що мають той самий перший елемент $a$; число таких перестановок є, очевидно, $P_{n-1}$; беручи різні $a$, ми дістанемо всі перестановки з $n$ елементів. Оскільки елемент $a$ можна вибрати $n$ способами, то за правилом добутку $P_n = nP_{n-1}$. Звідси, враховуючи, що $P_1 = 1$, доводимо (3) індукцією по $n$.

**Приклад.** Одного разу 10 друзів зайшли до ресторану. Хазяїн ресторану запропонував їм приходити до нього щодня і кожного разу сідати за той самий стіл по-іншому; після того, як усі способи розміщення будуть вичерпані, їх годуватимуть у ресторані безкоштовно. Коли настане цей день?

Число різних способів розміщення 10 чоловік за столом, очевидно, дорівнює

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800 \approx 3{,}6 \cdot 10^6.$$

Цей день настане через 9942 роки.

**Вправи**

**5.** Скількома способами можна розсадити 5 учнів на 12 місцях?

**6.** Скількома способами можна зробити триколірний прапорець з горизонтальними смугами однакової ширини, якщо є тканина 6 різних кольорів? Розв'яжіть цю задачу за умови, що один з кольорів має бути червоним.

**7.** Скількома способами можна з 30 учнів класу обрати старосту, фізорга і редактора стінгазети?

**8.** Скількома способами можна присудити золоту, срібну і бронзову медалі на змаганнях, в яких беруть участь 15 чоловік?

**9.** У шаховому турнірі беруть участь 7 чоловік. Скількома способами можуть розподілитись місця між ними?

**10.** Скількома способами можна скласти список з 8 учнів?

## § 3. Комбінації (без повторень). Трикутник Паскаля

Означення 3. Нехай $M$ є $n$-множиною, $k \leqslant n$. *Комбінацією* з $n$ елементів по $k$ називають будь-яку $k$-підмножину множини $M$. Число всіх комбінацій з $n$ елементів по $k$ позначається через $C_n^k$ ($C$ — перша буква французького слова combinaison — комбінація).

Отже, комбінації, на відміну від розміщень,— це невпорядковані підмножини заданої множини.

***Теорема 3.*** *Для будь-яких натуральних $n$ і $k$ ($k \leqslant n$) має місце формула*

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)}{k!}. \tag{4}$$

Доведення. Якщо задано деяку комбінацію з $n$ елементів по $k$ (тобто $k$-підмножину $n$-множини $M$), то, впорядковуючи її різними способами, ми дістанемо $P_k = k!$ різних розміщень з $n$ елементів по $k$. Таким чином, кожна комбінація з $n$ елементів по $k$ породжує $k!$ розміщень з $n$ елементів по $k$, тобто $A_n^k = k!\ C_n^k$; звідси, враховуючи формулу (1), дістаємо (4). ■

**Приклад.** На зборах присутні 30 осіб. Скількома способами можна обрати президію зборів у складі трьох осіб?

Шуканим числом способів є число комбінацій з 30 по 3, тобто

$$C_{30}^3 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4060.$$

Зазначимо, що формулу для числа комбінацій часто записують в іншому вигляді: якщо чисельник і знаменник виразу (4) помножити на $(n-k)!$, то дістанемо:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{5}$$

(при цьому за означенням вважають, що $0! = 1$; тоді формула (5) буде правильною і для $k = n$).

***Теорема 4.*** *Для будь-яких натуральних чисел $n$ і $k$ ($k < n$) має місце рівність*

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{6}$$



Доведення. Рівність (6) безпосередньо випливає з формули (5). Цю саму рівність легко довести інакше, з'ясувавши при цьому її комбінаторний смисл, а саме, якщо $M_1$ є $k$-підмножиною $n$-множини $M$, то $M \setminus M_1$ є $(n-k)$-підмножиною цієї множини, і навпаки. Отже, число $k$-підмножин $n$-множини дорівнює числу $(n-k)$-підмножин цієї множини. ■

Рівність (6) можна поширити на випадок $k = n$ (тоді вона буде мати місце і для $k = 0$); при цьому досить покласти за означенням $C_n^0 = 1$. Справді, $C_n^n = 1$ (це випливає як з формули (4), так і з означення, бо очевидно, що існує лише одна $n$-підмножина $n$-множини — сама ця множина); тому при $k = n$ (і при $k = 0$) рівність (6) перетворюється в тотожність: $1 = 1$.

***Теорема 5.*** *Для будь-яких натуральних чисел $n$ і $k$ ($k \leqslant n$) має місце формула*

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \tag{7}$$

Доведення. I спосіб. Виконаємо такі перетворення:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \times$$

$$\times \frac{n+1}{k\,(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

II спосіб. Цей спосіб з'ясовує комбінаторний смисл формули (7): треба знайти число $k$-підмножин $(n+1)$-множини $M$. Нехай $a$ — довільний, але фіксований елемент $M$; тоді кожна з $k$-підмножин $M$ або містить, або не містить елемент $a$. Кожна $k$-підмножина $M$, що не містить $a$, є $k$-підмножиною $n$-множини $M \setminus \{a\}$; отже, число таких підмножин дорівнює $C_n^k$. Для того щоб дістати яку-небудь $k$-підмножину $M$, що містить $a$, досить взяти будь-яку $(k-1)$-підмножину множини $M \setminus \{a\}$ і приєднати до неї елемент $a$; отже, число таких підмножин дорівнює $C_n^{k-1}$. Таким чином, число всіх $k$-підмножин множини $M$ дорівнює $C_n^k + C_n^{k-1}$. ■

З формули (7) випливає простий і зручний спосіб обчислення чисел $C_n^k$, або, як їх часто називають, біномних коефіцієнтів *. Цей спосіб називають *трикутником Паскаля.*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \cdots & & & & & &
\end{array}$$

У цій трикутній таблиці кожне число (крім крайніх одиниць) дорівнює сумі двох чисел, що стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n = 1$ при кожному $n$, то з формули (7) випливає, що $n$-й рядок цієї таблиці містить числа $C_n^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

***Теорема 6.*** *Число всіх підмножин n-множини дорівнює $2^n$.*

Доведення. Нехай $r_n$ — число всіх підмножин $n$-множини; встановимо зв'язок між $r_n$ і $r_{n+1}$. Якщо множина $M$ містить $n+1$ елемент і $a$ — довільний, але фіксований елемент $M$, то кожна підмножина $M$ або містить, або не містить $a$. Підмножини, що не містять $a$, є підмножинами $n$-множини $M \setminus \{a\}$, тому їх число дорівнює $r_n$; підмножини, що містять $a$, утворюються з підмножин $M \setminus \{a\}$ приєднанням елемента $a$, тому їх число також дорівнює $r_n$. Отже, число всіх підмножин множини $M$ є $r_n + r_n = 2r_n$, тобто $r_{n+1} = 2r_n$. Оскільки $r_1 = 2$ (одноелементна множина $M = \{a\}$ має дві підмножини; $\varnothing$ і $\{a\}$), то звідси за індукцією по $n$ дістаємо $r_n = 2^n$. ■

Наслідок. При будь-якому натуральному $n$ виконується рівність

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n. \qquad (8)$$

Справді, оскільки $C_n^k$ — це число $k$-підмножин $n$-множини, то сума в лівій частині рівності є число всіх підмножин $n$-множини.

**Вправи**

**11.** Скількома способами можна вибрати 3 фарби з 5 різних фарб?

**12.** З 52 делегатів конференції треба обрати президію з 5 чоловік і делегацію з 3 чоловік. Скількома способами можна здійснити вибір, якщо: а) члени президії можуть входити до складу делегації; б) члени президії не повинні входити до складу делегації?

**13.** На шкільному вечорі присутні 12 дівчат і 15 юнаків. Скількома способами можна вибрати з них 4 пари для танців?

**14.** Рота складається з 3 офіцерів, 6 сержантів і 60 рядових. Скількома способами можна виділити з них загін, що складається з 1 офіцера, 2 сержантів і 20 рядових? Розв'язати задачу за умови, що до загону повинен увійти командир роти і старший із сержантів.

**15.** Скільки діагоналей має опуклий $n$-кутник $(n > 3)$?

**16.** Скількома способами можна групу з 15 учнів поділити на дві так, щоб в одній групі було 11 учнів, а в другій — 4 учні?

**17.** Скількома способами з 20 шахістів можна утворити дві команди по 10 чоловік?

**18.** Скількома способами можна 15 шахістів поділити на три команди по 5 чоловік?

**19.** Доведіть рівності:

а) $C_n^m + 2C_n^{m+1} + C_n^{m+2} = C_{n+2}^{m+2}$;

б) $C_n^m + 3C_n^{m+1} + 3C_n^{m+2} + C_n^{m+3} = C_{n+3}^{m+3}$.

**20.** З 10 різних квіток треба скласти букет так, щоб у ньому було не менше двох квіток. Скількома способами можна скласти такий букет?

* Ця назва пов'язана з тим, що числа $C_n^k$ є коефіцієнтами в розвиненні бінома Ньютона:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$



## § 4. Розміщення з повтореннями

Означення 4. Нехай $M$ є $n$-множиною, $k$ — довільне натуральне число. *Розміщенням з повтореннями з n елементів по k* називається будь-який упорядкований $k$-елементний набір виду $(a_1, \ldots, a_k)$, де $a_1, \ldots, a_k$ — елементи множини $M$ (не обов'язково різні). Число всіх розміщень з повтореннями з $n$ елементів по $k$ позначається так: $\bar{A}_n^k$ (Зазначимо, що на відміну від розміщень без повторень тепер може бути і $k > n$.)

Розміщення з повтореннями з $n$ елементів по $k$ називають також впорядкованими $k$-вибірками з поверненням з $n$-множини. Ця назва пояснюється тим, що розміщення з повтореннями з $n$ елементів по $k$ можна дістати таким способом: вибрати спочатку довільний елемент $a_1 \in M$, записати його на першому місці і повернути його до множини $M$; знов вибрати довільний елемент $a_2 \in M$ (може трапитись, що це буде той самий елемент $a_1$), записати його на другому місці і знов повернути до множини; повторивши цю операцію $k$ разів, ми й дістанемо деяке розміщення з повтореннями, або $k$-вибірку з множини $M$.

***Теорема 7.*** *Для будь-яких натуральних чисел n і k має місце формула*

$$\bar{A}_n^k = n^k. \qquad (9)$$

Доведення. Доведемо спочатку для довільних натуральних чисел $n$, $k$ таку рекурентну формулу:

$$\overline{A}_n^{k+1} = n\overline{A}_n^k. \tag{10}$$

Для того щоб дістати $(k+1)$-вибірку з $n$-множини $M$, досить до $k$-вибірки $M_1 = (a_1, \ldots, a_k)$ дописати довільний елемент $a_{k+1} \in M$. Але $k$-вибірку $M_1$ можна вибрати $\overline{A}_n^k$ способами, а елемент $a_{k+1}$ — $n$ способами, тому за правилом добутку пару $(M_1, a_{k+1})$ можна вибрати $\overline{A}_n^k \cdot n$ способами, що доводить формулу (10). Оскільки, очевидно, $\overline{A}_n^1 = n$, то за індукцією по $k$ дістаємо рівність (9).

**Зауваження.** Формула (9) допускає також інше комбінаторне тлумачення, а саме: $\overline{A}_n^k$ — *це число способів, якими можна розкласти $k$ різних предметів по $n$ ящиках.*

Справді, нехай ящики і предмети занумеровано відповідно натуральними числами $1, 2, \ldots, n$ і $1, 2, \ldots, k$. Позначимо через $a_i$ номер ящика, до якого покладено $i$-й предмет ($i = 1, 2, \ldots, k$). Тоді кожний спосіб розкладання предметів по ящиках описується впорядкованим набором $(a_1, \ldots, a_k)$, де кожне $a_i$ — одне з чисел $1, 2, \ldots, n$. Очевидно, число таких наборів дорівнює $\overline{A}_n^k$.

**Приклади**

**1.** Скільки існує функцій, що відображують $k$-множину $D$ в $n$-множину $M$?

Нехай $D = \{x_1, \ldots, x_k\}$; якщо функція $f$ відображає $D$ в $M$, то $f(x_i) = a_i \in M$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Таким чином, кожна така функція визначається впорядкованим набором $(a_1, \ldots, a_k)$ елементів $n$-множини $M$, тобто $k$-вибіркою з $n$-множини. Тому число таких функцій дорівнює $n^k$.

**2.** Автомобільний номер складається з трьох букв та чотирьох цифр. Знайти кількість всіх можливих номерів, якщо використовуються 32 букви російського алфавіту.

Оскільки як букви, так і цифри в номері можуть повторюватися, то за правилом добутку шукане число дорівнює $\overline{A}_{32}^3 \cdot \overline{A}_{10}^4 = 32^3 \times 10^4 = 327\,680\,000$.

**3.** Скільки цілих чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр 7, 8, 9, 0?

Кожне число, менше за мільйон, можна записати за допомогою шести цифр, дописавши в разі потреби необхідне число нулів зліва. Тому кількість таких чисел дорівнює $\overline{A}_4^6 = 4^6 = 4096$.

**4.** Скільки цілих чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр 7, 8, 9?

Оскільки число $k$-цифрових чисел, записаних за допомогою цифр 7, 8, 9, дорівнює $\overline{A}_3^k$, то всіх таких чисел, менших за мільйон, є $\sum_{k=1}^{6} \overline{A}_3^k = \sum_{k=1}^{6} 3^k = 1092$.



**Вправи**

**21.** У ліфт 12-поверхового будинку зайшло на першому поверсі 10 чоловік. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта?

**22.** На залізничній станції є $m$ світлофорів. Скільки різних сигналів можна подати за їхньою допомогою, якщо кожний світлофор має три сигнали — червоний, жовтий і зелений?

**23.** Поїзд, в якому їдуть $n$ пасажирів, робить $k$ зупинок. Скількома способами можуть вийти пасажири на цих зупинках?

**24.** Два листоноші повинні віднести 10 листів. Скількома способами вони можуть розподілити між собою роботу?

## § 5. Перестановки з повтореннями

У § 2 було показано, що з $n$ елементів можна утворити $n!$ перестановок. Але якщо серед $n$ елементів є однакові, то перестановки, які утворюються одна з одної переставлянням однакових елементів, нічим не відрізняються; тому кількість різних перестановок буде менша, ніж $n!$

Означення 5. *Перестановкою з повтореннями з $n$ елементів* називається будь-яке впорядкування $n$-множини, серед елементів якої є однакові. Якщо серед елементів $n$-множини $M$ є $n_1$ елементів першого типу, $n_2$ елементів другого типу, ..., $n_k$ елементів $k$-го типу ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), то число всіх перестановок такої множини позначається $P_n(n_1, \ldots, n_k)$.

***Теорема 8.*** *Має місце формула*

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}. \tag{11}$$

Доведення. Розглянемо будь-яку з перестановок даної множини і обчислимо, скількома способами можна переставляти її елементи так, щоб перестановка не змінилась. Елементи першого типу можна переставляти $n_1!$ способами, другого типу — $n_2!$ способами, ..., $k$-го типу — $n_k!$ способами. Тому (за правилом добутку) в кожній перестановці з повтореннями можна переставляти елементи (не змінюючи перестановку) $n_1!\, n_2! \ldots n_k!$ способами. Звідси $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)\, n_1!\, n_2! \ldots n_k! = n!$, що доводить формулу (11). ■

**Зауваження.** Формула (11) допускає також інше комбінаторне тлумачення, а саме: $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ — *це число способів, якими можна розкласти $n$ різних предметів по $k$ ящиках так, щоб до $i$-го ящика потрапило $n_i$ предметів ($i = 1, \ldots, k$).*

Справді, розглянемо перестановки з повтореннями з $n$ елементів $k$ типів і занумеруємо числами $1, 2, \ldots, n$ місця, на яких можуть стояти ці елементи; предмети також занумеруємо числами $1, 2, \ldots, n$. Тоді кожній перестановці з повтореннями можна поставити у відповідність такий спосіб розміщення предметів по ящиках, при якому у $i$-й ящик потрапляють ті предмети, номери яких збігаються з номерами місць, на яких стоять елементи $i$-го типу ($i = 1, \ldots, k$). Ясно, що ця відповідність взаємно однозначна, що і доводить сформульоване твердження.

**Приклади**

**1.** Скільки різних «слів» (у тому числі беззмістовних) можна дістати, переставляючи букви в слові «математика»?

Очевидно, цим числом є $P_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2!\,3!\,2!} = 151\,200$.

**2.** Скількома способами можна порівну роздати чотирьом гравцям 28 костей доміно?

Згідно з зауваженням шукане число способів дорівнює $P_{28}(7, 7, 7, 7) = \frac{28!}{(7!)^4} \approx 4{,}7 \cdot 10^{15}$. Для порівняння зазначимо, що це число приблизно дорівнює числу секунд у 150 млн років.

**Вправи**

**25.** Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви слова: а) «мама»; б) «паралелограм»?

**26.** Скількома способами можна розділити 15 різних предметів між трьома особами так, щоб кожна особа одержала 5 предметів?

**27.** Скількома способами можна розподілити 20 футбольних команд на 4 підгрупи по 5 команд у кожній? Розв'язати двома способами (пор. з вправою 18).

## § 6. Комбінації з повтореннями

Означення 6. *Комбінацією з повтореннями з $n$ елементів по $k$ називається будь-який $k$-елементний набір типу $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, де кожний з елементів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ належить до одного з $n$ типів.* Число всіх комбінацій з повтореннями з $n$ елементів по $k$ позначається $\overline{C}_n^k$.

***Теорема 9.** Для будь-яких натуральних чисел $n$ і $k$ має місце формула*

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}. \tag{12}$$

Доведення. Для того щоб задати деяку комбінацію з повтореннями, досить указати, скільки елементів кожного з $n$ типів входить до неї. Поставимо у відповідність кожній комбінації впорядковану множину, складену з нулів і одиниць, за таким правилом: пишемо стільки одиниць, скільки елементів першого типу входить у комбінацію, потім напишемо нуль, після цього — стільки одиниць, скільки елементів другого типу входить в комбінацію, потім знов нуль і т. д. (якщо елементи якого-небудь типу зовсім не входять в дану комбінацію, то пишуться підряд два нулі). Наприклад, якщо розглядаються комбінації з чотирьох елементів $a, b, c, d$ по 5, то запис 11001110 відповідає такій комбінації: $\{a, a, c, c, c\}$, а запис 10110011 — комбінації $\{a, b, b, d, d\}$. Зрозуміло, що між цими впорядкованими множинами, складеними з нулів і одиниць, з одного боку, і комбінаціями з повтореннями — з другого, встановлюється взаємно однозначна відповідність. Але кожна така впорядкована множина складається з $k$ одиниць і $n - 1$ нулів, тому число всіх комбінацій з повтореннями з $n$ елементів по $k$ дорівнює числу різних способів впорядкування $(n + k - 1)$-множини, що складається з $k$ одиниць і $n - 1$ нулів, тобто

$$P_{n+k-1}(k, n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}. \ \blacksquare$$

**Приклад.** Скількома способами можна купити 8 тістечок у кондитерській, де є 6 різних їх сортів?

Це число способів дорівнює $\overline{C}_6^8 = C_{13}^8 = C_{13}^5 = 1287$.

**Зауваження 1.** Формула (12) допускає також інше комбінаторне тлумачення, а саме: $\overline{C}_n^k$ — *це число способів, якими можна розкласти $k$ однакових предметів по $n$ ящиках.*

Для доведення цього твердження покажемо, що між способами розміщення $k$ однакових предметів по $n$ ящиках і комбінаціями з повтореннями з $n$ елементів по $k$ можна встановити взаємно однозначну відповідність. Справді, маючи розміщення $k$ предметів по $n$ ящиках, можна утворити комбінацію з повтореннями з $n$ елементів по $k$, беручи стільки елементів першого типу, скільки предметів в першому ящику, стільки елементів другого типу, скільки предметів у другому ящику і т. д. Навпаки, якщо маємо комбінацію з повтореннями з $n$ елементів по $k$, то можемо розмістити $k$ предметів по $n$ ящиках, поклавши в перший ящик стільки предметів, скільки елементів першого типу є в комбінації, в другий ящик стільки, скільки елементів другого типу є в комбінації і т. д. Тому число способів розміщення $k$ однакових предметів по $n$ ящиках дорівнює $\overline{C}_n^k$.

**Зауваження 2.** Позначивши у попередніх міркуваннях число предметів, які потрапили до $i$-го ящика, через $x_i$ ($i = 1, \ldots, n$), ми дістанемо ще одне тлумачення числа комбінацій з повтореннями: $\overline{C}_n^k$ — *це число цілих невід'ємних розв'язків рівняння*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k.$$

**Вправи**

**28.** У поштовому відділенні зв'язку продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити: а) 12 листівок; б) 8 листівок; в) 8 різних листівок?

**29.** Скількома способами можна покласти 15 однакових куль у 5 урн?

**30.** Запишіть усі комбінації з повтореннями з трьох елементів $a, b, c$ по три.

**81.** Поїзд, в якому їдуть $n$ пасажирів, робить $k$ зупинок. Скількома способами можуть вийти пасажири на цих зупинках, якщо враховується лише кількість пасажирів, що вийшли на кожній зупинці? (пор. із вправою 23).

## § 7. Формула включень та виключень

Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — підмножини $N$-множини $\Omega$. Позначатимемо через $\bar{A}_i$ доповнення множини $A_i$:

$$\bar{A}_i = \Omega \setminus A_i.$$

Як і вище, через $N(A)$ позначатимемо число елементів множини $A$.

***Теорема 10.*** *Має місце формула*

$$N(\bar{A}_1\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_n) = N - \sum_{i=1}^{n} N(A_i) + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} N(A_iA_j) -$$
$$- \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} N(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^n N(A_1A_2 \ldots A_n). \quad (13)$$

Цю формулу називають *формулою включень та виключень, або формулою решета.* Вона має численні застосування в різних галузях математики, зокрема в теорії чисел та в теорії ймовірностей.

Д о в е д е н н я. Будемо доводити за методом індукції по $n$.

При $n = 1$ формула (13) має вигляд $N(\bar{A}_1) = N - N(A_1)$ і, очевидно, є правильною, бо $N = N(\Omega)$.

Припустимо, що формула (13) має місце для $n - 1$ множини, тобто що для довільних множин $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \subset \Omega$

$$N(\bar{A}_1\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{n-1}) = N - \sum_{i=1}^{n-1} N(A_i) + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n-1} N(A_iA_j) -$$
$$- \cdots + (-1)^{n-1} N(A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \quad (14)$$

Зокрема, можна застосувати цю формулу для $n - 1$ множин $A_i A_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, замінивши $\Omega$ на $A_n$:

$$N(\bar{A}_1\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{n-1}A_n) = N(A_n) - \sum_{i=1}^{n-1} N(A_iA_n) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n-1} N(A_iA_jA_n) - \cdots + (-1)^{n-1} N(A_1A_2 \ldots A_n). \quad (15)$$



Віднявши від рівності (14) рівність (15), дістанемо формулу (13). ■

Н а с л і д о к. Для довільних скінченних множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ має місце формула

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} N(A_iA_j) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} N(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} N(A_1A_2 \ldots A_n) \quad (16)$$

(цю формулу також називають формулою в к л ю ч е н ь т а в и к л ю ч е н ь). Для доведення цієї формули досить у формулі (13) взяти $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ і врахувати, що $N = N(\Omega) = N\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ та $\bar{A}_1\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_n = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \varnothing$. ■

**Приклад.** Із 100 студентів 40 знають англійську мову, 35 — німецьку, 28 — французьку; англійську і німецьку мови знають 12 студентів; англійську і французьку — 7; німецьку і французьку — 6; всі три мови знають 4 студенти. Скільки студентів не знають жодної з цих мов?

Якщо $A, B, C$ — відповідно множини студентів, що знають англійську, німецьку і французьку мови, $\Omega$ — множина всіх 100 студентів, то за формулою (13) маємо

$$N(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = N - N(A) - N(B) - N(C) + N(AB) + N(AC) +$$
$$+ N(BC) - N(ABC) = 100 - 40 - 35 - 28 + 12 + 7 + 6 - 4 = 18.$$

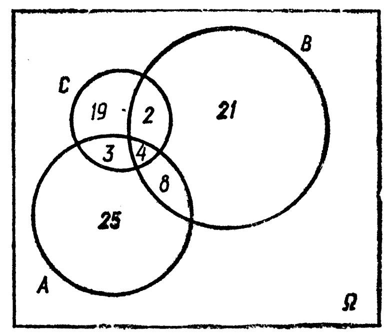


Рис. 1

**Зауваження.** Цей та аналогічні йому приклади можна розв'язати за допомогою наочного зображення об'єднань і перерізів множин так званими д і а г р а м а м и Е й л е р а — В е н н а. Суть цього методу полягає в тому, що множини зображують у вигляді кругів або інших фігур на площині. Так, для того щоб розв'язати розглянутий вище приклад, можна зобразити множину всіх студентів у вигляді квадрата $\Omega$, а множини $A, B, C$ — у вигляді кругів, що лежать у цьому квадраті (рис. 1). Діаграма заповнюється, починаючи з $ABC$: $N(ABC) = 4$. Далі обчислюється $N(AB\bar{C}) = 12 - 4 = 8$ (тобто число студентів, що знають тільки англійську і німецьку мови), $N(AC\bar{B}) = 7 - 4 = 3$, $N(\bar{A}BC) = 6 - 4 = 2$; потім — число студентів, що знають тільки одну іноземну мову: $N(A\bar{B}\bar{C}) = 40 - (3 +$

$+ 4 + 8) = 25$, $N(B\bar{A}\bar{C}) = 35 - (2 + 4 + 8) = 21$, $N(C\bar{A}\bar{B}) = 28 - (3 + 4 + 2) = 19$, і, нарешті, $N(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 100 - (25 + 21 + 19 + 8 + 3 + 2 + 4) = 18$.

**Вправи**

**32.** У класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 — фізичний, 10 учнів не відвідують жодного з цих гуртків. Скільки учнів відвідують обидва гуртки? Скільки учнів відвідують лише математичний гурток?

**33.** У відділі науково-дослідного інституту працюють декілька чоловік, кожен з яких знає хоча б одну іноземну мову. Шість з них знають англійську мову, шість — німецьку, сім — французьку, чотири знають англійську і німецьку, три — німецьку і французьку, два — французьку і англійську; один знає всі три мови. Скільки чоловік працює у відділі? Скільки з них знає лише англійську (німецьку, французьку) мову?

**Додаткові вправи до розділу I**

**34.** На вершину гори ведуть 7 доріг. Скількома способами може турист піднятися на гору та спуститися з неї? Відповісти на те саме питання, якщо піднуття і спуск відбуваються різними шляхами.

**35.** Є 5 різних видів конвертів та 6 видів марок однакової вартості. Скількома способами можна вибрати конверт з маркою, щоб відправити лист?

**36.** Скількома способами можна $m$ білих і $n$ чорних куль ($m > n$) розкласти в ряд так, щоб жодні дві чорні кулі не лежали поруч?

**37.** До міжнародної комісії входить $n$ осіб. Матеріали комісії зберігаються в сейфі. Доступ до сейфу можливий тоді і тільки тоді, коли збереться не менше ніж $m$ членів комісії. Скільки замків повинен мати сейф, скільки ключів до них треба виготовити і як розподілити їх серед членів комісії, щоб виконати цю умову?

**38.** У класі вивчають 10 предметів. У понеділок 6 уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

**39.** На площині проведено $n$ прямих ліній, причому жодні дві з них не є паралельними і жодні три не перетинаються в одній точці. Скільки точок перетину утвориться при цьому?

**40.** На яке найбільше число частин можуть поділити площину $n$ прямих?

**41.** На яке найбільше число частин можуть поділити простір $n$ площин?

**42.** В опуклому $n$-кутнику проведено всі діагоналі. Відомо, що жодні три з них не перетинаються в одній точці. На скільки частин поділиться при цьому многокутник?

**43.** Довести, що $C_n^{k+1} > C_n^k$ при $k < \dfrac{n-1}{2}$ і $C_n^{k+1} < C_n^k$ при $k > \dfrac{n-1}{2}$.

**44.** Вказати найбільше число серед $C_n^k$, де $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

**45.** Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

**46.** Скількома способами можна розсадити 4 учнів на 25 місцях?

**47.** Студенту треба за 8 днів скласти 4 екзамени. Скількома способами це можна зробити?



**48.** Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, щоб числа 1, 2, 3 стояли поруч і в порядку зростання?

**49.** Скільки існує перестановок з $n$ елементів, серед яких між двома даними елементами стоїть $r$ елементів?

**50.** Скількома способами можна розкласти $k$ однакових куль по $n$ урнах, якщо в кожну урну повинна потрапити принаймні одна куля?

**51.** Скільки цілих невід'ємних розв'язків має рівняння

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5?$$

Записати кілька таких розв'язків.

**52.** Скільки цілих додатних розв'язків має рівняння

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k?$$

**53.** П'ятеро дівчат і троє юнаків грають у городки. Скількома способами вони можуть розділитися на дві команди по 4 гравці, якщо у кожній команді повинен бути принаймні один юнак?

**54.** Скількома способами можуть сісти за круглий стіл 5 жінок і 5 чоловіків так, щоб жодні дві особи однієї статі не сиділи поруч?

**55.** Та сама задача, але вони сідають не за круглий стіл, а на карусель, і способи, що переходять один в один при обертанні каруселі, вважаються однаковими.

**56.** Скількома способами можна з колоди в 32 карти взяти 10 карт так, щоб 8 з них були однієї масті?

**57.** Скількома способами можна колоду з 52 карт розділити на 2 рівні частини так, щоб у кожній було порівну червоних і чорних карт?

**58.** У деякій країні не було двох жителів з однаковим набором зубів. Якою може бути найбільша чисельність населення країни (найбільше число зубів дорівнює 32)?

**59.** Скількома способами можна розставити 20 різних книг у книжковій шафі з 5 полицями, якщо кожна полиця може вмістити всі 20 книг?

**60.** Скількома способами можна надіти 5 різних перснів на пальці однієї руки, виключаючи великий палець?

У вправах 61—65 $A$, $B$, $C$ — підмножини $N$-множини $\Omega$.

**61.** Довести, що

$$N(AB) + N(AC) + N(BC) \geqslant N(A) + N(B) + N(C) - N.$$

**62.** Довести, що

$$N(AB) + N(AC) - N(BC) \leqslant N(A).$$

**63.** Відомо, що $N(A) = N(B) = \dfrac{1}{2} N$. Довести, що $N(AB) = N(\bar{A}\bar{B})$.

**64.** Відомо, що $N(A) = N(B) = N(C) = \dfrac{1}{3} N$ і $N(ABC) = N(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$. Довести, що $2N(ABC) = N(AB) + N(AC) + N(BC)$.

**65.** У звіті наведено числові дані як такі, що насправді спостерігались: $N = 1000$, $N(A) = 510$, $N(B) = 490$, $N(C) = 427$, $N(AB) = 189$, $N(AC) = 140$, $N(BC) = 85$. Показати, що у цих даних є помилка.

**66.** Задача — жарт (Льюис Кэррол. История с узелками. Узелок 10.— М. : Мир, 1973). У жорстокому бою не менше 70 % бійців втратили одне око, не менше 75 % — одне вухо, не менше 80 % - одну руку і не менше 85 % — одну ногу. Яка мінімальна кількість бійців, які втратили одночасно око, вухо, руку й ногу?

Розділ II

# ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ЙМОВІРНОСТІ

## § 8. Предмет теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей як самостійна наука виникла в середині XVIII ст., коли були дуже поширені азартні ігри, тобто ігри, в яких результат залежить лише від випадку (від французького слова hasard — випадок). До таких ігор належить гра «в орлянку», ігри з кубиком, деякі карточні ігри тощо. У листуванні Паскаля і Ферма з приводу задач, які постали в зв'язку з азартними іграми, було введено поняття ймовірності й математичного сподівання. Для розв'язування цих задач існуючий тоді апарат виявився недостатнім і було закладено основи нової науки.

Теорія ймовірностей — це галузь математики, що вивчає математичні моделі випадкових явищ. Наведемо приклади таких явищ. Якщо підкинути монету, то вона може впасти або цифрою, або гербом догори; якщо слідкувати за певним атомом радіоактивної речовини, то за даний проміжок часу він може або розпастись, або не розпастись. Настання або ненастання кожної з цих подій залежить від цілого ряду умов, які неможливо наперед врахувати, тому такі події вважають випадковими. Отже, випадкова подія — це подія, яка може настати або не настати в результаті деякого експерименту, результат якого наперед не можна точно передбачити.

Зрозуміло, що при одноразовому проведенні згаданого експерименту (випробування) або спостереження ми ніяких закономірностей не помітимо. Закономірності починають виявлятися тільки тоді, коли ми здійснюємо цей експеримент багато разів в однакових умовах.

Нехай деякий експеримент відбувається $n$ разів і при цьому в результаті $\mu$ випробувань настала подія $A$; відношення $\frac{\mu}{n}$ називають (відносною) частотою настання події $A$ в цій серії з $n$ випробувань. Теорія ймовірностей має справу лише з такими подіями, для яких має місце властивість стійкості частот. Ця властивість полягає в тому, що частота події $A$ при великому числі випробувань мало відрізняється від деякого числа. Наприклад, якщо багато разів підкидати монету, то частота появи герба буде мало відрізнятись від $\frac{1}{2}$; так, К. Пірсон підкидав монету 24 000 разів, і при цьому герб випав 12 012 разів; відношення $\frac{12\,012}{24\,000}$ відрізняється від $\frac{1}{2}$ лише на 0,0005. Число, навколо якого групуються частоти події $A$ при великому числі випробувань, називають **імовірністю** події $A$ і позначають $\mathrm{P}(A)$. Наприклад, природно вважати, що ймовірність випадання герба при киданні монети дорівнює $\frac{1}{2}$. Наведене означення ймовірності (його називають **статистичним** або **частотним** означенням) виявляється незручним, бо на його основі дуже важко побудувати логічно досконалу теорію: це пов'язано, зокрема, з тим, що в цьому означенні нічого не говориться про те, наскільки великим повинно бути число випробувань і наскільки може відхилятися частота від імовірності при даному $n$. Р. Мізес дав означення ймовірності як границі послідовності частот: $\mathrm{P}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu}{n}$; на основі цього означення можна здійснити побудову теорії ймовірностей, але при побудові строгої математичної теорії на цьому шляху виникають значні труднощі.

У наступних параграфах буде викладено інший підхід до введення поняття ймовірності. У § 9 будуть розглянуті деякі загальні питання, пов'язані з випадковими подіями і операціями над ними, а в § 10 буде розглянуто поняття ймовірності у найпростішому випадку, коли експеримент може мати лише скінченне число різних результатів. Побудову поняття ймовірності на аксіоматичній основі висвітлено в § 12.

## § 9. Простір елементарних подій. Відношення між подіями

Розглянемо ряд прикладів, в яких під подіями ми розумітимемо результати випробувань або спостережень.

**Приклади**

1. Випробування полягає в тому, що кидається гральний кубик, зроблений з однорідного матеріалу; грані кубика пронумеровано (від 1 до 6).

При одному киданні кубика на його верхній грані може випасти будь-яке число очок від 1 до 6. Подію «при одному киданні випало $i$ очок» позначимо через $\omega_i$ ($i = 1, \ldots, 6$); події $\omega_i$ є елементарними (нерозкладними), вони вичерпують усі можливі результати заданого випробування. Але з цим випробуванням можна пов'язати і складені (розкладні) події. Так, нехай подія $A$ полягає в тому, що при одному

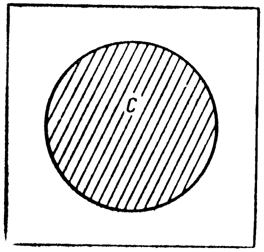


Рис. 2

киданні кубика випало парне число очок, подія $B$ — в тому, що випало число очок, кратне 3. Зрозуміло, що ці події є складеними, вони можуть бути розкладені на елементарні події: подія $A$ настає тоді і тільки тоді, коли настає одна з елементарних подій $\omega_2$, $\omega_4$, $\omega_6$; так само настання події $B$ еквівалентне настанню однієї з подій $\omega_3$, $\omega_6$. Тому природно розглядати події $A$ і $B$ як відповідні множини елементарних подій: $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_3, \omega_6\}$.

2. Нехай у партії з 1000 однотипних виробів є 10 бракованих виробів. Випробування полягає в тому, що навмання береться оди. з виробів.

Тут ми маємо 1000 елементарних подій (нерозкладних результатів випробувань) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{1000}$ (подія $\omega_i$ полягає в тому, що взято $i$-й виріб). Нехай подія $A$ полягає в тому, що взятий виріб бракований; ця подія складається з 10 елементарних подій, $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_{10}}\}$, де $i_1, i_2, \ldots, i_{10}$ — номери бракованих виробів.

3. Якщо тричі підкинути монету, то при кожному киданні вона може впасти догори гербом або цифрою, тому в цьому випадку є всього 8 результатів випробування — елементарних подій: *ггг, ггц, гцг, цгг, гцц, цгц, ццг, ццц* (*г* означає випадання герба, *ц* — цифри).

Розглянемо приклади складених подій: нехай подія $A$ полягає в тому, що випало принаймні два герби, подія $B$ — випала рівно одна цифра; тоді $A = \{ггг, ггц, гцг, цгг\}$, $B = \{ггц, гцг, цгг\}$.

4. На площині дано квадрат; випробування полягає в тому, що в цей квадрат кидається точка. Елементарними подіями в цьому випадку природно вважати події, що полягають у попаданні в окремі точки квадрата; отже, множина всіх елементарних подій (всіх нерозкладних результатів випробування) еквівалентна множині точок квадрата.

Розглянемо подію $C$, яка полягає в тому, що кинута точка попала в круг $C$, який лежить всередині квадрата (рис. ?); ця подія розкладається на нескінченну множину елементарних подій, які відповідають попаданням в різні точки круга $C$.

Таким чином, під *елементарними подіями, пов'язаними з певним випробуванням, розуміють усі нерозкладні результати цього випробування. Кожну подію, яка може настати в результаті цього випробування, можна розглядати як деяку множину елементарних подій.* Разом з тим розглянуті приклади показують, що елементарні події можуть бути об'єктами найрізноманітнішої природи. Тому, формалізуючи попередні міркування, приходимо до такого означення:

**Означення 1.** *Простором елементарних подій* називається довільна множина (скінченна або нескінченна).

Простір елементарних подій позначатимемо буквою $\Omega$, його елементи (точки), тобто елементарні події, буквами



$\omega_i$ або $\omega$. Підмножини простору елементарних подій називаються **подіями*** (*подія $A$ настає, якщо настає яка-небудь з елементарних подій* $\omega \in A$). Сама множина $\Omega$ називається **вірогідною** подією, порожня множина $\varnothing$ — неможливою подією.

Розглянемо відношення, в яких можуть бути події, і операції над подіями.

**Означення 2.** Говорять, що подія $A$ є окремим випадком $B$ (або $B$ є наслідком $A$), якщо множина $A$ є підмножиною $B$. Позначають це відношення так само, як для множин: $A \subset B$, або $B \supset A$. Таким чином, відношення $A \subset B$ означає, що всі елементарні події, які входять в $A$, входять також у $B$, тобто що при настанні події $A$ настає також подія $B$. При цьому, якщо $A \subset B$ та $B \subset A$, то $A = B$.

**Означення 3.** **Сумою** (або об'єднанням) $A \cup B$ подій $A$, $B$ називається їх теоретико-множинне об'єднання, тобто подія, яка складається з елементарних подій, що входять до складу хоча б однієї з подій $A$, $B$.

**Означення 4.** Добутком (або перерізом) $AB$ подій $A$, $B$ називається їх теоретико-множинний переріз, тобто подія, яка складається з елементарних подій, що входять в обидві події $A$, $B$. Іншими словами, подія $A \cup B$ настає тоді і тільки тоді, коли настає або подія $A$, або подія $B$, або обидві події; подія $AB$ настає тоді і тільки тоді, коли настають обидві події $A$, $B$. Аналогічно визначаються суми і добутки кількох подій.

**Означення 5.** Протилежною подією $\bar{A}$ для події $A$ називається теоретико-множинне доповнення $\Omega \setminus A$, тобто подія, що складається з усіх елементарних подій, які не входять в $A$.

Таким чином, подія $\bar{A}$ настає тоді і тільки тоді, коли не настає подія $A$.

**Означення 6.** Події $A$ і $B$ називаються несумісними, якщо $AB = \varnothing$.

Означення 2—6 дуже зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера — Венна (рис. 3). На цих діаграмах простір елементарних подій $\Omega$ зображено у вигляді квадрата, а події — у вигляді кругів.

---

* У випадку незчисленних просторів елементарних подій недоцільно вважати подіями всі підмножини $\Omega$, бо тоді було б важко ввести поняття ймовірності. (Це питання буде розглянуто в § 12, в § 10—11 будуть розглядатися лише скінченні простори елементарних подій.)

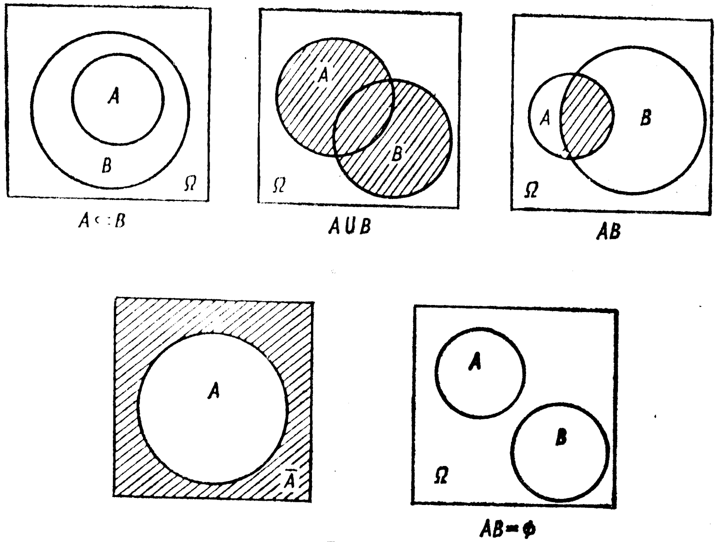


Рис. 3

Легко довести такі властивості операцій над подіями (вони виражають той факт, що множина подій є алгеброю Буля):

1. $A \cup B = B \cup A$; $AB = BA$ (комутативні закони для додавання і множення).

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(AB)C = A(BC)$ (асоціативні закони додавання і множення).

3. $(A \cup B)C = AC \cup BC$ (дистрибутивний закон множення відносно додавання).

4. $AB \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$ (дистрибутивний закон додавання відносно множення).

5. $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}$; $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (закони де Моргана).

6. $A \cup \bar{A} = \Omega$; $A\bar{A} = \varnothing$.

Властивості 1, 2, 6 випливають безпосередньо з означень. Доведемо властивість 4 (властивості 3 і 5 доводяться аналогічно). Для доведення рівності 4 досить довести такі два включення:

1) $AB \cup C \subset (A \cup C)(B \cup C)$; 2) $(A \cup C)(B \cup C) \subset AB \cup C$.

Якщо $\omega \in AB \cup C$, то або $\omega \in AB$ або $\omega \in C$. У першому випадку $\omega \in A$ і $\omega \in B$, тому $\omega \in A \cup C$ і $\omega \in B \cup C$, отже, $\omega \in (A \cup C)(B \cup C)$. У другому випадку $\omega \in C$, тому $\omega \in A \cup C$ і $\omega \in B \cup C$ і знов $\omega \in (A \cup C)(B \cup C)$.



Нехай $\omega \in (A \cup C)(B \cup C)$, тоді $\omega \in A \cup C$ і $\omega \in B \cup C$. Якщо $\omega \in C$, то $\omega \in AB \cup C$. Якщо ж $\omega \notin C$, то $\omega \in A$ і $\omega \in B$, тому $\omega \in AB$ і, отже, $\omega \in AB \cup C$. ■

**Приклади**

1. Двічі кидають монету. Описати простір елементарних подій.

При кожному киданні монети можливі два результати: монета впаде догори гербом (*г*) або цифрою (*ц*). Тому простір елементарних подій при двох киданнях складається з таких чотирьох подій: *гг*, *гц*, *цг*, *цц*.

2. Стрілець двічі стріляє по мішені: $A$ — влучення при першому пострілі, $B$ — при другому. Описати простір елементарних подій. Записати подію, яка полягає в тому, що: а) стрілець влучив у мішень принаймні один раз (подія $C$); б) стрілець влучив рівно один раз (подія $D$); стрілець не влучив у мішень (подія $E$).

Простір елементарних подій складається з таких чотирьох подій (порівняти з попереднім прикладом): $AB$, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$, $\bar{A}\bar{B}$. Розглянемо події $C$, $D$, $E$:

а) Якщо стрілець влучив принаймні один раз, то це означає, що він влучив або при першому пострілі, або при другому, або при обох, тобто $C = A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB = A \cup B$.

б) Рівно одне влучення може бути тільки тоді, коли стрілець при першому пострілі влучив, а при другому — ні, або при першому не влучив, а при другому — влучив, тобто $D = A\bar{B} \cup \bar{A}B$.

в) Якщо стрілець не влучив у мішень, то це означає, що він не влучив при обох пострілах, тобто $E = \bar{A}\bar{B}$ (або, що те саме, $E = \overline{A \cup B}$).

**Вправи**

1. Довести рівності: а) $A \cup \bar{A} = \Omega$; б) $A\bar{A} = \varnothing$; в) $A \cup \Omega = \Omega$; г) $A\Omega = A$; д) $A \cup \varnothing = A$; е) $A\varnothing = \varnothing$; є) $\bar{\bar{A}} = A$; ж) $\bar{\Omega} = \varnothing$; з) $\bar{\varnothing} = \Omega$; и) $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}$; і) $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

2. Описати простір елементарних подій, якщо випробування полягає в тому, що монету підкидають тричі. Опишіть елементарні події, сприятливі для подій «випали герб і дві цифри», «випали дві цифри».

3. В урні лежать 4 кулі, занумеровані цифрами 1, 2, 3, 4. Витягають дві кулі. Описати простір елементарних подій. Записати елементарні події, сприятливі для події: «витягнуто дві кулі з парними номерами».

4. Нехай $A$, $B$, $C$ — деякі події. Записати вирази для подій, які полягають у тому, що:

а) настала тільки подія $A$;
б) настали події $A$ і $B$, але подія $C$ не настала;
в) настала принаймні одна з цих подій;
г) не настала жодна з цих подій;
д) настали всі три події;
е) настало не більше двох подій.

## § 10. Класичне означення ймовірності

Нехай простір елементарних подій $\Omega$ є скінченною множиною, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$, тобто є тільки $N$ можливих результатів випробування; в цьому випадку множину $\Omega$ часто називають повною групою подій (або докладніше повною групою всіх попарно несумісних результатів випробування). Вважатимемо додатково, що всі елементарні події рівноможливі. Поняття рівноможливості не підлягає формальному означенню. Воно означає, що з міркувань симетрії (або якихось подібних) випливає, що немає об'єктивних причин вважати одну з елементарних подій більш імовірною порівняно з іншими. Наприклад, якщо експеримент полягає в киданні правильного кубика, виготовленого з однорідного матеріалу, то всі шість результатів цього випробування природно вважати рівноможливими.

Класичне означення ймовірності дається для подій, що є підмножинами $\Omega$: імовірність $\mathbf{P}(A)$ події $A$ визначається формулою

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N}, \tag{1}$$

де $N(A)$ — число елементів множини $A$. Це означення можна сформулювати на «мові випробувань» так: *імовірністю події $A$ називається відношення числа результатів випробування, сприятливих для події $A$, до числа всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування.*

**Приклад.** Знайти ймовірність того, що число очок, яке випаде на кубику при одному киданні, буде: а) парним (подія $A$), б) кратним трьом (подія $B$).

Простір елементарних подій складається з 6 елементів: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, де $\omega_i$ — подія, що полягає у випаданні $i$ очок; оскільки $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_3, \omega_6\}$, то

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Встановимо деякі властивості ймовірності:

1) *Для кожної події $A \subset \Omega$*

$$0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1.$$

Ця властивість випливає з означення, з формули (1), бо, очевидно, $0 \leqslant N(A) \leqslant N$.

2) *Імовірність вірогідної події дорівнює 1:*

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Справді, згідно з формулою (1), $\mathbf{P}(\Omega) = \dfrac{N}{N} = 1$.

3) ***Теорема додавання для несумісних подій.*** *Якщо події $A$ і $B$ несумісні ($AB = \varnothing$), то*

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B). \tag{2}$$



Справді, оскільки $AB = \varnothing$, то $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$ (правило суми, див. розд. I, § 1). Поділивши обидві частини цієї рівності на $N$, дістанемо формулу (2).

3') *Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несумісні (тобто $A_iA_j = \varnothing$ при $i \neq j$), то*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i). \tag{3}$$

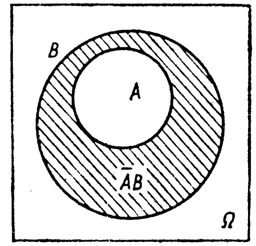

Рис. 4

Доведення безпосередньо випливає з властивості 3), якщо застосовувати метод математичної індукції.

4) *Імовірність протилежної до $A$ події $\bar{A}$ дорівнює*

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A). \tag{4}$$

Справді, оскільки $A \cup \bar{A} = \Omega$, а події $A$ і $\bar{A}$ несумісні, то за властивостями 2 і 3 маємо:

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}),$$

звідки і дістаємо (4).

5) *Імовірність неможливої події дорівнює нулю:*

$$\mathbf{P}(\varnothing) = 0.$$

Це безпосередньо дістаємо з формули (1): $\mathbf{P}(\varnothing) = \dfrac{0}{N} = 0$. Можна також використати властивості 2 і 4:

$$\mathbf{P}(\varnothing) = \mathbf{P}(\bar{\Omega}) = 1 - \mathbf{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

6) *Якщо подія $A$ є окремим випадком події $B$ ($A \subset B$), то*

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B).$$

Справді, можна, очевидно, записати (рис. 4), що $B = A \cup \bar{A}B$, причому події $A$ і $\bar{A}B$ несумісні, тому за властивостями 3 і 1 маємо:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cup \bar{A}B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}B) \geqslant \mathbf{P}(A).$$

7) ***Теорема додавання для довільних подій.*** *Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — довільні події, то*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{P}(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathbf{P}(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}(A_1A_2 \ldots A_n). \tag{5}$$

Зокрема, у випадку двох подій

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB). \qquad (6)$$

Для доведення зазначимо, що коли $N(A_i)$ — число елементів $A_i$, то, згідно з формулою включень та виключень (розд. I, формула (16)), маємо

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} N(A_i A_j) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} N(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} N(A_1 A_2 \ldots A_n).$$

Розділивши обидві частини цієї рівності на $N$, дістанемо формулу (5).

## § 11. Приклади обчислення ймовірностей

Розглянемо кілька прикладів обчислення ймовірностей на основі класичного означення; апарат, що при цьому використовується,— основні властивості ймовірностей та основні правила і теореми комбінаторики.

**Приклади**

1. **Задача про дні народження.** Знайти ймовірність $\mathbf{P}_n$ того, що серед навмання вибраних $n$ людей є принаймні двоє, що народилися в один день і місяць.

Позначимо через $A$ подію, ймовірність якої треба знайти. Тоді протилежна подія $\bar{A}$ полягає в тому, що всі $n$ чоловік народилися в різні дні року; знайдемо ймовірність події $\bar{A}$. Якщо $a_i$ — день народження $i$-ї людини, то кожна елементарна подія — це впорядкований набір чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де $a_i$ — цілі числа, $1 \leqslant a_i \leqslant 365$. Число всіх таких наборів — це число розміщень з повтореннями з 365 елементів по $n$, отже, $N = \bar{A}_{365}^n = 365^n$.

Подія $\bar{A}$ складається з тих елементарних подій, для яких всі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — різні, тобто з усіх розміщень (без повторень) 365 елементів по $n$, отже, $N(\bar{A}) = A_{365}^n$, і тому

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = \frac{A_{365}^n}{365^n} = \frac{365 \cdot 364 \ldots (365 - n + 1)}{365^n} =$$

$$= \frac{364 \cdot 363 \ldots (366 - n)}{365^{n-1}}.$$

Тепер за формулою (4) знаходимо шукану ймовірність $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}(A) = 1 - \dfrac{364 \cdot 363 \ldots (366 - n)}{365^{n-1}}$. Імовірності $\mathbf{P}_n$ можна обчислити за допомогою калькулятора; наведемо деякі значення $\mathbf{P}_n$:

| $n$ | 15 | 23 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}_n$ | 0,253 | 0,507 | 0,706 | 0,891 | 0,970 | 0,994 | 0,9992 | 0,999999 |



З цієї таблиці видно, що при $n = 23$ є приблизно однакові шанси того, що $A$ настане, і на те, що $A$ не настане; при $n \geqslant 70$ подію $A$ можна вважати практично вірогідною.

2. **Гіпергеометричний розподіл.** Нехай в урні є $n$ куль, з яких $n_1$ — білі, решта — чорні. З урни виймають $r$ куль; яка ймовірність, що серед них рівно $k$ білих куль?

Кожна елементарна подія у цьому експерименті визначається, очевидно, деякою $r$-підмножиною $n$-множини куль, тобто комбінацією з $n$ елементів по $r$, отже, число всіх елементарних подій дорівнює $C_n^r$. Знайдемо число $N(A)$ $r$-підмножин, в яких є рівно $k$ білих куль (і тому $r - k$ чорних); $k$ білих куль можна вибрати з $n_1$ білих куль $C_{n_1}^k$ способами, а $r - k$ чорних куль з $n - n_1$ чорних куль — $C_{n-n_1}^{r-k}$ способами. За правилом добутку $N(A) = C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{r-k}$. Тому шукана ймовірність, яку позначимо через $q_k$, дорівнює

$$q_k = \frac{C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{r-k}}{C_n^r}, \qquad (7)$$

Набір чисел $q_0, q_1, \ldots, q_r$ називається *гіпергеометричним розподілом.*

Оскільки за теоремою додавання для несумісних подій $\sum_{k=0}^{r} q_k = \mathbf{P}(\Omega) = 1$, то з формули (7) випливає така тотожність:

$$\sum_{k=0}^{r} C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{r-k} = C_n^r. \qquad (8)$$

Зазначимо, що ця тотожність має досить очевидний комбінаторний зміст (який?).

Як приклад застосування формули (7) обчислимо ймовірність виграшів у «Спортлото». Учасник гри у «Спортлото» повинен назвати 6 чисел (6 видів спорту) з 45 чисел 1, 2, 3, ..., 45; він виграє, якщо з них 6 чисел 3, 4, 5 або 6 збігаються з деякими з шести чисел, які випадають в тиражі. Знайти ймовірність угадування 3, 4, 5 або 6 видів спорту.

Ясно, що це є та сама задача про виймання 6 куль з урни, де лежать 45 куль, серед яких 6 «білих» (виграшних). Тому ймовірність угадування $k$ видів спорту дорівнює $q_k$ (для значень $n = 45$, $n_1 = 6$, $r = 6$). За формулою (7) маємо

$$q_3 = \frac{C_6^3 \cdot C_{39}^3}{C_{45}^6} \approx 0{,}03484; \quad q_4 = \frac{C_6^4 \cdot C_{39}^2}{C_{45}^6} \approx 1{,}823 \cdot 10^{-3};$$

$$q_5 = \frac{C_6^5 \cdot C_{39}^1}{C_{45}^6} \approx 3{,}315 \cdot 10^{-5}; \quad q_6 = \frac{1}{C_{45}^6} \approx 1{,}228 \cdot 10^{-7}.$$

3. **Задача про збіги.** Капелюхи $n$ відвідувачів були переплутані в гардеробі і видані відвідувачам випадковим способом. Знайти ймовірність $\mathbf{P}_n$ того, що принаймні один з відвідувачів одержить свій власний капелюх.

Цю задачу можна сформулювати так: є $n$ елементів, розміщених у певному порядку. Ці елементи випадковим способом переставляються. Яка ймовірність того, що принаймні один елемент залишиться на своєму місці?

Нехай подія $A_i$ полягає в тому, що $i$-й елемент залишиться на своєму місці. Всіх перестановок $n$ елементів є $P_n = n!$; $i$-й елемент залишається на своєму місці при $(n-1)!$ перестановках, тому

$$\mathrm{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Знайдемо ймовірності того, що на своїх місцях залишаться 2, 3, ... елементів. Якщо на місці залишаються 2 елементи, то решту елементів можна переставити $(n-2)!$ способами, тому

$$\mathrm{P}(A_iA_j) = \frac{(n-2)!}{n!} \quad (i \neq j).$$

Аналогічно

$$\mathrm{P}(A_iA_jA_h) = \frac{(n-3)!}{n!},\ \ldots,\ \mathrm{P}(A_1A_2 \ldots A_n) = \frac{1}{n!}.$$

Подія «принаймні один елемент залишиться на своєму місці» — це є подія $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Тому за теоремою додавання для довільних подій

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{P}(A_iA_j) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathrm{P}(A_iA_jA_h) - \cdots + (-1)^{n-1}(A_1A_2 \ldots A_n) =$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

Цю суму можна записати так:

$$\mathrm{P}_n = 1 - \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

У дужках стоїть частинна сума для розвинення $e^{-1}$ в ряд, тому

$$\mathrm{P}_n \approx 1 - e^{-1} = 0{,}63212.$$

Це наближення є досить точним, що видно з таблиці значень $\mathrm{P}_n$, обчислених за точною формулою:

| $n$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}_n$ | 0,66667 | 0,62500 | 0,63333 | 0,63196 | 0,63214 |

Таким чином, при $n \geqslant 7$ ймовірності $\mathrm{P}_n$ практично не залежать від $n$.

4. Задача про поширення чуток. У місті живе $n+1$ чоловік. Один з них дізнався про деяку новину і передав її $k$ іншим випадково вибраним особам. Одна з цих осіб знов передає її $k$ особам, і так повторюється $r$ разів. Знайти ймовірність того, що:



а) новина не дійде знов до того, хто першим про неї дізнався; б) ніхто не почує цю новину більше одного разу.

Перенумеруємо всіх жителів міста. Тоді кожна елементарна подія — це скінченна послідовність номерів людей (крім першого) в тому порядку, в якому вони дізналися про новину. Цю послідовність можна записати так: $\omega = (x_1^1, \ldots, x_k^1, x_1^2, \ldots, x_k^2, \ldots, x_1^r, \ldots, x_k^r) = (x^1, x^2, \ldots, x^r)$, де $x^i = (x_1^i, \ldots, x_k^i)$ — це група номерів людей, які почули новину на $i$-му кроці. Число способів вибору групи $x^i$ дорівнює $m = A_n^k$; оскільки на різних кроках групи $x^i$ можуть бути й однаковими, то число всіх елементарних подій дорівнює:

$$N = \bar{A}_m^r = m^r = (A_n^k)^r.$$

Розглянемо тепер окремо кожне із запитань задачі.

а) Якщо перший більше не почує новину, то вибір кожної з груп $x^2, x^3, \ldots, x^r$ проводиться лише серед $n-1$ чоловіка, тому за правилом добутку $N(A) = A_n^k (A_{n-1}^k)^{r-1}$ і шукана ймовірність дорівнює

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{A_n^k (A_{n-1}^k)^{r-1}}{(A_n^k)^r} = \left(\frac{A_{n-1}^k}{A_n^k}\right)^{r-1} =$$

$$\left(\frac{(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k)}{n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)}\right)^{r-1} = \left(\frac{n-k}{n}\right)^{r-1} = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{r-1}.$$

б) Якщо ніхто не почує новину більше одного разу, то на першому кроці вибір буде проводитися серед $n$ чоловік, на другому кроці — серед $n-k$ чоловік, на третьому — серед $n-2k$, ..., на $r$-му — серед $n-(r-1)k$, тому, за правилом добутку,

$$N(B) = A_n^k A_{n-k}^k A_{n-2k}^k \ldots A_{n-(r-1)k}^k =$$

$$= [n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)] \cdot [(n-k) \times$$

$$\times (n-k-1)\ \ldots\ (n-2k+1)]\ \ldots\ [(n-$$

$$-(r-1)k)\ \ldots\ (n-rk+1)] = A_n^{rk},$$

і, отже,

$$\mathrm{P}(B) = \frac{A_n^{rk}}{(A_n^k)^r}.$$

5. Задача про черевики. З $n$ пар черевиків випадково вибирається $2r$ черевиків $(2r < n)$. Знайти ймовірність того, що серед вибраних черевиків: а) відсутні комплектні пари; б) є одна комплектна пара; в) є $k$ комплектних пар $(k \leqslant r)$.

Елементарними подіями в цій задачі треба вважати всі можливі способи вибору $2r$ черевиків з $2n$ штук, тому число елементарних подій дорівнює $N = C_{2n}^{2r}$.

Розглянемо окремо кожне з питань задачі.

а) Будь-який вибір $2r$ некомплектних черевиків можна здійснити так: спочатку вибрати, наприклад, $2r$ правих черевиків (це можна зробити $C_n^{2r}$ способами), після цього замінити деякі з них на ліві (це можна зробити $2^{2r}$ способами, кожен з $2r$ черевиків можна або замінити лівим, або не замінити). Тому за правилом добутку $2r$ некомплектних черевиків можна вибрати $C_n^{2r}\cdot 2^{2r}$ способами і, отже,

$$\mathbf{P}(A)=\frac{C_n^{2r}\cdot 2^{2r}}{C_{2n}^{2r}}.$$

б) Одну пару черевиків можна вибрати $n$ способами, після чого залишиться $n-1$ пара черевиків і треба вибрати $2r-2$ некомплектних черевиків. Міркуючи так само, як і в п. а), дістанемо, що

$$\mathbf{P}(B)=\frac{nC_{n-1}^{2r-2}\cdot 2^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}.$$

в) Виберемо спочатку $k$ пар черевиків (це можна зробити $C_n^k$ способами). Тоді задача зведеться до вибору $2r-2k$ некомплектних черевиків з $n-k$ пар (це можна зробити $C_{n-k}^{2r-2k}\cdot 2^{2r-2k}$ способами), тому

$$\mathbf{P}(C)=\frac{C_n^kC_{n-k}^{2r-2k}\cdot 2^{2r-2k}}{C_{2n}^{2r}}.$$

**6.** Задача про готелі. У місті є $k$ готелів, у кожному з яких є $n$ вільних місць. До міста одночасно приїхали $nk$ чоловік, кожен з яких вибирає готель навмання і незалежно від інших. Знайти ймовірність того, що: а) кожен з приїжджих зможе зупинитись у вибраному готелі (подія $A$); б) принаймні двом з приїжджих буде відмовлено у вибраних ними готелях (подія $B$).

Кожна з елементарних подій у цьому експерименті (виборі готеля кожним з приїжджих) це спосіб розбиття $nk$ чоловік на $k$ груп. Число таких способів дорівнює (див. § 4, зауваження)

$$N=\overline{A}_k^{nk}=k^{nk}.$$

Розглянемо тепер окремо кожне з питань задачі.

а) Якщо кожен з приїжджих зупинився у вибраному готелі, то у кожний готель потрапило по $n$ чоловік. Число таких розподілів це число способів розбиття $nk$ чоловік на $k$ груп по $n$ чоловік. Це число дорівнює (див. § 5, зауваження)

$$N(A)=P_{nk}(n,n,\ldots,n)=\frac{(nk)!}{(n!)^k}.$$

Отже, шуканою ймовірністю є

$$\mathbf{P}(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{(nk)!}{k^{nk}(n!)^k}.$$

б) Розглянемо подію $\overline{B}$, протилежну до $B$; ця подія полягає в тому, що відмовлено у вибраних готелях менше ніж двом приїжджим (тобто жодному або одному). Іншими словами, $\overline{B}=A\cup A_1$, де $A_1$ — подія «одному з приїжджих відмовлено у вибраному ним готелі». Оскільки події $A$ і $A_1$ несумісні, то

$$\mathbf{P}(\overline{B})=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(A_1).$$

Залишається обчислити ймовірність $A_1$.



Настання події $A_1$ означає, що до одного з готелів надійдуть замовлення від $n+1$ чоловік, а до решти готелів — не більше, ніж по $n$ замовлень (тобто до одного з них надійде $n-1$ замовлення, а до всіх інших — по $n$).

Два готелі, до яких надійдуть відповідно $n+1$ і $n-1$ замовлення, можна вибрати $A_k^2$ способами. Коли ці готелі вже вибрано, то залишається розподілити $nk$ приїжджих на $k$ груп чисельністю $n+1$, $n-1$, $n$, .., $n$ чоловік. Число способів, якими це можна зробити, дорівнює (див. § 5, зауваження) $P_{nk}(n+1,n-1,n,\ldots,n)$, тому за правилом добутку

$$N(A_1)=A_k^2P_{nk}(n+1,n-1,n,\ldots,n)=$$
$$=\frac{k(k-1)(nk)!}{(n+1)!(n-1)!(n!)^{k-2}}.$$

Звідси дістаємо

$$\mathbf{P}(A_1)=\frac{N(A_1)}{N}=\frac{k(k-1)(nk)!}{k^{nk}(n+1)!(n-1)!(n!)^{k-2}}.$$

Отже,

$$\mathbf{P}(B)=1-\mathbf{P}(\overline{B})=1-\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(A_1)=$$
$$=1-\frac{(nk)!}{k^{nk}(n!)^k}-\frac{k(k-1)(nk)!}{k^{nk}(n+1)!(n-1)!(n!)^{k-2}}.$$

**7.** Розподіл частинок у комірках. Кожна з $k$ частинок може з однаковою ймовірністю потрапити у будь-яку з $n$ комірок ($n>k$). Знайти ймовірність того, що: а) у *певні* $k$ комірок потрапить по одній частинці (подія $A$); б) у *деякі* $k$ комірок потрапить по одній частинці (подія $B$).

Ця задача відіграє важливу роль у статистичній фізиці. Ми дістанемо три різні її розв'язки залежно від того, які елементарні події вважатимуться рівноможливими. Ці три розв'язки відповідають трьом фізичним статистикам.

1) Статистика Максвелла — Больцмана. Цій статистиці підпорядкований розподіл молекул газу. Рівноможливими вважаються будь-які розподіли частинок у комірках, які відрізняються або числом частинок, або самими частинками хоч би у одній комірці. Іншими словами, у цій статистиці частинки вважаються *різними*, кожна має свою індивідуальність.

Число елементарних подій — це число способів, якими можна $k$ різних частинок розмістити в $n$ комірках, тому (див. § 4, зауваження)

$$N=\overline{A}_n^k=n^k.$$

Оскільки всі частинки вважаються різними, то $k$ частинок у $k$ *фіксованих* комірках можна розмістити $k!$ способами, тому $N(A)=k!$ і

$$\mathbf{P}(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{k!}{n^k}.$$

Якщо ж треба розмістити $k$ частинок у *деяких* $k$ комірках, то спочатку треба вибрати ці комірки, що можна зробити $C_n^k$ способами,

2566

тому за правилом добутку $N(B) = C_n^k\, k! = A_n^k$, отже,

$$\mathbf{P}(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{A_n^k}{n^k}.$$

2) Статистика Бозе — Ейнштейна. Цій статистиці підпорядковано розподіл частинок, які називають *бозонами*; це, наприклад, фотони, π-мезони, деякі ядра. У статистиці Бозе — Ейнштейна всі частинки вважаються однаковими, тотожними. Тепер рівноможливими тут будуть такі розподіли частинок у комірках, які відрізняються числом частинок хоча б у одній комірці. Тому (див. § 6, зауваження 1) число всіх рівноможливих результатів випробування дорівнює

$$N = \overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Оскільки частинки однакові, то $k$ частинок у $k$ заданих комірках можна розмістити єдиним способом, тобто $N(A) = 1$. Якщо ж комірки не задано, то їх можна вибрати $C_n^k$ способами, тобто $N(B) = C_n^k$. Отже, у цьому випадку

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{C_{n+k-1}^k}; \quad \mathbf{P}(B) = \frac{C_n^k}{C_{n+k-1}^k}.$$

3) Статистика Фермі — Дірака. Цій статистиці підпорядковано розподіл частинок, які називають *ферміонами*; це, наприклад, електрони, протони, нейтрони. Тут, як і у статистиці Бозе — Ейнштейна, всі частинки вважаються тотожними; але, крім того, діє так звана заборона Паулі: в одній комірці може бути не більше однієї частинки.

Тепер, щоб здійснити деякий розподіл частинок у комірках, досить вибрати $k$ комірок, в які потрапить по одній частинці. Тому $N = C_n^k$ і, отже,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{C_n^k}, \quad \mathbf{P}(B) = 1.$$

**Вправи**

**5.** У ліфт 9-поверхового будинку на першому поверсі зайшли 6 чоловік. Знайти ймовірність того, що всі вийдуть на різних поверхах, якщо кожний з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого.

**6.** З 10 лотерейних білетів два виграшних. Знайти імовірність того, що серед узятих будь-яких 5 білетів: а) один виграшний; б) принаймні один виграшний.

**7.** 9 пасажирів сідають у 3 вагони. Знайти імовірність того, що: а) у кожний вагон сяде по 3 пасажири; б) в один з вагонів сядуть 4, у другий — 3 і в третій — 2 пасажири.

**8.** У класі $k$ учнів. Знайти імовірність того, що принаймні два з них народилися в одному місяці.

**9.** Знайти імовірність того, що дні народження 12 чоловік припадають на різні місяці року.

**10.** У лотереї випущено $n$ білетів, з яких $m$ виграшних. Знайти імовірність виграшу для людини, що купила $k$ білетів.



**11.** Гральний кубик підкидають двічі. Знайти імовірність того, що: а) у сумі випаде 6 очок; б) у сумі випаде 7 очок; в) за два кидки випаде однакова кількість очок; г) за два кидки випаде різна кількість очок.

**12.** 10 чоловік сідають за круглий стіл. Знайти імовірність того, що певні дві особи випадково опиняться поруч.

**13.** У шаховому турнірі беруть участь 20 чоловік, які жеребкуванням розподіляються на дві групи по 10 чоловік. Знайти імовірність того, що: а) 2 найсильніших гравці будуть грати в різних групах; б) 4 найсильніших гравці потраплять по 2 в різні групи.

**14.** З урни, в якій лежать кулі з номерами 1, 2, ..., $n$, виймають $k$ разів по одній кулі і кожного разу повертають назад. Знайти імовірніть того, що номери витягнутих куль утворюють зростаючу послідовність.

**15.** Розв'язати попередню задачу за умови, що витягнуті кулі не повертаються в урну.

**6.** Підкидають три гральних кубики. Знайти імовірність того, що в сумі буде: а) 11 очок; б) 12 очок; в) 13 очок; г) більше 10 очок.

## § 12. Аксіоматичні основи теорії ймовірностей

Класичне означення ймовірності виявляється недостатнім для розв'язування багатьох задач на обчислення ймовірностей. Справа в тому, що навіть у випадку скінченного простору елементарних подій не завжди виконується умова рівноможливості (наприклад, при киданні кубика, зробленого з неоднорідного матеріалу). Крім того, далеко не завжди множина всіх можливих результатів експерименту є скінченною. Більше того, легко навести приклад такої задачі, для якої при одних числових даних існує скінченний простір елементарних подій, а при других — не існує. Нехай, наприклад, в крузі виділено сектор $A$ з центральним кутом $\alpha$. Треба знайти ймовірність того, що точка, кинута в круг, попаде в цей сектор. Можливі два випадки:

1) відношення $\frac{\alpha}{2\pi}$ — число раціональне $\left(\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{m}{n}\right)$; в цьому випадку круг можна розділити на $n$ рівних секторів $A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, що $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Якщо через $A_i$ позначити подію «точка попала в сектор $A_i$», то за простір елементарних подій можна взяти систему $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, подія $A$ містить $m$ з цих подій, тому $\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}$;

2) відношення $\frac{\alpha}{2\pi}$ — число ірраціональне, в цьому випадку, очевидно, неможливо розділити круг на скінченне число частин однакової площі так, щоб сектор $A$ склада-

ся з кількох з них (бо відношення площ сектора і круга дорівнює $\frac{\alpha}{2\pi}$ і є ірраціональним числом). Тому в цьому випадку класичне означення ймовірності застосувати не можна.

У світлі сучасних вимог щодо математичної строгості найдоцільніше будувати теорію ймовірностей на аксіоматичній основі. Найбільш поширеною в сучасній теорії ймовірностей є система аксіом, запропонована в 1929 р. А. М. К о л м о г о р о в и м.

Цю систему ми й розглянемо.

Основним поняттям аксіоматики Колмогорова є поняття простору елементарних подій. Простір елементарних подій $\Omega$ — це довільна множина. Нехай $S$ — деяка система підмножин множини $\Omega$.

О з н а ч е н н я 7. Система $S$ називається *алгеброю,* якщо: 1) $\Omega \in S$; 2) з того, що $A, B \in S$, випливає, що $A \cup B \in S$; 3) з того, що $A \in S$, випливає, що $\bar{A} \in S$.

Звідси, зокрема, випливає, що $\varnothing \in S$, бо $\varnothing = \bar{\Omega}$, і якщо $A, B \in S$, то й $AB \in S$, бо $AB = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$.

О з н а ч е н н я 8. Система $S$ називається *σ-алгеброю* (сігма-алгеброю) або *борелівським полем множин,* якщо виконуються такі умови: 1) $\Omega \in S$; 2) якщо $(A_n)$ — послідовність множин з $S$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$; 3) якщо $A \in S$, то й $\bar{A} \in S$.

Звідси, як і вище, дістаємо, що $\varnothing \in S$ і що σ-алгебра разом з множинами $A_1, A_2, \ldots$ містить також переріз їх $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, оскільки $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n}$.

**Приклади**

**1.** Нехай $\Omega$ — довільна множина, $A \subset \Omega$. Тоді система $S = \{\varnothing, A, \bar{A}, \Omega\}$ є алгеброю.

**2.** Нехай $\Omega$ — довільна множина. Тоді система $S$ всіх підмножин $\Omega$ є алгеброю. Якщо множина $\Omega$ нескінченна, то $S$ є σ-алгеброю.

Якщо задано множину $\Omega$ і σ-алгебру $S$ підмножин $\Omega$, то кажуть, що задано вимірний простір $\langle \Omega, S \rangle$. При цьому елементи σ-алгебри $S$ називаються подіями, а всі інші підмножини $\Omega$, що не належать $S$, не є подіями. Той чи інший вибір σ-алгебри $S$ залежить як від природи $\Omega$, так і від задачі, що вивчається. Зокрема, сукупність усіх підмножин $\Omega$ є, очевидно, σ-алгеброю. Але не завжди можна



ввести поняття ймовірності так, щоб імовірність була визначена для будь-якої підмножини $\Omega$.

***Теорема 1.*** *Якщо $M$ — довільна система підмножин $\Omega$, то існує єдина σ-алгебра $S_0$, така, що $M \subset S_0$ і $S_0 \subset S$, яка б не була σ-алгебра $S$, що містить $M$.*

Цю мінімальну σ-алгебру $S_0$, що містить $M$, називають *σ-алгеброю, породженою системою $M$.*

Д о в е д е н н я. Очевидно, σ-алгебри $S$, що містять систему підмножин $M$, існують: прикладом такої σ-алгебри є система всіх підмножин $\Omega$. Розглянемо переріз всіх таких σ-алгебр: $S_0 = \bigcap_{S \supset M} S$; зрозуміло, що $M \subset S_0$ і що $S_0 \subset S$ для будь-якої σ-алгебри $S$, що містить $M$. Покажемо, що $S_0$ є σ-алгеброю.

1) $\Omega \in S_0$, оскільки $\Omega$ входить до кожної з $S$;

2) Нехай $A_1, A_2, \ldots \in S_0$, тоді кожна з цих множин належить всім $S$, тому й $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ належить всім $S$, і, отже, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap S = S_0$;

3) Нехай $A \in S_0$, тоді $A$ належить кожній з $S$, отже, і $\bar{A}$ належить кожній з $S$, тому $\bar{A} \in \bigcap S = S_0$.

П р и к л а д. Нехай експеримент полягає в тому, що на відрізок $[a; b]$ випадковим способом кидається точка.

Можливі результати цього випробування — це точки відрізка $[a; b]$, тому вважатимемо, що $\Omega = [a; b]$. Позначимо через $M$ систему всіх інтервалів $(c, d)$, де $a \leqslant c < d \leqslant b$. Попадання точки в будь-який з таких інтервалів природно вважати подією. Отже, за σ-алгебру подій в цьому прикладі доцільно взяти σ-алгебру $S_0$, породжену системою всіх інтервалів, або яку-небудь ширшу σ-алгебру $S \supset S_0$.

О з н а ч е н н я 9. σ-алгебра, породжена системою всіх інтервалів, називається *σ-алгеброю борелівських підмножин відрізка* $[a; b]$.

Наведемо приклади борелівських множин:

1) Кожна окрема точка є борелівською множиною. Справді, якщо $c \in [a; b]$, то $\{c\} = \bigcap_{n=k}^{\infty} \left(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right)$, де $k$ вибрано так, щоб $c - \frac{1}{k} \geqslant a$, $c + \frac{1}{k} \leqslant b$; оскільки інтервали є борелівськими множинами, то й $\{c\}$ — борелівська множина. 2) Будь-яка зчисленна множина,

наприклад множина раціональних чисел відрізка $[a; b]$, є борелівською. 3) Кожна відкрита множина є борелівською як об'єднання зчисленної кількості інтервалів. 4) Кожна замкнена множина є борелівською як доповнення до відкритої множини. 5) Об'єднання зчисленної множини замкнених множин (їх називають множинами типу $F_\sigma$) і перерізи зчисленної множини відкритих множин (множини типу $G_\delta$) є борелівськими. 6) Можна довести, що будь-яка борелівська множина є вимірною за Лебегом.

Таким чином, борелівські множини — це достатньо широкий клас множин. В усякому разі їх запас цілком достатній для потреб теорії ймовірностей.

Аналогічно вводиться поняття борелівських множин на площині і, взагалі, в $n$-вимірному просторі. У випадку площини роль інтервалів відіграють відкриті прямокутники $\{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$.

Означення 10. Нехай $\Omega$ — область у площині; $\sigma$-алгеброю борелівських підмножин $\Omega$ називається $\sigma$-алгебра, породжена системою всіх відкритих прямокутників, що містяться в $\Omega$.

Зокрема, до числа борелівських множин на площині належать усі відкриті й замкнені множини.

Введемо тепер поняття ймовірності події. Нехай задано вимірний простір $\langle \Omega, S \rangle$, тобто простір елементарних подій $\Omega$ і $\sigma$-алгебру $S$ підмножин $\Omega$, тобто подій. Подію $\Omega$ називають вірогідною, $\varnothing$ — неможливою, $\bar{A}$ — протилежною для $A$.

Означення 11. Імовірністю називається числова функція $\mathbf{P}(A)$, яка визначена на $\sigma$-алгебрі $S$ вимірного простору $\langle \Omega, S \rangle$ і має такі властивості:

*Аксіома* 1. $\mathbf{P}(A) \geqslant 0$ для всіх $A \in S$.

*Аксіома* 2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

*Аксіома* 3. Якщо події $A_1, A_2, \ldots$ попарно несумісні, тобто $A_iA_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, то

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Вимірний простір, в якому визначено ймовірність, називається *ймовірнісним простором* і позначається $\langle \Omega, S, \mathbf{P} \rangle$.

Зазначимо, що у випадку класичного означення ймовірності твердження, що містяться в аксіомах 1 і 2, були доведені на основі цього означення. Щодо аксіоми 3 (її називають аксіомою зчисленної адитивності), то у випадку класичного означення ймовірності відповідну властивість було доведено для скінченного числа подій (скінченна адитивність); але там і не було потреби доводити зчисленну адитивність, бо всіх можливих подій було скінченне число, а саме $2^N$. У сучасних схемах теорії ймовірностей майже завжди виникає необхідність у використанні саме властивості зчисленної адитивності.



**Зауваження.** Читач, знайомий з теорією міри, помітить, що ймовірність — це є зчисленно адитивна міра, яка визначена на $\sigma$-алгебрі підмножин простору $\Omega$ і задовольняє додаткову умову $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. Тому ймовірність часто називають також імовірнісною мірою.

**Приклади**

1. Нехай $\Omega = [a; b]$, $S_0$ є $\sigma$-алгеброю всіх борелівських множин на $[a; b]$ (див. приклад на с. 37 і означення 9). Визначимо ймовірність на $S_0$.

Природно вважати, що ймовірність потрапляння точки в деякий інтервал $(c; d) \subset [a, b]$ залежить тільки від довжини цього інтервалу і пропорційна їй. Тому доцільно визначити ймовірність $\mathbf{P}(A)$ так, щоб для $A = (c; d)$ було $\mathbf{P}(A) = \lambda(d - c)$, де $\lambda = \text{const}$; ця умова виконується, якщо для будь-якої $A \in S_0$ взяти $\mathbf{P}(A) = \lambda\mu(A)$, де $\mu(A)$ — міра Лебега множини $A$ (ця міра існує, бо будь-яка борелівська множина вимірна за Лебегом). З умови $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ знаходимо $\lambda = \dfrac{1}{\mu(\Omega)} = \dfrac{1}{b - a}$, отже, $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\mu(A)}{b - a}$. Виконання аксіом 1 і 2 очевидне. Аксіома 3 має місце завдяки відомій властивості зчисленної адитивності міри Лебега.

2. Нехай $\Omega$ — скінченна або зчисленна множина, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$; такий простір елементарних подій називають *дискретним*. Подією назвемо будь-яку підмножину $\Omega$. Задамо на $\Omega$ числову функцію $\mathbf{P}(\omega) \geqslant 0$, таку, що $\sum_i \mathbf{P}(\omega_i) = 1$. Для довільної $A \subset \Omega$ покладемо

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\omega). \tag{9}$$

Неважко перевірити, що при такому означенні ймовірності виконуються аксіоми 1—3.

Нехай, зокрема, множина $\Omega$ — скінченна, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$. Якщо всі елементарні події рівноможливі, то з умови $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(\omega_i) = 1$ випливає $\mathbf{P}(\omega_i) = \dfrac{1}{N}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, і формула (9) зводиться до такої:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N},$$

тобто дістаємо класичне означення ймовірності.

Несуперечливість системи аксіом А. М. Колмогорова випливає з наявності її реалізацій, які ми щойно розглянули. Ця система аксіом є некатегоричною: навіть на заданому вимірному просторі можна по-різному задати ймовірність. Наприклад, при киданні грального кубика вважають, що всі результати рівноможливі, і тому $\mathbf{P}(\omega_i) = \frac{1}{6}$ $(i = 1, \ldots, 6)$. Але кубик може бути неоднорідним, в зв'язку з чим імовірності випадання різних граней неоднакові, і тому вважатимемо, наприклад, $\mathbf{P}(\omega_1) = \mathbf{P}(\omega_2) = \mathbf{P}(\omega_3) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(\omega_4) = \mathbf{P}(\omega_5) = \mathbf{P}(\omega_6) = \frac{1}{12}$. Таким чином, некатегоричність системи аксіом теорії ймовірностей не є недоліком цієї системи, а обумовлена необхідністю охопити всі можливі ситуації.

Розглянемо деякі властивості ймовірності, які випливають з аксіом 1—3.

1) *Імовірність події $\bar{A}$, протилежної $A$, дорівнює*

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

Оскільки $A \cup \bar{A} = \Omega$, $A\bar{A} = \varnothing$, то за аксіомами 2 і 3 маємо:

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}).$$

2) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

Справді,

$$\mathbf{P}(\varnothing) = \mathbf{P}(\bar{\Omega}) = 1 - \mathbf{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

3) *Якщо $A \subset B$, то* $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.

З очевидної рівності $B = A \cup \bar{A}B$ маємо за аксіомами 3 та 1:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cup \bar{A}B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}B) \geqslant \mathbf{P}(A).$$

Наслідок. Для будь-якої події $A \in S$ завжди $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$, оскільки $A \subset \Omega$.

4) ***Теорема додавання.*** *Якщо $A, B$ — довільні події, то*

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB). \qquad (10)$$

Справді, маємо такі очевидні рівності:

$$A \cup B = A \cup \bar{A}B, \quad B = AB \cup \bar{A}B,$$

причому доданки в правих частинах несумісні. Тому за аксіомою 3

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}B), \quad \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(\bar{A}B).$$



Віднімемо ці рівності:

$$\mathbf{P}(A \cup B) - \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB),$$

звідки випливає рівність (10).

Наслідок. Для довільних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ має місце нерівність

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i). \qquad (11)$$

Для $n = 2$ ця нерівність безпосередньо випливає із співвідношення (10), для довільного $n$ вона легко доводиться методом математичної індукції.

5) ***Теорема додавання для довільного числа подій.*** *Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — довільні події, то*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{P}(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathbf{P}(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathbf{P}(A_1A_2 \ldots A_n). \qquad (12)$$

У § 10 цю формулу було доведено для випадку класичного означення ймовірності. Очевидно, це доведення не можна поширити на загальний випадок. Тому використаємо метод математичної індукції.

При $n = 2$ формула (12) переходить в уже доведену формулу (10). Нехай формула (12) має місце для $n = m \geqslant 2$. Доведемо її для $n = m + 1$. Згідно з формулою (10) і припущенням індукції маємо:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \cup A_{m+1}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) + \mathbf{P}(A_{m+1}) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_iA_{m+1}\right) = \Bigg\{\sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \mathbf{P}(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant m} \mathbf{P}(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{m-1}\mathbf{P}(A_1A_2 \ldots A_m)\Bigg\} + \mathbf{P}(A_{m+1}) - \Bigg\{\sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(A_iA_{m+1}) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \mathbf{P}(A_iA_jA_{m+1}) + \cdots + (-1)^{m-1}\mathbf{P}(A_1A_2 \ldots A_{m+1})\Bigg\} = \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m+1} \mathbf{P}(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant m+1} \mathbf{P}(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{m}\mathbf{P}(A_1A_2 \ldots A_{m+1}). \; \blacksquare$$

6) ***Теорема неперервності.*** *Нехай дано послідовність подій $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ таку, що $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ і $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$.* Тоді $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A)$.

Для доведення зазначимо, що для будь-якого $n$ виконується рівність

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\bar{A}_{k+1} \cup A,$$

причому всі доданки в цій сумі попарно несумісні. Тому за аксіомою 3 маємо:

$$\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_k\bar{A}_{k+1}) + \mathbf{P}(A),$$

звідки

$$\mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}(A) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_k\bar{A}_{k+1}). \qquad (13)$$

Зокрема, при $n = 1$ з цієї рівності дістаємо:

$$\mathbf{P}(A_1) - \mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k\bar{A}_{k+1}),$$

де ряд в правій частині збігається. Згідно з формулою (13) різниця $\mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}(A)$ є залишком цього ряду, тому

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}(A)) = 0. \quad \blacksquare$$

**Вправи**

**17.** Нехай $S$ — алгебра. Довести, що коли $A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$, то $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in S$ і $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in S$.

**18.** Нехай $\Omega$ — довільна нескінченна множина; підмножина $A \subset \Omega$ входить в $S$, якщо $A$ або $\bar{A}$ — скінченна множина. Довести, що $S$ — алгебра, але не $\sigma$-алгебра.

**19.** Нехай $\Omega$ — довільна нескінченна множина; підмножина $A \subset \Omega$ входить в $S$, якщо хоча б одна з множин $A$, $\bar{A}$ не більше, ніж зчисленна. Довести, що $S$ є $\sigma$-алгеброю.

**20.** Показати, що об'єднання двох $\sigma$-алгебр може не бути $\sigma$-алгеброю.

**21.** Довести, що $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, користуючись лише аксіомами 1 і 3.

**22.** Довести, що коли $AB = \varnothing$, то $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ (адитивність імовірності).

**23.** Довести, що аксіому 3 можна замінити твердженням теореми неперервності. Іншими словами, довести зчисленну адитивність імовірності, користуючись аксіомами 1, 2 і теоремою неперервності.

**24.** Перевірити, що система аксіом Колмогорова є незалежною.



**25.** Довести, що для будь-яких подій $A$ і $B$

$$\mathbf{P}(AB) \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(A \cup B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B),$$

$$\max\{\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B)\} \leqslant \mathbf{P}(A \cup B) \leqslant 2\max\{\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B)\}.$$

З'ясувати, коли ці нерівності переходять у рівності.

## § 13. Геометричні ймовірності

«Задачами на геометричну ймовірність» за традицією називають задачі, в яких $\Omega$ — деяка область $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}^n$, $\sigma$-алгебра $S$ — множина всіх борелівських підмножин $\Omega$, і ймовірність будь-якої множини $A \in S$ пропорційна мірі Лебега цієї множини $\mu(A)$:

$$\mathbf{P}(A) = c\mu(A) \; (c = \text{const}).$$

З умови $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ знаходимо $c = \frac{1}{\mu(\Omega)}$, отже,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \qquad (14)$$

Зрозуміло, що для цього означення виконуються аксіоми 1—3 означення 11.

В усіх задачах, які виникають на практиці, під $\mu(A)$ можна розуміти звичайну довжину ($n = 1$), площу ($n = 2$), об'єм ($n = 3$). Задачам на геометричну ймовірність можна дати таке тлумачення.

В області $\Omega$ випадковим способом вибирається точка; яка ймовірність, що ця точка належить $A$?

**Зауваження.** У випадку класичного означення ймовірності не тільки ймовірність неможливої події дорівнює нулю, а й з того, що $\mathbf{P}(A) = 0$, випливає $A = \varnothing$.

Для геометричного означення (а також в багатьох інших випадках, які буде розглянуто нижче) ця обставина не має місця. Справді, нехай, наприклад, $\Omega$ — плоска область, $A$ — точка, лінія нульової площі або довільна множина міри нуль. Тоді за формулою (14) маємо $\mathbf{P}(A) = 0$, хоча подія $A$ не є неможливою — точка може потрапити в $A$.

Розглянемо кілька задач на геометричні ймовірності.

**Приклади**

**1.** Задача про зустріч. Дві особи $A$ і $B$ домовились зустрітися в певному місці, причому кожен з них приходить туди незалежно від другого у випадковий момент між 12 і 13 год. Той, хто приходить першим, чекає 20 хв. і, якщо другий за цей час не прийде, перший залишає місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Позначимо моменти приходу $A$ і $B$ відповідно через $x$ і $y$. Тоді за простір елементарних подій природно взяти квадрат $\Omega$ у площині $xOy$

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Згідно з умовою $A$ і $B$ зустрінуться тоді і тільки тоді, коли $|y - x| \leqslant \frac{1}{3}$ (різниця між моментами приходу не перевищує 20 хв); це означає, що зустрічі (подія $C$) відповідають точки квадрата, для яких виконується зазначена нерівність:

$$C = \left\{(x, y) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ |y - x| \leqslant \frac{1}{3}\right\}.$$

Нерівність $|y - x| \leqslant \frac{1}{3}$ еквівалентна нерівності $x - \frac{1}{3} \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{3}$ (їй відповідає область, заштрихована на рис. 5). Отже, шукана ймовірність, згідно з формулою (14), дорівнює:

$$\mathrm{P}(C) = \frac{\text{пл. } C}{\text{пл. } \Omega} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2}{1} = \frac{5}{9}.$$

2. **Задача Бюфона**. На горизонтальній площині проведено паралельні прямі, що розташовані одна від одної на відстані $2a$. На площину навмання кидається тонка голка завдовжки $2l$ ($l \leqslant a$). Знайти ймовірність того, що голка перетне яку-небудь пряму.

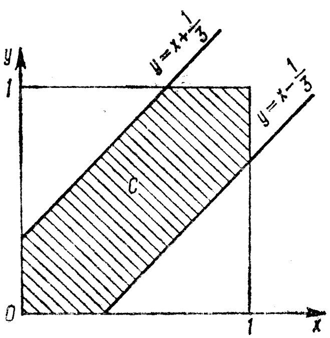


Рис. 5

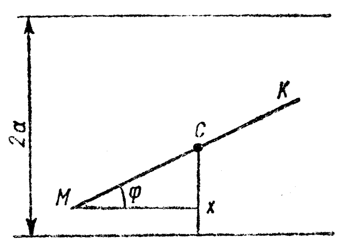


Рис. 6

Для характеристики положення голки на площині можна ввести такі два числа (рис. 6): $x$ — відстань від середини $C$ голки $MK$ до найближчої з прямих ($0 \leqslant x \leqslant a$), $\varphi$ — кут між напрямом голки і прямими ($0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$). Якщо $\varphi$ і $x$ розглядати як прямокутні координати на площині, то простором елементарних подій буде прямокутник (рис. 7)

$$\Omega = \{(\varphi, x) \in R^2 : 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant x \leqslant a\}.$$

Щоб голка перетинала одну з прямих, необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність $x \leqslant MC \sin \varphi$, або $x \leqslant l \sin \varphi$ (рис. 6).

Ця нерівність виділяє з прямокутника $\Omega$ область $A$, що лежить під синусоїдою. Шукана ймовірність — це ймовірність попадання до



$A$ точки, навмання кинутої в $\Omega$:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{пл. } A}{\text{пл. } \Omega} = \frac{\int\limits_0^\pi l \sin \varphi d\varphi}{\pi a} = \frac{2l}{\pi a}.$$

Розглянута задача цікава тим, що дає змогу обчислити число $\pi$ експериментально. Справді, якщо кинути голку $n$ разів і з них вона $m$ разів перетне одну з прямих, то $\mathrm{P}(A) \approx \frac{m}{n}$ при великому $n$. Тоді з наближеної рівності $\frac{m}{n} \approx \frac{2l}{\pi a}$ маємо:

$$\pi \approx \frac{2ln}{ma}.$$

Ця формула використовувалась для наближеного обчислення числа $\pi$ багатьма експериментаторами. Один з них, наприклад, при 5000 киданнях голки дістав $\pi \approx 3{,}159$.

3. Відрізок завдовжки $l$ розділили на три частини, вибираючи дві точки поділу навмання. Знайти ймовірність того, що з утворених трьох відрізків можна скласти трикутник.

Позначимо довжини частин відрізка через $x, y, l - x - y$. Усі

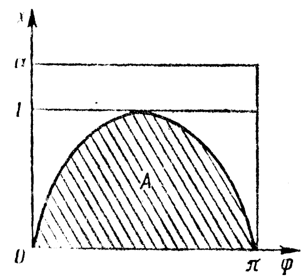


Рис. 7

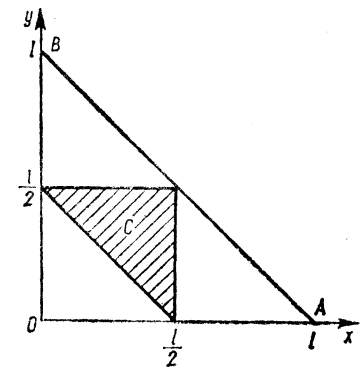


Рис. 8

можливі способи поділу відрізка на три частини характеризуються числами $x, y$, для яких $0 < x + y < l$, $x > 0$, $y > 0$. Якщо $x, y$ розглядати як прямокутні декартові координати на площині, то простір елементарних подій $\Omega$ буде трикутником $OAB$ (рис. 8). Для того щоб з відрізків $x, y, l - x - y$ можна було скласти трикутник, необхідно і достатньо, щоб кожен з цих відрізків був меншим від суми двох інших, тобто $x < y + (l - x - y)$, $y < x + (l - x - y)$, $l - x - y < x + y$. Звідси $x < \frac{l}{2}$, $y < \frac{l}{2}$, $x + y > \frac{l}{2}$; остання система нерівностей виділяє трикутник $C$, заштрихований на рис. 8. Тому

$$\mathrm{P}(C) = \frac{\text{пл. } C}{\text{пл. } \Omega} = \frac{1}{4}.$$

**Вправи**

26. Знайти ймовірність того, що точка, кинута у будь-яке місце всередині кола, потрапить у вписані в це коло: а) правильний трикутник; б) квадрат.

27. На відрізку завдовжки $l$ взято будь-які дві точки. Знайти імовірність того, що відстань між ними не перевищує $kl$, де $0 < k < l$.

28. На колі взято будь-які три точки $A$, $B$, $C$. Знайти імовірність того, що трикутник $ABC$ гострокутний.

29. На паркетну підлогу кидають монету діаметром $d$. Паркет складений з квадратів із стороною $a$ ($d < a$). Знайти імовірність того, що монета не перетне жодної з сторін квадратів паркету.

30. На площині накреслено паралельні прямі на відстані $2a$ одна від одної. На площину кидають монету радіуса $r$ ($r < a$). Знайти імовірність того, що монета не перетне жодної з прямих.

31. У коло радіуса $R$ кидають точку. Знайти імовірність того, що відстань від цієї точки до центра кола не перевищує $r$.

32. Стрижень завдовжки $l$ розламали на дві частини. Знайти імовірність того, що довжина меншої частини не перевищуватиме $\frac{l}{3}$.

## § 14. Умовні ймовірності та незалежні події

Розглянемо спочатку приклад. Нехай двічі кидається гральний кубик. Подія $A$ полягає в тому, що сума очок при цих двох киданнях дорівнює 5. Простір елементарних подій $\Omega$ складається в цьому експерименті з 36 елементів:

$$\Omega = \{(m, n) : m, n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\};$$

ці можливі результати випробування для зручності подано у вигляді таблиці (перше число — кількість очок, що випало при першому киданні, друге — при другому):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1; 1) | (1; 2) | (1; 3) | (1; 4) | (1; 5) | (1; 6) |
| (2; 1) | (2; 2) | (2; 3) | (2; 4) | (2; 5) | (2; 6) |
| (3; 1) | (3; 2) | (3; 3) | (3; 4) | (3; 5) | (3; 6) |
| (4; 1) | (4; 2) | (4; 3) | (4; 4) | (4; 5) | (4; 6) |
| (5; 1) | (5; 2) | (5; 3) | (5; 4) | (5; 5) | (5; 6) |
| (6; 1) | (6; 2) | (6; 3) | (6; 4) | (6; 5) | (6; 6) |

З таблиці випливає, що $A = \{(4,\ 1),\ (3,\ 2),\ (2,\ 3),\ (1, 4)\}$, тому $\mathbf{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Нехай нам відомо, що при першому киданні випала трійка (подія $B$). Тоді ймовірність події $A$ стане іншою: 5 очок в сумі тепер може випасти лише тоді, коли при другому киданні випаде двійка, тобто в одному випадку з шести. Отже, ймовірність події $A$ за умови, що настала подія $B$, дорівнює $\frac{1}{6}$. Цю ймовірність позначають $\mathbf{P}(A/B)$. Таким чином, $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{9}$, $\mathbf{P}(A/B) = \frac{1}{6}$.



Розглянемо загальний випадок класичного означення ймовірності. Для визначення ймовірності події $A$ за умови, що настала подія $B$, можливими результатами випробування треба вважати ті, при яких настає $B$; сприятливими для події $A$ результатами (за умови, що настала $B$) будуть ті результати випробування, при яких настають обидві події $A$ і $B$. Тому

$$\mathbf{P}(A/B) = \frac{N(AB)}{N(B)} = \frac{N(AB):N}{N(B):N} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Зрозуміло, що ці міркування мають смисл лише тоді, коли $\mathbf{P}(B) \neq 0$. У загальному випадку аксіоматичного означення ймовірності введена формула є основою означення умовної ймовірності.

Означення 12. Нехай $\mathbf{P}(B) \neq 0$. Умовною ймовірністю події $A$ за умови, що настала подія $B$, називається число

$$\mathbf{P}(A/B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}. \qquad (15)$$

Неважко помітити, що для умовних імовірностей виконуються всі аксіоми означення 11. При цьому роль простору елементарних подій відіграє $B$, а замість $\sigma$-алгебри $S$ береться $SB = \{AB : A \in S\}$. Перевіримо, наприклад, аксіому 2; якщо в формулі (15) покласти $A = B$, то дістанемо:

$$\mathbf{P}(B/B) = \frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = 1.$$

З формули (15) безпосередньо випливає так звана теорема множення (для двох подій):

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A/B)\,\mathbf{P}(B). \qquad (16)$$

Помінявши місцями $A$ і $B$, дістанемо другий запис теореми множення:

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B/A). \qquad (16')$$

Означення 13. Події $A$ і $B$ називаються незалежними, якщо

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B). \qquad (17)$$

Порівнюючи означення незалежності з формулами (16) і (16′), дістаємо, що коли $A$ і $B$ незалежні, то

$$\mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}(A)\ \ (\mathbf{P}(B) \neq 0),\ \ \mathbf{P}(B/A) = \mathbf{P}(B)\ \ (\mathbf{P}(A) \neq 0), \qquad (18)$$

тобто настання однієї з двох незалежних подій не впливає на ймовірність іншої. Навпаки, зрозуміло, що з кожної з рівностей (18) випливає формула (17), тобто кожна з рівностей (18) гарантує незалежність подій.

***Теорема.*** *Якщо події $A$ і $B$ незалежні, то незалежні також $A$ і $\bar{B}$.*

Справді,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB \cup A\bar{B}) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\bar{B}),$$

звідки

$$\mathbf{P}(A\bar{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) =$$

$$= \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\bar{B}). \blacksquare$$

Наслідок. Якщо події $A$ і $B$ незалежні, то незалежні події $\bar{A}$, $B$, а також події $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Перейдемо до випадку кількох подій.

***Теорема множення.*** *Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — довільні події, то*

$$\mathbf{P}(A_1A_2 \ldots A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2/A_1)\mathbf{P}(A_3/A_1A_2) \ldots$$
$$\ldots \mathbf{P}(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \quad (19)$$

Доведення проведемо методом математичної індукції. При $n = 2$ формула (19) переходить в уже доведену формулу (16′). Припустивши, що формула (19) має місце для $(n - 1)$-го множника, дістанемо:

$$\mathbf{P}(A_1A_2 \ldots A_n) = \mathbf{P}((A_1A_2 \ldots A_{n-1})A_n) =$$
$$= \mathbf{P}(A_1A_2 \ldots A_{n-1})\mathbf{P}(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}) =$$
$$= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2/A_1) \ldots \mathbf{P}(A_{n-1}/A_1A_2 \ldots A_{n-2}) \times$$
$$\times \mathbf{P}(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \blacksquare$$

**Приклад.** Студент прийшов на екзамен, підготувавши лише 20 з 25 питань програми; екзаменатор задав йому три питання. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на всі ці питання.

Позначимо через $A_i$ ($i = 1, 2, 3$) подію «студент знає відповідь на $i$-те питання, що задав йому екзаменатор», через $A$ — подію «студент знає відповіді на всі три питання». Тоді $A = A_1A_2A_3$ і за формулою (19) маємо:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2/A_1)\mathbf{P}(A_3/A_1A_2) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} =$$

$$= \frac{57}{115} \approx 0{,}496.$$

Окремі ймовірності тут обчислюються безпосередньо за класичним означенням. Пояснимо, наприклад, обчислення $\mathbf{P}(A_2/A_1)$. Якщо настала подія $A_1$, тобто перше питання виявилось «щасливим», то всього залишилося 24 питання, з яких 19 «щасливих»; тому $\mathbf{P}(A_2/A_1) = \frac{19}{24}$.



Означення 14. Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються незалежними в сукупності, якщо при будь-яких $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n$ $(2 \leqslant r \leqslant n)$

$$\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2} \ldots A_{i_r}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_r}). \quad (20)$$

Зокрема, для подій, незалежних у сукупності, має місце теорема множення в спрощеній формі:

$$\mathbf{P}(A_1A_2 \ldots A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2) \ldots \mathbf{P}(A_n). \quad (21)$$

Якщо умова (20) виконується лише при $r = 2$, то події називаються попарно незалежними. Виявляється, що попарно незалежні події можуть не бути незалежними в сукупності. Про це свідчить такий приклад.

**Приклад** *(С. Н. Бернштейна)*. Нехай на трьох гранях правильного тетраедра, зробленого з однорідного матеріалу, написано відповідно цифри 1, 2, 3, а на четвертій грані — всі три цифри 1, 2, 3. Позначимо через $A_i$ ($i = 1, 2, 3$) подію, яка полягає в тому, що тетраедр після кидання впаде на грань, на якій є цифра $i$. Тоді $\mathbf{P}(A_i) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ($i = 1, 2, 3$). Покажемо, що події $A_1, A_2, A_3$ попарно незалежні; $\mathbf{P}(A_1A_2) = \frac{1}{4}$ (подія $A_1A_2$ настає тоді і тільки тоді, коли тетраедр падає на четверту грань), отже, $\mathbf{P}(A_1A_2) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)$, тобто $A_1$ і $A_2$ незалежні. Аналогічно встановлюється незалежність подій $A_1$ і $A_3$ та подій $A_2$ і $A_3$. Але події $A_1, A_2, A_3$ не є незалежними в сукупності, бо

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \neq \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3) = \frac{1}{8}.$$

**Зауваження.** На практиці для перевірки незалежності подій рідко користуються рівностями (17), (18) або (20). У більшості випадків виходять з інтуїтивних міркувань, пов'язаних з характером випробувань, а саме, події вважають незалежними, якщо між ними немає причинного зв'язку. Переконавшись за допомогою таких міркувань у незалежності подій, можна використовувати формули (17) і (21) для обчислення ймовірностей добутків.

**Приклад.** Знайти ймовірність того, що при восьми киданнях монети принаймні один раз випаде герб.

Позначимо подію, ймовірність якої ми шукаємо, через $A$ і розглянемо протилежну подію $\bar{A}$; ця подія полягає в тому, що всі 8 разів випаде цифра. Нехай $A_i$ — випадання цифри при $i$-му киданні, тоді $\mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{2}$ ($i = 1, 2, \ldots, 8$). Зрозуміло, що події $A_i$ — незалежні у сукупності: настання або ненастання будь-яких з них ніяк не впливає на ймовірність настання наступних. Тому за теоремою множення для незалежних у сукупності подій

$$P(\bar{A}) = P(A_1A_2 \ldots A_8) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_8) = \left(\frac{1}{2}\right)^8,$$

отже,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{255}{256}.$$

**Вправи**

**33.** Події $A$ і $B$ несумісні, $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$. Довести, що ці події не є незалежними.

**34.** Два стрільці, для яких імовірності влучення в мішень дорівнюють відповідно 0,7 і 0,8, роблять по одному пострілу. Знайти імовірності того, що: а) обидва стрільці влучать у мішень; б) жодний із стрільців не влучить у мішень; в) хоча б один із стрільців влучить у мішень (обчислити двома способами); г) лише один із стрільців влучить у мішень.

**35.** У кожному з трьох ящиків лежить по 10 деталей; у першому ящику 2 деталі браковані, у другому — 3, у третьому — 1. З кожного ящика беруть по одній деталі. Знайти імовірність того, що: а) всі 3 деталі браковані; б) всі 3 деталі стандартні; в) серед трьох деталей є принаймні одна стандартна.

**36.** Імовірність виходу з ладу $k$-го блока обчислювальної машини за час $t$ дорівнює $P_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Знайти імовірність виходу з ладу в зазначений проміжок часу принаймні одного з блоків цієї машини, якщо всі блоки працюють незалежно.

**37.** Нехай відомо, що $P(A/B) > P(A)$. Довести, що тоді $P(B/A) > P(B)$.

**38.** Підкидають два гральних кубики. Знайти імовірність того, що випаде принаймні одна шестріка, якщо відомо, що сума очок дорівнює 8.

**39.** З урни, в якій лежать $m$ білих і $n$ чорних куль, беруть послідовно дві кулі. Знайти імовірність того, що друга куля біла, якщо перша куля: а) біла; б) чорна.

**40.** Події $A$ і $B$ несумісні і $P(B) \neq 0$. Знайти $P(A/B)$.

**41.** Імовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань подія $A$ настане принаймні один раз, дорівнює 0,59. Знайти імовірність настання події $A$ при одному випробуванні, якщо вона під час всіх випробувань однакова.

**42.** Імовірність влучення під час одного пострілу дорівнює 0,4. Скільки треба зробити пострілів, щоб імовірність принаймні одного влучення була не меншою ніж 0,9?

## § 15. Формула повної ймовірності та формули Байєса

*Нехай $A$ — довільна подія, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — попарно несумісні події такі, що* $P(H_i) > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ *і* $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_i$. *Тоді має місце формула повної ймовірності:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i). \qquad (22)$$



Доведення. З умови $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ випливає рівність

$$A = A \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \bigcup_{i=1}^{n} H_iA.$$

Оскільки події $H_iA$ попарно несумісні, то, використовуючи аксіому адитивності, а потім теорему множення, дістаємо:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} H_iA\right) = \sum_{i=1}^{n} P(H_iA) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i). \blacksquare$$

**Приклад.** На конвейєр надходять деталі з трьох цехів. Перший цех дає в середньому 0,2 % браку, другий — 0,3 %, третій — 0,5 %. Знайти ймовірність надходження на конвейєр бракованої деталі, якщо з першого цеху надійшло 3000, з другого — 6000, з третього — 1000 деталей.

Нехай подія $A$ полягає в тому, що навмання вибрана деталь, яка надійшла на конвейєр, є бракованою, $H_i$ $(i = 1, 2, 3)$ полягає в тому, що навмання вибрана деталь надійшла з $i$-го цеху. Очевидно, події $H_1$, $H_2$, $H_3$ попарно несумісні, $H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \Omega$, $P(H_1) = \frac{3000}{10\,000} = 0{,}3$, $P(H_2) = 0{,}6$, $P(H_3) = 0{,}1$. Далі, $P(A/H_1) = 0{,}002$, бо якщо відомо, що деталь надійшла з першого цеху, то ймовірність бути бракованою для неї 0,2 % = 0,002; аналогічно, $P(A/H_2) = 0{,}003$; $P(A/H_3) = 0{,}005$. Тому за формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}002 + 0{,}6 \cdot 0{,}003 + 0{,}1 \cdot 0{,}005 = 0{,}0029.$$

*Нехай події $A$, $H_1$, $H_2$, $\ldots$, $H_n$ — такі самі, як при виведенні формули повної ймовірності. Якщо додатково* $P(A > 0$, *то мають місце* формули Байєса:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (23)$$

Доведення. За теоремою множення для двох подій

$$P(H_kA) = P(H_k)P(A/H_k) = P(A)P(H_k/A),$$

звідки

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}.$$

Підставивши сюди значення $P(A)$ з формули повної ймовірності (22), дістанемо формулу (23). $\blacksquare$

Формулам Байєса можна дати таке тлумачення: нехай подія $A$ може відбуватися в різних умовах, щодо характеру яких можна висловити $n$ припущень (гіпотез) $H_1$, $H_2$, ..., $H_n$. Імовірності цих гіпотез $\mathbf{P}(H_k)$ нам відомі; ці ймовірності часто називають апріорними (від латинського a priori — до випробування). Відомі також умовні ймовірності $\mathbf{P}(A/H_k)$ події $A$ при різних гіпотезах. Здійснюється експеримент, в результаті якого може настати або не настати подія $A$. Якщо при цьому подія $A$ настала, то ми можемо переоцінити ймовірність кожної з гіпотез, знайшовши за формулами Байєса нові значення ймовірностей гіпотез $\mathbf{P}(H_k/A)$. Ці нові ймовірності називають апостеріорними ймовірностями гіпотез (від латинського a posteriori — після випробування).

**Приклади**

**1.** До магазину надходять вироби з двох заводів, причому з першого заводу надходить у 3 рази більше виробів, ніж з другого. Перший завод випускає в середньому 0,5 % бракованої продукції, другий — 0,2 %. Куплений у магазині виріб виявляється бракованим (подія $A$). Яка ймовірність того, що він був випущений першим заводом (подія $H_1$)?

За формулою Байєса

$$\mathbf{P}(H_1/A) = \frac{\mathbf{P}(H_1)\,\mathbf{P}(A/H_1)}{\mathbf{P}(H_1)\,\mathbf{P}(A/H_1) + \mathbf{P}(H_2)\,\mathbf{P}(A/H_2)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\cdot 0{,}005}{\frac{3}{4}\cdot 0{,}005 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}002} = \frac{15}{17}.$$

**2.** Спеціалізована лікарня приймає в середньому 50 % хворих, що мають захворювання $H_1$, 30 % — що мають захворювання $H_2$ і 20 % — $H_3$. Статистика свідчить, що ймовірність повного виліковування хвороби $H_1$ дорівнює 0,9, для хвороб $H_2$ і $H_3$ ці ймовірності дорівнюють відповідно 0,7 і 0,8. Яка ймовірність того, що хворий, виписаний з лікарні цілком здоровим (подія $A$), був хворий на хворобу $H_1$?

За формулою Байєса

$$\mathbf{P}(H_1/A) = \frac{\mathbf{P}(H_1)\,\mathbf{P}(A/H_1)}{\mathbf{P}(H_1)\,\mathbf{P}(A/H_1) + \mathbf{P}(H_2)\,\mathbf{P}(A/H_2) + \mathbf{P}(H_3)\,\mathbf{P}(A/H_3)} =$$

$$= \frac{0{,}5\cdot 0{,}9}{0{,}5\cdot 0{,}9 + 0{,}3\cdot 0{,}7 + 0{,}2\cdot 0{,}8} = \frac{45}{82} \approx 0{,}55.$$

**Вправи**

**43.** У трьох урнах лежать білі і чорні кулі. У першій урні — 3 білі і 1 чорна, у другій — 6 білих і 4 чорних, у третій — 9 білих і 1 чорна. З навмання взятої урни виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.

**44.** В урні $n$ куль. Усі можливі припущення про число білих куль в урні рівноможливі. Навмання з урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

**45.** В $N$ урнах містяться відповідно $n_1, \dots, n_N$ куль, з них білих — $m_1, \dots, m_N$. Навмання обирають урну, а з неї — кулю. Яка ймовірність того, що ця куля виявиться білою?

**46.** У двох урнах містяться відповідно $n_1$ і $n_2$ куль, з них білих куль $m_1$ і $m_2$. З першої урни переклали в другу урну одну кулю, колір якої невідомий. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

**47.** З урни, яка містить 3 білих та 2 чорних кулі, перекладено дві кулі до урни, яка містить 4 білих та 4 чорних кулі. Яка ймовірність взяття білої кулі з другої урни після такого перекладання?

**48.** Три спортсмени беруть участь у такому круговому змаганні: спочатку змагаються $A$ і $B$, потім переможець грає з $C$, новий переможець грає з переможеним у попередній грі і т. д. Змагання закінчується після двох перемог одного з спортсменів підряд.

а) Знайти ймовірність перемоги для кожного з спортсменів, якщо всі вони однаково майстерні.

б) Першу партію виграв $A$. Знайти після цього ймовірність перемоги для кожного з спортсменів.

**49.** Готуючись до екзамену з теорії ймовірностей, студент з $n$ екзаменаційних білетів вивчив лише $m$ ($m < n$). В якому випадку ймовірність витягти вивчений білет буде більшою: а) коли він тягне білет першим; б) коли він тягне другим?

**50.** Радіолокаційна станція веде спостереження за об'єктом, який може створювати перешкоди. Якщо об'єкт не створює перешкоди, то за один цикл огляду станція виявляє його з імовірністю $p_0$, якщо створює — з імовірністю $p_1$ ($p_1 < p_0$). Ймовірність того, що під час циклу огляду будуть створені перешкоди, дорівнює $p$ і не залежить від того, як і коли створювались перешкоди в інших циклах. Знайти ймовірність виявлення об'єкта принаймні один раз за $n$ циклів огляду.

**51.** Для певних виробів ймовірність їх відповідності стандарту, дорівнює 0,96. Пропонується спрощена система контролю виробів, яка дає позитивний результат (тобто визнає виріб стандартним) з імовірністю 0,98 для стандартних виробів і з імовірністю 0,05 для нестандартних виробів. Знайти ймовірність того, що виріб, який пройшов цей контроль, задовольняє стандарту.

**52.** В урні лежать три кулі, які можуть бути білими або чорними. Всі чотири припущення про початковий склад урни рівноможливі. Чотири рази витягнули з урни по одній кулі з поверненням, причому перша куля виявилася чорною, решта — білі. Знайти апостеріорні ймовірності різних складів урни.

**53.** Відомо, що 5 % чоловіків і 0,25 % всіх жінок — дальтоніки. Навмання обрана особа — дальтонік. Яка ймовірність того, що це чоловік? (Вважати, що чоловіків і жінок однакова кількість).

**54.** Знайти ймовірність того, що серед 1000 електричних ламп немає зіпсованих, якщо з навмання взятих 100 ламп усі виявились стандартними. При розв'язуванні задачі вважати, що число бракованих ламп не перевищує 5 на 1000 і всі значення 0, 1, ..., 5 числа бракованих ламп рівноможливі.

**55.** Урна містить $n$ куль. Всі припущення про число білих куль в урні однаково ймовірні. Навмання вийнята з урни куля виявилась білою. Обчислити ймовірності всіх припущень про склад куль в урні. Яке припущення найбільш імовірне?

**56.** З урни, яка містить $n$ куль невідомого кольору, взяли одну кулю, яка виявилася білою. Після цього знову виймають кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла? Всі припущення про число білих куль в урні однаково ймовірні.

**57.** Стрілець $A$ влучає в мішень з імовірністю $p_1 = 0{,}6$, стрілець $B$ — з імовірністю $p_2 = 0{,}5$, а стрілець $C$ — з імовірністю $p_3 = 0{,}4$. Стрільці зробили залп по мішені. Відомо, що є два влучення. Що більш імовірно: влучив $C$ в мішень чи ні?

**58.** Три мисливці одночасно зробили по одному пострілу у ведмедя. Ведмедя вбито однією кулею. Яка ймовірність того, що ведмедя вбито першим, другим або третім мисливцем, якщо ймовірності влучення для них дорівнюють відповідно $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}6$?

## Додаткові вправи до розділу II

**59.** Гральний кубик підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події: $A$ — сума очок, які з'явились, дорівнює 8; $B$ — принаймні один раз з'явиться 6.

**60.** Підкидають монету доти, поки не випаде герб. Описати простір елементарних подій.

**61.** Побудувати множину елементарних подій в такому експерименті: кидають монету і фіксують, чи випаде герб; кидання триває доти, поки герб не випаде двічі.

**62.** Нехай експеримент полягає у вимірюванні двох величин, які набувають значення з відрізка $[0;\ 1]$. Описати простір елементарних подій.

**63.** Побудувати множину елементарних подій в експерименті, що полягає у виборі з урни, яка містить $m$ білих і $n$ чорних куль, $k$ куль, де $k < n + m$. Яке число елементарних подій?

**64.** Вказати події, протилежні до таких подій: а) $A$ — поява герба при двох підкиданнях монети; б) $B$ — три попадання при трьох пострілах; в) $C$ — принаймні одне попадання при трьох пострілах.

**65.** Зроблено три постріли по мішені. Нехай $A_i$ — подія, яка полягає в тому, що при $i$-му пострілі є влучення ($i = 1, 2, 3$). Виразити через події $A_i$ такі події: а) $A$ — відбулось три влучення; б) $B$ — не було жодного влучення; в) $C$ — лише одне влучення; г) $D$ — не менше двох влучень.

**66.** Проводиться дослідження розподілу подружніх пар за віком. Нехай $x$ — вік чоловіка, $y$ — вік дружини. Описати простір елементарних подій $(x, y)$. Нехай $A$ — подія, яка полягає в тому, що чоловікові за 40 років; $B$ — подія, яка полягає в тому, що чоловік старший, ніж дружина; $C$ — подія, яка полягає в тому, що дружині за 40 років. Описати події $A, B, C$. З'ясувати зміст таких подій: $ABC$, $A \setminus AB$, $A\bar{B}C$. Довести, що $A\bar{C} \subset B$.

**67.** Робітник виготовив $n$ деталей. Нехай подія $A_i$ ($i = 1, \ldots, n$) полягає в тому, що $i$-та виготовлена ним деталь має дефект. Запишіть такі події: $A$ — жодна з деталей не має дефектів; $B$ — всі деталі мають дефекти; $C$ — принаймні одна деталь не має дефектів; $D$ — принаймні одна деталь має дефект; $E$ — тільки одна деталь має дефект; $F$ — не більше однієї деталі мають дефекти. Які є зв'язки між цими подіями?

**68.** $n$ осіб, серед яких є $A$ і $B$, шикуються в шеренгу у будь-якому порядку. Яка ймовірність того, що між $A$ і $B$ стане рівно $r$ осіб?

**69.** У лотереї є $n$ білетів, серед них $m$ виграшних. Обчислити ймовірність виграшу для того, хто має $r$ білетів.



**70.** З чисел $1, 2, \ldots, n$ позначили число $k$. Знайти ймовірність того, що серед двох чисел, вибраних навмання з цих чисел, одне буде менше, а друге більше ніж $k$.

**71.** Поїзд має $n$ вагонів. Кожен з $k$ пасажирів обирає собі вагон навмання. Яка ймовірність того, що: а) в кожному вагоні буде принаймні один пасажир; б) буде зайнято рівно $r$ вагонів?

**72.** З повної колоди карт (52 карти) виймають навмання одночасно три карти. Знайти ймовірність того, що це будуть трійка, сімка і туз.

**73.** Повна колода карт (52 карти) ділиться навпіл. Знайти ймовірність того, що число червоних і чорних карт в обох частинах буде однаковим.

**74.** З колоди в 32 карти навмання вибираються 4. Знайти ймовірність того, що серед них буде принаймні один туз.

**75.** З колоди в 32 карти береться навмання 10 карт. Знайти ймовірність того, що серед них буде 8 карт однієї масті.

**76.** Повна колода карт (52 карти) випадковим способом ділиться навпіл. Знайти ймовірність того, що в кожній половині буде по два тузи.

**77.** З повної колоди карт (52 карти) навмання беруть 6 карт. Знайти ймовірність того, що серед цих карт будуть чотири карти однієї масті.

**78.** Гральний кубик підкидають шість разів. Обчислити ймовірність того, що випадуть всі шість граней.

**79.** Кидають 12 гральних кубиків. Яка ймовірність того, що кожне з чисел $1, 2, \ldots, 6$ випаде двічі?

**80.** Кидають $n$ гральних кубиків. Яка ймовірність того, що випаде $n_1$ одиниць, $n_2$ двійок, ..., $n_6$ шісток ($n_1 + n_2 + \ldots + n_6 = n$)?

**81.** Довести, що більш імовірно при підкиданні чотирьох гральних кубиків дістати принаймні одну одиницю, ніж при 24 підкиданнях двох кубиків дістати принаймні один раз дві одиниці (Відповідь відома як «парадокс де Мере». Придворний кавалер і азартний гравець Шевальє де Мере, сучасник Блеза Паскаля, вважав ці ймовірності рівними і звинувачував математиків у своїх програшах.)

**82.** У гості прийшло $n$ осіб, причому всі були в галошах. Розходячись, гості вибирали галоші навмання. Яка ймовірність того, що кожен візьме праву й ліву галоші?

**83.** Нехай $\boldsymbol{R}$ — числова пряма; $S$ — сукупність всіх підмножин $\boldsymbol{R}$ вигляду $FG$, де множина $F$ — замкнена, $G$ — відкрита. Довести, що $S$ — алгебра, але не σ-алгебра.

**84.** Довести, що $\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB)$. Коли має місце рівність $\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B)$?

**85.** Нехай $\mathbf{P}(A) = p$, $\mathbf{P}(B) = q$, $\mathbf{P}(AB) = s$. Обчислити

$$\mathbf{P}(A \cup B),\ \mathbf{P}(\bar{A} \cup \bar{B}),\ \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}),\ \mathbf{P}(\overline{A \cup B}),\ \mathbf{P}(\overline{AB}),$$

$$\mathbf{P}(\bar{A}(A \cup B)),\ \mathbf{P}(A \cup \bar{A}B).$$

**86.** Нехай $A_1, \ldots, A_n$ — довільні події. Довести, що:

а) $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\bar{A}_i)$;

б) $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - (n - 1)$.

**87.** Довести, що коли $A_1A_2 \ldots A_n \subset A$, то $\mathbf{P}(A) \geqslant \mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_n) - (n - 1)$.

**88.** Яка ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків довжини не більше $a$ можна побудувати трикутник?

**89.** На площині проведено паралельні прямі, відстані між якими дорівнюють почережно 1,5 см та 8 см. На площину кидають навмання круг радіуса 2,5 с. Яка ймовірність того, що цей круг не перетне жодної з прямих?

**90.** Два судна повинні підійти до одного причалу. Появи суден — незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна — одна година, а другого — дві години.

**91.** На відрізку $AB$ завдовжки $l$ випадковим способом вибрано дві точки $L$ і $M$. Знайти ймовірність того, що: а) точка $L$ буде ближче до $A$, ніж точка $M$; б) точка $L$ буде ближче до $M$, ніж до $A$.

**92.** Знайти ймовірність того, що корені квадратного рівняння $x^2 + 2ax + b = 0$ дійсні, якщо рівноможливі значення коефіцієнтів у прямокутнику $|a| \leqslant n$, $|b| \leqslant m$. Яка ймовірність того, що ці корені додатні?

**93.** Відрізок завдовжки $l$ розділили на три частини, вибираючи дві точки поділу випадковим способом. Знайти ймовірність того, що довжина кожної з частин не перевищує заданої величини $a$ $\left(\frac{l}{3} \leqslant a \leqslant l\right)$.

**94.** Три рази кидають монету. а) Описати простір елементарних подій; б) описати події: $A$ — двічі випав герб, $B$ — принаймні один раз випав герб; в) обчислити $\mathbf{P}(AB)$, $\mathbf{P}(B)$ і $\mathbf{P}(A/B)$.

**95.** Відомо, що при підкиданні 10 гральних кубиків випала принаймні одна одиниця. Яка ймовірність того, що випаде дві або більше одиниць?

**96.** Дано $\mathbf{P}(A/B) = 0{,}7$, $\mathbf{P}(A/\overline{B}) = 0{,}3$, $\mathbf{P}(B/A) = 0{,}6$. Обчислити $\mathbf{P}(A)$.

**97.** Нехай $\mathbf{P}(B) > 0$ і виконується рівність $\mathbf{P}(A/B) + \mathbf{P}(\overline{A}) = 1$. Що можна сказати про події $A$ і $B$?

**98.** Довести, що коли $\mathbf{P}(A) > 0$ і $\mathbf{P}(B/\overline{A}) = \mathbf{P}(B/A)$, то події $A$ і $B$ незалежні.

**99.** Довести, що коли $A$ і $B$ — незалежні події і $A \subset B$, то $\mathbf{P}(A) = 0$ або $\mathbf{P}(B) = 1$.

**100.** Довести, що коли подія $A$ не залежить сама від себе, то $\mathbf{P}(A) = 0$ або $\mathbf{P}(A) = 1$.

**101.** Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні в сукупності і $\mathbf{P}(A_k) = p_k$. Яка ймовірність того, що: а) не відбудеться жодна з подій $A_1, \ldots, A_n$; б) відбудеться принаймні одна з подій $A_1, \ldots, A_n$; в) відбудеться одна і тільки одна з подій $A_1, \ldots, A_n$?

**102.** При одному циклі огляду радіолокаційної станції для стеження за космічним об'єктом останній буде виявлено з ймовірністю $p$. Виявлення об'єкта в кожному циклі відбувається незалежно від інших. Проведено $n$ циклів огляду. Яка ймовірність того, що об'єкт буде виявлено?

**103.** Нехай $A_1$ і $A_2$ — незалежні події, $p_i$ — імовірність того, що відбудеться рівно $i$ подій з подій $A_1$, $A_2$ $(i = 0, 1, 2)$. Виразити $p_0$, $p_1$, $p_2$ через $\mathbf{P}(A_1)$ і $\mathbf{P}(A_2)$.

**104.** Нехай $A_1, A_2, A_3$ — незалежні події, $p_i$ — імовірність того, що відбудеться рівно $i$ з подій $A_1, A_2, A_3$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Виразити ймовірності $p_0, p_1, p_2, p_3$ через $\mathbf{P}(A_1)$, $\mathbf{P}(A_2)$, $\mathbf{P}(A_3)$.



**105.** В урну, яка містить $n$ куль, поклали білу кулю. Яка ймовірність того, що взята з урни куля буде білою, якщо всі припущення про початковий склад урни рівноможливі?

**106.** Кожна з $n$ урн містить $m$ білих і $k$ чорних куль. З першої урни взяли одну кулю і переклали в другу. З другої урни взяли одну кулю і переклали в третю і т. д. Обчислити ймовірність взяття білої кулі з останньої урни.

**107.** Кожна з $k_1$ урн містить $m_1$ білих і $n_1$ чорних куль, а кожна з $k_2$ урн містить $m_2$ білих і $n_2$ чорних куль. З навмання взятої урни вийняли кулю, яка виявилася білою. Яка ймовірність того, що кулю взято з першої групи урн?

**108.** Імовірності подій $A$, $B$ і $C$ дорівнюють відповідно $p_1$, $p_2$, $p_3$. Після проведення досліду виявилося, що дві події відбулися, а одна — ні. Довести, що ймовірність того, що подія $C$ настала, більше $\frac{1}{2}$, коли $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} > 1$.

**109.** З урни, яка містить $m$ білих $(m \geqslant 3)$ і $n$ чорних куль загублено одну кулю. Для того щоб визначити склад куль в урні, з урни взяли дві кулі, які виявилися білими. Обчислити ймовірність того, що загублена куля — біла.

**110.** Деталі виробляються на двох заводах. Об'єм продукції другого заводу в $n$ разів перевищує об'єм продукції першого заводу. Доля браку на першому заводі $p_1$, на другому — $p_2$. Навмання взята деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона випущена другим заводом?

**111.** Кожна з $m + 1$ урн містить $m$ куль. Урна з номером $k$ містить $k$ червоних і $m - k$ білих куль $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$. З навмання взятої урни $n$ разів вибирають кулю, причому вийнята куля кожен раз повертається назад. Обчислити: а) імовірність того, що всі $n$ куль виявились червоними; б) умовну ймовірність того, що й наступна $(n + 1)$-ша куля буде червоною за умови, що всі попередні кулі були червоними.

# Розділ III

# ПОСЛІДОВНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

## § 16. Схема Бернуллі. Біномний розподіл

Нехай відбуваються послідовні випробування, при кожному з яких може настати або не настати певна подія $A$; настання події $A$ будемо надалі для скорочення називати «успіхом»; при цьому ймовірність успіху при кожному випробуванні одна й та сама і дорівнює $p$ $(0 < p < 1)$. Такі випробування називають послідовними незалежними випробуваннями або випробуваннями Бернуллі. Прикладами випробувань Бернуллі можуть бути послідовні кидання монети (успіх — наприклад, випадання герба), послідовні підкидання грального кубика (успіх —

випадання певної грані) тощо; в кожному з цих прикладів імовірність успіху при будь-якому випробуванні не залежить від того, скільки було успіхів в інших випробуваннях $\left(\text{у першому прикладі } p = \frac{1}{2}, \text{ у другому} — p = \frac{1}{6}\right)$.

Позначимо через $\mu$ число успіхів в серії з $n$ послідовних незалежних випробувань, при кожному з яких імовірність успіху дорівнює $p$; треба знайти ймовірність того, що $\mu = k$. Цю ймовірність позначають $\mathbf{P}\{\mu = k\}$ або $\mathbf{P}_n(k)$; таким чином, $\mathbf{P}_n(k)$ — це ймовірність того, що при $n$ випробуваннях буде $k$ успіхів. Покладемо $q = 1 - p$; це є ймовірність невдачі, тобто ненастання події $A$ при одному випробуванні.

Позначимо через $A_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ подію «при $k$-му випробуванні настала подія $A$»; зрозуміло, що $\mathbf{P}(A_k) = p$, $\mathbf{P}(\overline{A}_k) = 1 - p = q$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Для обчислення ймовірності $\mathbf{P}_n(k)$ знайдемо спочатку ймовірність того, що подія $A$ настане при певних $k$ випробуваннях, наприклад при першому, другому, ..., $k$-му, а при всіх інших випробуваннях не настане. Оскільки випробування незалежні, то цю ймовірність легко обчислити за теоремою множення:

$$\mathbf{P}(A_1 \ldots A_k\overline{A}_{k+1} \ldots \overline{A}_n) = \mathbf{P}(A_1) \ldots \mathbf{P}(A_k) \times$$
$$\times \mathbf{P}(\overline{A}_{k+1}) \ldots \mathbf{P}(\overline{A}_n) = p^k q^{n-k}. \qquad (1)$$

Але $k$ випробувань, при яких настає подія $A$, можна вибрати $C_n^k$ способами і для кожного такого вибору ймовірність $k$ успіхів саме при вибраних випробуваннях дорівнює $p^kq^{n-k}$. Тому за аксіомою адитивності

$$\mathbf{P}_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (2)$$

Набір чисел $\mathbf{P}_n(k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ називають **б і н о м н и м  р о з п о д і л о м**, а саму формулу (2) — **б і н о м н о ю  ф о р м у л о ю**, оскільки права частина цієї формули є загальним членом розвинення бінома Ньютона. Зауважимо, що події $\{\mu = 0\}$, $\{\mu = 1\}$, ..., $\{\mu = n\}$ попарно несумісні і при кожній серії з $n$ послідовних незалежних випробувань одна з них обов'язково настає, тому $\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\{\mu = k\} = \mathbf{P}(\Omega) = 1$, тобто

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}_n(k) = 1. \qquad (3)$$



Останню формулу можна дістати й безпосереднім обчисленням:

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (q + p)^n = 1^n = 1.$$

**Приклади**

**1.** В урні є 20 білих і 5 чорних куль. Послідовно виймають 6 куль, причому після кожного вибору куля повертається до урни (вибір з поверненням). Яка ймовірність того, що серед вибраних куль буде: а) рівно 4 білих; б) не менше 4 білих?

Імовірність дістати білу кулю при вийманні однієї кулі (ймовірність успіху) дорівнює $\mathbf{P} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$; число всіх випробувань $n = 6$.

а) Імовірність чотирьох успіхів за біноміною формулою дорівнює

$$\mathbf{P}_6(4) = C_6^4 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 15 \cdot \frac{4^4}{5^6} = 0{,}246.$$

б) Імовірність не менше чотирьох успіхів за властивістю адитивності дорівнює:

$$\mathbf{P}\{\mu \geqslant 4\} = \sum_{k=4}^{6} \mathbf{P}_6(k) = C_6^4\left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + C_6^5\left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} +$$
$$+ \left(\frac{4}{5}\right)^6 = 0{,}901.$$

**2.** Нехай імовірність виходу з ладу кожного з моторів літака дорівнює $q$, причому мотори псуються незалежно один від одного. Літак може лишатися у повітрі, якщо працює не менше половини його моторів. Для яких значень $q$ треба віддати перевагу двомоторному літаку перед чотиримоторним?

Обчислимо спочатку ймовірність успішного польоту для двомоторного літака $(p_2)$ і чотиримоторного $(p_4)$. Нехай $\mu$ — число моторів, що працюють, $p = 1 - q$ — ймовірність того, що мотор не вийде з ладу, тоді

$$p_2 = \mathbf{P}(\mu \geqslant 1) = 1 - \mathbf{P}(\mu < 1) = 1 - \mathbf{P}_2(0) = 1 - q^2;$$
$$p_4 = \mathbf{P}(\mu \geqslant 2) = 1 - \mathbf{P}(\mu < 2) = 1 - \mathbf{P}_4(0) - \mathbf{P}_4(1) =$$
$$= 1 - q^4 - 4pq^3 = 1 - q^4 - 4(1 - q)q^3 = 1 - 4q^3 + 3q^4.$$

Треба знайти значення $q$, при яких $p_2 > p_4$, тобто $1 - q^2 > 1 - 4q^3 + 3q^4$. Записавши цю нерівність у вигляді

$$q^2(3q^2 - 4q + 1) < 0,$$

знайдемо, що вона виконується при $\frac{1}{3} < q < 1$, а при $q < \frac{1}{3}$ виконується протилежна нерівність. Таким чином, двомоторним літакам треба віддати перевагу лише при $q > \frac{1}{3}$. Зрозуміло, що на практиці ймовірність виходу з ладу одного мотору набагато менша $\frac{1}{3}$, і тому перевагу треба надавати чотиримоторним літакам.

**Зауваження.** З попередніх прикладів видно, що при розв'язуванні задач іноді треба обчислювати як окремі ймовірності $\mathbf{P}_n(k)$, так і суми $\mathbf{P}(k_1 \leqslant \mu \leqslant k_2) = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2} \mathbf{P}_n(k)$. Обчислення цих величин при великих $n$ супроводжується певними труднощами. Так, наприклад, обчислення $\mathbf{P}_{5000}(350) = C_{5000}^{350} p^{350}(1-p)^{4650}$ при заданому $p$ вимагає значних зусиль. У той самий час для потреб практики необхідно обчислювати біноміні ймовірності саме для великих $n$. У цих випадках використовують різні наближені формули, деякі з них буде розглянуто в § 18—20.

## § 17. Найімовірніше число успіхів у схемі Бернуллі

Розглянемо серію з $n$ випробувань Бернуллі із заданою ймовірністю успіху $p$ і дослідимо ймовірність $k$ успіхів $\mathbf{P}_n(k)$ як функцію від $k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$). Знайдемо спочатку відношення двох послідовних значень цієї функції. Оскільки

$$\mathbf{P}_n(k+1) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} p^{k+1} q^{n-k-1},$$

$$\mathbf{P}_n(k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} p^k q^{n-k},$$

то

$$\frac{\mathbf{P}_n(k+1)}{\mathbf{P}_n(k)} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4}$$

Звідси видно, що це відношення спадає при зростанні $k$ (бо чисельник зменшується, а знаменник збільшується). Знайдемо, при яких $k$ це відношення більше, дорівнює і менше одиниці:

$$\frac{\mathbf{P}_n(k+1)}{\mathbf{P}_n(k)} > 1 \text{ при } (n-k)p > (k+1)q, \text{ або } np - q > k.$$

Отже,

$$\mathbf{P}_n(k+1) > \mathbf{P}_n(k) \text{ при } k < np - q, \tag{5}$$

$$\mathbf{P}_n(k+1) = \mathbf{P}_n(k) \text{ при } k = np - q, \tag{6}$$

$$\mathbf{P}_n(k+1) < \mathbf{P}_n(k) \text{ при } k > np - q. \tag{7}$$

Як бачимо, величина $\mathbf{P}_n(k)$ при зростанні $k$ спочатку зростає до певного максимуму, а потім спадає. Знайдемо, при якому $k$ досягається максимум. Можливі два випадки:

1) $np - q$ — неціле число. Тоді число $np - q + 1 = np + p$ також неціле і існує єдине ціле число $k_0$, що задовольняє умову



$$np - q < k_0 < np + p.$$

Покажемо, що $k_0$ — найімовірніше число успіхів, тобто що $\mathbf{P}_n(k)$ досягає найбільшого значення при $k = k_0$. Справді, оскільки $k_0 - 1 < np - q$, то згідно з співвідношенням (5) $\mathbf{P}_n(k_0) > \mathbf{P}_n(k_0 - 1)$, а оскільки $k_0 > np - q$, то із співвідношення (7) випливає $\mathbf{P}_n(k_0 + 1) < \mathbf{P}_n(k_0)$. Звідси $\mathbf{P}_n(k_0) > \mathbf{P}_n(k)$ при всіх $k \neq k_0$, тобто $k_0$ — найімовірніше число успіхів.

2) $np - q$ — ціле. Покладемо $k_1 = np - q$, тоді $k_1 + 1 = np - q + 1 = np + p$. Згідно з співвідношенням (6) $\mathbf{P}_n(k_1 + 1) = \mathbf{P}_n(k_1)$. Оскільки $k_1 - 1 < np - q$, із співвідношення (5) дістаємо $\mathbf{P}_n(k_1) > \mathbf{P}_n(k_0 - 1)$, а оскільки $k_1 + 1 > np - q$, то згідно з (7) $\mathbf{P}_n(k_1 + 2) < \mathbf{P}_n(k_1 + 1)$. Таким чином, у цьому випадку є два найімовірніші значення: $k = k_1$ і $k = k_1 + 1$.

Отже, можна зробити такий загальний висновок. *Найімовірніше число успіхів $k_0$ задовольняє нерівність*

$$np - q \leqslant k_0 \leqslant np + p; \tag{8}$$

якщо $np - q$ неціле, то є одне таке значення $k_0$, якщо $np - q$ ціле, то таких значень два.

**Зауваження.** Нерівність (8) можна записати так:

$$p - \frac{q}{n} \leqslant \frac{k_0}{n} \leqslant p + \frac{p}{n}; \tag{9}$$

$\frac{k_0}{n}$ — це найімовірніша частота успіхів, тобто найімовірніша частота появи події $A$; з нерівності (9) випливає, що при великих $n$ виконується наближена рівність

$$\frac{k_0}{n} \approx p.$$

Ця рівність відповідає нашому уявленню про ймовірність як число, близько якого групуються частоти появи події. До питання про зв'язок між частотою та ймовірністю ми ще неодноразово повернемося.

**Приклад.** Гральний кубик кидають 35 разів. Яке найімовірніше число появ грані з одиницею?

У цьому прикладі $n = 35$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, тому $np - q = 5$ і найімовірніших значень два: 5 і 6.

**Вправи**

1. Гральний кубик кинули 8 разів. Знайти імовірність того, що чотири очки випадуть: а) три рази; б) не менше трьох разів.
2. Монету кинули п'ять разів. Знайти імовірність того, що герб випаде: а) один раз; б) п'ять разів.

3. Вироби містять 5 % браку. Знайти імовірність того, що серед п'яти виробів: а) не буде жодного бракованого; б) будуть два бракованих.

4. Що більш імовірно: виграти у рівносильного партнера а) три партії з чотирьох чи п'ять з восьми; б) не менше трьох партій з чотирьох чи не менше п'яти з восьми?

5. Гральний кубик кинули 10 разів. Знайти імовірність того, що кількість очок, кратна трьом випаде: а) три рази; б) не менше трьох разів; в) не більше трьох разів.

6. Дві лампи включено в електричне коло послідовно. Знайти ймовірність того, що при підвищенні напруги вище номінальної відбудеться розрив кола, якщо ймовірність того, що при цих умовах лампа перегорить, для обох ламп однакова і дорівнює 0,4.

7. Імовірність настання події у кожному з 18 незалежних випробувань дорівнює 0,2. Знайти ймовірність настання цієї події принаймні двічі.

8. Подія $B$ настає тоді, коли подія $A$ настане не менше трьох разів. Знайти ймовірність настання події $B$, якщо ймовірність настання події $A$ при одному випробуванні дорівнює 0,3, і здійснюється сім незалежних випробувань.

9. Гра полягає у накидуванні кілець на кілок. Гравець одержує 6 кілець і кидає їх до першого попадання. Знайти ймовірність того, що принаймні одне кільце залишиться невикористаним, якщо ймовірність попадання при кожному киданні дорівнює 0,1.

10. Імовірність того, що електрична лампа залишиться справною після 1000 год роботи, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з трьох ламп залишиться справною після 1000 год роботи.

11. Імовірність відмови кожного приладу при випробуванні дорівнює 0,2. Скільки таких приладів треба випробувати, щоб з імовірністю, не меншою 0,9, дістати не менше трьох відмов?

12. Імовірність влучення в «десятку» при одному пострілі дорівнює $p = 0{,}2$. Скільки треба зробити незалежних пострілів, щоб з імовірністю, не меншою 0,9, влучити в «десятку» принаймні один раз?

13. З урни, яка містить 20 білих і 2 чорні кулі, $n$ разів виймають по одній кулі з поверненням. Знайти найменше значення $n$, для якого ймовірність витягнути хоча б одну чорну кулю буде більше, ніж 0,5.

14. Для одного баскетболіста ймовірність закинути м'яч у корзину при одному кидку дорівнює 0,4. Зроблено 10 кидків. Знайти найімовірніше число влучень і відповідну ймовірність.

15. Знайти число $n$ незалежних випробувань, які треба здійснити для того, щоб найімовірніше число появ події дорівнювало 20, якщо ймовірність настання цієї події при одному випробуванні дорівнює 0,8.

16. Імовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,95. Скільки деталей повинно бути в партії, щоб найімовірніше число нестандартних деталей в ній дорівнювало 55?

17. Знайти ймовірність того, що у сім'ї з 5 дітей є двоє хлопчиків, якщо вважати, що ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,5.

18. Здійснено п'ять незалежних випробувань, кожне з яких полягає в одночасному підкиданні двох монет. Знайти ймовірність того, що рівно в трьох випробуваннях з'явилось по два герби.

19. В коло вписано квадрат. Знайти ймовірність того, що серед 4 точок, навмання кинутих в круг, всередину квадрата попадуть: а) дві точки; б) принаймні дві точки.



20. В коло вписано правильний трикутник. Знайти ймовірність того, що з 5 навмання кинутих в круг точок жодна не попаде всередину зазначеного трикутника.

21. Урна містить 9 білих і одну чорну кулю. Знайти ймовірність того, що при 10 вийманнях з поверненням буде витягнута принаймні одна чорна куля. Скільки разів треба виймати по одній кулі з поверненням, щоб імовірність появи хоча б однієї чорної кулі була не менша 0,9?

## § 18. Теорема Пуассона

Існують різні наближені формули, за якими можна обчислювати біноміні ймовірності $\mathbf{P}_n(k)$ при великих $n$. У цьому параграфі розглянемо наближену формулу, якою зручно користуватися при значеннях $p$, близьких до нуля, тобто для подій, що рідко трапляються. Ця наближена формула є наслідком теореми Пуассона, яка належить до так званих граничних теорем теорії ймовірностей.

Розглянемо послідовність серій випробувань Бернуллі: в $n$-й серії виконується $n$ послідовних незалежних випробувань, при кожному з яких імовірність успіху дорівнює $p_n = \frac{\lambda}{n}$ $(\lambda = \text{const}, \quad n > \lambda)$. Нехай $\mu_n$ — число успіхів в $n$-й серії, $\mathbf{P}_n(k) = \mathbf{P}\{\mu_n = k\}$ — імовірність $k$ успіхів в $n$-й серії випробувань, тоді має місце така теорема.

***Теорема Пуассона.*** *Якщо $\mathbf{P}_n(k)$ — імовірність $k$ успіхів у серії з $n$ випробувань Бернуллі, в кожному з яких імовірність успіху дорівнює $\frac{\lambda}{n}$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{10}$$

Доведення. За біномною формулою

$$\mathbf{P}_n(k) = C_n^k p_n^k q_n^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \times$$

$$\times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \times$$

$$\times \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n,$$

звідки

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right]\times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \blacksquare$$

На практиці теоремою Пуассона користуються у формі наближеної рівності

$$\mathbf{P}_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad (11)$$

де $\lambda = np$. Дослідження похибки, яка при цьому допускається, показує, що формула (11) дає досить точне наближення при невеликих $p$ (менших 0,1), достатньо великих $n$ (не менших кількох десятків) і $np \leqslant 10$.

Введемо позначення:

$$\mathbf{P}(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

*Сукупність значень* $\{\mathbf{P}(k) : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ *називається розподілом Пуассона*. До цього розподілу приводить велика кількість різноманітних практичних задач, деякі з них ми розглянемо далі.

Дослідимо тепер поведінку $\mathbf{P}(k)$ як функції від $k$; оскільки

$$\frac{\mathbf{P}(k)}{\mathbf{P}(k-1)}=\frac{\lambda}{k},$$

то $\mathbf{P}(k) > \mathbf{P}(k-1)$ при $k < \lambda$, $\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1)$ при $k = \lambda$ і $\mathbf{P}(k) < \mathbf{P}(k-1)$ при $k > \lambda$. Звідси випливає (пор. § 17), що коли $\lambda$ — ціле, то найбільшого значення $\mathbf{P}(k)$ досягає при $k_0 = \lambda$ і при $k_0' = \lambda - 1$; якщо $\lambda$ — неціле, то при $k_0 = [\lambda]$ ($[\lambda]$ — ціла частина $\lambda$); при зростанні $k$ від 0 до $k_0$ величина $\mathbf{P}(k)$ зростає, при подальшому збільшенні $k$ — спадає.

Для обчислення ймовірностей $\mathbf{P}(k)$, а також сум $\sum_{k=m}^{\infty}\mathbf{P}(k)$ можна користуватися спеціальними таблицями додатку.

**Приклади**

**1.** З умов випуску лотереї відомо, що виграє $\frac{1}{20}$ всіх випущених білетів. а) Скільки треба купити білетів, щоб імовірність виграшу була не менша 0,99? б) Яка ймовірність того, що з 200 білетів виграє не менше п'яти?



Придбання лотерейних білетів можна розглядати як незалежні випробування, в кожному з яких імовірність успіху (виграшу) дорівнює $p = \frac{1}{20}$. Оскільки ймовірність успіху мала, то можна застосувати пуассонівське наближення до біномної формули: ймовірність того, що з $n$ придбаних білетів виграє $k$, дорівнює:

$$\mathbf{P}_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

де $\lambda = np$.

а) При $k = 0$ ця формула дає ймовірність того, що жоден білет не виграє: $\mathbf{P}_n(0) \approx e^{-\lambda}$, тому ймовірність того, що принаймні один білет виграє (ймовірність протилежної події), дорівнює $1 - e^{-\lambda}$. Треба знайти таке $\lambda$, щоб виконувалася нерівність

$$1 - e^{-\lambda} \geqslant 0{,}99.$$

Звідси за таблицями знаходимо: $\lambda \geqslant 4{,}6$. Таким чином, $np \geqslant 4{,}6$, звідки $n \geqslant \frac{4{,}6}{p} = 92$.

б) Якщо придбано 200 білетів, то $\lambda = np = 200 \cdot \frac{1}{20} = 10$. Позначивши через $\mu$ кількість виграшів, за теоремою Пуассона дістаємо

$$\mathbf{P}\{\mu \geqslant 5\} = \sum_{k=5}^{200}\mathbf{P}_{200}(k) \approx \sum_{k=5}^{\infty}\mathbf{P}(k),$$

звідки за табл. 4 (додатку) маємо:

$$\mathbf{P}\{\mu \geqslant 5\} \approx 0{,}971.$$

**2.** Робітниця прядильного цеху обслуговує 800 веретен. Імовірність обриву пряжі в кожному з веретен за проміжок часу $t$ дорівнює 0,005. Знайти: а) найімовірніше число обривів пряжі і його ймовірність; б) ймовірність того, що за час $t$ буде більше 10 обривів.

а) Обслуговування кожного веретена можна розглядати, як окреме випробування, «успіх» в якому — це обрив пряжі. Тоді ми маємо схему Бернуллі з $n = 800$, $p = 0{,}005$. З нерівності (8) знаходимо найімовірніше число обривів $k_0$ : $800 \cdot 0{,}005 - 0{,}995 \leqslant k_0 \leqslant 800 \times \times 0{,}005 + 0{,}005$, звідки $k_0 = 4$. Для обчислення ймовірності $k$ обривів можна використати наближення Пуассона з $\lambda = 800 \cdot 0{,}005 = 4$. Зокрема,

$$\mathbf{P}_{800}(4) \approx \mathbf{P}(4) = \frac{4^4}{4!}e^{-4} = 0{,}1954$$

(це значення взято з табл. 3). Точне значення можна знайти за біномною формулою

$$\mathbf{P}_{800}(4) = C_{800}^4 \cdot 0{,}005^4 \cdot 0{,}995^{796} \approx 0{,}1945.$$

б) Імовірність того, що за час $t$ буде більше 10 обривів, легко знайти за допомогою табл. 4:

$$\mathbf{P}\{\mu > 10\} = \sum_{k=11}^{800}\mathbf{P}_{800}(k) \approx \sum_{k=11}^{\infty}\frac{4^k}{k!}e^{-4} = 0{,}00284.$$

Це означає, що навряд чи можна чекати, що за час $t$ буде більше 10 обривів. Подібні розрахунки дають змогу встановити оптимальне число веретен, яке може обслуговувати одна робітниця.

**Вправи**

22. Для кожного абонента ймовірність подзвонити на комутатор протягом однієї години дорівнює 0,01. Комутатор обслуговує 300 абонентів. Знайти ймовірність того, що протягом однієї години подзвонять: а) 4 абоненти; б) не більше 4 абонентів.

23. Апаратура містить 2000 однаково надійних елементів, імовірність відмови для кожного з них дорівнює $p = 0{,}0005$. Знайти ймовірність відмови апаратури, якщо вона настає при відмові хоча б одного з елементів.

24. Протягом однієї години на комутатор надходить в середньому 60 викликів. Знайти ймовірність того, що за 30 с, протягом яких телефоністка буде відсутня, не буде жодного виклику.

25. Імовірність того, що виріб не витримає контролю, дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що з 5000 виробів принаймні два не витримають контролю.

26. Знайти ймовірність того, що серед 200 виробів виявиться більше трьох бракованих, якщо в середньому браковані вироби становлять 1 %.

27. У спостереженнях Резерфорда і Гейгера радіоактивна речовина за 7,5 с випромінювала в середньому 7,5 $\alpha$-частинок. Знайти ймовірність того, що за 1 с ця речовина випромінює хоча б одну $\alpha$-частинку.

28. При приймальному контролі з партії в 1000 виробів здійснюється вибірка 50 шт. без повернення. Знайти ймовірність того, що у цій вибірці не виявиться бракованих виробів, якщо в усій партії їх є 4 шт. Порівняти точне значення цієї ймовірності з наближеним, знайденим за формулою Пуассона.

29. Серед насіння пшениці 0,6 % насіння бур'янів. Випадковим способом вибирають 1000 насінин. Яка ймовірність виявити серед них: а) не менше 3 насінин бур'янів; б) не менше 16 насінин бур'янів; в) рівно 6 насінин бур'янів?

30. Книга в 500 сторінок містить 50 помилок. Знайти ймовірність того, що на випадково вибраній сторінці виявиться не менше трьох помилок.

31. Відомо, що ймовірність виготовлення бракованого свердла дорівнює 0,02. Виготовлені свердла складають у коробки по 100 шт. 1) Знайти ймовірність того, що: а) у коробці не виявиться бракованих свердел; б) число бракованих свердел у коробці буде не більше двох. 2) Яку найменшу кількість свердел треба класти у коробку, щоб з імовірністю, не меншою 0,9, в ній було не менше ніж 100 якісних?

32. Нехай відомо, що при наборі книги є стала ймовірність $p = 0{,}0001$ того, що будь-яку букву буде набрано неправильно. Після набору гранки читає коректор, який виявляє кожну помилку з імовірністю $q = 0{,}9$. Після коректора їх читає автор, який виявляє кожну помилку, що залишилася, з імовірністю $r = 0{,}5$. Знайти імовірність того, що в книзі з 100 000 друкованих знаків залишиться після цього не більше 10 помилок.

33. З а д а ч а - ж а р т. Скільки ізюму в середньому повинні містити булки, щоб імовірність знайти у булці хоча б одну ізюминку була не менше 0,99?



## § 19. Локальна теорема Муавра — Лапласа

У цьому параграфі розглянемо ще одну граничну теорему, яка дає змогу наближено обчислювати біномні ймовірності при великому числі випробувань. Вперше цю теорему дістав Муавр у 1730 р. для окремого випадку схеми Бернуллі при $p = q = \frac{1}{2}$; пізніше Лаплас узагальнив її на випадок довільного $p$, відмінного від 0 і 1.

Введемо позначення:

$$x = x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \tag{12}$$

***Локальна теорема Муавра — Лапласа.*** *Нехай в кожному з $n$ незалежних випробувань імовірність настання події $A$ однакова і дорівнює $p$ $(0 < p < 1)$, $\mathbf{P}_n(k)$ — імовірність того, що при цих $n$ випробуваннях подія $A$ настане $k$ разів. Тоді*

$$\sqrt{npq}\,\mathbf{P}_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + \alpha_n(x)), \tag{13}$$

*де* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(x) = 0$ *рівномірно для всіх $k$, для яких $x$ міститься в деякому скінченному проміжку $(a; b)$.*

Доведення грунтується на відомій з математичного аналізу* формулі Стірлінга

$$m! = \sqrt{2\pi m}\, m^m e^{-m} e^{\theta_m}, \tag{14}$$

де

$$0 < \theta_m < \frac{1}{12m}. \tag{15}$$

За біномною формулою

$$\mathbf{P}_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Виражаючи в цій формулі факторіали за формулою Стірлінга, дістанемо

$$\sqrt{npq}\,\mathbf{P}_n(k) =$$

$$= \frac{\sqrt{npq}\,\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\theta_n} p^k q^{n-k}}{\sqrt{2\pi k}\, k^k e^{-k} e^{\theta_k} \sqrt{2\pi(n-k)}\,(n-k)^{n-k} e^{-(n-k)} e^{\theta_{n-k}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \sqrt{\frac{np}{k}} \sqrt{\frac{nq}{n-k}}\, e^{\theta}, \tag{16}$$

* Див., наприклад, [18], т. 2, п. 393, 501.

5*

де $\theta = \theta_n - \theta_k - \theta_{n-k}$. Звідси, згідно з оцінкою (15), маємо

$$|\theta| < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right). \qquad (17)$$

З рівності (12), яка визначає $x$, випливає, що

$$k = np + x\sqrt{npq}, \qquad (18)$$

$$n - k = nq - x\sqrt{npq}; \qquad (19)$$

оскільки $a < x < b$, то з останніх рівностей дістаємо

$$k > np + a\sqrt{npq},\quad n - k > nq - b\sqrt{npq},$$

тому із співвідношення (17) маємо таку оцінку:

$$|\theta| < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{np + a\sqrt{npq}} + \frac{1}{nq - b\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \frac{1}{12n}\left(1 + \frac{1}{p + a\sqrt{\frac{pq}{n}}} + \frac{1}{q - b\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right).$$

Отже, якщо $n \to \infty$, то $\theta \to 0$ рівномірно для всіх $k$, для яких $a < x < b$, тому також рівномірно $e^{\theta} \to 1$, тобто

$$e^{\theta} = 1 + \beta_n, \qquad (20)$$

де $\beta_n \to 0$ (при $n \to \infty$) рівномірно для зазначених $k$.

Оцінимо два передостанні множники з формули (16). За формулами (18) і (19) маємо

$$\frac{k}{np} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{np}},\quad \frac{n-k}{nq} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}; \qquad (21)$$

звідси видно, що коли $n \to \infty$ і $a < x < b$, то $\sqrt{\frac{np}{k}} \times \sqrt{\frac{nq}{n-k}}$ рівномірно прямує до 1, тобто

$$\sqrt{\frac{np}{k}}\sqrt{\frac{nq}{n-k}} = 1 + \gamma_n, \qquad (22)$$

де $\gamma_n$ рівномірно при $n \to \infty$ і $a < x < b$ прямує до нуля.

Тепер залишається оцінити множник

$$A_n = \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}.$$

Використовуючи рівності (18), (19) і (21), дістаємо:

$$\ln A_n = -k \ln \frac{k}{np} - (n-k)\ln\frac{n-k}{nq} =$$



$$= -(np + x\sqrt{npq})\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) -$$

$$- (nq - x\sqrt{npq})\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right). \qquad (23)$$

Оскільки $a < x < b$ і при достатньо великих $n$ величини $\sqrt{\frac{q}{np}}$ і $\sqrt{\frac{p}{nq}}$ достатньо малі, то логарифми можна розвинути в степеневі ряди за формулою $\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$, яку можна переписати так:

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2}(1 + \delta(z)),$$

де $\delta(z) \to 0$ при $z \to 0$. Перетворимо вираз (23) за цією формулою:

$$\ln A_n = -(np + x\sqrt{npq})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np}(1 + \delta')\right) -$$

$$- (nq - x\sqrt{npq})\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq}(1 + \delta'')\right) =$$

$$= -x^2 q + \frac{x^2 q}{2}(1 + \delta') + \frac{x^3 q\sqrt{q}}{2\sqrt{np}}(1 + \delta') - x^2 p +$$

$$+ \frac{x^2 p}{2}(1 + \delta'') - \frac{x^3 p\sqrt{p}}{2\sqrt{nq}}(1 + \delta''),$$

де $\delta' = \delta\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)$, $\delta'' = \delta\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)$, тому $\delta'$ і $\delta''$ рівномірно прямують до нуля при $n \to \infty$ і $a < x < b$. Враховуючи, що $p + q = 1$, маємо

$$\ln A_n = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}(q\delta' + p\delta'') +$$

$$+ \frac{x^3}{2\sqrt{n}}\left[\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{p}}(1 + \delta') - \frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{q}}(1 + \delta'')\right]; \qquad (24)$$

оскільки вираз в квадратних дужках обмежений, то останню рівність можна записати так:

$$\ln A_n = -\frac{x^2}{2} + \varepsilon_n,$$

де $\varepsilon_n$ рівномірно прямує до нуля при $n \to \infty$ і $a < x < b$. Звідси $A_n = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\varepsilon_n}$, або

$$A_n = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 + \eta_n), \qquad (25)$$

де $\eta_n$ рівномірно прямує до нуля при $n \to \infty$ і $a < x < b$.

Підставивши (20), (22) і (25) в (16), дістанемо

$$\sqrt{npq}\,\mathbf{P}_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1+\beta_n)(1+\gamma_n)(1+\eta_n),$$

що й доводить теорему. ■

На практиці доведена теорема використовується у вигляді наближеної рівності

$$\mathbf{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (26)$$

де функція $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ табульована (див. табл. 1 додатку).

Таким чином,

$$\mathbf{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (27)$$

З доведення теореми видно, що залишковий член $\alpha_n(x)$ формули (13) тим повільніше прямує до нуля, чим ближче до нуля $p$ або $q$ (це видно, наприклад, з (21) та (24)). Тому якщо $p$ або $q$ близьке до нуля, то замість формули (27) слід використовувати теорему Пуассона.

**Приклад.** Знайти імовірність того, що при 6000 киданнях грального кубика грань з двома очками випаде 900 разів.

У цьому прикладі $n = 6000$, $k = 900$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, тому

$$\sqrt{npq} = \sqrt{6000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{833{,}3} = 28{,}87,$$

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{-100}{28{,}87} = -3{,}46.$$

Звідси

$$\mathbf{P}_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{\varphi(-3{,}46)}{28{,}87} = \frac{\varphi(3{,}46)}{28{,}87} = \frac{0{,}010}{28{,}87} = 0{,}00034.$$

Взагалі, біномні ймовірності при великому числі випробувань дуже малі. Так, у цьому прикладі навіть максимальна ймовірність (при $k = np = 1000$) дорівнює

$$\mathbf{P}_{6000}(1000) \approx \frac{\varphi(0)}{28{,}87} = \frac{0{,}3989}{28{,}87} = 0{,}0138.$$

## § 20. Інтегральна теорема Муавра — Лапласа

При розв'язуванні практичних задач часто виникає необхідність обчислювати суми виду $\sum\limits_{k=k_1}^{k_2} \mathbf{P}_n(k)$. Безпосереднє обчислення таких сум, навіть при застосуванні ло-



кальної теореми Муавра — Лапласа, дуже громіздке. Крім того, при додаванні великої кількості наближених значень $\mathbf{P}_n(k)$ можуть утворюватися значні похибки. Такі суми доцільно обчислювати за допомогою граничної теореми, відомої під назвою інтегральної теореми Муавра — Лапласа.

***Інтегральна теорема Муавра — Лапласа.*** *Нехай $\mu$ — число успіхів при $n$ незалежних випробуваннях, в кожному з яких імовірність успіху дорівнює $p$, причому $0 < p < 1$. Тоді при довільних $a$, $b$ $(a \leqslant b)$ має місце співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{a \leqslant \frac{\mu-np}{\sqrt{npq}} < b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \qquad (28)$$

Доведення. Як і в локальній теоремі Муавра — Лапласа, покладемо

$$x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Якщо ввести для скорочення записів позначення

$$\mathbf{P}_n(a, b) = \mathbf{P}\left\{a \leqslant \frac{\mu-np}{\sqrt{npq}} < b\right\}, \qquad (29)$$

то $\mathbf{P}_n(a, b) = \Sigma \mathbf{P}_n(k)$, де сума поширена на ті значення $k$, для яких $a \leqslant x_k < b$.

Введемо східчасту функцію

$$\Pi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_0 = -\dfrac{np}{\sqrt{npq}}, \\ \sqrt{npq}\,\mathbf{P}_n(k) & \text{при } x_k \leqslant x < x_{k+1}, \\ (k = 0, 1, \ldots, n), & \\ 0 & \text{при } x \geqslant x_{n+1} = \dfrac{nq+1}{\sqrt{npq}}. \end{cases}$$

Зрозуміло, що ймовірність $\mathbf{P}_n(k)$ дорівнює площі прямокутника, обмеженого лінією $y = \Pi_n(x)$, віссю $Ox$ та ординатами $x = x_k$ і $x = x_{k+1}$ (рис. 9), тобто

$$\mathbf{P}_n(k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \Pi_n(x)\,dx.$$

Тому шукана ймовірність $\mathbf{P}_n(a, b)$ дорівнює площі, що міститься між лінією $y = \Pi_n(x)$, віссю $Ox$ та ординатами

$x = x_{k'}$ та $x = x_{k''}$, де $k'$ і $k''$ визначаються такими нерівностями:

$$a \leqslant x_{k'} < a + \frac{1}{\sqrt{npq}}, \quad b \leqslant x_{k''} < b + \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Таким чином,

$$\mathbf{P}_n(a, b) = \int_{x_{k'}}^{x_{k''}} \Pi_n(x)\,dx = \int_a^b \Pi_n(x)\,dx + \rho_n, \qquad (30)$$

де

$$\rho_n = \int_b^{x_{k''}} \Pi_n(x)\,dx - \int_a^{x_{k'}} \Pi_n(x)\,dx. \qquad (31)$$

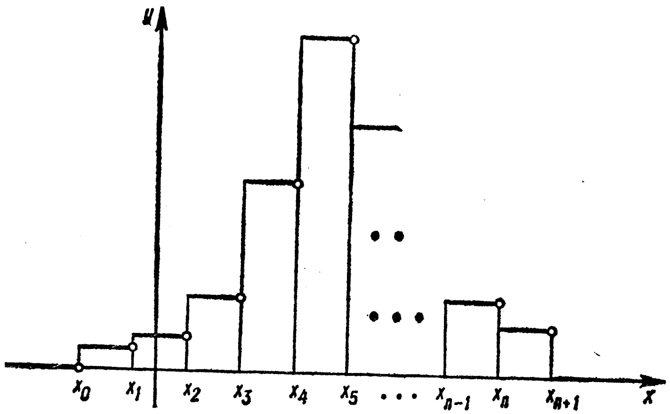


Рис. 9

Оскільки $\mathbf{P}_n(k)$ досягає найбільшого значення при $k_0 = [np + p]$ (див. § 17), то найбільше значення функції $\Pi_n(x)$ досягається на проміжку $[x_{k_0}; x_{k_0+1})$, тобто при

$$0 \leqslant \frac{k_0 - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x < \frac{k_0 + 1 - np}{\sqrt{npq}} < \frac{2}{\sqrt{npq}}.$$

Застосовуючи на цьому проміжку локальну теорему Муавра — Лапласа, при всіх достатньо великих $n$ дістаємо

$$\max \Pi_n(x) = \max \sqrt{npq}\,\mathbf{P}_n(k) =$$

$$= \max \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + \alpha_n(x)) < \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \max e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$



Тому з формули (31) випливає, що

$$|\rho_n| \leqslant \int_b^{x_{k''}} \Pi_n(x)\,dx + \int_a^{x_{k'}} \Pi_n(x)\,dx \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}((x_{k''} - b) +$$

$$+ (x_{k'} - a)) < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2}{\sqrt{npq}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi npq}},$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0. \qquad (32)$$

За локальною теоремою Муавра — Лапласа при $a \leqslant x_k < b$ маємо

$$\Pi_n(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} (1 + \alpha_n(x_k)),$$

де $\alpha_n(x_k) \to 0$ при $n \to \infty$ рівномірно відносно $x_k$.

Нехай тепер $x$ — довільна точка проміжку $[a, b)$; якщо $x_k \leqslant x < x_{k+1}$, то

$$\Pi_n(x) = \Pi_n(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} (1 + \alpha_n(x_k)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2 - x_k^2}{2}} (1 + \alpha_n(x_k)),$$

або

$$\Pi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + \alpha_n(x)), \qquad (33)$$

де

$$\alpha_n(x) = e^{\frac{x^2 - x_k^2}{2}} (1 + \alpha_n(x_k)) - 1.$$

Оцінимо останній вираз. Оскільки

$$\frac{|x^2 - x_k^2|}{2} = \frac{|x + x_k|}{2}(x - x_k) \leqslant \frac{|x + x_k|}{2\sqrt{npq}} <$$

$$< \frac{\max\{|a|, |b|\}}{\sqrt{npq}},$$

то $\alpha_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ рівномірно відносно $x \in [a; b)$. З формул (30) і (33) дістаємо

$$\mathbf{P}_n(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + \alpha_n(x))\,dx + \rho_n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx + R_n, \qquad (34)$$

де

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} \alpha_n(x)\,dx + \rho_n.$$

При цьому

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} |\alpha_n(x)|\,dx + |\rho_n| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{a\leqslant x<b} |\alpha_n(x)| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx + |\rho_n|,$$

звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Тепер з рівності (34) дістаємо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

що й доводить теорему. ■

Зауваження. Більш докладний аналіз показує, що насправді співвідношення (28) виконується рівномірно відносно $a$ і $b$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$.

## § 21. Деякі застосування інтегральної теореми Муавра — Лапласа. Теорема Бернуллі

Для практичних застосувань можна записати інтегральну теорему Муавра — Лапласа у вигляді наближеної рівності

$$\mathbf{P}\left\{a \leqslant \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \tag{35}$$

або, що те саме,

$$\mathbf{P}\{k_1 \leqslant \mu < k_2\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{36}$$

$$\left(x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Якщо $n$ не менше кількох сотень, а $p$ не дуже близьке до 0 або 1, то ці наближення є цілком задовільними.

Задача обчислення інтегралів, що стоять у правій частині цих рівностей, ускладнюється тим, що невизначений інтеграл $\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, як відомо, не виражається через



елементарні функції. Тому для функції Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

складено таблиці (див. табл. 2). За допомогою функції $\Phi(x)$ формули (35) і (36) можна переписати, очевидно, так:

$$\mathbf{P}\left\{a \leqslant \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \approx \Phi(b) - \Phi(a), \tag{37}$$

$$\mathbf{P}\{k_1 \leqslant \mu < k_2\} \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{38}$$

Розглянемо деякі властивості функції Лапласа $\Phi(x)$.

1) Функція $\Phi(x)$ непарна. Справді, зробивши в інтегралі заміну $t = -u$, дістанемо

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = -\Phi(x).$$

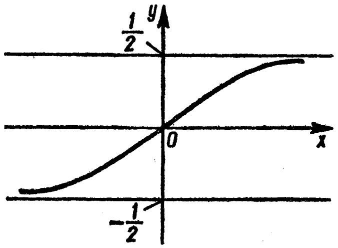


Рис. 10

2) $\Phi(0) = 0$.

3) $\Phi(x)$ — зростаюча функція.

4) $\Phi(+\infty) = \frac{1}{2}$ $\left(\text{тобто } \lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}\right)$. Справді, ввівши заміну $t = u\sqrt{2}$, дістанемо

$$\Phi(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2},$$

бо, як відомо (див. [18] т. 2, п. 455, 481, 484),

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Графік функції $y = \Phi(x)$ зображено на рис. 10.

**Приклад.** Нехай деяке підприємство випускає 99,2 % стандартних виробів. Яка ймовірність того, що серед 5000 навмання вибраних виробів цього підприємства число нестандартних менше від 60?

Вибір окремих виробів можна розглядати як послідовні незалежні випробування. Ймовірність вибору нестандартного виробу дорівнює $p = 0,008$; число випробувань $n = 5000$; $q = 0,992$. Якщо через $\mu$ позначити число нестандартних виробів серед 5000 вибраних, то за інтегральною теоремою Муавра — Лапласа у формі наближеної рівності (38) маємо

$$\mathbf{P}\{0 \leqslant \mu \leqslant 60\} \approx \Phi\left(\frac{60 - 5000 \cdot 0,008}{\sqrt{5000 \cdot 0,008 \cdot 0,992}}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{0 - 5000 \cdot 0,008}{\sqrt{5000 \cdot 0,008 \cdot 0,992}}\right) = \Phi\left(\frac{20}{6,3}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{-40}{6,3}\right) = \Phi(3,16) + \Phi(6,32) = 0,4992 + 0,5000 = 0,9992.$$

Нехай дано довільне число $\varepsilon > 0$. Знайдемо за допомогою інтегральної теореми Муавра — Лапласа ймовірність нерівності $\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon$. Очевидно,

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = \mathbf{P}\left\{-\varepsilon < \frac{\mu - np}{n} < \varepsilon\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}.$$

Права частина цієї рівності при $n \to \infty$ за інтегральною теоремою Муавра — Лапласа прямує до $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\Phi(+\infty) = 1$, отже

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1. \qquad (39)$$

Формула (39) виражає теорему Бернуллі, яка є найпростішою формою так званого з а к о н у  в е л и к и х  ч и с е л. Оскільки $\frac{\mu}{n}$ є частотою події $A$, то теорему Бернуллі можна сформулювати так: *якщо в кожному з незалежних випробувань випадкова подія настає з однією і тією самою ймовірністю $p$, то при достатньо великому числі випробувань з імовірністю, як завгодно близькою до 1, частота цієї події буде відрізнятись від її ймовірності $p$ менше від як завгодно малого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$.*

У § 34, присвяченому закону великих чисел, буде наведено значно простіше доведення теореми Бернуллі, розглянуто інші, більш загальні форми закону великих чисел, та його практичне застосування. Зазначимо, що



теорема Бернуллі дає математичне підтвердження нашої інтуїтивної впевненості в тому, що при великому числі випробувань повинна виконуватися наближена рівність $\frac{\mu}{n} \approx p$.

Розглянемо кілька задач, які можна розв'язувати за допомогою інтегральної теореми Муавра — Лапласа. Нехай дано довільне дійсне число $\alpha > 0$. Тоді, як і вище,

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leqslant \alpha\right\} = \mathbf{P}\left\{-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}} \leqslant \frac{\mu - np}{n} \leqslant \alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\},$$

тому, згідно з наближеною формулою (37), маємо

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leqslant \alpha\right\} \approx 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (40)$$

1) Якщо число випробувань $n$ і т о ч н і с т ь $\alpha$ задано, то за формулою (40) можна обчислити ймовірність того, що частота події відхилиться від її ймовірності не більше ніж на $\alpha$.

**Приклад.** Гральний кубик кидається $n = 6000$ разів; $\mu$ — число появ певної грані кубика. Знайти ймовірність нерівності

$$\left|\frac{\mu}{6000} - \frac{1}{6}\right| \leqslant 0,01 \ \text{(тобто } |\mu - 1000| \leqslant 60).$$

Ця ймовірність за формулою (40) дорівнює

$$2\Phi\left(0,01\sqrt{\frac{6000}{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) = 2\Phi(2,08) = 2 \cdot 0,481 = 0,962.$$

2) Нехай задано числа $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$. Треба знайти найменше число випробувань $n$, для якого

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leqslant \alpha\right\} = \beta.$$

Користуючись таблицею, знайдемо таке $t$, щоб $2\Phi(t) = \beta$. Тоді, згідно з формулою (40), дістанемо

$$\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}} = t, \qquad (41)$$

звідки

$$n = \frac{t^2 pq}{\alpha^2}. \qquad (42)$$

**Приклад.** Скільки разів треба кинути гральний кубик, щоб з імовірністю $\beta = 0,997$ мала місце нерівність

$$\left|\frac{\mu}{n} - \frac{1}{6}\right| \leqslant 0,001?$$

З умови $2\Phi(t) = 0{,}997$ знаходимо $t \approx 3$, тому за формулою (42) маємо

$$n = \frac{3^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{0{,}001^2} = 1\,250\,000.$$

3) Нехай задано $n$, $\beta$; треба знайти $\alpha$, тобто найбільше можливе значення відхилення $\left|\frac{\mu}{n} - p\right|$, що може мати місце з імовірністю $\beta$. Визначивши $t$ з умови $2\Phi(t) = \beta$, з рівності (41) знайдемо

$$\alpha = t\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

**Вправи**

**34.** На факультеті навчається 1095 студентів. Імовірність народження кожного студента в даний день дорівнює 1/365. Знайти: а) найімовірніше число студентів, що народилися 1 січня; б) імовірність того, що 1 січня народилися рівно 3 студенти; в) імовірність того, що знайдуться 3 студенти, що народилися 1 січня.

**35.** Імовірність настання події $A$ (успіху) при кожному з $n$ випробувань дорівнює $p$. Знайти імовірність того, що: а) частота успіхів при $n = 1500$ відхиляється від $p = 0{,}4$ менше ніж на 0,02; б) число успіхів за тих самих умов міститься між: 1) 560 і 640; 2) 600 і 680.

**36.** В урні містяться порівну білі і чорні кулі. В одному з експериментів при 10 000 витягувань з поверненням було витягнуто 5011 білих і 4989 чорних куль; а) яка ймовірність такого результату експерименту? б) якщо повторити цей експеримент, то яка ймовірність того, що дістанемо більше по модулю відхилення числа витягнутих білих куль за найімовірніше число?

**37.** У практично необмеженій сукупності половина предметів має властивість $A$, а п'ята частина — властивість $B$. Властивості $A$ і $B$ розподілені між предметами незалежно. Випадковим способом вибрано 1600 предметів. Знайти ймовірність того, що у цій виборці частоти властивостей $A$ і $B$ відхиляються від їхніх імовірностей не більше ніж на 1 %.

**38.** Монету підкидають $2N$ разів ($N$ — достатньо велике число). Знайти ймовірність того, що: а) герб випаде рівно $N$ разів; б) герб випаде на $2m$ разів більше, ніж цифра.

**39.** Монету підкидають $2N$ разів ($N$ — достатньо велике число). Знайти імовірність того, що число випадань герба буде міститись в межах: а) $N - \frac{\sqrt{2N}}{2}$ і $N + \frac{\sqrt{2N}}{2}$; б) $N - \sqrt{2N}$ і $N + \sqrt{2N}$; в) $N - \frac{3\sqrt{2N}}{2}$ і $N + \frac{3\sqrt{2N}}{2}$. З'ясувати зміст відповідей для $N = 50$ і $N = 5000$.

**40.** До електромережі підключено $n$ приладів, кожен з яких має потужність $a$ і споживає в даний момент енергію з імовірністю $p$. Знайти ймовірність того, що споживана в даний момент потужність: а) буде менша від $nap$; б) перевищить $rnap$ ($r > 0$). Число $n$ достатньо велике.



**41.** Візуальне спостереження штучного супутника Землі можливе у даному пункті з імовірністю $p = 0{,}1$ (відсутність хмарності) кожного разу, коли він пролітає над цим пунктом. Скільки разів повинен пролетіти супутник над пунктом спостереження, щоб з імовірністю, не меншою від 0,997 (тобто практично вірогідно), його можна було спостерігати не менше п'яти разів?

**42.** За умови попередньої задачі робиться 100 спроб спостерігати супутник. Знайти практично вірогідний (з імовірністю 0,997) діапазон числа вдалих спостережень.

**43.** Імовірність успіху у кожному з випробувань дорівнює 0,9. Скільки треба здійснити випробувань, щоб з імовірністю 0,98 можна було очікувати не менше 150 успіхів?

**44.** Для космічного корабля ймовірність зіткнення протягом однієї години з метеоритом, маса якого не менша від $m_0$, дорівнює 0,001. Знайти практично вірогідні межі числа зіткнень з такими метеоритами протягом трьох місяців польоту з 1 червня по 31 серпня, якщо ймовірність практичної вірогідності приймається у цьому випадку рівною 0,9995.

**45.** У ставок було випущено 100 мічених риб. Невдовзі після цього із ставка було виловлено 400 риб, серед яких виявилось 5 мічених. Оцінити загальну кількість риб у ставку з імовірністю: а) 0,9; б) 0,6.

**46.** Французький вчений Бюфон підкидав монету 4040 разів і при цьому герб з'явився 2048 разів. Знайти ймовірність того, що при повторенні цього досліду відносна частота появи герба відхилиться від імовірності $p = 0{,}5$ по модулю не більше, ніж у досліді Бюфона.

**47.** В урні містяться білі і чорні кулі у відношенні 4 : 1. Знайти найменше число виймань куль (з поверненням), при якому з імовірністю 0,95 можна очікувати, що модуль відхилення відносної частоти появи білих куль від імовірності буде не більше ніж 0,01.

**48.** Відділ технічного контролю перевіряє 475 виробів. Імовірність того, що виріб бракований, дорівнює 0,05. Знайти з імовірністю 0,95 межі, між якими міститься число бракованих виробів серед перевірених.

**49.** Гральний кубик підкинули 1000 разів. Знайти з імовірністю 0,95 межі, між якими міститься число випадань четвірки.

## § 22. Оцінка ймовірності події через частоту

У цьому параграфі інтегральну теорему Муавра — Лапласа буде застосовано до однієї з найпростіших задач математичної статистики — до задачі експериментального визначення ймовірності події. Деякі інші задачі математичної статистики буде розглянуто в розд. V.

Нехай здійснено серію з $n$ послідовних незалежних випробувань і при $\mu$ випробуваннях настала подія $A$. Вважаючи, що при всіх випробуваннях імовірність $p$ настання події $A$ та сама (але невідома), треба оцінити цю ймовірність.

Згідно з інтегральною теоремою Муавра — Лапласа (див. формулу (40))

$$\mathbf{P}\left\{\left|p - \frac{\mu}{n}\right| \leqslant \alpha\right\} \approx 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (43)$$

Візьмемо деяке число $\beta \in (0; 1)$ (надійний рівень) і знайдемо за таблицями таке значення $t_\beta$, для якого

$$2\Phi(t_\beta) = \beta, \tag{44}$$

тоді (43) можна записати так:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu}{n} - \alpha \leqslant p \leqslant \frac{\mu}{n} + \alpha\right\} \approx \beta, \tag{45}$$

де $\alpha$ визначається з умови $\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}} = t_\beta$, отже,

$$\alpha = t_\beta \sqrt{\frac{pq}{n}}. \tag{46}$$

Обчислити $\alpha$ за цією формулою не можна, оскільки $p$ і $q$ невідомі; але

$$pq = p(1-p) = p - p^2 = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4},$$

тому з формули (46) випливає, що

$$\alpha \leqslant \frac{t_\beta}{2\sqrt{n}}. \tag{47}$$

Тепер співвідношення (45) набирає вигляд

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu}{n} - \frac{t_\beta}{2\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant \frac{\mu}{n} + \frac{t_\beta}{2\sqrt{n}}\right\} \geqslant \beta. \tag{48}$$

Інтервал $\left(\frac{\mu}{n} - \frac{t_\beta}{2\sqrt{n}};\ \frac{\mu}{n} + \frac{t_\beta}{2\sqrt{n}}\right)$ називається *надійним* (а його кінці *надійними межами*) для ймовірності $p$ при надійному рівні $\beta$. Отже, надійний інтервал — це інтервал з випадковими кінцями, залежними від $\mu$, який з імовірністю, не меншою від $\beta$, покриває цілком певне (але невідоме нам) значення $p$. Інакше кажучи, з надійністю $\beta$ можна вважати, що

$$p \approx \frac{\mu}{n} \pm \frac{t_\beta}{2\sqrt{n}}, \tag{49}$$

де $t_\beta$ визначається з умови (44). Таким чином, замінюючи невідому ймовірність події її частотою, ми робимо (з надійністю $\beta$) помилку, не більшу ніж $\frac{t_\beta}{2\sqrt{n}}$.

Пояснимо статистичний зміст надійного рівня $\beta$. Співвідношення (48), наприклад, для $\beta = 0{,}95$ означає, що коли здійснювати багато серій по $n$ випробувань в кожній, то в середньому не менше як в 95 % серій надійний інтервал покриває значення $p$. Тому, якщо $\beta$ вибрано достатньо близьким до одиниці, то можна бути практично впевненим у тому, що в одиночній серії випробувань надійний інтервал покриває значення $p$.



**Зауваження.** Замінюючи $pq$ на 1/4, ми розширюємо надійні межі. Щоб уникнути цього, можна в формулі (46) взяти

$$p \approx \frac{\mu}{n}, \quad q \approx 1 - \frac{\mu}{n}.$$

**Приклади**

1. При надійному рівні $\beta = 0{,}95$ знайти надійні межі для ймовірності події, яка настала 1260 разів у серії з 10 000 випробувань.

Для $\beta = 0{,}95$ з таблиць знаходимо $t_\beta = 2$, отже, надійними межами для $p$ є $\frac{\mu}{n} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}126 \pm 0{,}01$, а надійний інтервал — (0,116; 0,136).

Зазначимо, що було б помилкою зробити звідси висновок, що

$$\mathbf{P}\{0{,}116 \leqslant p \leqslant 0{,}136\} = 0{,}95.$$

Справді, оскільки $p$ є певне число, то це число або лежить між 0,116 і 0,136, і тоді вказана ймовірність дорівнює 1, або не лежить між цими межами, і тоді ця ймовірність дорівнює нулю. Це не суперечить правильності співвідношення (48), в якому кінці інтервала є випадковими, залежними від $\mu$.

2. Гральний кубик кинули 6000 разів, і при цьому одна з граней випала 1200 разів. Вважаючи надійний рівень $\beta = 0{,}997$, з'ясувати, чи узгоджується цей результат з гіпотезою про те, що кубик має правильну форму і виготовлений з однорідного матеріалу, тобто, що $p = \frac{1}{6}$.

Для $\beta = 0{,}997$ з таблиць знаходимо $t_\beta \approx 3$, тому $\frac{t_\beta}{2\sqrt{n}} = \frac{3}{2\sqrt{6000}} = 0{,}019$. Якби гіпотеза була правильною, то з імовірністю 0,997 різниця $\left|p - \frac{\mu}{n}\right|$ повинна була б бути не більшою ніж $\frac{t_\beta}{2\sqrt{n}} = 0{,}019$. Проте згідно з даними експерименту $\frac{\mu}{n} - p = \frac{1200}{6000} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30} > 0{,}019$. Таким чином, з надійністю 0,997 можна стверджувати, що кубик не є правильним. Враховуючи статистичний зміст поняття ймовірності, останньому результату можна дати таке тлумачення: якщо здійснювати багато серій кидань правильного кубика (по 6000 кидань в кожній серії), то в середньому не більше як в 0,3 % серій може бути $\left|\frac{\mu}{6000} - \frac{1}{6}\right| > 0{,}019$, тобто $|\mu - 1000| > 114$; тому можна вважати практично неможливим, що в одній серії з 6000 кидань правильного кубика одна з граней випаде більше 1114 разів, і, отже, даний кубик можна вважати неправильним.

**Вправи**

**50.** Підрахуйте частот появи літери «а» у тексті на с. 6 цієї книги. Користуючись результатом, знайти надійні межі для ймовірності появи літери «а» у друкованому тексті при надійному рівні $\beta = 0{,}87$.

**51.** У відділі технічного контролю з великої партії виробів вибірково перевірили 1000 шт. і виявили серед них 50 бракованих. При надійному рівні $\beta = 0{,}95$ знайти надійні межі для ймовірності появи бракованого виробу.

**52.** З перевірених 500 електричних ламп виявилось 75 нестандартних. Знайти надійні межі для ймовірності появи нестандартної лампи при виборі лампи з усієї партії, беручи надійний рівень $\beta = 0{,}95$.

**53.** а) При 100 пострілах стрілець влучив у мішень 85 разів. Знайти надійний інтервал для ймовірності влучення при надійному рівні $\beta = 0{,}95$; б) розв'язати ту саму задачу для стрільця, який влучив 850 разів при 1000 пострілах.

## Розділ IV

# ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

## § 23. Випадкові величини та функції розподілу

Наведемо спочатку приклади і ті міркування, які приводять нас до одного з основних понять теорії ймовірності — поняття випадкової величини. При вивченні випадкових величин часто вважають, що випадкова величина — це змінна, значення якої залежать від випадку. Якщо намагатися дати цьому означенню більш точного смислу, то треба говорити про функцію, значення якої визначаються результатами деякого випробування (експерименту). Але результати випробування — це точки простору елементарних подій $\Omega$, тому природно називати випадковою величиною функцію $\xi = \xi(\omega)$, визначену на просторі елементарних подій $\Omega$. Розглянемо приклади, які виявляють додаткові вимоги, що їх природно накласти на $\xi(\omega)$.

1) Випробування полягає в киданні грального кубика; простір елементарних подій є $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$ ($\omega_i$ — випадання грані в $i$ очок). Нехай $\xi(\omega_i) = i$, тобто кожному киданню кубика поставимо у відповідність число очок, що випало при цьому киданні.

2) Експеримент полягає у здійсненні серії з $n$ послідовних незалежних випробувань Бернуллі. Кожна елементарна подія — це деяка послідовність успіхів і невдач в $n$ випробуваннях. Позначимо через $\mu(\omega)$ число успіхів в елементарній події $\omega$; $\mu(\omega)$ може набути будь-якого цілого значення від 0 до $n$.



3) Випробування полягає в тому, що послідовно підкидається монета до першого випадання цифри; простір елементарних подій у цьому випадку нескінченний: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, де $\omega_1 = ц$, $\omega_2 = гц$, $\omega_3 = ггц$, $\omega_4 = гггц$, ... ($г$ — випадання герба, $ц$ — цифри). Нехай $\xi(\omega_i) = i$ (тобто $\xi$ — це число підкидань монети до першого випадання цифри); можливі значення $\xi$ — будь-які натуральні числа.

4) Випробування полягає в тому, що стрілець робить один постріл по мішені. Простір елементарних подій $\Omega$ — множина всіх точок площини мішені. Для кожної точки $\omega \in \Omega$ позначимо через $\xi = \xi(\omega)$ відстань від точки $\omega$ до центра мішені (тобто $\xi$ — відстань від точки, в яку попала куля, до центра мішені); $\xi$ може набути будь-якого невід'ємного значення.

У наведених прикладах було розглянуто ряд випадкових величин — функцій на множині елементарних подій. Але з теоретико-ймовірнісної точки зору задання тільки самої функції ще недостатньо для характеристики випадкової величини, треба ще мати змогу відповідати на запитання, пов'язані з імовірностями значень, що їх набуває функція $\xi(\omega)$. Так, у прикладах 1—3 легко знайти ймовірності набування окремих значень. У першому прикладі $\mathbf{P}\{\xi = i\} = \frac{1}{6}$ $(i = 1, \ldots, 6)$, якщо тільки кубик правильний; у другому прикладі $\mathbf{P}\{\mu = k\}$ обчислюється за біномною формулою; у третьому прикладі, очевидно, $\mathbf{P}\{\xi = k\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Але коли, як у прикладі 4, значення випадкової величини заповнюють цілий проміжок, то треба задавати не ймовірності окремих значень, а ймовірність того, що значення випадкової величини попаде в певний проміжок (ймовірність набути окреме значення в такому прикладі, як пізніше буде з'ясовано, є нуль). Тому для будь-якої випадкової величини $\xi$ природно поставити вимогу, щоб при будь-яких дійсних $x_1, x_2$ було визначено ймовірність того, що $x_1 \leqslant \xi < x_2$; зокрема, для будь-якого дійсного $x$ повинна бути визначена ймовірність того, що $\xi < x$. Цю вимогу і покладають в основу означення поняття випадкової величини.

Означення. Нехай задано ймовірнісний простір $\langle \Omega, S, \mathbf{P} \rangle$ (див. § 12), тобто на деякій $\sigma$-алгебрі $S$ підмножин простору елементарних подій $\Omega$ визначено ймовірнісну міру $\mathbf{P}(A)$, що задовольняє відомі аксіоми. Задамо на $\Omega$ дійсну числову функцію $\xi = \xi(\omega)$. Говорять, що $\xi$ є **випадковою величиною**, якщо ця функція є **вимірною** відносно введеної в $\Omega$ ймовірності. Це означає, як відомо, що для довільного дійсного $x$ виконується умова

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in S.$$

Множину $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}$ будемо надалі для скорочення позначати $\{\xi < x\}$, аналогічний смисл мають записи $\{x_1 \leqslant \xi < x_2\}$, $\{\xi > x\}$, $\{\xi \leqslant x\}$ тощо. Згідно з умовою $\{\xi < x\} \in S$ для довільного $x$, отже, визначена ймовірність $\mathbf{P}\{\xi < x\}$. Введемо позначення

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}. \tag{1}$$

Цю функцію називають *функцією розподілу випадкової величини* $\xi$. Вона визначена на всій дійсній осі. Там, де це не викличе непорозуміння, писатимемо $F(x)$ замість $F_\xi(x)$.

За допомогою функції розподілу величини $\xi$ легко обчислити ймовірність нерівності $x_1 \leqslant \xi < x_2$ для будь-яких дійсних $x_1$, $x_2$. Справді, оскільки

$$\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} \cup \{x_1 \leqslant \xi < x_2\},$$

то за аксіомою адитивності ймовірності

$$F(x_2) = \mathbf{P}\{\ < x_2\} = \mathbf{P}\{\xi < x_1\} + \mathbf{P}\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = \\ = F(x_1) + \mathbf{P}\{x_1 \leqslant \xi < x_2\},$$

звідки

$$\mathbf{P}\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1). \tag{2}$$

**Приклади**

1. Біномний розподіл. Розглянемо серію з $n$ послідовних незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність успіху (появи події $A$) дорівнює $p$. Кожна елементарна подія — це деяка послідовність успіхів і невдач в $n$ випробуваннях. Для кожної елементарної події $\omega$ позначимо через $\mu = \mu(\omega)$ число успіхів в елементарній події $\omega$. Тоді, як відомо (див. § 16),

$$\mathbf{P}\{\mu = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Звідси випливає, що функція розподілу випадкової величини $\mu$ дорівнює

$$F(x) = \sum_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Підсумовування ведеться тут по всіх цілих $k$, які менші від $x$; зокрема, якщо $x \leqslant 0$, то $F(x) = 0$; якщо $x > n$, то $F(x) = 1$. Графік функції $F(x)$ — східчаста лінія. Розглянуту величину $\mu$ називають випадковою величиною, що розподілена за *біномним законом*.



2. Рівномірний розподіл. Нехай на відрізок $[a; b]$ навмання кидається точка (тобто ймовірність попадання точки на деяку частину відрізка пропорційна мірі Лебега цієї частини). Простір елементарних подій $\Omega = [a; b]$; $S$ — це $\sigma$-алгебра всіх борелівських підмножин відрізка $[a; b]$. Випадкову величину $\xi$ визначимо так:

$$\xi(\omega) = \omega \quad (\omega \in [a; b]),$$

тобто $\xi$ — це та точка відрізка $[a; b]$, в яку потрапила кинута нами точка. Очевидно, ця функція вимірна. Знайдемо функцію розподілу. Якщо $x < a$, то $F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = 0$, оскільки подія $\{\xi < x\}$ є в цьому випадку неможливою. Нехай $x \in [a; b]$, тоді подія $\{\xi < x\}$ означає, що точка потрапила в проміжок $[a; x)$; за умовою ймовірність такої події пропорційна довжині цього проміжку:

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = c(x - a).$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності $c$ покладемо $x = b$, тоді

$$c(b - a) = \mathbf{P}\{\xi < b\} = 1,$$

звідки $c = \dfrac{1}{b-a}$ і, отже, $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$. Якщо $x > b$, то, очевидно, $F(x) = 1$. Остаточно

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Неважко помітити, що ця функція неперервна на всій дійсній осі. Величину $\xi$, розглянуту в цьому прикладі, називають випадковою величиною, що *рівномірно розподілена* на відрізку $[a; b]$.

## § 24. Властивості функцій розподілу

Нехай $\xi$ — довільна випадкова величина, а $F(x)$ — її функція розподілу. Доведемо деякі властивості цієї функції.

Властивість 1. *Функція розподілу є неспадною: якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.*

Доведення. Якщо $x_1 < x_2$, то за формулою (2) § 23

$$F(x_2) - F(x_1) = \mathbf{P}\{x_1 \leqslant \xi < x_2\}.$$

Оскільки за означенням ймовірність є невід'ємним числом, то $F(x_2) - F(x_1) \geqslant 0$. ■

Властивість 2. *Функція розподілу неперервна зліва:*

$$F(x - 0) = F(x).$$

Доведення. Візьмемо довільну зростаючу послідовність дійсних чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$, що збігається до $x$, і позначимо через $A_n$ подію $\{x_n \leqslant \xi <$

$< x\}$. Зрозуміло, що $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ і $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, тому за теоремою неперервності § 12

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0,$$

а за формулою (2) § 23

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{x_n \leqslant \xi < x\} = \lim_{n\to\infty} (F(x) - F(x_n)) =$$
$$= F(x) - \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x) - F(x-0),$$

отже, $F(x) - F(x-0) = 0$. ■

**Зауваження.** Цілком аналогічно, розглядаючи спадну послідовність дійсних чисел $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$, що збігається до $x$, і застосовуючи теорему неперервності до множин $A_n = \{x \leqslant \xi < x_n\}$, дістанемо

$$\mathbf{P}\{\xi \leqslant x\} = F(x+0). \quad (3)$$

Звідси

$$\mathbf{P}\{\xi = x\} = F(x+0) - F(x), \quad (4)$$

отже, ймовірність набути окреме значення $x$ відмінна від нуля тоді і тільки тоді, коли $x$ є точкою розриву функції розподілу.

Властивість 3. $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Доведення. Візьмемо довільну спадну послідовність дійсних чисел $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$, для якої $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, і покладемо $A_n = \{\xi < x_n\}$. Очевидно, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ і $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, тому за теоремою неперервності

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi < x_n\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0. \ ■$$

Властивість 4. $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Доведення. Візьмемо довільну зростаючу послідовність дійсних чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$, таку, що $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, і позначимо через $A_n$ подію $\{\xi \geqslant x_n\}$. Тоді $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ і $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. За теоремою неперервності

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0$$

і до того ж

$$\mathbf{P}(A_n) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}_n) = 1 - \mathbf{P}\{\xi < x_n\} = 1 - F(x_n),$$



тому

$$\lim_{n\to\infty} (1 - F(x_n)) = 0,$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 1. \ ■$$

Отже, ми довели, що будь-яка функція розподілу є неспадною, неперервною зліва і задовольняє умови

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1.$$

Виявляється, що й, навпаки, будь-яку неспадну, неперервну зліва функцію $F(x)$, для якої $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, можна розглядати як функцію розподілу деякої випадкової величини $\xi$. Для побудови такої випадкової величини візьмемо за простір елементарних подій множину дійсних чисел: $\Omega = \mathbf{R}$ і позначимо через $S$ σ-алгебру всіх борелівських множин на числовій прямій. Імовірність задамо спочатку на проміжках виду $(-\infty; x)$ рівністю

$$\mathbf{P}((-\infty; x)) = F(x).$$

Тоді $\mathbf{P}(\Omega) = F(+\infty) = 1$. Для півінтервалів вигляду $[a; b)$ покладемо $\mathbf{P}([a; b)) = F(b) - F(a)$. Оскільки функція $F(x)$ неспадна, то ця величина невід'ємна. Отже, ймовірнісну міру вже визначено для всіх півінтервалів вигляду $[a; b)$. Можна довести (див. [1], розд. I, § 14, [2]), що визначену таким чином ймовірнісну міру можна єдиним способом продовжити на σ-алгебру всіх борелівських множин; тим самим побудовано ймовірнісний простір $\langle \Omega, S, \mathbf{P} \rangle$. Випадкову величину тепер визначимо так: $\xi(\omega) = \omega$; її функція розподілу, згідно з означенням, є

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}((-\infty; x)) = F(x).$$

Зазначимо, що випадкова величина визначається своєю функцією розподілу неоднозначно: різні випадкові величини можуть мати ту саму функцію розподілу. Так, наприклад, нехай $\xi$ набуває значення 0 і 1, кожне з імовірністю $\frac{1}{2}$, $\eta = 1 - \xi$. Зрозуміло, що завжди $\xi \neq \eta$, у той самий час обидві величини мають ту саму функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

## § 25. Дискретні і неперервні випадкові величини

На практиці зустрічаються випадкові величини в основному двох типів — дискретні та неперервні.

**Дискретні випадкові величини.** *Випадкова величина* $\xi$ *називається дискретною, якщо значення, які вона може набувати, утворюють тільки скінченну або зчисленну множину.* Для того щоб задати таку випадкову величину, досить для кожного з цих можливих значень випадкової величини $\xi$ задати ймовірність набування цього значення

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = x_k\} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Таблицю виду

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де в першому рядку стоять усі можливі значення випадкової величини $\xi$, а в другому — ймовірності того, що $\xi$ набуває ці значення, називають розподілом випадкової величини $\xi$. Значення $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ випадкової величини можуть бути якими завгодно, щодо ймовірностей $p_k$, то вони всі додатні (ті значення $x_k$, для яких $p_k = 0$, можна просто відкинути) і, згідно з аксіомою адитивності, задовольняють умову

$$\sum_k p_k = \mathbf{P}(\Omega) = 1. \tag{7}$$

Навпаки, кожна таблиця вигляду (6), в якій $x_1, x_2, \ldots$ — різні дійсні числа, $p_k > 0$ і $\sum_k p_k = 1$, задає випадкову величину $\xi$, яка має цю таблицю своїм розподілом. Справді, досить покласти

$$\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}, \quad \mathbf{P}(x_k) = p_k, \quad \xi(x_k) = x_k.$$

Очевидно, за таблицею розподілу (6) можна побудувати функцію розподілу випадкової величини

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k; \tag{8}$$

цей запис означає, що підсумовування поширюється на ті індекси $k$, для яких $x_k < x$. Функція розподілу дискретної випадкової величини має розриви першого роду у кожній з точок $x_k$, причому, згідно з формулою (4), величина стрибка в точці $x_k$ дорівнює:

$$F(x_k + 0) - F(x_k) = \mathbf{P}\{\xi = x_k\} = p_k. \tag{9}$$



Якщо множину можливих значень $\xi$ можна розташувати в порядку зростання (це, зокрема, завжди можна зробити, якщо множина скінченна), то графік $F(x)$ являє собою східчасту лінію з інтервалами сталості між сусідніми значеннями $\xi$. Але у випадку зчисленної множини можливих значень $\xi$ функція $F(x)$ може і не мати інтервалів сталості (так буде тоді, коли ця множина скрізь щільна в $\mathbf{R}$). Нехай, наприклад, величина $\xi$ може набувати будь-яких раціональних значень. Занумеруємо яким-небудь способом усі раціональні числа: $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ і нехай $p_k = \mathbf{P}\{\xi = r_k\} = \frac{1}{2^k}$; зрозуміло, що $\xi$ є випадковою величиною, оскільки $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Усі раціональні числа є точками розриву функції розподілу цієї величини.

Прикладом дискретної випадкової величини може бути величина, розподілена за біномним законом (приклад 1 § 23). Розглянемо ще один важливий приклад дискретної величини.

**Приклад.** Закон Пуассона. Говорять, що випадкова величина $\xi$ розподілена за законом Пуассона, якщо $\xi$ набуває тільки значень 0, 1, 2, ..., з імовірностями

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

де $\lambda > 0$ — стала. Неважко помітити, що умова $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ виконана. Функція розподілу, згідно з формулою (8), має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k<x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

**Неперервні випадкові величини.** Випадкову величину $\xi$ називають неперервною, якщо її функцію розподілу можна подати у вигляді

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt, \tag{10}$$

де $p(x)$ — невід'ємна функція, що задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1 \tag{11}$$

(за цієї умови виконується рівність $F(+\infty) = 1$). Функцію $p(x)$ називають щільністю розподілу ймовірностей. Зокрема, якщо $F(x)$ диференційовна при всіх $x$ і похідна її обмежена, то випадкова величина $\xi$ неперервна і має щільність розподілу $p(x) = F'(x)$.

З означення неперервної випадкової величини безпосередньо випливає рівність

$$\mathbf{P}\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx.$$

Якщо $\xi$ — неперервна випадкова величина, то її функція розподілу $F(x)$, згідно з (10), неперервна, тому для будь-якого $x$ за формулою (4)

$$\mathbf{P}\{\xi = x\} = F(x+0) - F(x) = 0,$$

тобто ймовірність набування неперервною випадковою величиною будь-якого окремого значення дорівнює нулю.

Звідси випливає, що для неперервної випадкової величини при будь-яких $x_1$, $x_2$ мають місце рівності:

$$\mathbf{P}\{x_1 < \xi < x_2\} = \mathbf{P}\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = \mathbf{P}\{x_1 < \xi \leqslant x_2\} =$$
$$= \mathbf{P}\{x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx. \qquad (12)$$

Приклад неперервної випадкової величини дає рівномірно розподілена випадкова величина (приклад 2 § 23). Щільністю розподілу для цієї величини, очевидно, є

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x \in (a;\ b); \\ 0 & \text{при } x \notin (a;\ b). \end{cases}$$

Наведемо ще приклади неперервних випадкових величин.

**Приклади**

1. Нормальний розподіл (або розподіл за законом Гаусса). Нормальним називається розподіл, щільність якого дорівнює

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (13)$$

де $a$ — довільне, $\sigma > 0$. Теоретико-ймовірнісний смисл параметрів $a$, $\sigma$ буде розглянуто пізніше. Перевіримо виконання умови (11). Зробивши заміну $\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} = t$, дістанемо (§ 21):

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2a^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1.$$



З нормальним законом розподілу ми ще неоднозразово зустрінемося. Функція (13) має максимум при $x = a$, графік її розміщений симетрично відносно прямої $x = a$ і має вісь $Ox$ асимптотою. Графік щільності нормального розподілу при $a = 0$ і різних $\sigma$ наведено на рис. 11.

2. Закон Коші. Щільність розподілу для цього закону визначається формулою

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Зрозуміло, що умова (11) виконана.

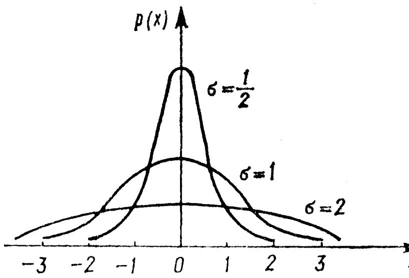


Рис. 11

Дискретними і неперервними випадковими величинами не вичерпуються всі можливі типи випадкових величин. Наприклад, випадкова величина може поводити себе в одних інтервалах як неперервна, а в інших — як дискретна. Але існують випадкові величини, які в жодному інтервалі не є ні дискретними, ні неперервними. Це так звані випадкові величини сингулярного

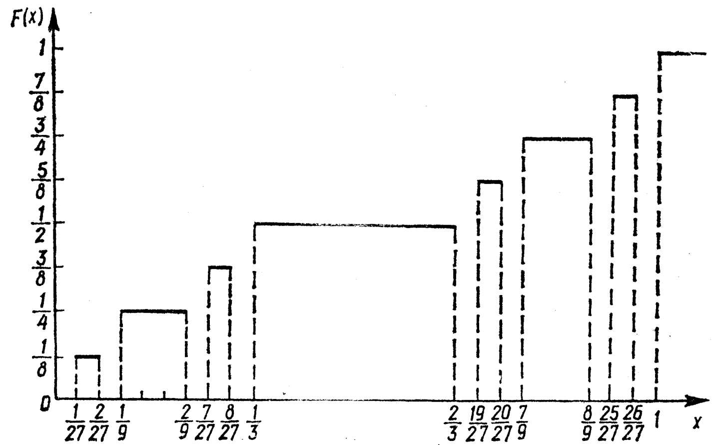


Рис. 12

типу; функція розподілу $F(x)$ такої величини неперервна при всіх $x$, але $\frac{dF}{dx} = 0$ майже скрізь. Наведемо приклад такої функції розподілу. Нехай $F(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $F(x) = 1$ при $x \geqslant 1$. На інтервалі (0; 1) функція $F(x)$ будується поступово, по кроках. Спочатку поділимо сегмент [0, 1] на три рівні частини: $\left(0; \frac{1}{3}\right]$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$, $\left(\frac{2}{3}; 1\right]$ і покладемо $F(x) = \frac{1}{2}$ при $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$. Два крайні сегменти знову розбиваємо на три рівні частини і на внутрішніх частинах покладаємо відповідно $F(x) = \frac{1}{4}$ при $x \in \left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right]$ і $F(x) = \frac{3}{4}$ при $x \in \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right]$. Чотири крайні сегменти, що залишилися, поділимо на три рівні частини кожний і на внутрішніх сегментах беремо $F(x)$, що дорівнює відповідно $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ (процес побудови функції на цьому кроці зображено на рис. 12). Продовжуючи цей процес, ми визначимо $F(x)$ на зчисленній множині сегментів. У точках, які не належать до цих сегментів, доозначимо $F(x)$ за неперервністю. Сумарна довжина тих сегментів, на яких $F(x)$ є сталою, дорівнює

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + 8 \cdot \frac{1}{81} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Таким чином, функція $F(x)$ неперервна при всіх $x$ і $F'(x) = 0$ майже скрізь, отже, $F(x)$ «росте» лише на множині лебегової міри нуль, але без стрибків. Графік функції $F(x)$ відомий під назвою кривої Кантора.

Надалі розглядатимемо лише дискретні і неперервні випадкові величини.

### Вправи

**1.** Двічі підкидають монету. Описати простір елементарних подій $\Omega$. Нехай $\xi(\omega)$ — число випадань герба. Знайти закон розподілу випадкової величини $\xi$. Записати вираз функції розподілу і побудувати її графік.

**2.** Випадкова величина $\xi$ набуває значення 0, 1, 2, 3 з імовірностями, рівними відповідно 0,1; 0,2; 0.3; 0,4. Записати вираз і побудувати графік функції розподілу величини $\xi$.

**3.** Здійснюються послідовні незалежні випробування, при кожному з яких імовірність успіху (настання події $A$) дорівнює $p$. Випробування проводяться до першого успіху. Описати простір елементарних подій $\Omega$. Позначимо через $\xi(\omega)$ число випробувань, здійснених до першої появи події $A$. Показати, що випадкова величина $\xi$ роз-



поділена за законом

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = (1 - p)^k p \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Цей розподіл називають *геометричним розподілом* з параметром $p$.

**4.** Випадкова величина $\xi$ розподілена за геометричним законом з параметром $p$ (див. вправу 3). Знайти $\mathbf{P}\{\xi < 2\}$ і $\mathbf{P}\{\xi \geqslant 2\}$.

**5.** Стріляють в ціль до першого влучення. Влучення при різних пострілах — незалежні події, ймовірність влучення при кожному пострілі — $p$. Описати простір елементарних подій $\Omega$. Нехай $\xi(\omega)$ — число зроблених пострілів. Обчислити розподіл випадкової величини $\xi(\omega)$.

**6.** Стрілець на змаганнях має 4 патрони і стріляє в ціль до першого влучення. Імовірність влучення при одному пострілі 0,7. Описати простір елементарних подій $\Omega$. Нехай $\xi(\omega)$ — число промахів. Знайти розподіл випадкової величини $\xi$. Обчислити $\mathbf{P}\{\xi \leqslant 3\}$, $\mathbf{P}\{2 < \xi \leqslant 4\}$. Записати вираз функції розподілу та побудувати її графік.

**7.** Розв'язати попередню задачу за умови, що стрілець має $n$ патронів і ймовірність влучення дорівнює $p$.

**8.** Є $n$ заготовок для певної деталі. Імовірність виготовлення стандартної деталі із заготовки дорівнює $p$. Знайти закон розподілу числа $\xi$ заготовок, що залишаються після виготовлення першої стандартної деталі. Записати вираз функції розподілу.

**9.** Випадкова величина $\xi$ з щільністю розподілу

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geqslant 0 \end{cases}$$

називається розподіленою за *показниковим законом* з параметром $\lambda$. а) Знайти функцію розподілу показниково розподіленої величини та побудувати її графік; б) обчислити $\mathbf{P}\{\xi > x\}$.

**10.** Які з поданих нижче функцій є функціями розподілу:

а) $F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} x$;

б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{[x]}{2}, & 0 < x \leqslant 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases}$

в) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{x}{1 + x}, & x > 0; \end{cases}$

г) $F(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$;

д) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x}, & x > 0. \end{cases}$

**11.** Щільність розподілу випадкової величини $\xi$ дорівнює $p(x) = a\mathrm{e}^{-\lambda|x|}$ $(\lambda > 0)$. Обчислити: а) коефіцієнт $a$; б) функцію розподілу $\xi$; в) побудувати графіки щільності розподілу і функції розподілу.

**12.** Випадкова величина $\xi$ називається *симетричною*, якщо функції розподілу випадкових величин $\xi$ і $-\xi$ збігаються. Сформулювати умову симетричності випадкової величини: а) в термінах функції розподілу; б) в термінах щільності розподілу.

13. Випадкова величина $\xi$ рівномірно розподілена: а) на відрізку $[-1; 1]$; б) на відрізку $[-1; 3]$. Знайти в обох випадках функцію розподілу випадкової величини $\eta = |\xi|$.

14. Випадкова величина $\xi$ має щільність розподілу $p(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}$. Знайти: а) сталу $a$; б) функцію розподілу. Обчислити $\mathbf{P}\{\xi \geqslant 1\}$.

15. Щільність розподілу випадкової величини $\xi$ дорівнює

$$p(x) = \begin{cases} a\cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

а) знайти сталу $a$; б) знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати графіки функцій $p(x)$ та $F(x)$; в) обчислити $\mathbf{P}\left\{0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$.

16. Щільність розподілу випадкової величини $\xi$ дорівнює

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ ax & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 0 & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

а) знайти сталу $a$; б) знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати графіки функцій $p(x)$ та $F(x)$.

17. Щільність розподілу випадкової величини $\xi$ дорівнює

$$p(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0 \text{ і } x > 1; \end{cases}$$

а) знайти функцію розподілу та побудувати її графік; б) обчислити ймовірність $\mathbf{P}\{-1 < \xi < 0{,}5\}$.

## § 26. Багатовимірні випадкові величини (випадкові вектори)

Нехай на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, S, \mathbf{P} \rangle$ задано $n$ випадкових величин

$$\xi_1 = \xi_1(\omega), \quad \xi_2 = \xi_2(\omega), \ \ldots, \ \xi_n = \xi_n(\omega).$$

Розглядаючи $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ як координати точки (вектора) $n$-вимірного евклідового простору $\mathbf{R}^n$, можна сказати, що кожному $\omega \in \Omega$ поставлено у відповідність $n$-вимірний вектор $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Вектор $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ називають випадковим, або $n$-вимірною випадковою величиною. Розглянемо подію $\{\xi_1 < x_1, \ \xi_2 < x_2, \ \ldots, \ \xi_n < x_n\}$, що полягає у виконанні всіх записаних у дужках нерівностей. Оскільки ця подія є добутком подій $\{\xi_1 < x_1\}$, $\{\xi_2 < x_2\}$, ..., $\{\xi_n < x_n\}$, які належать до $\sigma$-алгебри $S$, то й

$$\{\xi_1 < x_1, \ \xi_2 < x_2, \ \ldots, \ \xi_n < x_n\} \in S$$



при будь-яких дійсних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Отже, визначено ймовірність цієї події

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{\xi_1 < x_1, \ \xi_2 < x_2, \ \ldots, \ \xi_n < x_n\}.$$

Цю функцію від $n$ змінних називають *функцією розподілу випадкового вектора* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Сформулюємо деякі властивості функції розподілу багатовимірної випадкової величини. Доводяться ці властивості так само, як і у випадку одновимірної випадкової величини (§ 24); пропонуємо це зробити читачеві.

1) Функція розподілу є неспадною по кожному аргументу.

2) Функція розподілу неперервна зліва по кожному аргументу.

3) $F(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty) = 1$.

4) $\lim\limits_{x_k \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \ (1 \leqslant k \leqslant n)$ при будь-яких значеннях $x_i$ $(i \neq k)$.

5) $\lim\limits_{x_k \to +\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є функцією розподілу $(n-1)$-вимірної випадкової величини $(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$. Це випливає з такої формули, яка легко перевіряється за допомогою аксіоми адитивності ймовірності або теореми неперервності (§ 12):

$$\lim_{x_k \to +\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{x_k \to +\infty} \mathbf{P}\{\xi_1 < x_1, \ldots$$
$$\ldots, \xi_n < x_n\} = \mathbf{P}\{\xi_1 < x_1, \ \ldots, \ \xi_{k-1} <$$
$$< x_{k-1}, \ \xi_{k+1} < x_{k+1}, \ \ldots, \ \xi_n < x_n\}.$$

Розглянемо, зокрема, двовимірну випадкову величину $(\xi, \eta)$ з функцією розподілу $F(x, y)$. Властивість 5) дає змогу знайти функції розподілу окремих компонент $\xi$ і $\eta$

$$F_\xi(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y), \quad F_\eta(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y). \quad (14)$$

Поводження випадкового вектора, як і у випадку одновимірної випадкової величини, можна характеризувати не тільки за допомогою функції розподілу. З деякими іншими способами завдання випадкового вектора ми познайомимось у випадку випадкових векторів двох основних типів — дискретного та неперервного. При цьому для простоти записів обмежимося двовимірними випадковими величинами, тобто випадком $n = 2$.

**Дискретні випадкові вектори.** *Двовимірну випадкову величину* $(\xi, \eta)$ *називають дискретною, якщо множина зна-*

*чень, які вона може набути, є скінченною або зчисленною.* Для задання дискретної двовимірної випадкової величини досить задати її можливі значення $(x_i, y_k)$ і ймовірності кожного з них: $p_{ik} = \mathbf{P}\{\xi = x_i, \eta = y_k\}$. Закон розподілу такої величини може бути виражений у вигляді такої таблиці з двома входами $\left(\text{в ній дано позначення } p_i = \sum_k p_{ik},\ q_k = \sum_i p_{ik}\right)$:

| $\eta \backslash \xi$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_i$ | ... | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $p_{11}$ | $p_{21}$ | ... | $p_{i1}$ | ... | $q_1$ |
| $y_2$ | $p_{12}$ | $p_{22}$ | ... | $p_{i2}$ | ... | $q_2$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $y_k$ | $p_{1k}$ | $p_{2k}$ | ... | $p_{ik}$ | ... | $q_k$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $\Sigma$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_i$ | ... | 1 |

З аксіоми адитивності випливає, що

$$p_i = \sum_k p_{ik} = \sum_k \mathbf{P}\{\xi = x_i,\ \eta = y_k\} = \mathbf{P}\{\xi = x_i\};$$

аналогічно

$$q_k = \mathbf{P}\{\eta = y_k\}.$$

Таким чином, імовірності $\{p_i\}$ задають розподіл випадкової величини $\xi$, а $\{q_k\}$ — розподіл випадкової величини $\eta$. При цьому

$$\sum_{i,k} p_{ik} = \sum_i p_i = \sum_k q_k = 1.$$

**Неперервні випадкові вектори.** *Двовимірну випадкову величину $(\xi, \eta)$ називають неперервною, якщо існує така функція $p(x, y)$, що функція розподілу $F(x, y)$ даної випадкової величини може бути записана у вигляді*

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u, v)\, du dv. \tag{15}$$



Функцію $p(x, y)$ називають *щільністю розподілу ймовірностей випадкового вектора* $(\xi, \eta)$. При цьому

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = p(x, y)$$

в точках неперервності функції $p(x, y)$.

З означення щільності розподілу безпосередньо випливають такі її властивості:

1) $p(x, y) \geqslant 0$ при всіх $x, y$;

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, dxdy = 1; \tag{16}$$

3) якщо $G$ — довільна область у площині $xOy$, то

$$\mathbf{P}\{(\xi, \eta) \in G\} = \iint_G p(x, y)\, dxdy \tag{17}$$

(якщо $G$ — прямокутник із сторонами, паралельними осям координат, то ця формула безпосередньо випливає з означення функції розподілу і рівності (15); якщо $G$ — довільна область, то треба її покрити сіткою прямокутників і застосувати стандартні міркування інтегрального числення).

Якщо, зокрема, $p(x, y)$ неперервна у точці $(x, y)$, то з точністю до нескінченно малих вищих порядків матимемо:

$$\mathbf{P}\{x \leqslant \xi < x + dx, \quad y \leqslant \eta < y + dy\} = p(x, y)\, dxdy.$$

Знаючи щільність розподілу ймовірностей $p(x, y)$ двовимірної випадкової величини $(\xi, \eta)$, легко знайти щільності розподілу для її компонент $p_\xi(x)$ та $p_\eta(y)$. Справді, згідно з формулами (14), функція розподілу випадкової величини $\xi$ дорівнює:

$$F_\xi(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} p(u, v)\, dudv,$$

звідки

$$p_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, v)\, dv; \tag{18}$$

аналогічно

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u, y)\, du. \tag{18'}$$

7 3—2566

**Приклади**

1. Випадковий вектор $(\xi, \eta)$ називається рівномірно розподіленим в області $D \subset R^2$, якщо щільність розподілу для нього дорівнює:

$$p(x, y) = \begin{cases} c & \text{при } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Знайдемо величину сталої $c$. Позначимо через $\mu(D)$ площу області $D$ і, згідно з умовою (16), дістанемо

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, dxdy = \iint_D c\, dxdy = c\mu(D),$$

звідси

$$c = \frac{1}{\mu(D)}.$$

Якщо $G \subset D$, то за формулою (17)

$$\mathbf{P}\{(\xi, \eta) \in G\} = \iint_G p(x, y)\, dxdy = c\iint_G dxdy = c\mu(G) = \frac{\mu(G)}{\mu(D)},$$

тобто ймовірність потрапляння точки в область $G \subset D$ дорівнює відношенню площ областей $G$ і $D$. Таким чином, у задачах на геометричні ймовірності (§ 13) ми мали справу з рівномірно розподіленими випадковими векторами.

2. Двовимірна випадкова величина $(\xi, \eta)$ називається *нормально розподіленою* (або розподіленою за нормальним законом), якщо щільність її розподілу має такий вигляд:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right)}, \tag{19}$$

де $a$, $b$ — довільні, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $-1 < \rho < 1$; теоретико-ймовірнісний смисл цих параметрів буде встановлено пізніше. Покажемо, що кожна з компонент $\xi$, $\eta$ є випадковою величиною, яка розподілена за одновимірним нормальним законом. Знайдемо, наприклад, щільність розподілу ймовірностей для випадкової величини $\xi$. Згідно з формулою [18]

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right)} dy.$$

Виділивши у показнику повний квадрат і зробивши заміну змінної

$$t = \frac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\left(\frac{y-b}{\sigma_2} - \rho\frac{x-a}{\sigma_1}\right),$$



дістанемо

$$p_\xi(x) = \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-b}{\sigma_2} - \rho\frac{x-a}{\sigma_1}\right)^2} dy =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\pi\sqrt{2}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}}.$$

Аналогічно доводиться, що

$$p_\eta(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}},$$

тобто кожна з випадкових величин $\xi$ і $\eta$ розподілена за нормальним законом.

## § 27. Незалежність випадкових величин. Композиція законів розподілу

Поняття незалежності випадкових величин, як і поняття незалежності подій, відіграє значну роль у теорії ймовірностей.

Означення. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ називаються незалежними, якщо

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1) F_2(x_2) \ldots F_n(x_n), \tag{20}$$

де $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функція розподілу $n$-вимірної випадкової величини $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $F_k(x_k)$ — функція розподілу випадкової величини $\xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Розглянемо окремо випадки дискретних і неперервних величин, обмежуючись для простоти записів випадком $n = 2$.

Якщо $\xi$, $\eta$ — дискретні випадкові величини, то їх незалежність означає, що при будь-яких $i$, $k$

$$\mathbf{P}\{\xi = x_i, \eta = y_k\} = \mathbf{P}\{\xi \quad x_i\}\, \mathbf{P}\{\eta = y_k\}.$$

Нехай $\xi$, $\eta$ — незалежні неперервні випадкові величини з функціями розподілу $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$ і щільностями розподілу ймовірностей $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$; $F(x, y)$ і $p(x, y)$ — функція розподілу і щільність розподілу двовимірної випадкової величини $(\xi, \eta)$. Тоді за означенням незалежності

$$F(x, y) = F_\xi(x) F_\eta(y); \tag{21}$$

диференціюючи цю рівність по $x$ і по $y$, дістанемо:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F'_\xi(x)\, F'_\eta(y),$$

тобто

$$p(x, y) = p_\xi(x)\, p_\eta(y). \tag{22}$$

Навпаки, умова (22) є достатньою для незалежності випадкових величин $\xi$ і $\eta$. Справді, якщо умову (22) виконано, то за формулою (15)

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u, v)\, du dv = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_\xi(u)\, p_\eta(v)\, du dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} p_\xi(u)\, du \int_{-\infty}^{y} p_\eta(v)\, dv = F_\xi(x)\, F_\eta(y),$$

тобто випадкові величини $\xi$ і $\eta$ незалежні.

**Приклад.** Нехай $(\xi, \eta)$ — двовимірна випадкова величина, компоненти якої $\xi$ і $\eta$ — незалежні випадкові величини, розподілені за нормальним законом

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad p_\eta(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

За формулою (22) щільність розподілу ймовірностей двовимірної величини $(\xi, \eta)$ дорівнює

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Порівнюючи цю формулу з формулою (19) для щільності розподілу двовимірного нормального закону, робимо висновок, що для незалежних випадкових величин $\xi$ і $\eta$ параметр $\rho$ дорівнює нулю. Питання про роль параметра $\rho$ буде докладніше розглянуто в розд. V.

Нехай задано двовимірну випадкову величину $(\xi, \eta)$, що має функцію розподілу $F(x, y)$ і щільність імовірності $p(x, y)$. Треба знайти функцію розподілу $\Phi(z)$ і щільність розподілу ймовірностей $p(z)$ випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$. Таке питання постає при розв'язуванні багатьох задач теорії ймовірностей.

Згідно з означенням функції розподілу,

$$\Phi(z) = \mathbf{P}\{\zeta < z\} = \mathbf{P}\{\xi + \eta < z\}.$$

Умова $\xi + \eta < z$ еквівалентна умові $(\xi; \eta) \in G$, де $G$ — півплощина площини $xOy$, що визначається нерівністю $x + y < z$ (рис. 13), тому за формулою (17)



$$\Phi(z) = \mathbf{P}\{(\xi, \eta) \in G\} = \iint_G p(x, y)\, dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} p(x, y)\, dy.$$

Зробимо у внутрішньому інтегралі заміну $y = u - x$, після чого змінимо порядок інтегрування

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z} p(x, u - x)\, du = \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{\infty} p(x, u - x)\, dx.$$

Тому одновимірна випадкова величина $\zeta = \xi + \eta$ має щільність розподілу ймовірностей $p(z)$, причому

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x)\, dx. \tag{23}$$

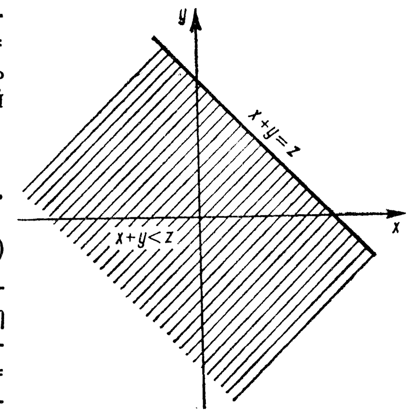


Рис. 13

Нехай, зокрема, випадкові величини $\xi$ і $\eta$ незалежні, тоді за формулою (22) $p(x, y) = p_\xi(x)\, p_\eta(y)$ і формула (23) набуває вигляду

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\, p_\eta(z - x)\, dx. \tag{24}$$

Цілком аналогічно можна показати, що

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(z - y)\, p_\eta(y)\, dy. \tag{25}$$

Функція $p(z)$, утворена з функцій $p_\xi(x)$ і $p_\eta(y)$ за формулою (24) або (25), називається **згорткою** або **композицією** цих функцій.

Формули, подібні до (24) і (25), легко вивести також для закону розподілу суми двох незалежних дискретних випадкових величин.

**Приклад.** Нехай $\xi$ і $\eta$ — незалежні і рівномірно розподілені на сегменті [0; 1]. Знайти щільність розподілу $p(z)$ суми $\zeta = \xi + \eta$.

Щільності розподілу ймовірностей для $\xi$ і $\eta$ дорівнюють:

$$p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0;\ 1], \\ 0 & \text{при } x \notin [0;\ 1]. \end{cases}$$

За формулою (24)

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\, p_\eta(z - x)\, dx = \int_0^1 p_\eta(z - x)\, dx. \qquad (26)$$

Якщо $z < 0$, то й $z - x < 0$, тому $p_\eta(z - x) = 0$ і, отже, $p(z) = 0$; аналогічно при $z > 2$ маємо $z - x > z - 1 > 1$, тому $p_\eta(z - x) = 0$, і, отже, $p(z) = 0$.

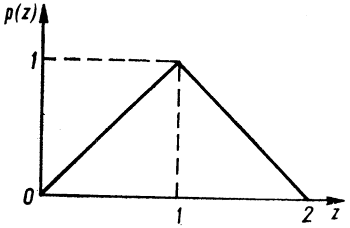


Рис. 14

Нехай тепер $0 \leqslant z \leqslant 2$; підінтегральна функція в формулі (26) $p_\eta(z - x)$ відмінна від нуля тільки при тих значеннях $x$, які задовольняють нерівність $0 \leqslant z - x \leqslant 1$ або рівносильну їй нерівність

$$z - 1 \leqslant x \leqslant z.$$

Нехай спочатку $0 \leqslant z \leqslant 1$; тоді з формули (26)

$$p(z) = \int_0^z dx = z;$$

якщо $1 \leqslant z \leqslant 2$, то $z - 1 \geqslant 0$ і

$$p(z) = \int_{z-1}^{1} dz = 2 - z.$$

Об'єднуючи ці результати, можна записати:

$$p(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \notin [0;\ 2], \\ z & \text{при } z \in [0;\ 1], \\ 2 - z & \text{при } z \in [1;\ 2]. \end{cases}$$

Графік щільності розподілу $p(z)$ зображено на рис. 14. Цей розподіл називають *трикутним розподілом* або *розподілом Сімпсона.*

**Вправи**

18. Кидають два гральних кубики. Описати простір елементарних подій. Нехай $\xi(\omega)$ — число появ шістки на першому кубику, $\eta(\omega)$ — число появ шістки на другому кубику. Знайти сумісний розподіл $\xi(\omega)$ і $\eta(\omega)$. Довести, що величини $\xi(\omega)$ і $\eta(\omega)$ незалежні.

19. Кидають два гральних кубики. Описати простір елементарних подій $\Omega$. Нехай $\xi(\omega)$ — число очок на першому кубику, $\eta(\omega)$ — число очок на другому кубику. Знайти сумісний розподіл $\xi(\omega)$ і $\eta(\omega)$. Довести, що величини $(\omega)$ і $\eta(\omega)$ незалежні.

20. Нехай $\xi$ і $\eta$ — дискретні незалежні випадкові величини, які набувають значень $x_1, \ldots, x_n$ з імовірностями

$$\mathbf{P}\{\xi = x_k\} = a_k, \quad \mathbf{P}\{\eta = x_k\} = b_k \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Обчислити $\mathbf{P}\{\xi = \eta\}$.



21. Нехай $\xi$ і $\eta$ — незалежні випадкові величини, які набувають значень $0, 1, \ldots, n$, причому

$$\mathbf{P}\{\xi = i\} = \mathbf{P}\{\eta = i\} = \frac{1}{n+1}.$$

Знайти розподіл випадкової величини $\gamma = \xi + \eta$.

22. Нехай $\xi_1$ та $\xi_2$ — незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені на $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

23. Випадкові величини $\xi_1$ і $\xi_2$ незалежні і рівномірно розподілені на відрізку $[0;\ 1]$. Знайти щільність розподілу випадкових величин: а) $\xi_1 \cdot \xi_2$; б) $\xi_1 - \xi_2$; в) $|\xi_1 - \xi_2|$.

24. Нехай $\xi$ і $\eta$ — незалежні випадкові величини, які мають показниковий розподіл з параметром $\lambda_1$ і $\lambda_2$ відповідно. Довести, що щільність розподілу випадкової величини $\xi + \eta$ дорівнює

$$\lambda_1 \lambda_2 \frac{e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (x > 0).$$

# Розділ V

# ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

З викладеного в попередньому розділі випливає, що найбільш повну інформацію про характер і поведінку випадкової величини дає її функція розподілу (або закон розподілу, записаний в якій-небудь іншій формі; наприклад, щільність розподілу для неперервної випадкової величини). Проте при розв'язуванні багатьох задач теорії ймовірностей буває достатньо знати лише кілька чисел, які певною мірою характеризують випадкову величину (хоч і не так повно, як функція розподілу). Такі числа називають **числовими характеристиками** випадкової величини. Найважливішими з числових характеристик є математичне сподівання (або середнє значення) і дисперсія, до вивчення яких ми переходимо. Про деякі інші числові характеристики випадкових величин мова йтиме в § 33.

## § 28. Поняття інтеграла по ймовірнісній мірі

У цьому параграфі введемо важливе поняття інтеграла по ймовірності. Це поняття збігається з поняттям інтеграла по довільній мірі (оскільки ймовірність — це окремий випадок міри). Інтеграл по ймовірності вводиться так само, як інтеграл Лебега від функції однієї дійсної змінної, який вивчається у курсі математичного аналізу, тому ми сформулюємо основні властивості інтеграла; доведення їх можна знайти, наприклад, в книгах [1; 2; 10; 19].

Нехай $\langle\Omega, S, \mathbf{P}\rangle$ — ймовірнісний простір; $\xi(\omega)$ — випадкова величина, задана на цьому просторі, тобто вимірна функція, визначена на $\Omega$.

а) Розглянемо спочатку випадок обмеженої функції. Нехай $m \leqslant \xi(\omega) < M$; розіб'ємо проміжок $[m; M)$ на $n$ частин точками

$$m = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = M,$$

і нехай $\lambda = \max(x_{k+1} - x_k)$, $x_k \leqslant z_k \leqslant x_{k+1}$; розглянемо інтегральну суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} z_k \mathbf{P}\{x_k \leqslant \xi < x_{k+1}\}. \qquad (1)$$

Якщо $\lambda \to 0$, то суми $\sigma$ мають скінченну границю, яка не залежить від способу розбиття проміжку $[m; M)$, від вибору точок $z_k$, а також від вибору самих меж $m$ і $M$ (це твердження буде нижче доведено). Ця границя називається **інтегралом від функції** $\xi(\omega)$ (по ймовірнісній мірі $\mathbf{P}$) і позначається так:

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma = \int_\Omega \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \int \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega). \qquad (2)$$

Нехай задано довільну множину $A \in S$. **Індикатором множини** $A$ називається функція

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \omega \in A, \\ 0, & \text{якщо } \omega \notin A. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\chi_A(\omega)$ — вимірна функція, тому й функція $\xi(\omega)\chi_A(\omega)$ також вимірна. Інтеграл від функції $\xi(\omega)$ по множині $A \in S$ визначається так:

$$\int_A \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \int \xi(\omega)\chi_A(\omega)\mathbf{P}(d\omega). \qquad (3)$$

б) Нехай тепер $\xi(\omega)$ — необмежена функція. Якщо $\xi(\omega) \geqslant 0$, то інтегралом від неї називається число (якщо воно існує)

$$\int \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \lim_{n\to\infty}\int_A \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \lim_{n\to\infty}\int \xi(\omega)\chi_A(\omega)\mathbf{P}(d\omega),$$



де $A = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leqslant n\}$. Якщо $\xi(\omega)$ може набувати значення обох знаків, то покладемо

$$\xi^+(\omega) = \max\{0, \xi(\omega)\}, \quad \xi^-(\omega) = \max\{0, -\xi(\omega)\};$$

тоді

$$\xi(\omega) = \xi^+(\omega) - \xi^-(\omega), \quad |\xi(\omega)| = \xi^+(\omega) + \xi^-(\omega), \qquad (4)$$

причому функції $\xi^+(\omega)$ і $\xi^-(\omega)$ також вимірні. Інтеграл від функції $\xi(\omega)$ визначається такою рівністю:

$$\int \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \int \xi^+(\omega)\mathbf{P}(d\omega) - \int \xi^-(\omega)\mathbf{P}(d\omega),$$

якщо обидва інтеграли в правій частині існують. Таким чином, інтеграл від необмеженої функції існує не завжди; з формули (4) випливає, що для його існування необхідно і достатньо, щоб існував інтеграл $\int |\xi(\omega)|\mathbf{P}(d\omega)$. Інтеграл від необмеженої функції по множині визначається, як і у випадку обмеженої функції, формулою (3).

Мають місце такі властивості інтеграла (при цьому припускається, що всі записані інтеграли існують).

1) Якщо $A_i \in S$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $A_iA_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ і $\bigcup_i A_i = A$, то

$$\int_A \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \sum_i \int_{A_i} \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega).$$

2) Якщо $c$ — довільна стала, то

$$\int c\xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = c\int \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega).$$

3) $\int (\xi(\omega) + \eta(\omega))\mathbf{P}(d\omega) = \int \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega) + \int \eta(\omega)\mathbf{P}(d\omega)$, якщо обидва інтеграли в правій частині існують.

4) Якщо $\xi(\omega) \leqslant \eta(\omega)$, то $\int \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega) \leqslant \int \eta(\omega)\mathbf{P}(d\omega)$.

5) $\left|\int \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega)\right| \leqslant \int |\xi(\omega)|\mathbf{P}(d\omega)$.

6) Якщо $c_1 \leqslant \xi(\omega) \leqslant c_2$, то $c_1 \leqslant \int \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega) \leqslant c_2$.

7) Якщо $\xi \geqslant 0$ і $\int \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = 0$, то $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 1$.

8) Якщо $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини $\xi$, то

$$\int \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x),$$

де інтеграл в правій частині — це інтеграл Стільтьєса, з яким читач знайомий з курсу математичного аналізу (див., наприклад, [18], т. III).

Доведемо останню властивість; для простоти припустимо, що $\xi(\omega)$ — обмежена функція, $m \leqslant \xi(\omega) < M$. Оскільки

$$\mathbf{P}\{x' \leqslant \xi < x''\} = F(x'') - F(x'),$$

то інтегральну суму (1) можна записати так:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} z_k (F(x_{k+1}) - F(x_k));$$

границя таких сум при $\lambda \to 0$ є, як відомо, інтеграл Стільтьєса $\int\limits_m^M x dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$ (останнє розширення меж інтегрування не змінює інтеграла, оскільки $F(x) = \text{const}$ на проміжках $(-\infty; m]$ і $[M; +\infty)$. При цьому інтеграл Стільтьєса існує, оскільки $f(x) = x$ — неперервна функція, а $F(x)$ — неспадна. Ці міркування доводять як сформульовану властивість (у випадку обмеженої функції), так і існування інтеграла по ймовірності від обмеженої функції (тобто існування границі (2)). ■

9) Нехай $f(x)$ — борелівська функція дійсної змінної $x$ (це означає, що $\{x \in \mathbf{R} : f(x) < t\}$ при довільному $t \in \mathbf{R}$ є борелівська множина на прямій). Тоді $f(\xi(\omega))$ є також випадковою величиною для будь-якої випадкової величини $\xi(\omega)$. При цьому

$$\int f(\xi(\omega))\, \mathbf{P}(d\omega) = \int f(x)\, \mathbf{P}_\xi(dx),$$

де $\mathbf{P}_\xi$ — міра на прямій, що породжується випадковою величиною $\xi$ і визначається на півінтервалах формулою

$$\mathbf{P}_\xi([a, b)) = \mathbf{P}\{a \leqslant \xi < b\} = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ — функція розподілу $\xi(\omega)$; ця міра уже розглядалася в § 24. Інтеграл у правій частині по мірі $\mathbf{P}_\xi$ називається інтегралом Лебега — Стільтьєса і записується так:

$$\int f(\xi(\omega))\, \mathbf{P}(d\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dF(x). \qquad (5)$$

Зокрема, якщо $f(x)$ неперервна, то інтеграл Лебега — Стільтьєса збігається із звичайним інтегралом Стільтьєса (який позначається також $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dF(x)$). Надалі матимемо справу в основному саме з цим випадком.



## § 29. Математичне сподівання

**Означення та приклади.** Розглянемо приклад, який з'ясує доцільність прийнятого означення математичного сподівання.

**Приклад.** Для розиграшу лотереї було випущено $N$ білетів, з них $m_1$ білетів з виграшем $x_1$ крб., $m_2$ білетів з виграшем $x_2$ крб., ..., $m_n$ білетів з виграшем $x_n$ крб. Яка ціна білета, якщо сума грошей, виручених від продажу білетів, дорівнює сумі всіх виграшів?

Якщо позначити шукану ціну білета через $a$, то за умовою

$$Na = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n,$$

звідси

$$a = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{N},$$

тобто ціна одного білета дорівнює «середньому виграшу». Останню формулу можна записати й інакше. Покладемо $p_i = \frac{m_i}{N}$; очевидно, $p_i$ — це ймовірність того, що на вибраний навмання білет припаде виграш $x_i$ крб. Тоді цю формулу запишемо таким чином:

$$a = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Оскільки подібні вирази виникають у різноманітних задачах теорії ймовірностей, то для них введено спеціальне позначення і назву. Розглянемо спочатку випадок дискретної випадкової величини.

Нехай $\xi$ — дискретна випадкова величина, яка набуває значення $x_1$, $x_2$, ... відповідно з імовірностями $p_1$, $p_2$, ... . *Математичним сподіванням* (або *середнім значенням*) випадкової величини $\xi$ називають число

$$\mathbf{M}\xi = \sum_k x_k p_k. \qquad (6)$$

Якщо при цьому число можливих значень $\xi$ є нескінченним, то накладається умова, щоб ряд у правій частині формули (6) був абсолютно збіжним; якби цей ряд збігався умовно, то його сума залежала б від порядку членів і математичне сподівання не мало б смислу.

Ціна одного лотерейного білета у попередньому прикладі — це математичне сподівання виграшу на навмання вибраний білет.

Перейдемо до випадку довільної випадкової величини.

*Означення.* Нехай $\xi = \xi(\omega)$ — випадкова величина, задана на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, S, \mathbf{P} \rangle$. Математичним сподіванням (або середнім значенням) величини $\xi$ називається число

$$\mathbf{M}\xi = \int \xi(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega), \tag{7}$$

якщо інтеграл, що стоїть в правій частині, існує. Згідно з викладеним в попередньому параграфі це означення рівносильне такому:

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x), \tag{8}$$

де $F(x)$ — функція розподілу величини $\xi$. З означення інтеграла випливає, що $\mathbf{M}\xi$ існує тоді і тільки тоді, коли існує $\mathbf{M}\,|\,\xi\,|$.

Розглянемо два випадки, які найчастіше зустрічаються на практиці. Якщо $\xi$ — дискретна випадкова величина, для якої $\mathbf{P}\{\xi = x_k\} = p_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то функція розподілу $F(x)$ неперервна в усіх точках, крім точок $x_k$, причому $F(x_k + 0) - F(x_k - 0) = p_k$. Тому з відомих властивостей інтеграла Стільтьєса (див., наприклад, [18], т. III) випливає, що формула (8) в цьому випадку набуває вигляду

$$\mathbf{M}\xi = \sum_k x_k (F(x_k + 0) - F(x_k - 0)) = \sum_k x_k p_k,$$

тобто переходить у формулу (6).

Якщо $\xi$ — неперервна випадкова величина з щільністю ймовірності $p(x)$, то формула (8) переходить в таку:

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\, dx. \tag{9}$$

**Приклади**

**1.** Нехай величина $\xi$ розподілена за законом Коші (див. § 25, приклад 2), тобто має щільність розподілу $p(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$. Для цієї величини інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{1 + x^2}\, dx$$

є розбіжним. Отже, величина $\xi$ не має математичного сподівання.

**2.** Знайти математичне сподівання випадкової величини $\xi$, яка дорівнює числу очок, що випадає на гральному кубику при одному киданні.

Величина $\xi$ набуває кожного із цілих значень від 1 до 6 з імовірністю $\dfrac{1}{6}$, тому

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1+6}{2} \cdot 6 = 3{,}5.$$



**3.** Знайти математичне сподівання випадкової величини $\xi$, що розподілена за законом Пуассона (див. приклад на с. 89):

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Згідно з формулою (6) маємо

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Таким чином, з'ясовано теоретико-ймовірнісний смисл параметра $\lambda$: *параметр $\lambda$ в законі Пуассона дорівнює математичному сподіванню.*

**4.** Знайти математичне сподівання випадкової величини $\xi$, рівномірно розподіленої на відрізку $[a; b]$ (див. § 23, приклад 2).

Оскільки щільність розподілу для величини $\xi$ дорівнює

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x \in (a; b), \\ 0 & \text{при } x \notin [a; b], \end{cases}$$

то за формулою (9) дістаємо

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

*Отже, математичне сподівання випадкової величини, рівномірно розподіленої на відрізку $[a; b]$, є серединою цього відрізка.*

**Властивості математичного сподівання.** Основні властивості математичного сподівання, згідно з формулою (7), збігаються з властивостями інтеграла, поданими в § 28. Сформулюємо ці властивості у вигляді теорем і доведемо деякі з них.

***Теорема 1.*** *Якщо $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини $\xi$, $f(x)$ — функція, неперервна на множині значень $\xi$, то*

$$\mathbf{M}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dF(x).$$

*Якщо, зокрема, $\xi$ — неперервна випадкова величина з щільністю розподілу $p(x)$, то*

$$\mathbf{M}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, p(x)\, dx,$$

*а якщо $\xi$ — дискретна випадкова величина з законом розподілу* $\mathbf{P}\{\xi = x_k\} = p_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *то*

$$\mathbf{M}f(\xi) = \sum_k f(x_k)\, p_k. \qquad (10)$$

Доведення. З означення математичного сподівання і формули (5) відразу випливає твердження теореми 1:

$$\mathbf{M}f(\xi) = \int f(\xi(\omega))\, \mathbf{P}(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dF(x).$$

Доведемо цю теорему безпосередньо для випадку дискретної випадкової величини, тобто доведемо формулу (10) (при цьому немає потреби вимагати неперервності функції $f(x)$). Дискретна випадкова величина $\eta = f(\xi)$ може набувати лише значення $y_k = f(x_k)$, але може статися, що для різних $x_k$ значення $y_k$ будуть однаковими. Тому

$$\mathbf{P}\{\eta = y_k\} = \sum_{j: f(x_j) = y_k} \mathbf{P}\{\xi = x_j\} = \sum_{j: f(x_j) = y_k} p_j,$$

де підсумовування поширюється на ті $j$, для яких $f(x_j) = y_k$. Звідси за означенням математичного сподівання

$$\mathbf{M}\eta = \sum_{y_k} y_k \mathbf{P}\{\eta = y_k\} = \sum_{y_k} y_k \left( \sum_{j: f(x_j) = y_k} p_j \right) = \sum_k f(x_k)\, p_k.$$

Формулу (10) доведено. ■

Зрозуміло, що аналогічні міркування можна повторити і у випадку функції від кількох змінних. Обмежимося формулюванням відповідних результатів для неперервних і дискретних двовимірних випадкових величин, оскільки саме цими результатами нам доведеться неодноразово користуватися.

*Якщо* $(\xi, \eta)$ *— двовимірна неперервна випадкова величина з щільністю розподілу* $p(x, y)$, $f(x, y)$ *— неперервна функція, то*

$$\mathbf{M}f(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, p(x, y)\, dx dy. \qquad (11)$$

*Якщо* $(\xi, \eta)$ *— двовимірна дискретна випадкова величина з законом розподілу* $p_{ik} = \mathbf{P}\{\xi = x_i,\ \eta = y_k\}$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$, $f(x, y)$ *— функція, визначена на множині значень величини* $(\xi, \eta)$, *то*

$$\mathbf{M}f(\xi, \eta) = \sum_{i,k=1}^{\infty} f(x_i, y_k)\, p_{ik}. \qquad (12)$$



***Теорема 2.*** *Математичне сподівання сталої є сама ця стала:*

$$\mathbf{M}c = c.$$

Доведення. Сталу $c$ можна розглядати як дискретну випадкову величину, яка набуває лише одного значення $c$ з імовірністю одиниця. Тому

$$\mathbf{M}c = c \cdot 1 = c. \ ■$$

***Теорема 3.*** *Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:*

$$\mathbf{M}(c\xi) = c\mathbf{M}\xi.$$

***Теорема 4.*** *Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:*

$$\mathbf{M}(\xi + \eta) = \mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\eta.$$

Теореми 3 і 4 є, очевидно, інакше сформульованими властивостями 2 і 3 інтеграла (див. § 28). Рекомендуємо довести їх самостійно для випадку дискретних випадкових величин.

Наслідок 1. *Математичне сподівання суми скінченного числа випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:*

$$\mathbf{M}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = \mathbf{M}\xi_1 + \mathbf{M}\xi_2 + \cdots + \mathbf{M}\xi_n. \qquad (13)$$

Доведення цієї формули (методом математичної індукції) рекомендуємо провести самостійно.

Наслідок 2. *Математичне сподівання різниці двох випадкових величин дорівнює різниці їх математичних сподівань:*

$$\mathbf{M}(\xi - \eta) = \mathbf{M}\xi - \mathbf{M}\eta.$$

Справді, за теоремами 4 і 3

$$\mathbf{M}(\xi - \eta) = \mathbf{M}(\xi + (-1)\eta) = \mathbf{M}\xi + (-1)\mathbf{M} = \mathbf{M}\xi - \mathbf{M}\eta.$$

**Приклад.** Формула (13) дає змогу легко обчислити математичне сподівання випадкової величини $\mu$, розподіленої за біномним законом ($\mu$ — число успіхів у схемі Бернуллі); якщо $n$ — число випробувань, $p$ — ймовірність успіху при одному випробуванні, то, як відомо,

$$p_k = \mathbf{P}\{\mu = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (q = 1 - p;\ k = 0, 1, \ldots, n).$$

Для обчислення математичного сподівання $\mathbf{M}\mu$ позначимо через $\mu_k$ число успіхів при $k$-му випробуванні, тоді

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n.$$

Кожна з випадкових величин $\mu_k$ може набувати тільки два значення: 1 з імовірністю $p$ і 0 з імовірністю $q$, тому

$$M\mu_k = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

За формулою (13)

$$M\mu = M(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n) = M\mu_1 + M\mu_2 + \cdots + M\mu_n,$$

отже,

$$M\mu = np.$$

Звідси за теоремою 3 знаходимо і математичне сподівання частоти успіхів $\frac{\mu}{n}$

$$M\left(\frac{\mu}{n}\right) = p.$$

***Теорема 5.*** *Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань*

$$\mathbf{M}(\xi\eta) = \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta.$$

Доведення. Доведення для простоти викладу виконаємо тільки для дискретних і неперервних випадкових величин. Якщо $\xi$, $\eta$ — дискретні випадкові величини, $p_i = \mathbf{P}\{\xi = x_i\}$, $q_k = \mathbf{P}\{\eta = y_k\}$, $p_{ik} = \mathbf{P}\{\xi = x_i, \eta = y_k\}$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$, то з їх незалежності випливає, що $p_{ik} = p_i q_k$, тому за формулою (12)

$$\mathbf{M}(\xi\eta) = \sum_{i,k=1}^{\infty} x_i y_k p_{ik} = \sum_{i,k=1}^{\infty} x_i y_k p_i q_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k q_k \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k q_k\right) = \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta.$$

Нехай тепер $\xi$, $\eta$ — незалежні неперервні випадкові величини з щільностями розподілу відповідно $p_\xi(x)$ і $p_\eta(y)$. Тоді, як відомо (див. § 27), $(\xi, \eta)$ є двовимірною неперервною випадковою величиною з щільністю розподілу

$$p(x, y) = p_\xi(x)\, p_\eta(y)$$

і за формулою (11) дістаємо

$$\mathbf{M}(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\,p(x, y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\,p_\xi(x)\,p_\eta(y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} y p_\eta(y)\,dy = \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta. \quad \blacksquare$$



## § 30. Дисперсія

Дисперсія випадкової величини вводиться для характеристики відхилення випадкової величини $\xi$ від її математичного сподівання $\mathbf{M}\xi$. Зазначимо, що для такої характеристики не підходить математичне сподівання цього відхилення, оскільки завжди

$$\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi) = \mathbf{M}\xi - \mathbf{M}(\mathbf{M}\xi) = \mathbf{M}\xi - \mathbf{M}\xi = 0$$

(тут $\mathbf{M}\xi$ — стала, тому $\mathbf{M}(\mathbf{M}\xi) = \mathbf{M}\xi$). Цей результат є цілком природним, він показує, що випадкова величина «однаково часто» відхиляється від свого математичного сподівання як вправо, так і вліво. Щоб запобігти взаємному знищенню додатних і від'ємних значень відхилення $\xi - \mathbf{M}\xi$, можна замість самого відхилення розглядати його квадрат. Так приходимо до поняття дисперсії.

Означення. Дисперсією $\mathbf{D}\xi$ випадкової величини $\xi$ називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання $\mathbf{M}\xi$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2. \tag{14}$$

Замість дисперсії часто розглядають квадратний корінь з неї

$$\sigma_\xi = \sqrt{\mathbf{D}\xi}. \tag{15}$$

Величину $\sigma_\xi$ називають *середнім квадратичним відхиленням* або стандартом. Як дисперсія, так і середнє квадратичне відхилення, є мірою розсіяння (розкиданості) значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Для обчислення дисперсії за формулою (14) треба використати загальну теорему 1, яка для випадку $f(x) = (x - \mathbf{M}\xi)^2$ дає

$$\mathbf{D}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2\,dF(x), \tag{16}$$

де $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини $\xi$.

У випадку дискретної випадкової величини ця формула набуває вигляду:

$$\mathbf{D}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \mathbf{M}\xi)^2 p_k, \tag{17}$$

а у випадку неперервної випадкової величини з щільністю розподілу $p(x)$ маємо

$$\mathbf{D}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2 p(x)\,dx. \tag{18}$$

8 3—2566

Доведемо деякі властивості дисперсії.

***Теорема 6.*** *Дисперсія будь-якої випадкової величини невід'ємна.*

Доведення безпосередньо випливає з означення дисперсії, оскільки дисперсія є математичним сподіванням невід'ємної випадкової величини $(\xi - \mathbf{M}\xi)^2$. ■

***Теорема 7.*** *Дисперсія сталої дорівнює нулю:*

$$\mathbf{D}c = 0.$$

Доведення. Оскільки $\mathbf{M}c = c$ (див. теорему 2), то

$$\mathbf{D}c = \mathbf{M}(c - \mathbf{M}c)^2 = \mathbf{M}(c - c)^2 = \mathbf{M}(0) = 0. \ ■$$

**Зауваження.** Неважко перевірити, що має місце і обернене твердження: якщо $\mathrm{D}\xi = 0$, то з імовірністю одиниця $\xi = \mathrm{const}$; це випливає з властивості 7 інтеграла по ймовірнісній мірі (див. § 28).

***Теорема 8.*** *Сталий множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його до квадрата:*

$$\mathbf{D}(c\xi) = c^2\mathbf{D}\xi.$$

Доведення. Згідно з теоремою 3

$$\mathbf{D}(c\xi) = \mathbf{M}(c\xi - \mathbf{M}(c\xi))^2 = \mathbf{M}(c\xi - c\mathbf{M}\xi)^2 =$$
$$= \mathbf{M}[c^2(\xi - \mathbf{M}\xi)^2] = c^2\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 = c^2\mathbf{D}\xi. \ ■$$

***Теорема 9.*** *Дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї величини і квадратом її математичного сподівання:*

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2. \qquad (19)$$

Доведення. З формули (14) за допомогою теорем 4, 3 і 2 дістаємо

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 = \mathbf{M}(\xi^2 - 2\mathbf{M}\xi \cdot \xi + (\mathbf{M}\xi)^2) =$$
$$= \mathbf{M}\xi^2 - 2\mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\xi + (\mathbf{M}\xi)^2 = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2. \ ■$$

Наслідок. Для будь-якої випадкової величини

$$(\mathbf{M}\xi)^2 \leqslant \mathbf{M}\xi^2.$$

Ця нерівність безпосередньо випливає з теорем 6 та 9. Зазначимо, що вона є окремим випадком відомої нерівності Коші-Буняковського.

***Теорема 10.*** *Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:*

$$\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta.$$

Доведення. Оскільки випадкові величини $\xi$ і $\eta$ незалежні, то за теоремою 5

$$\mathbf{M}(\xi\eta) = \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta,$$



тому за формулою (19)

$$\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{M}(\xi + \eta)^2 - (\mathbf{M}(\xi + \eta))^2 =$$
$$= \mathbf{M}(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - (\mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\eta)^2 = \mathbf{M}\xi^2 +$$
$$+ 2\mathbf{M}(\xi\eta) + \mathbf{M}\eta^2 - (\mathbf{M}\xi^2) - 2\mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta -$$
$$- (\mathbf{M}\eta)^2 = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 + \mathbf{M}\eta^2 - (\mathbf{M}\eta)^2 = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta. \ ■$$

Наслідок. Якщо кожна з випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ не залежить від суми попередніх, то

$$\mathbf{D}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 + \cdots + \mathbf{D}\xi_n.$$

Це твердження безпосередньо випливає з теореми 10 за допомогою методу математичної індукції. Читачеві рекомендуємо провести відповідні міркування самостійно.

***Теорема 11.*** *Якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ попарно незалежні, то*

$$\mathbf{D}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 + \cdots + \mathbf{D}\xi_n.$$

Доведення є прямим узагальненням доведення теореми 10. Оскільки

$$\mathbf{M}(\xi_i\xi_k) = \mathbf{M}\xi_i \cdot \mathbf{M}\xi_k \quad (i \neq k),$$

то

$$\mathbf{D}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2 - \left(\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2 =$$
$$= \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 + 2\sum_{i<k}^{n}\xi_i\xi_k\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\xi_i\right)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\xi_i^2 + 2\sum_{i<k}\mathbf{M}(\xi_i\xi_k) - \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{M}\xi_i)^2 - 2\sum_{i<k}\mathbf{M}\xi_i\mathbf{M}\xi_k =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{M}\xi_i^2 - (\mathbf{M}\xi_i)^2) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}\xi_i. \ ■$$

Обчислимо дисперсії для ряду випадкових величин, математичні сподівання яких було обчислено в попередніх прикладах.

**Приклади**

**1.** Знайти дисперсію випадкової величини $\xi$, що розподілена за законом Пуассона:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Цю дисперсію ми обчислимо за формулою (19). У прикладі 4 § 29 було показано, що $\mathrm{M}\xi = \lambda$; для обчислення $\mathrm{M}\xi^2$ використаємо формулу (10):

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} ((k-1)+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} +$$

$$+ e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} +$$

$$+ \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda.$$

Звідси

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda,$$

тобто *у випадку закона Пуассона дисперсія дорівнює математичному сподіванню.*

2. Знайти дисперсію випадкової величини $\xi$, рівномірно розподіленої на відрізку $[a; b]$.

Як було вже показано (див. с. 109) $M\xi = \dfrac{a+b}{2}$.

За формулою (9)

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

звідси

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Таким чином, дисперсія рівномірно розподіленої величини пропорційна квадрату довжини відрізка, в якому вона розподілена. Отже, вона справді характеризує степінь розсіяння її значень.

3. Знайти дисперсію випадкової величини $\mu$, розподіленої за біномним законом:

$$p_k = P\{\mu = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Для обчислення $D\mu$ застосуємо той самий прийом, за допомогою якого в § 29 було обчислено математичне сподівання $\mu$, а саме, позначимо через $\mu_k$ число успіхів при $k$-му випробуванні, тоді

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n.$$



Оскільки кожна з випадкових величин $\mu_k$ може набувати лише значень 0 і 1, то $\mu_k^2 = \mu_k$, тому $M\mu_k^2 = M\mu_k = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$ і, отже,

$$D\mu_k = M\mu_k^2 - (M\mu_k)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Але випадкові величини $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ попарно незалежні (бо послідовні випробування в схемі Бернуллі є незалежними), тому за теоремою 11

$$D\mu = D(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n) = D\mu_1 + D\mu_2 + \cdots + D\mu_n,$$

отже,

$$D\mu = npq.$$

Звідси за допомогою теореми 8 знаходимо дисперсію частоти успіхів

$$D\left(\frac{\mu}{n}\right) = \frac{pq}{n}.$$

Порівняння двох останніх формул показує, що *дисперсія числа успіхів $\mu$ зростає при збільшенні числа випробувань,* тоді як *дисперсія частоти $\frac{\mu}{n}$ спадає.*

Таким чином, чим *більше число випробувань, тим більше випадкове розсіяння числа успіхів $\mu$ навколо його математичного сподівання $np$ і тим менше випадкове розсіяння частоти успіхів $\frac{\mu}{n}$ навколо її математичного сподівання $p$.*

## § 31. Нормальний закон розподілу

У цьому параграфі обчислимо числові характеристики нормального закону розподілу (закону Гаусса), а також проведемо більш докладне дослідження цього закону — одного з найбільш важливих законів розподілу. Нагадаємо (див. § 25, приклад 1), що нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $a$, $\sigma$ називають неперервну випадкову величину $\xi$, яка має щільність розподілу

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (20)$$

Знайдемо спочатку математичне сподівання цієї випадкової величини. За формулою (9)

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Виконавши заміну змінної $t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}$, дістанемо

$$\mathbf{M}\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma\sqrt{2}\, t + a) e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Враховуючи, що $\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt = 0$ (як інтеграл від непарної функції) і $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ (див. § 21), остаточно дістанемо

$$\mathbf{M}\xi = a.$$

Таким чином, встановлено теоретико-ймовірнісний смисл одного з параметрів нормального закону: *параметр $a$ в нормальному законі — це математичне сподівання.*

Обчислимо тепер дисперсію нормально розподіленої випадкової величини $\xi$. За формулою (18)

$$\mathbf{D}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2 p(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Зробивши в останньому інтегралі підстановку $t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}$ і проінтегрувавши частинами, дістанемо:

$$\mathbf{D}\xi = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot 2te^{-t^2} dt =$$

$$= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \sigma^2.$$

Отже, з'ясовано і теоретико-ймовірнісний смисл параметра $\sigma$ : $\sigma^2$ *є дисперсією, а $\sigma$ — середнім квадратичн м відхиленням випадкової величини, розподіленої за нормальним законом.* Оскільки параметр $a$ є математичним сподіванням, то можна сказати, що *нормальний закон розподілу повністю визначається своїм математичним сподіванням і дисперсією.* Цей факт часто використовується в теорії ймовірностей і в математичній статистиці.



Продовжимо вивчення нормального закону розподілу. Дослідивши функцію (20) звичайними методами, впевнимося в тому, що вона має єдиний екстремум, а саме — максимум, при $x = a$ і точки перегину при $x = a \pm \pm\sigma$, і що

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = 0.$$

Крім того, графік функції $y = p(x)$ розміщено симетрично відносно прямої $x = a$. Тому графік щільності нормального розподілу має вигляд, зображений на рис. 15 (див. також рис. 11), і при цьому $y_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Таким чином, максимальне значення $p(x)$ тим більше і графік спускається від максимуму тим крутіше, чим менше $\sigma$. Зокрема, ймовірність того, що $\xi$ набуде значення з відрізка $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ тим більше, чим менше $\sigma$, тобто чим менше дисперсія. Отже, дисперсія нормально розподіленої випадкової величини справді характеризує степінь розсіяння значень цієї величини.

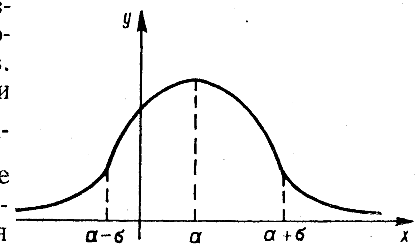

Рис. 15

Ці міркування можна підтвердити простими розрахунками. Обчислимо ймовірність того, що $\xi$ набуде значення з відрізка $[a - t\sigma, a + t\sigma]$, тобто що $|\xi - a| \leqslant t\sigma$ ($t > 0$ — довільне). Ця ймовірність, згідно з формулою (12) розд. IV, дорівнює:

$$\mathbf{P}\{|\xi - a| \leqslant t\sigma\} = \int_{a-t\sigma}^{a+t\sigma} p(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a-t\sigma}^{a+t\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Після підстановки $z = \frac{x-a}{\sigma}$ маємо

$$\mathbf{P}\{|\xi - a| \leqslant t\sigma\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi(t), \qquad (21)$$

де $\Phi(t)$ — функція Лапласа (див. § 21).

Беручи в останній рівності послідовно $t = 1, 2, 3$, за допомогою таблиць функції Лапласа дістанемо:

$$\mathbf{P}\{|\xi - a| \leqslant \sigma\} = 2\Phi(1) \approx 0{,}68,$$
$$\mathbf{P}\{|\xi - a| \leqslant 2\sigma\} = 2\Phi(2) \approx 0{,}95,$$
$$\mathbf{P}\{|\xi - a| \leqslant 3\sigma\} = 2\Phi(3) \approx 0{,}997.$$

Число 0,997 мало відрізняється від одиниці, тому подію з імовірністю 0,997 можна вважати практично вірогідною і останню рівність часто формулюють у вигляді так званого «правила трьох сигм»: *практично вірогідно, що нормально розподілена випадкова величина може відхилятись від свого математичного сподівання не більше, ніж на потроєне середнє квадратичне відхилення.* Цим правилом широко користуються на практиці.

## § 32. Числові характеристики двовимірних випадкових величин. Коефіцієнт кореляції та його властивості

**Математичне сподівання.** Нехай задано $n$-вимірну випадкову величину $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ (див. § 26); її математичним сподіванням називається $n$-вимірний вектор $(\mathbf{M}\xi_1, \mathbf{M}\xi_2, \ldots, \mathbf{M}\xi_n)$, де $\mathbf{M}\xi_k$ — математичне сподівання випадкової величини $\xi_k$.

Розглянемо двовимірну неперервну випадкову величину $(\xi, \eta)$ з щільністю розподілу $p(x, y)$; якщо $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$ — щільності розподілу її компонент, то за означенням математичного сподівання одновимірної випадкової величини

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,dx, \quad \mathbf{M}\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y p_\eta(y)\,dy. \tag{22}$$

Далі, за формулами (18) і (18′) з розд. IV маємо

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,dy, \quad p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,dx,$$

тому з (22) випливає рівність

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x p(x, y)\,dxdy, \quad \mathbf{M}\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y p(x, y)\,dxdy. \tag{23}$$

**Приклад 1.** Знайти математичне сподівання нормально розподіленої двовимірної випадкової величини (див. § 26, приклад 2) з щільністю розподілу

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right)}.$$

У згаданому прикладі було показано, що

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad p_\eta(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}},$$



тому (див. § 31)

$$\mathbf{M}\xi = a, \quad \mathbf{M}\eta = b.$$

Тим самим з'ясовано теоретико-ймовірнісний смисл параметрів $a$, $b$ нормального розподілу.

**Дисперсія. Коефіцієнт кореляції.** Дисперсією (або дисперсійною матрицею) $n$-вимірної випадкової величини $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ називається сукупність $n^2$ чисел, що визначаються формулами

$$b_{ik} = \mathbf{M}((\xi_i - \mathbf{M}\xi_i)(\xi_k - \mathbf{M}\xi_k)), \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

при цьому $b_{ik} = b_{ki}$.

Ми обмежимось розглядом найбільш важливого випадку двовимірної випадкової величини $(\xi, \eta)$. Для такої випадкової величини дисперсією є сукупність трьох чисел: $b_{11}$, $b_{22}$ і $b_{12} = b_{21}$. Легко помітити, що перші два числа є дисперсіями компонент даної випадкової величини:

$$b_{11} = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 = \mathbf{D}\xi, \quad b_{22} = \mathbf{M}(\eta - \mathbf{M}\eta)^2 = \mathbf{D}\eta.$$

Третє з цих чисел $b_{12}$ називається коваріацією випадкових величин $\xi$ і $\eta$:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbf{M}((\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)). \tag{24}$$

Після розкриття дужок маємо

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbf{M}(\xi\eta) - \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta. \tag{25}$$

Якщо, зокрема, двовимірна випадкова величина $(\xi, \eta)$ є неперервною з щільністю розподілу $p(x, y)$, то, згідно з попереднім,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D}\xi &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2 p(x, y)\,dxdy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2 p_\xi(x)\,dx, \\ \mathbf{D}\eta &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (y - \mathbf{M}\eta)^2 p(x, y)\,dxdy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mathbf{M}\eta)^2 p_\eta(y)\,dy, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)(y - \mathbf{M}\eta) p(x, y)\,dxdy. \tag{27}$$

**Означення.** Коефіцієнтом кореляції між випадковими величинами $\xi$ і $\eta$ називається число

$$\rho = \rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi \cdot \mathbf{D}\eta}}. \qquad (28)$$

***Теорема 12.*** *Для будь-яких випадкових величин* $-1 \leqslant \rho(\xi, \eta) \leqslant 1$.

Доведення. Для доведення теореми досить встановити нерівність, яка є окремим випадком відомої нерівності Коші—Буняковського

$$[\operatorname{cov}(\xi, \eta)]^2 \leqslant \mathbf{D}\xi \cdot \mathbf{D}\eta. \qquad (29)$$

Оскільки математичне сподівання невід'ємної випадкової величини завжди невід'ємне, то при будь-якому дійсному $t$ виконується нерівність

$$\mathbf{M}[t(\xi - \mathbf{M}\xi) - (\eta - \mathbf{M}\eta)]^2 \geqslant 0, \qquad (30)$$

звідки, розкриваючи дужки, дістаємо:

$$t^2\mathbf{D}\xi - 2t\operatorname{cov}(\xi, \eta) + \mathbf{D}\eta \geqslant 0. \qquad (31)$$

У лівій частині цієї нерівності стоїть квадратний тричлен відносно $t$, він буде невід'ємним при всіх дійсних $t$ тоді і тільки тоді, коли його дискримінант не є додатним, тобто

$$[\operatorname{cov}(\xi, \eta)]^2 - \mathbf{D}\xi \cdot \mathbf{D}\eta \leqslant 0,$$

що й доводить теорему. ■

***Теорема 13.*** *Коефіцієнт кореляції між випадковими величинами $\xi$ і $\eta$ дорівнює $+1$ або $-1$ **тоді і тільки тоді,** коли $\xi$ і $\eta$ зв'язані лінійною залежністю: $\eta = a\xi + c$; при цьому*

$$\rho(\xi, \eta) = \operatorname{sign} a = \begin{cases} 1 & \text{при } a > 0, \\ -1 & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $|\rho(\xi, \eta)| = 1$; це означає, що в нерівності (29) стоїть знак рівності, тобто дискримінант квадратного тричлена в лівій частині (31) є нуль. Тоді цей тричлен має двократний дійсний корінь:

$$t = a = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\mathbf{D}\xi}, \qquad (32)$$

тобто

$$\mathbf{M}[a(\xi - \mathbf{M}\xi) - (\eta - \mathbf{M}\eta)]^2 = 0.$$

Цю рівність можна записати так:

$$\mathbf{M}[a\xi - \eta - \mathbf{M}(a\xi - \eta)]^2 = 0,$$

або

$$\mathbf{D}(a\xi - \eta) = 0.$$



Але дисперсія може дорівнювати нулю тільки для випадкової величини, яка з імовірністю одиниця набуває певного сталого значення. Позначивши це значення через $-c$, матимемо:

$$a\xi - \eta = -c,$$

отже, $\eta = a\xi + c$ з імовірністю одиниця. При цьому з рівності (32) випливає, що числа $a$ і $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$ мають однакові знаки, тому $\rho(\xi, \eta) = \operatorname{sign} a$.

Навпаки, нехай $\xi$ і $\eta$ зв'язані лінійною залежністю $\eta = a\xi + c$. Покажемо, що тоді $|\rho(\xi, \eta)| = 1$, тобто в нерівності (29) стоїть знак рівності. Це перевіряється безпосереднім обчисленням: оскільки $\eta = a\xi + c$, то $\mathbf{M}\eta = a\mathbf{M}\xi + c$, звідки $\eta - \mathbf{M}\eta = a(\xi - \mathbf{M}\xi)$ і

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbf{M}[(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)] =$$
$$= \mathbf{M}[a(\xi - \mathbf{M}\xi)]^2 = a\mathbf{D}\xi. \qquad (33)$$

Крім того, за відомими властивостями дисперсії

$$\mathbf{D}\eta = \mathbf{D}(a\xi + c) = \mathbf{D}(a\xi) = a^2\mathbf{D}\xi. \qquad (34)$$

З формул (33) і (34) дістаємо

$$[\operatorname{cov}(\xi, \eta)]^2 = \mathbf{D}\xi \cdot \mathbf{D}\eta,$$

отже, $|\rho(\xi, \eta)| = 1$. ■

***Теорема 14.*** *Якщо випадкові величини $\xi$ і $\eta$ незалежні, то* $\rho(\xi, \eta) = 0$.

Доведення. Оскільки величини $\xi$ і $\eta$ незалежні, то незалежними є також величини $\xi - \mathbf{M}\xi$ і $\eta - \mathbf{M}\eta$, тому за теоремою 5 дістаємо:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbf{M}[(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)] =$$
$$= \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi) \cdot \mathbf{M}(\eta - \mathbf{M}\eta) = 0,$$

бо кожен співмножник дорівнює нулю. Отже,

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi \cdot \mathbf{D}\eta}} = 0. \ ■$$

**Зауваження.** З доведених теорем випливає, що коефіцієнт кореляції $\rho(\xi, \eta)$ у певному розумінні можна розглядати як характеристику зв'язку між випадковими величинами $\xi$ і $\eta$: для незалежних величин $\rho(\xi, \eta) = 0$, а для зв'язаних лінійною залежністю і тільки для них $|\rho(\xi, \eta)| = 1$. Якщо $\rho(\xi, \eta) \neq 0$, то кажуть, що між випадковими величинами $\xi$ і $\eta$ є кореляційний зв'язок; при цьому чим ближче $|\rho(\xi, \eta)|$ до 1, тим «тіснішим» є зв'язок між $\xi$ і $\eta$.

Проте слід мати на увазі, що коли $\rho(\xi, \eta)$ близький до нуля, то з цього ще не випливає, що зв'язок між $\xi$ і $\eta$ дуже «слабкий». Крім того, коефіцієнт кореляції $\rho(\xi, \eta)$ може дорівнювати нулю навіть для випадкових величин $\xi$ і $\eta$, зв'язаних функціональною залежністю.

Наведемо приклад таких випадкових величин. Нехай $\xi$ рівномірно розподілена на відрізку $[-1; 1]$, $\eta = \xi^2$, тоді

$$\mathbf{M}\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x dx = 0$$

і тому

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbf{M}((\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)) =$$

$$= \mathbf{M}(\xi(\eta - \mathbf{M}\eta)) = \mathbf{M}(\xi\eta) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x \cdot x^2 dx = 0,$$

отже, $\rho(\xi, \eta) = 0$, хоча $\xi$ і $\eta$ зв'язані функціональною залежністю.

Випадкові величини $\xi$ і $\eta$, для яких $\rho(\xi, \eta) = 0$, називають *некорельованими*. Попередній приклад показує, що з некорельованості двох випадкових величин, взагалі кажучи, не випливає їх незалежність. Але є ряд випадків, коли незалежність випливає з некорельованості; так буде, наприклад, у випадку нормально розподілених величин. У наступному прикладі це твердження буде перевірено.

**Приклад 2** (продовження прикладу 1). Знайти дисперсію двовимірної випадкової величини $(\xi, \eta)$, розподіленої за нормальним законом

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right)}. \tag{35}$$

У прикладі 1 було показано, що $\mathbf{M}\xi = a$, $\mathbf{M}\eta = b$. Знайдемо тепер дисперсію $(\xi, \eta)$, тобто $\mathbf{D}\xi$, $\mathbf{D}\eta$ і $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$. Оскільки $\xi$ і $\eta$ нормально розподілені з параметрами $a$, $\sigma_1$ і $b$, $\sigma_2$, то (див. § 31)

$$\mathbf{D}\xi = \sigma_1^2, \quad \mathbf{D}\eta = \sigma_2^2.$$

Далі, за формулою (27)

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)(y-b)\, p(x, y)\, dxdy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)(y-b) \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right)} dxdy.$$



Виділивши в показнику повний квадрат, дістанемо

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} dx \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (y-b)\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-b}{\sigma_2} - \rho\frac{x-a}{\sigma_1}\right)^2} dy.$$

Внутрішній інтеграл підстановкою

$$t = \frac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\left(\frac{y-b}{\sigma_2} - \rho\frac{x-a}{\sigma_1}\right)$$

зводиться до вигляду

$$\sigma_2\sqrt{2(1-\rho^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma_2\sqrt{2(1-\rho^2)}\, t + \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-a)\right) e^{-t^2} dt =$$

$$= 2\sigma_2^2(1-\rho^2)\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{\rho\sigma_2^2}{\sigma_1}\sqrt{2(1-\rho^2)}\,(x-a)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{\rho\sigma_2^2}{\sigma_1}\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\,(x-a),$$

тому

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{\rho\sigma_2^2}{\sigma_1}\sqrt{2\pi(1-\rho^2)} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \times$$

$$\times e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} dx = \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} dx =$$

$$= \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\mathbf{D}\xi = \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\sigma_1^2 = \rho\sigma_1\sigma_2.$$

Звідси знаходимо коефіцієнт кореляції між $\xi$ і $\eta$:

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi \cdot \mathbf{D}\eta}} = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2} = \rho.$$

Таким чином, з'ясовано імовірнісний смисл параметра $\rho$ — це є коефіцієнт кореляції між компонентами нормально розподіленої двовимірної випадкової величини. Якщо, зокрема, $\rho = 0$, то щільність розподілу (35) має вигляд

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}} = p_\xi(x)\, p_\eta(y),$$

тобто $\xi$ і $\eta$ незалежні.

Отже, *для нормально розподілених випадкових величин некорельованість рівносильна незалежності*.

На закінчення зазначимо, що двовимірний нормальний закон, як і одновимірний, повністю визначається заданням свого математичного сподівання і дисперсії, тобто задаванням п'яти чисел

$$\mathbf{M}\xi = a, \quad \mathbf{M}\eta = b, \quad \mathbf{D}\xi = \sigma_1^2, \quad \mathbf{D}\eta = \sigma_2^2,$$
$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \rho\sigma_1\sigma_2$$

(або чисел $a$, $b$, $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\rho$).

## § 33. Моменти різних порядків та інші числові характеристики

Крім математичного сподівання і дисперсії, в теорії ймовірностей та її застосуваннях використовують також інші числові характеристики.

Нехай $k \geqslant 0$ — ціле, $a$ — дійсне число. Моментом $k$-го порядку випадкової величини $\xi$ відносно точки $a$ називається число (якщо воно існує)

$$\nu_k(a) = \mathbf{M}(\xi - a)^k.$$

Якщо $a = 0$, то момент називається початковим; початковий момент $k$-го порядку позначатимемо через $\nu_k$. Зрозуміло, що $\nu_1 = \mathbf{M}\xi$.

Центральним моментом називається момент відносно точки $a = \mathbf{M}\xi$; центральний момент $k$-го порядку позначатимемо через $\mu_k$. Легко помітити, що $\mu_1 = 0$, а $\mu_2 = \mathbf{D}\xi$.

Між центральними і початковими моментами існує простий зв'язок. Справді, за означенням

$$\mu_k = \mathbf{M}(\xi - \nu_1)^k.$$

Розкриваючи вираз у правій частині, дістаємо, наприклад, для перших чотирьох моментів:

$$\mu_1 = 0,$$
$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3,$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

Ці моменти широко використовуються у статистиці.

Якщо $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини $\xi$, то, очевидно, її початкові і центральні моменти дорівнюють відповідно



$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x), \quad \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^k dF(x).$$

Неважко зрозуміти, як записуються відповідні формули у випадку дискретних і неперервних випадкових величин.

Розглянемо ще кілька числових характеристик, які використовуються в теорії ймовірностей і математичній статистиці.

Медіаною розподілу $F(x)$ називають таке значення аргументу $x = m$, для якого виконується нерівність

$$F(m) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F(m + 0)$$

(таке значення $m$ завжди існує, бо функція монотонно зростає від 0 до 1). Якщо, зокрема, $F(x)$ неперервна, то існує принаймні одне значення $x = m$, для якого $F(m) = \frac{1}{2}$ (за теоремою про проміжне значення неперервної функції). Якщо крива $y = F(x)$ має з прямою $y = \frac{1}{2}$ спільний відрізок, то абсцису кожної точки цього відрізка можна взяти за медіану даного розподілу. Таким чином, *кожний розподіл має принаймні одну медіану*.

Неважко перевірити, що медіана нормального розподілу дорівнює його математичному сподіванню; те саме можна сказати і про рівномірний розподіл.

Аналогічно до поняття медіани, для довільного числа $p \in (0, 1)$ означають квантиль розподілу порядку $p$. Так, якщо функція розподілу $F(x)$ є неперервною, квантиль порядку $p$ — це корінь рівняння $F(x) = p$. Очевидно, медіана — це квантиль порядку $\frac{1}{2}$. Якщо для розподілу відомі квантилі для кількох значень $p$, то вони дають певне уявлення про характер розподілу. На практиці часто користуються квантилями для $p = 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots,\ 0{,}9$ (їх називають децилями) та $p = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ (їх називають квартилями).

Якщо випадкова величина є неперервною і має щільність розподілу $p(x)$, то модою розподілу називається кожне значення $x$, при якому $p(x)$ має максимум. Особливо часто зустрічаються розподіли, що мають єдину моду (такі розподіли називають унімодальними).

Випадкову величину $\xi$ називають **с и м е т р и ч н о ю**, якщо випадкові величини $\xi$ і $-\xi$ мають однакові функції розподілу. Випадкову величину називають **с и м е т р и ч н о ю  в і д н о с н о  т о ч к и** $a$, якщо випадкова величина $\xi - a$ симетрична. Якщо $F(x)$ — функція розподілу такої випадкової величини, то $F(a + x) = 1 - F(a - x + 0)$ $(\forall x \in \boldsymbol{R})$. Справді,

$$F_{\xi-a}(x) = \mathbf{P}\{\xi - a < x\} = \mathbf{P}\{\xi < a + x\} = F(a + x);$$

$$F_{a-\xi}(x) = \mathbf{P}\{a - \xi < x\} = \mathbf{P}\{\xi > a - x\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi \leqslant a - x\} = 1 - F(a - x + 0).$$

Якщо, зокрема, $\xi$ — неперервна випадкова величина, то звідси випливає, що $p(a + x) = p(a - x)$, тобто *якщо неперервна випадкова величина симетрична відносно точки $a$, то графік її щільності розподілу симетричний відносно прямої $x = a$.*

Якщо випадкова величина $\xi$ симетрична відносно точки $a = \mathbf{M}\xi$, то кожний її центральний момент непарного порядку (якщо він існує) дорівнює нулю:

$$\mu_{2k+1} = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^{2k+1} = 0.$$

Тому кожний відмінний від нуля центральний момент непарного порядку характеризує степінь асиметрії розподілу. Найпростішою з таких характеристик є $\mu_3$, але для зручності замість цієї величини беруть безрозмірну величину

$$\gamma = \frac{\mu_3}{(\mathbf{D}\xi)^{3/2}}.$$

Цю величину називають **к о е ф і ц і є н т о м  а с и м е т р і ї**. Очевидно, для нормального і рівномірного розподілів $\gamma = 0$.

### Вправи

1. Дискретна випадкова величина $\xi$ задана своїм законом розподілу. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення:

а)

| $\xi$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| **P** | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

б)

| $\xi$ | $-4$ | $-2$ | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| **P** | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

2. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа очок при одному киданні грального кубика.

3. Кидають два гральні кубики. Нехай $\xi$ — сума очок на двох кубиках. Знайти $\mathbf{M}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, $\sigma_\xi$.



4. Нехай випадкова величина $\xi$ набуває значення $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ з імовірностями $\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{2n + 1}$. Знайти $\mathbf{M}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

5. Випадкова величина $\xi$ набуває значення 1 і $-1$ з імовірністю 0,5. Знайти $\mathbf{M}(\xi^n)$, $\mathbf{M}(e^{it\xi})$.

6. Випадкова величина $\xi$ має розподіл

| $\xi$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| **P** | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\eta = |\xi|$.

7. Два стрільці зробили по одному пострілу по тій самій мішені. Імовірність влучення для першого стрільця дорівнює $p_1$, для другого — $p_2$. Нехай $\xi$ — загальне число влучень у мішень. Знайти розподіл випадкової величини $\xi$, а також $\mathbf{M}\xi$ і $\mathbf{D}\xi$.

8. Стрілець має $n$ патронів і стріляє по мішені до першого влучення. Імовірність влучення при кожному пострілі дорівнює $p$. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа витрачених патронів.

9. Випадкова величина $\xi$ має геометричний розподіл: $\mathbf{P}\{\xi = k\} = (1 - p)^k p$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Знайти $\mathbf{M}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, $\sigma_\xi$.

10. З урни, яка містить $m$ білих і $n$ чорних куль, виймають по одній кулі з поверненням до першої появи білої кулі. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа вийнятих куль.

11. Нехай випадкова величина $\xi$ набуває скінченне число невід'ємних значень $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{M}(\xi^{n+1})}{\mathbf{M}(\xi^n)} = \max_{1\leqslant i\leqslant k} x_i; \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathbf{M}(\xi^n)} = \max_{1\leqslant i\leqslant k} x_i.$$

12. Нехай $\xi$ — випадкова величина, яка набуває цілих невід'ємних значень. Довести, що

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{m\geqslant 1} \mathbf{P}\{\xi \geqslant m\},$$

$$\mathbf{D}\xi = 2\sum_{m\geqslant 1} m\mathbf{P}\{\xi \geqslant m\} - \mathbf{M}\xi(\mathbf{M}\xi + 1).$$

13. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ набувають додатних значень і однаково розподілені. Довести, що

$$\mathbf{M}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k}{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}\right) = \frac{k}{n} \text{ при } k \leqslant n.$$

14. Випадкова величина $\xi$ набуває цілих невід'ємних значень $0, 1, 2, \ldots$ з імовірностями, що спадають у геометричній прогресії; а) довести, що $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi + (\mathbf{M}\xi)^2$; б) відомо, що $\mathbf{M}\xi = a$; показати, що $\mathbf{P}\{\xi = n\} = \frac{a^n}{(1 + a)^{n+1}}$. Цей розподіл називається *розподілом Паскаля.*

9 3–2566

15. Довести, що коли $\xi$ і $\eta$ — незалежні випадкові величини, то

$$D(\xi\eta) = D\xi \cdot D\eta + (M\xi)^2 D\eta + (M\eta)^2 D\xi.$$

Звідси

$$D(\xi\eta) \geqslant D\xi \cdot D\eta.$$

16. Випадкова величина $\xi$ розподілена рівномірно на деякому відрізку, причому $M\xi = 4$, $D\xi = 3$. Знайти щільність розподілу величини $\xi$.

17. Незалежні випадкові величини $\xi$ і $\eta$ рівномірно розподілені відповідно на відрізках $[a, b]$ і $[c, d]$. Знайти $M(\xi\eta)$ і $D(\xi\eta)$.

18. Випадкова величина $\xi$ має показниковий розподіл з параметром $\lambda$, тобто має щільність

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Знайти $M\xi$, $D\xi$ і $\sigma_\xi$.

19. Щільність розподілу випадкової величини $\xi$ дорівнює

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}5 \cos x & \text{при } |x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти медіану, моду, математичне сподівання і дисперсію $\xi$.

20. Чому дорівнює математичне сподівання випадкової величини $\xi$, щільність розподілу якої є парною функцією?

21. Щільність розподілу випадкової величини $\xi$ дорівнює

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0{,}5x & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Знайти $M\xi$ і $D\xi$; обчислити ймовірність того, що відхилення $\xi$ від математичного сподівання не перевищить 0,5.

22. Випадкова величина $\xi$ має щільність розподілу

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \cos^2 x & \text{при } |x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти моду, математичне сподівання і дисперсію $\xi$.

23. Випадкова величина $\xi$ має щільність $p(x) = \dfrac{2}{\pi(e^{-x} + e^{x})}$. Обчислити математичне сподівання і дисперсію $\xi$.

24. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\xi$, що має щільність розподілу

$$p(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1| & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ і при } x > 2. \end{cases}$$

25. Щільність випадкової величини, розподіленої за *законом Релея*, дорівнює

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 2h^2 x e^{-h^2 x^2} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Знайти моду, математичне сподівання і дисперсію $\xi$.



26. Нехай $M\xi = a$, $M\eta = b$, $D\xi = \sigma_1^2$, $D\eta = \sigma_2^2$, $\rho(\xi, \eta) = r$. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\zeta = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma$, де $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — сталі.

27. Випадковий вектор $(\xi, \eta)$ з невід'ємними компонентами має функцію розподілу

$$F(x, y) = 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y} \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

Знайти математичне сподівання і дисперсійну матрицю цього вектора. Чи залежні величини $\xi$ і $\eta$?

28. Випадкова величина $\xi$ рівномірно розподілена на відрізку $[-1; 1]$, $\eta = \xi^m$ ($m$ — натуральне число). Знайти коефіцієнт кореляції $\rho(\xi, \eta)$. Розглянути окремо випадки парного і непарного $m$.

## § 34. Закон великих чисел

**Вступні зауваження. Нерівність Чебишова.** Якщо подія $A$ має ймовірність $P(A)$, то, взагалі кажучи, не можна передбачити, чи настане, чи не настане ця подія $A$ при одному випробуванні. Так, якщо кинути гральний кубик один раз, то не можна бути впевненим, що випадуть 3 очок, так само, як не можна бути впевненим в тому, що 3 очок не випадуть. Але якщо ймовірність $P(A)$ мало відрізняється від одиниці, то, як свідчить досвід, подія $A$ майже обов'язково настає. Так само події з малими ймовірностями (близькими до нуля) настають дуже рідко. У зв'язку з цим на практиці подію $A$ вважають *практично вірогідною*, якщо $P(A) \approx 1$, і *практично неможливою*, якщо $P(A) \approx 0$. При цьому постає цілком природне питання, наскільки малою повинна бути ймовірність події $A$ для того, щоб цю подію можна було вважати практично неможливою. На це питання не можна дати однозначної відповіді, оскільки необхідно враховувати важливість настання або ненастання цієї події в даній конкретній ситуації.

Так, наприклад, якщо ймовірність $P(A)$ виходу з ладу якої-небудь деталі телевізора дорівнює 0,01, то такою можливістю можна нехтувати і вважати подію $A$ практично неможливою. Але якщо при конструюванні парашута виявиться, що ймовірність того, що він не розкриється, дорівнює 0,01, то таку подію $A$, очевидно, не можна вважати практично неможливою і запропоновану конструкцію парашута не можна прийняти.

З попереднього випливає, що в теорії ймовірностей і особливо в її застосуваннях важливу роль відіграють події з імовірностями, близькими до нуля або до одиниці. Тому однією з основних задач теорії ймовірностей є встановлення закономірностей, що мають місце з імовірністю, близькою до одиниці, і особливо таких закономірностей, які виникають в результаті спільної дії великої кількості незалежних випадкових факторів. Закон великих чисел і є одним з найважливіших тверджень такого типу.

У § 21 було доведено теорему Бернуллі, що являє собою найпростішу форму закону великих чисел. У цьому параграфі буде доведено закон великих чисел в більш загальній формі (теореми Чебишова, Маркова та ін.), а теорему Бернуллі буде здобуто як окремий випадок. Метод доведення наступних теорем належить П. Л. Чебишову. Ці доведення грунтуються на важливій нерівності, встановленій Чебишовим.

**Нерівність Чебишова (перша форма).** Якщо випадкова величина $\xi$ може набувати тільки невід'ємних значень і має скінченне математичне сподівання, то

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant 1\} \leqslant \mathbf{M}\xi. \tag{36}$$

Доведення. Доведемо цю нерівність спочатку для дискретної випадкової величини. Якщо $\xi$ набуває значення $x_i$ з імовірністю $p_i$ ($i = 1, 2, \ldots$), то за аксіомою адитивності ймовірності

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant 1\} = \sum_{i:x_i \geqslant 1} p_i$$

(сума поширена на ті $i$, для яких $x_i \geqslant 1$). Якщо кожний з доданків $p_i$ помножити на відповідне значення $x_i$, то від цього сума не зменшиться (оскільки тут будуть лише $x_i \geqslant 1$), отже,

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant 1\} \leqslant \sum_{i:x_i \geqslant 1} x_i p_i.$$

Якщо тепер суму в правій частині поширити на всі $i$, то вона від цього не зменшиться, оскільки завжди $p_i \geqslant 0$, а $x_i \geqslant 0$ за умовою. Тому остаточно

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant 1\} \leqslant \sum_i x_i p_i = \mathbf{M}\xi.$$

Проведемо доведення для довільної випадкової величини $\xi$, функція розподілу якої є $F(x)$. За означенням функції розподілу

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant 1\} = \mathbf{P}\{1 \leqslant \xi < \infty\} = F(+\infty) - F(1),$$

що можна записати так:

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant 1\} = \int_1^\infty dF(x).$$



Якщо підінтегральний вираз помножити на $x$, то, оскільки $x \geqslant 1$, а $F(x)$ — неспадна функція, величина інтеграла не зменшиться; не зменшиться вона і після поширення інтеграла на проміжок $[0, \infty)$:

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant 1\} \leqslant \int_1^\infty x\,dF(x) \leqslant \int_0^\infty x\,dF(x).$$

Проте з умови $\xi \geqslant 0$ випливає, що $F(x) = 0$ при $x < 0$, тому останню нерівність можна записати так:

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant 1\} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x) = \mathbf{M}\xi. \blacksquare$$

**Нерівність Чебишова (друга форма).** Нехай випадкова величина $\xi$ має скінченне математичне сподівання $\mathbf{M}\xi$ і скінченну дисперсію $\mathbf{D}\xi$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}. \tag{37}$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину $\frac{(\xi - \mathbf{M}\xi)^2}{\varepsilon^2}$; оскільки вона набуває тільки невід'ємних значень, то для неї має місце нерівність Чебишова в першій формі:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{(\xi - \mathbf{M}\xi)^2}{\varepsilon^2} \geqslant 1\right\} \leqslant \mathbf{M}\frac{(\xi - \mathbf{M}\xi)^2}{\varepsilon^2}. \tag{38}$$

Але нерівність $\frac{(\xi - \mathbf{M}\xi)^2}{\varepsilon^2} \geqslant 1$ еквівалентна нерівності $|\xi - \mathbf{M}\xi| \geqslant \varepsilon$. Враховуючи, що

$$\mathbf{M}\frac{(\xi - \mathbf{M}\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 = \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2},$$

запишемо нерівність (38) так:

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

Переходячи до протилежної події, дістанемо

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| < \varepsilon\} = 1 - \mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \geqslant \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}. \blacksquare$$

**Збіжність за ймовірністю. Класичні форми закону великих чисел.** Для зручності формулювання закону великих чисел корисно ввести поняття збіжності за ймовірністю. Це поняття є повним аналогом поняття збіжності функцій за мірою, що вивчається в теорії функцій.

Означення. Послідовність випадкових величин $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ називається збіжною за ймовірністю до випадкової величини (або до числа) $\gamma$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|\eta_n - \gamma| < \varepsilon\} = 1.$$

Позначають збіжність за ймовірністю так:

$$\eta_n \xrightarrow{\text{йм}} \gamma.$$

У цих позначеннях, наприклад, твердження теореми Бернуллі (§ 21) можна записати так: якщо $\mu$ — число успіхів в серії з $n$ послідовних випробувань, при кожному з яких імовірність успіху дорівнює $p$, то $\frac{\mu}{n} \xrightarrow{\text{йм}} p$.

***Теорема Чебишова.*** *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин з однаковими математичними сподіваннями $\mathbf{M}\xi_i = a$ $(i = 1, 2, \ldots)$ і дисперсіями, обмеженими тією самою сталою:*

$$\mathbf{D}\xi_i \leqslant c \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

**Тоді**

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{йм}} a. \tag{39}$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n}.$$

Згідно з властивостями математичного сподівання

$$\mathbf{M}\eta_n = \frac{\mathbf{M}\xi_1 + \mathbf{M}\xi_2 + \cdots + \mathbf{M}\xi_n}{n} = \frac{na}{n} = a.$$

Враховуючи теореми 8 і 11, знайдемо, що

$$\mathbf{D}\eta_n = \mathbf{D}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}(\mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 + \cdots + \mathbf{D}\xi_n) \leqslant \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n}.$$

Застосувавши до випадкової величини $\eta_n$ нерівність Чебишова (37), дістанемо, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|\eta_n - \mathbf{M}\eta_n| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}\eta_n}{\varepsilon^2},$$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$



Переходячи до границі при $n \to \infty$ і враховуючи, що ймовірність не може бути більшою від 1, матимемо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

що з урахуванням означення збіжності за ймовірністю й доводить теорему. ■

Доведена теорема дає змогу обгрунтувати правило середнього арифметичного, яким широко користуються в практиці вимірювань. Нехай треба виміряти деяку фізичну величину $a$. Здійснивши $n$ незалежних вимірювань, ми дістанемо $n$ значень цієї величини $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Кожне значення $x_i$ є випадковою величиною. При цьому вважатимемо, що математичне сподівання кожної з цих величин дорівнює $a$: $\mathbf{M}x_i = a$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; ця умова означає, що вимірювання позбавлені систематичних помилок. Крім того, вважатимемо, що виконано умову $\mathbf{D}\xi_i \leqslant c$; це означає, що всі вимірювання здійснюються з деякою гарантованою точністю (якби дисперсії не були обмеженими, то це б означало, що розсіяння спостережених значень навколо вимірюваної величини можуть необмежено зростати, тобто точність необмежено знижується). За цих умов застосовують теорему Чебишова

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

тобто *при достатньо великому числі вимірювань з імовірністю, як завгодно близькою до одиниці, середнє арифметичне результатів вимірювань буде як завгодно мало відрізнятись від вимірюваної величини.*

Закон великих чисел у формі Бернуллі є безпосереднім наслідком теореми Чебишова.

***Теорема Бернуллі.*** *Нехай $\mu$ — число появ події $A$ при $n$ послідовних незалежних випробуваннях, в кожному з яких імовірність настання події $A$ дорівнює $p$. Тоді*

$$\frac{\mu}{n} \xrightarrow{\text{йм}} p. \tag{40}$$

Доведення. Якщо через $\mu_k$ позначити число успіхів при $k$-му випробуванні, то

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n.$$

При цьому $\mathbf{M}\mu_k = p$, $\mathbf{D}\mu_k = pq = p\,(1 - p) = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Отже, для випадкових величин $\mu_1, \mu_2, \ldots$ виконуються умови теореми Чебишова і тому

$$\frac{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n}{n} \xrightarrow{\text{йм}} p,$$

а це й є співвідношення (40). ■

Міркуючи аналогічно доведенню теореми Чебишова, легко довести закон великих чисел у більш загальній формі.

***Теорема Маркова.*** *Нехай для кожної з випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ існує скінченне математичне сподівання $\mathbf{M}\xi_i = a_i$ і виконується умова*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{D}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)}{n^2} = 0.$$

Тоді

$$\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \xrightarrow{\text{йм}} 0.$$

Доведення цієї теореми пропонуємо провести самостійно. Зазначимо, що теорема Чебишова випливає з теореми Маркова як окремий випадок.

**Підсилений закон великих чисел.** Нехай $\mu$ — число появ події $A$ в серії з $n$ незалежних випробувань, при кожному з яких імовірність настання події $A$ дорівнює $p$. Тоді, згідно з теоремою Бернуллі, при довільному $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Звідси інколи робиться необгрунтований висновок, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu}{n} = p$, в той час як таке твердження не має місця. Справді, може статися, наприклад (хоч імовірність цього і дуже мала), що при всіх випробуваннях наставатиме подія $A$, тоді $\frac{\mu}{n} \to 1$; аналогічно ця границя може бути наприклад, нулем або зовсім не існувати. Тому виникає питання: яка ймовірність того, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu}{n} = p$. Відповідь на нього дає наступна теорема, що є найпростішою формою так званого підсиленого закону великих чисел:

***Теорема Бореля.*** *Нехай $\mu$ — число появ події $A$ при $n$ незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність настання події $A$ дорівнює $p$. Тоді*

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\mu}{n} = p\right\} = 1.$$



Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, в книгах [2, 3, 6, 15].

Існують також більш загальні теореми Колмогорова, Хінчина та ін., в яких встановлено умови, за яких для послідовності випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ має місце підсилений закон великих чисел, тобто для яких

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - \frac{\mathbf{M}\xi_1 + \mathbf{M}\xi_2 + \cdots + \mathbf{M}\xi_n}{n}\right) = 0\right\} = 1.$$

**Вправи**

**29. Довести,** що коли випадкова величина $\xi$ набуває лише невід'ємних значень і має скінченне математичне сподівання, то для довільного $\alpha > 0$ має місце така нерівність Чебишова:

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant \alpha\} \leqslant \frac{\mathbf{M}\xi}{\alpha}.$$

**30.** Нехай $f(x)$ — невід'ємна неспадна функція на множині значень випадкової величини $\xi$ і існує $\mathbf{M}f(\xi)$. Довести, що

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{M}f(\xi)}{f(\varepsilon)}.$$

**31.** Користуючись другою формою нерівності Чебишова, оцінити для довільної випадкової величини $\xi$ імовірність того, що її відхилення від свого математичного сподівання не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення (правило трьох сигм для довільної випадкової величини).

**32.** Середнє споживання електроенергії в травні (за багато років) у даному мікрорайоні дорівнює 360 000 кВт · год; а) користуючись нерівністю Чебишова, доведеною у вправі 29, оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії у травні поточного року перевищить $10^6$ кВт · год; б) оцінити ту саму ймовірність, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії за травень дорівнює 40 000 кВт · год.

**33.** Математичне сподівання річної кількості опадів у даній місцевості дорівнює 55 см. Оцінити ймовірність того, що в цій місцевості випаде за рік не менше 175 см опадів (використати нерівність вправи 29).

**34.** Середнє річне число сонячних днів у даній місцевості дорівнює 75. Оцінити ймовірність того, що протягом року у цій місцевості буде не більше 200 сонячних днів.

**35.** Середня швидкість вітру на даній висоті дорівнює 25 км/год. Оцінити швидкість вітру, яку можна очікувати на цій висоті з імовірністю, не меншою ніж 0,9, якщо $\sigma_\xi = 4{,}5$ км/год.

**36.** При визначенні курсу літака середнє квадратичне відхилення похибки вимірювання дорівнює $\sigma = 2'$. Вважаючи математичне сподівання похибки вимірювання рівним нулю, оцінити ймовірність того, що похибка при вимірюванні курсу літака буде більше за $5'$.

**37.** Здійснюється серія з $n$ послідовних незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність успіху дорівнює $p = \frac{1}{3}$. Користуючись другою формою нерівності Чебишова, оцінити ймовірність того, що у цій серії частота успіхів відхиляється від імовірності за модулем не більше ніж на 0,01, якщо: а) $n = 9000$; б) $n = 75\,000$. Порівняти ці оцінки з результатами застосування інтегральної теореми Муавра — Лапласа.

**38.** За умов попередньої задачі оцінити найменше число випробувань так, щоб з імовірністю, не меншою ніж 0,99, частота успіху відхилялась від імовірності за модулем не більше ніж на 0,01. Розв'язати задачу двома способами: а) за допомогою нерівності Чебишова; б) за допомогою інтегральної теореми Муавра — Лапласа.

**39.** Дано послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n, \ldots$ Випадкова величина $\xi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ може набувати лише трьох значень: $-\sqrt{n}, 0, \sqrt{n}$ з імовірностями, рівними відповідно $\frac{1}{n}$, $1 - \frac{2}{n}$, $\frac{1}{n}$. Чи має місце для цієї послідовності закон великих чисел?

**40.** Дано послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n, \ldots$ Випадкова величина $\xi_n$ може набувати лише значень $-n\alpha$, $0$, $n\alpha$ ($\alpha$ — додатна стала) з імовірностями, рівними відповідно $\frac{1}{2n^2}$, $1 - \frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{2n^2}$. Чи має місце для цієї послідовності закон великих чисел?

## § 35. Поняття про центральну граничну теорему

Нехай $\mu$ — число появ події $A$ в $n$ незалежних випробуваннях, при кожному з яких імовірність настання події $A$ дорівнює $p$ $(0 < p < 1)$. У § 20 було доведено інтегральну теорему Муавра — Лапласа, згідно з якою

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx; \qquad (41)$$

іншими словами, функції розподілу випадкових величин $\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}}$ прямують при $n \to \infty$ до функції розподілу нормального закону з параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ (див. § 31). Співвідношенню (41) можна надати іншої форми; для цього позначимо, як це неодноразово робили раніше, через $\mu_k$ число появ події $A$ при $k$-му випробуванні, тоді

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n.$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\mu_k = \mathbf{M}\mu = np$ (див. приклад на с. 111) і $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\mu_k = \mathbf{D}\mu = npq$ (див. приклад на с. 116), то теорему Муавра — Лапласа можна сформулювати так:



*Якщо кожна з незалежних випадкових величин $\mu_1$, $\mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ може набувати лише двох значень 1 і 0 з імовірностями відповідно $p$ і $q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$, то при $n \to \infty$ функція розподілу випадкової величини*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \mu_k - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\mu_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\mu_k}}$$

*прямує до функції розподілу нормального закону з параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$.*

Постає цілком природне питання, чи має місце таке твердження для послідовностей випадкових величин $\xi_1$, $\xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, які задовольняють більш слабі обмеження, ніж $\mu_k$. Таке питання поставлено П. Л. Чебишовим; він сформулював відповідну теорему (так звану центральну граничну теорему) і намітив методи, якими її можна довести. Вперше строге доведення центральної граничної теореми при досить широких умовах дав А. А. Марков за допомогою розробленого ним методу моментів. Пізніше О. М. Ляпунов довів центральну граничну теорему при ще ширших умовах за допомогою так званого методу характеристичних функцій. В усіх цих роботах смисл умов, які задовольняють доданки $\xi_k$, полягає в тому, що окремі доданки мало впливають на суму. Наведемо формулювання теореми Ляпунова, а також одного варіанта центральної граничної теореми, який знаходить особливо широке застосування в теорії ймовірностей і математичній статистиці. Доведення цих теорем можна знайти, наприклад, у книгах [2, 3, 5, 6, 8].

***Теорема Ляпунова.*** *Якщо для послідовності взаємно незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ можна знайти таке число $\delta > 0$, що*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\,|\xi_k - \mathbf{M}\xi_k|^{2+\delta}}{\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\xi_k}\right)^{2+\delta}} = 0, \qquad (42)$$

*то при $n \to \infty$ рівномірно по $x$*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\xi_k}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \qquad (43)$$

***Теорема Ліндеберга — Леві.*** *Якщо взаємно незалежні випадкові величини* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *однаково розподілені і мають математичне сподівання a і дисперсію* $\sigma^2$, *то при* $n \to \infty$ *рівномірно по x*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Центральна гранична теорема пояснює велике поширення нормального закону розподілу: якщо випадкова величина формується під впливом багатьох незалежних факторів, кожен з яких здійснює на неї незначний вплив, то розподіл цієї величини мало відрізняється від нормального.

## Розділ VI

## ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

### § 36. Оцінка параметрів розподілу

**1. Про задачі математичної статистики.** У теорії ймовірностей вивчаються різні поняття, пов'язані з випадковими подіями і випадковими величинами; найважливіші з них — це поняття ймовірності, функції розподілу, математичного сподівання тощо. Але в більшості випадків, що зустрічаються на практиці, точне значення ймовірності або точний вираз функції розподілу нам невідомі. Тому постає питання про їхне експериментальне визначення. Математична статистика вивчає методи, які дають змогу за результатами випробувань робити певні ймовірнісні висновки. Подамо деякі найпростіші задачі, що вивчаються в математичній статистиці.

1) Нехай подія $A$ має ймовірність, але її значення $p = \mathbf{P}(A)$ нам невідоме; необхідно оцінити $p$ за допомогою випробувань. Цю задачу ми розглядали в § 22. На практиці з цією задачею зустрічаються досить часто. Нехай, наприклад, треба оцінити число бракованих виробів в достатньо великій партії з $N$ виробів; якщо партія містить $M$ бракованих виробів, то $\frac{M}{N}$ — це ймовірність того, що навмання вибраний виріб є бракованим. Зрозуміло, що задача оцінки числа бракованих виробів зводиться до задачі оцінки невідомої ймовірності.



2) Є цілий ряд важливих задач, пов'язаних з невідомими функціями розподілу. Так, може статись, що нам взагалі нічого невідомо про функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини $\xi$; тоді може бути поставлене питання про наближене подання функції $F(x)$ за допомогою даних, здобутих в результаті випробувань. Це питання розглядається в наступному пункті.

Проте може бути і так, що нам відомо аналітичний вигляд функції розподілу $F(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, але невідомо значення параметрів $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, від яких залежить ця функція; треба знайти оцінки для цих параметрів. Так, наприклад, у багатьох випадках на основі центральної граничної теореми можна зробити висновок, що випадкова величина розподілена нормально. Оскільки функція розподілу в цьому випадку залежить лише від двох параметрів $a$ і $\sigma$, то для визначення функції розподілу досить оцінити за результатами випробувань лише ці два параметри.

У цьому розділі розглянуто лише найпростіші питання математичної статистики. Грунтовний її виклад можна знайти, наприклад, в [3, 8, 11, 13].

**2. Вибірка з генеральної сукупності. Розподіл вибірки. Вибіркові характеристики.** Розглянемо деякі загальні поняття статистики. Нехай $\xi$ — випадкова величина, функція розподілу якої $F(x)$ нам невідома. Досліджуючи цю величину, ми здійснюємо $n$ раз той самий експеримент, в результаті чого дістаємо $n$ значень величини $\xi$: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Термінологія, яка при цьому вживається, запозичена з розгляду деяких конкретних задач. А саме, нехай задано скінченну множину $A$, що складається з однотипних елементів (наприклад, партія деяких виробів). Експеримент полягає в тому, що ми вибираємо наугад один з елементів множини $A$, реєструємо деяку його характеристику $\xi$ (наприклад, довжину) і повертаємо цей елемент до множини. Множину $A$ називають *генеральною сукупністю*, а групу елементів, які спостерігалися при $n$ повтореннях експерименту,— *випадковою вибіркою*.

У більшості випадків нас цікавитимуть не самі елементи множини $A$, а лише згадана їх характеристика $\xi$ і закон її розподілу. Тому у випадку довільної випадкової величини $\xi$ множину всіх її можливих значень також називають *генеральною сукупністю*, а утворені в результаті $n$ експериментів числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *вибіркою* з цієї сукупності.

Оскільки умови експерименту вважаємо незмінними, а результати експериментів — незалежними один від одного, то результати $n$ експериментів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є незалежними в сукупності випадковими величинами, що мають ту саму функцію розподілу $F(x)$.

**Зауваження.** На практиці вибір з генеральної сукупності часто здійснюється так, що після кожного експерименту досліджуваний елемент не повертається до генеральної сукупності перед наступним вибором (так, наприклад, здійснюють вибірковий контроль якості продукції). При цьому не можна вважати, що всі експерименти проводяться в однакових умовах і їх результати незалежні один від одного, оскільки після кожного експерименту склад генеральної сукупності змінюється. Такий вибір називають вибором без повернення на відміну від простого випадкового вибору, або вибору з поверненням. Але якщо генеральна сукупність достатньо велика, а вибірка по своєму об'єму становить лише незначну її частину, то відміна між цими двома типами вибору незначна, і нею можна нехтувати.

Нехай задано вибірку $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з генеральної сукупності з невідомою функцією розподілу $F(x)$ (теоретичною функцією розподілу). Математичне сподівання і дисперсію для цього теоретичного розподілу позначатимемо відповідно

$$a = \mathbf{M}\xi, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\xi.$$

Задача полягає в тому, щоб визначити з певною мірою надійності цю невідому функцію розподілу або, принаймні, деякі її числові характеристики. Для того щоб розв'язати цю задачу, введемо поняття про розподіл вибірки. Р о з п о д і л о м  в и б і р к и називають дискретний розподіл, в якому кожному з чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідає ймовірність $\frac{1}{n}$. Функція розподілу вибірки (або емпірична функція розподілу) є, очевидно,

$$F_n(x) = \frac{\nu}{n}, \tag{1}$$

де $\nu$ — число тих $x_i$, для яких $x_i < x$. Математичне сподівання, дисперсію, моменти розподілу вибірки називають відповідно в и б і р к о в и м  с е р е д н і м, в и б і р к о в о ю  д и с п е р с і є ю, в и б і р к о в и м и  м о м е н т а м и. Вибіркове середнє позначають $\bar{x}$, вибіркову дисперсію $s^2$. Таким чином,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2}$$



тобто вибіркове середнє є середнім арифметичним вибіркових значень

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2. \tag{3}$$

Зазначимо, що оскільки вибіркові характеристики (такі, як, наприклад, $\bar{x}$ і $s^2$) є функціями від випадкових величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то й вони самі є випадковими величинами. Виявляється, що емпірична функція розподілу і вибіркові характеристики можуть служити наближеннями відповідно для теоретичної функції розподілу і відповідних теоретичних числових характеристик (якщо тільки $n$ досить велике). Для точного формулювання відповідних тверджень зручно користуватися поняттям збіжності за ймовірністю, що було введено в § 34.

***Теорема 1.*** *При $n \to \infty$ і будь-якому дійсному $x$ має місце таке співвідношення:*

$$F_n(x) \xrightarrow{\text{йм}} F(x).$$

Д о в е д е н н я. Зафіксуємо довільне дійсне $x$ і розглянемо послідовність $n$ незалежних експериментів, які дають значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ величини $\xi$. Якщо вважати успіхом виконання нерівності $\xi < x$, то за означенням функції розподілу ймовірність успіху при кожному з експериментів дорівнює $F(x)$, а, згідно з формулою (1), $F_n(x)$ — це частота успіхів при $n$ випробуваннях. Тому за теоремою Бернуллі

$$F_n(x) \xrightarrow{\text{йм}} F(x),$$

що й доводить теорему. ■

***Теорема 2.*** *Якщо випадкова величина $\xi$ має скінченне математичне сподівання $a$ і скінченну дисперсію $\sigma^2$, то при $n \to \infty$*

$$\bar{x} \xrightarrow{\text{йм}} a,$$

$$s^2 \xrightarrow{\text{йм}} \sigma^2.$$

Д о в е д е н н я. Ми обмежимося доведенням лише першого з цих двох співвідношень. Оскільки кожна з випадкових величин $x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) має функцію розподілу $F(x)$, то її математичне сподівання і дисперсія дорівнюють відповідно $a$ і $\sigma^2$. Тому за законом великих чисел (у формі теореми Чебишова) при $n \to \infty$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \xrightarrow{\text{йм}} a,$$

тобто

$$\bar{x} \xrightarrow{\text{йм}} a,$$

що й треба було довести. ■

**3. Загальні поняття теорії оцінок.** Нехай $c$ — деякий параметр теоретичного розподілу (наприклад, математичне сподівання, дисперсія, медіана тощо). Оцінкою цього параметра називають таку функцію $\gamma = \gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від значень, що спостерігалися, яка в певному розумінні мало відрізняється від $c$. У математичній статистиці розглядають оцінки, що задовольняють ряд умов, які будуть сформульовані нижче.

Означення 1. Оцінка $\gamma = \gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ параметра $c$ називається консистентною оцінкою цього параметра, якщо при $n \to \infty$

$$\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) \xrightarrow{\text{йм}} c.$$

Теорему 2 можна тепер сформулювати так: *вибіркове середнє і вибіркова дисперсія є консистентними оцінками відповідно для теоретичних математичного сподівання і дисперсії.*

Означення 2. Оцінку $\gamma = \gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають незсуненою оцінкою параметра $c$, якщо при будь-якому натуральному $n$

$$\mathbf{M}\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c.$$

Нагадаємо, що $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — випадкові величини, тому й $\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — випадкова величина.

Умова незсуненості означає, що похибка від заміни $c$ на $\gamma$ не має систематичного характеру.

Прикладом незсуненої оцінки є вибіркове середнє значення $\bar{x}$ як оцінка математичного сподівання $a$. Справді, оскільки кожна з випадкових величин $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ має функцію розподілу $F(x)$, то $\mathbf{M}x_i = \mathbf{M}\xi = a$, і тому

$$\mathbf{M}\bar{x} = \mathbf{M}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}x_i = a.$$

Навпаки, виявляється, що вибіркова дисперсія $s^2$ не є незсуненою оцінкою для теоретичної дисперсії $\sigma^2$. Перевіримо, що це так. Введемо позначення $y_i = x_i - a$, тоді

$$\mathbf{M}y_i = \mathbf{M}x_i - a = 0, \quad \mathbf{M}y_i^2 = \mathbf{M}(x_i - a)^2 =$$
$$= \mathbf{D}x_i = \sigma^2, \quad \mathbf{D}y_i = \mathbf{D}x_i = \sigma^2.$$



За формулою (3)

$$\mathbf{M}s^2 = \frac{1}{n}\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 =$$
$$= \frac{1}{n}\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{2}{n}\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n} y_i\bar{y} + \frac{1}{n}\mathbf{M}(n(\bar{y})^2) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}y_i^2 - 2\mathbf{M}(\bar{y})^2 + \mathbf{M}(\bar{y})^2 =$$
$$= \frac{1}{n}\cdot n\sigma^2 - \mathbf{M}(\bar{y})^2 = \sigma^2 - \mathbf{M}(\bar{y})^2. \tag{4}$$

Оскільки $y_i$ і $y_j$ незалежні при $i \neq j$, то

$$\mathbf{M}(y_i y_j) = \mathbf{M}y_i \cdot \mathbf{M}y_j = 0,$$

тому

$$\mathbf{M}(\bar{y})^2 = \mathbf{M}\left(\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 +\right.$$
$$\left. + 2\sum_{i<j} y_i y_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}y_i^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Підставивши це значення в (4), остаточно дістанемо

$$\mathbf{M}s^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2. \tag{5}$$

Отже, $\mathbf{M}s^2 \neq \sigma^2$, тобто $s^2$ не є незсуненою оцінкою для $\sigma^2$.

За формулою (5) можна дістати незсунену оцінку для $\sigma^2$. Справді, нехай

$$s_1^2 = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \tag{6}$$

тоді

$$\mathbf{M}s_1^2 = \frac{n}{n-1}\mathbf{M}s^2 = \sigma^2.$$

Отже, величина $s_1^2$, що визначається формулою (6), є незсуненою оцінкою для дисперсії $\sigma^2$. При $n \to \infty$ обидві величини $s^2$ і $s_1^2$ прямують до тієї самої границі, тому ця оцінка є також консистентною.

**4. Надійні межі для математичного сподівання.** З поняттям надійних меж ми вже зустрічалися в § 22 при вивченні оцінки невідомої ймовірності через частоту. Дамо загальне означення цього поняття.

Означення 3. Нехай $\gamma_1 = \gamma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\gamma_2 = \gamma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — такі функції від вибіркових значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для яких завжди $\gamma_1 \leqslant \gamma_2$; $\beta$ — деяке дійсне число з інтервалу (0, 1). Якщо для параметра $c$ теоретичного розподілу має місце співвідношення

$$P\{\gamma_1 \leqslant c \leqslant \gamma_2\} \geqslant \beta, \tag{7}$$

то $\gamma_1$ і $\gamma_2$ називають надійними межами для параметра $c$, а проміжок $(\gamma_1, \gamma_2)$ — надійним інтервалом, що відповідають надійному рівню $\beta$.

Зауваження. Замість співвідношення (7) часто пишуть

$$P\{\gamma_1 < c < \gamma_2\} = \beta, \text{ або } P\{\gamma_1 \leqslant c \leqslant \gamma_2\} = \beta.$$

Надійні межі для математичного сподівання у випадку будь-якого розподілу легко знайти за допомогою центральної граничної теореми. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — вибірка з генеральної сукупності, розподіленої за довільним законом з математичним сподіванням $a$ і дисперсією $\sigma^2$. Тоді, як відомо, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є взаємно незалежними, однаково розподіленими випадковими величинами, що мають математичне сподівання $a$ і дисперсію $\sigma^2$. Тому за центральною граничною теоремою у формі Ліндеберга — Леві (див. § 35) при $n \to \infty$

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < t\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Це, очевидно, можна записати так:

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - a < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

або

$$P\left\{|\bar{x} - a| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t\right\} \to 2\Phi(t),$$

де $\Phi(t)$ — функція Лапласа.

Звідси випливає, що при достатньо великому $n$

$$P\left\{|\bar{x} - a| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t\right\} \approx 2\Phi(t), \tag{8}$$

тобто при надійному рівні $\beta = 2\Phi(t)$ надійним інтервалом для математичного сподівання $a$ є проміжок

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t, \ \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t\right). \tag{9}$$

Якщо генеральна дисперсія $\sigma^2$ відома, то цим самим задачу побудови надійного інтервала розв'язано. Але, як



правило, величина $\sigma^2$ нам невідома. Тому на практиці її замінюють відповідною оцінкою, тобто величиною $s_1^2$. При цьому для надійного рівня $\beta = 2\Phi(t)$ для $a$ беруть надійний інтервал

$$\left(\bar{x} - \frac{s_1}{\sqrt{n}} t, \ \bar{x} + \frac{s_1}{\sqrt{n}} t\right). \tag{10}$$

Якщо об'єм вибірки недостатньо великий ($n < 30$), то знайдений надійний інтервал не заслуговує значного довір'я, по-перше, тому, що рівність (8) є лише наближеною, по-друге, тому, що ми замінили невідому дисперсію $\sigma^2$ її оцінкою $s_1^2$. Нехай додатково відомо, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом; $a$, $\sigma$ — параметри розподілу. Розглянемо відношення

$$t = \frac{\bar{x} - a}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}. \tag{11}$$

Це є, очевидно, випадкова величина. Можна довести (див. [6], § 24), що вона розподілена за так званим законом Стьюдента з $n - 1$ степенями свободи; щільність розподілу ймовірностей для $t$ дорівнює:

$$s_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Таблиці розподілу Стьюдента (табл. 5 додатка) побудовано так, що для ряду значень надійного рівня $\beta$ і об'єму вибірки $n$ наведено такі значення $t_\beta = t(\beta, n)$, що

$$P\{|t| < t_\beta\} = \beta.$$

Якщо задано надійний рівень $\beta$, то, враховуючи формулу (11), матимемо

$$P\left\{\frac{|\bar{x} - a|}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} < t_\beta\right\} = \beta,$$

або

$$P\left\{|\bar{x} - a| < \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_\beta\right\} = \beta.$$

Звідси дістаємо такий надійний інтервал для математичного сподівання $a$ при надійному рівні $\beta$

$$\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_\beta, \ \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_\beta\right). \tag{12}$$

При $n \geqslant 30$ розподіл Стьюдента практично не відрізняється від нормального з параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$, тому в цьому випадку можна користуватися надійним інтервалом (10).

**5. Способи обчислення вибіркових характеристик.** Якщо об'єм вибірки $n$ невеликий, то для обчислення основних числових характеристик вибірки можна користуватися формулами (2), (3), (6). Але при великих $n$ (навіть порядку кількох десятків) обчислення за цими формулами стають дуже громіздкими (особливо обчислення дисперсії).

Для спрощення обчислень запишемо спочатку вибіркові значення в порядку зростання і відповідно занумеруємо їх:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n.$$

Цю послідовність значень називають варіаційним рядом, а окремі значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — в а р і а н т а м и. Якщо серед варіант є однакові, то ми їх знов перенумеруємо, приписуючи однаковим варіантам той самий номер. Якщо при цьому $x_i$ повторюється $n_i$ раз ($i = 1, 2, \ldots, k$; $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), то формули (2), (3) набувають вигляду

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}, \tag{13}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2. \tag{14}$$

Якщо число варіант досить велике, то для спрощення обчислень застосовують г р у п у в а н н я емпіричних даних. Нехай $(a, b)$ — інтервал, в якому лежать усі вибіркові значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Розіб'ємо інтервал $(a, b)$ на деяке число $k$ рівних частин. Нехай $z_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) — середини цих інтервалів; для спрощення обчислень покладемо наближено, що всі вибіркові значення, які попали в $i$-й інтервал, дорівнюють $z_i$. Якщо $n_i$ — число вибіркових значень, які попали в $i$-й інтервал, то за формулами (13), (14)

$$\bar{x} \approx \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i z_i}{n}, \tag{15}$$

$$s^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (z_i - \bar{z})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i z_i^2 - (\bar{z})^2. \tag{16}$$



Для дальшого спрощення обчислень застосовують так званий м е т о д у м о в н и х в а р і а н т. Нехай $i_0$ — номер одного з інтервалів, який лежить приблизно посередині інтервала $(a, b)$; особливо зручно брати інтервал, в який потрапило найбільше число вибіркових значень, але це не обов'язково. Введемо так звані умовні варіанти $u_i = i - i_0$. Нехай $h = \frac{b-a}{k}$ — довжина часткових інтервалів, або к р о к. Оскільки $z_i = z_1 + (i-1)h$ ($i = 1, 2, \ldots, k$), то

$$z_i - z_{i_0} = (i - i_0)h = u_i h,$$

звідки

$$z_i = z_{i_0} + u_i h. \tag{17}$$

Значення $z_{i_0}$ іноді називають у м о в н и м н у л е м.

Тепер за формулою (15), беручи до уваги співвідношення (17), дістаємо

$$\bar{x} \approx \bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (z_{i_0} + u_i h) =$$

$$= z_{i_0} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i + h \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i,$$

тобто

$$\bar{x} \approx \bar{z} = z_{i_0} + h\bar{u}\left(\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i\right). \tag{18}$$

Аналогічно за формулою (16) з урахуванням (17) і (18) дістанемо

$$s^2 \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (z_i - \bar{z})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (u_i h - \bar{u}h)^2 =$$

$$= h^2 \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (u_i - \bar{u})^2,$$

або

$$s^2 \approx h^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 - (\bar{u})^2\right) = h^2 s_u^2. \tag{19}$$

Формули (18) і (19) зручні тим, що умовні варіанти $u_i$ — послідовні цілі числа.

**Приклад.** У таблиці

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4,781 | 4,764 | 4,777 | 4,809 | 4,761 | 4,769 |
| 4,795 | 4,776 | 4,765 | 4,790 | 4,792 | 4,806 |
| 4,769 | 4,771 | 4,785 | 4,779 | 4,758 | 4,779 |
| 4,792 | 4,789 | 4,805 | 4,788 | 4,764 | 4,785 |
| 4,779 | 4,772 | 4,768 | 4,772 | 4,810 | 4,790 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4,775 | 4,789 | 4,801 | 4,791 | 4,799 | 4,777 |
| 4,772 | 4,764 | 4,785 | 4,788 | 4,799 | 4,749 |
| 4,791 | 4,774 | 4,783 | 4,783 | 4,797 | 4,781 |
| 4,782 | 4,778 | 4,808 | 4,740 | 4,790 | |
| 4,767 | 4,791 | 4,771 | 4,775 | 4,747 | |

наведено 58 значень величини e, знайдених Міллікеном при визначенні величини заряду електрона, що дорівнює $10^{-10}$ е одиниць СГСЕ. Згрупувати ці дані, знайти вибіркові середнє і дисперсію, а також незсунену оцінку дисперсії. Знайти надійний інтервал для математичного сподівання з надійністю 0,95, користуючись: а) нормальним розподілом; б) розподілом Стьюдента.

Розіб'ємо проміжок, в якому лежать вибіркові значення, на 8 інтервалів з кроком $h = 0{,}01$: [4,735; 4,745), [4,745; 4,755), ..., [4,805; 4,815); середини цих інтервалів 4,740, 4,750, ..., 4,810 запишемо в першому стовпці таблиці.

У другому стовпці запишемо число вибіркових значень, що потрапили у відповідний інтервал, в третьому — умовні варіанти (за умовний нуль візьмемо $z_5 = 4{,}780$), а в двох останніх — добутки, необхідні для застосування формул (18) і (19). В останньому рядку запишемо суми відповідних добутків.

| $z_i$ | $n_i$ | $u_i$ | $n_iu_i$ | $n_iu_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 4,740 | 1 | —4 | —4 | 16 |
| 4,750 | 2 | —3 | —6 | 18 |
| 4,760 | 5 | —2 | —10 | 20 |
| 4,770 | 11 | —1 | —11 | 11 |
| 4,780 | 14 | 0 | 0 | 0 |
| 4,790 | 15 | 1 | 15 | 15 |
| 4,800 | 5 | 2 | 10 | 20 |
| 4,810 | 5 | 3 | 15 | 45 |
| Σ | 58 | | 9 | 145 |

З цієї таблиці знаходимо

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_iu_i = \frac{1}{58}\cdot 9 = 0{,}155,$$

тому за формулою (18)

$$\bar{x} \approx z_{i_0} + h\bar{u} = 4{,}780 + 0{,}01\cdot 0{,}155 = 4{,}782.$$

Далі, за формулою (19)

$$s^2 \approx h^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_iu_i^2 - (\bar{u})^2\right) = 0{,}01^2\left(\frac{143}{58} - 0{,}155^2\right) = 0{,}000248.$$

Незсунена оцінка дисперсії $s_1^2$ в цьому прикладі практично не відрізняється від $s^2$

$$s_1^2 = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{58}{57}\cdot 2{,}48\cdot 10^{-4} = 2{,}52\cdot 10^{-4}.$$

Знайдемо спочатку надійні межі для математичного сподівання за нормальним розподілом (тобто інтервал (10)). Для надійності $\beta =$



$= 0{,}95$ з умови $2\Phi(t) = 0{,}95$ знаходимо, що $t = 1{,}96$, тому

$$\frac{s_1}{\sqrt{n}}t = \frac{\sqrt{2{,}52}\cdot 10^{-2}}{\sqrt{58}}\cdot 1{,}96 = 0{,}004,$$

і, отже, шуканим надійним інтервалом є (4,782—0,004; 4,782+0,004), тобто (4,778; 4,786).

Якщо користуватись розподілом Стьюдента (тобто шукати інтервал (12)), то за табл. 5 для $n = 58$ і $\beta = 0{,}95$ дістанемо $t_\beta = 2{,}003$, звідси

$$\frac{s}{\sqrt{n-1}}t_\beta = \frac{s_1}{\sqrt{n}}t_\beta = \frac{\sqrt{2{,}52}\cdot 10^{-2}}{\sqrt{58}}\cdot 2{,}003 = 0{,}0043;$$

отже, в цьому випадку розподіл Стьюдента не дає істотного розширення надійних меж.

**Зауваження.** Необхідно застерегти від можливого неправильного тлумачення здобутого результату. Запис

$$P\{4{,}778 < a < 4{,}786\} = 0{,}95$$

не є правильним, оскільки $a$ — це цілком певне (але нам невідоме) число, і тому воно або лежить у зазначеному інтервалі, або не лежить, тобто записана ймовірність насправді дорівнює 1 або 0. Здобутий при розв'язуванні прикладу результат має такий смисл: якщо здійснювати багато серій випробувань, то приблизно в 95 % випадків здобуті за вказаним методом інтервали будуть містити $a$ і лише в 5 % випадків значення $a$ може бути за межами такого інтервалу (пор. аналогічне зауваження в § 22).

**Вправи**

1. Виміряно максимальну ємність 20 конденсаторів змінної ємності; результати вимірювань (у пікофарадах) наведено у наступній таблиці:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4,40 | 4,31 | 4,40 | 4,40 | 4,65 |
| 4,56 | 4,71 | 4,54 | 4,36 | 4,56 |
| 4,31 | 4,42 | 4,60 | 4,35 | 4,50 |
| 4,40 | 4,43 | 4,48 | 4,42 | 4,45 |

Знайти вибіркову середню ємність конденсаторів з цієї групи, вибіркову дисперсію $s^2$ ємності та її незсунену оцінку $s_1^2$.

2. За даними задачі 1: а) знайти надійні межі для математичного сподівання $m$ генеральної сукупності при надійному рівні 1) 0,99; 2) 0,95, користуючись нормальним розподілом; б) зробити те саме за допомогою розподілу Стьюдента.

3. При свердлінні 80 отворів тим самим свердлом з наступними вимірюваннями діаметрів отворів здобуто такі дані (в мм):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40,25 | 40,35 | 40,45 | 40,35 | 40,39 | 40,40 | 40,42 | 40,32 |
| 40,37 | 40,35 | 40,44 | 40,35 | 40,30 | 40,34 | 40,31 | 40,32 |
| 40,33 | 40,41 | 40,35 | 40,30 | 40,33 | 40,38 | 40,33 | 40,33 |
| 40,28 | 40,30 | 40,40 | 40,36 | 40,32 | 40,32 | 40,42 | 40,35 |
| 40,29 | 40,33 | 40,31 | 40,33 | 40,36 | 40,34 | 40,30 | 40,30 |
| 40,41 | 40,40 | 40,33 | 40,37 | 40,34 | 40,30 | 40,43 | 40,34 |
| 40,35 | 40,34 | 40,34 | 40,31 | 40,43 | 40,36 | 40,34 | 40,34 |
| 40,28 | 40,45 | 40,32 | 40,34 | 40,31 | 40,31 | 40,36 | 40,34 |
| 40,29 | 40,39 | 40,39 | 40,37 | 40,37 | 40,38 | 40,36 | 40,41 |
| 40,27 | 40,38 | 40,37 | 40,37 | 40,36 | 40,35 | 40,32 | 40,36 |

Знайти вибіркове середнє значення діаметра і незсунену оцінку дисперсії: а) безпосередньо за даними таблиці; б) згрупувавши емпіричні дані і використавши метод умовних варіант. При групуванні розбити проміжок від 40,25 до 40,45 на 10 проміжків з кроком $h = 0{,}02$.

4. За даними задачі 3 (після групування) знайти надійні межі для математичного сподівання $m$ генеральної сукупності при надійному рівні: а) 0,997; б) 0,95.

5. Проводились випробування чутливості 40 однотипних радіоприймачів. Результати випробувань після групування подано в таблиці, де в першому рядку дано інтервали чутливості (у мікровольтах), у другому рядку — число приймачів з чутливістю у цих інтервалах:

| Інтервал | 75—125 | 125—175 | 175—225 | 225—275 | 275—325 | 325—375 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 0 | 1 | 5 | 9 | 6 | 8 |
| Інтервал | 375—425 | 425—475 | 475—525 | 525—575 | 575—625 | 625—675 |
| $n_i$ | 6 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| Інтервал | 675—725 | | | | | |
| $n_i$ | 0 | | | | | |

Побудувати функцію розподілу вибірки, обчислити вибіркову середню чутливість і вибіркову дисперсію (незсунену оцінку).

6. У відділі технічного контролю було виміряно 200 втулок з партії, виготовленої одним автоматичним верстатом. У таблиці дано відхилення діаметрів від номіналу (у мікронах) після групування:

| Межі відхилень | [—20, —15) | [—15, —10) | [—10, —5) | [—5, 0) | [0, 5) | [5, 10) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 7 | 11 | 15 | 24 | 49 | 41 |
| Межі відхилень | [10, 15) | [15, 20) | [20, 25) | [25, 30) | | |
| $n_i$ | 26 | 17 | 7 | 3 | | |

Знайти вибіркове середнє і незсунену оцінку дисперсії для цих відхилень.

7. За даними задачі 6 знайти надійні межі для математичного сподівання $m$ відхилення діаметра від номіналу для генеральної сукупності при надійному рівні 0,95.

8. З партії сталевих плашок зроблено вибірку об'ємом 200 і результати вимірювання товщини плашок згруповано в 12 інтервалів шириною в 0,02 мм. Результати наведено в таблиці, де в першому рядку записано середини інтервалів ($x_i$), а в другому ($n_i$) — число плашок, товщина яких міститься у цьому інтервалі:

| $x_i$ | 14,41 | 14,43 | 14,45 | 14,47 | 14,49 | 14,51 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 2 | 8 | 9 | 9 | 14 |
| $x_i$ | 14,53 | 14,55 | 14,57 | 14,59 | 14,61 | 14,63 |
| $n_i$ | 41 | 76 | 21 | 11 | 4 | 3 |

Знайти вибіркові середнє і дисперсію, а також незсунену оцінку дисперсії.

9. На заводі було проведено контрольне вимірювання 200 однотипних деталей. Результати, здобуті після групування, наведено в таблиці, де у першому рядку указано середини інтервалів (шириною 0,1 мм), а у другому — число результатів вимірювання, що потрапили у цей інтервал:

| $x_i$ | 3,7 | 3,8 | 3,9 | 4,0 | 4,1 | 4,2 | 4,3 | 4,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 22 | 40 | 79 | 27 | 26 | 4 | 1 |

Знайти вибіркові середнє і дисперсію, а також незсунену оцінку дисперсії.

10. У відділі технічного контролю виміряли глибину пазів 200 плашок; у таблиці наведено результати вимірювання (у мм):

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,4 | 2,4 | 2,5 | 2,4 | 2,7 | 2,7 | 2,2 | 2,2 | 2,6 | 2,4 |
| 2,6 | 2,7 | 2,6 | 2,8 | 2,3 | 2,6 | 2,5 | 2,3 | 2,5 | 2,4 |
| 2,7 | 2,5 | 2,4 | 2,5 | 2,5 | 2,4 | 2,6 | 2,4 | 2,6 | 2,5 |
| 2,5 | 2,4 | 2,7 | 2,4 | 2,4 | 2,5 | 2,5 | 2,4 | 2,6 | 2,3 |
| 2,5 | 2,6 | 2,6 | 2,4 | 2,4 | 2,5 | 2,4 | 2,4 | 2,5 | 2,2 |
| 2,8 | 2,4 | 2,5 | 2,4 | 2,4 | 2,4 | 2,4 | 2,5 | 2,5 | 2,2 |
| 2,8 | 2,4 | 2,9 | 2,6 | 2,2 | 2,4 | 2,4 | 2,4 | 2,3 | 2,2 |
| 2,5 | 2,4 | 2,4 | 2,5 | 2,4 | 2,5 | 2,2 | 2,5 | 2,5 | 2,4 |
| 2,6 | 2,6 | 2,7 | 2,2 | 2,6 | 2,5 | 2,5 | 2,6 | 2,5 | 2,4 |
| 2,6 | 2,6 | 2,5 | 2,6 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2,6 | 2,6 |
| 2,7 | 2,5 | 2,7 | 2,1 | 2,5 | 2,6 | 2,5 | 2,4 | 2,5 | 2,7 |
| 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,6 | 2,7 | 2,5 | 2,7 | 2,6 | 2,5 | 2,3 |
| 2,4 | 2,3 | 2,6 | 2,4 | 2,3 | 2,5 | 2,2 | 2,6 | 2,1 | 2,5 |
| 2,5 | 2,5 | 2,8 | 2,3 | 2,7 | 2,5 | 2,4 | 2,6 | 2,4 | 2,5 |
| 2,1 | 2,6 | 2,6 | 2,5 | 2,5 | 2,7 | 2,6 | 2,4 | 2,4 | 2,6 |
| 2,6 | 2,7 | 2,7 | 2,6 | 2,4 | 2,4 | 2,2 | 2,5 | 2,5 | 2,3 |
| 2,5 | 2,3 | 2,4 | 2,7 | 2,5 | 2,3 | 2,5 | 2,5 | 2,4 | 2,5 |
| 2,5 | 2,5 | 2,6 | 2,5 | 2,4 | 2,5 | 2,4 | 2,4 | 2,6 | 2,6 |
| 2,3 | 2,8 | 2,6 | 2,6 | 2,4 | 2,4 | 2,4 | 2,5 | 2,5 | 2,4 |
| 2,2 | 2,6 | 2,6 | 2,4 | 2,3 | 2,3 | 2,5 | 2,5 | 2,4 | 2,6 |

а) Знайти вибіркові середнє і дисперсію глибини пазу безпосередньо за даними таблиці; б) зробити те саме після попереднього групування даних. Для групування розбити проміжок (2,0; 2,8] на чотири проміжки: (2,0; 2,2], (2,2; 2,4], (2,4; 2,6], (2,6; 2,8].

11. З метою визначення середньої врожайності пшениці на площі 500 000 га проведено вибіркове вимірювання врожайності на 2500 га. Результати вимірювань подано у таблиці:

| Врожайність з 1 га (в ц) | 15—17 | 17—19 | 19—21 | 21—23 | 23—25 | 25—27 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Кількість гектарів | 100 | 300 | 500 | 700 | 600 | 300 |

Знайти вибіркову середню врожайність з гектара і вибіркову дисперсію. Знайти ймовірність того, що середня врожайність з 500 000 га відрізняється від вибіркової середньої не більше ніж на 9 кг.

12. З партії однотипних високоомних резисторів відібрано для контролю 10 шт. Вимірювання показали такі відхилення від номіналу (у кілоомах): $+1, +3, -2, +2, +4, +2, +5, +3, -2, +4$. Знайти вибіркові середнє і дисперсію відхилення фактичної величини опору від номіналу у цій партії. За розподілом Стьюдента знайти надійні межі для математичного сподівання цього відхилення при надійному рівні 0,95.

## § 37. Кореляційний зв'язок між випадковими величинами. Регресія

**1. Вивчення зв'язку за допомогою прямих регресій.** У § 32 було введено поняття коефіцієнта кореляції $\rho = \rho(\xi, \eta)$ між двома випадковими величинами $\xi$ і $\eta$. При цьому було показано, що коли $\xi$ і $\eta$ незалежні, то $\rho = 0$, а коли $\xi$ і $\eta$ зв'язані лінійною залежністю (і тільки в цьому випадку), то $|\rho(\xi, \eta)| = 1$. Якщо $0 < |\rho(\xi, \eta)| < 1$, то $\xi$ і $\eta$ — залежні випадкові величини, і природно вважати, що чим ближче $|\rho(\xi, \eta)|$ до 1, тим «ближче» залежність між $\xi$ і $\eta$ до функціональної залежності виду $\eta = a\xi + b$. Тому цілком природним є питання про наближене зображення зв'язку між $\xi$ і $\eta$ у вигляді лінійної функції (для цієї мети використовують також поліноми вищих степенів).

О з н а ч е н н я. Пряма $y = \alpha x + \beta$ називається прямою регресії (або прямою середньої квадратичної регресії) $\eta$ на $\xi$, якщо коефіцієнти $\alpha$, $\beta$ вибрано так, щоб середнє квадратичне відхилення $\alpha\xi + \beta$ від $\eta$ було мінімальним



$$M(\eta - \alpha\xi - \beta)^2 = \min. \qquad (20)$$

Аналогічно визначається пряма регресії $\xi$ на $\eta$.

З умови (20) легко визначити $\alpha$ і $\beta$. Виконавши елементарні тотожні перетворення, дістанемо

$$M(\eta - \alpha\xi - \beta)^2 = M(\eta - M\eta - \alpha(\xi - M\xi) + M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2 = M(\eta - M\eta)^2 - 2\alpha M[(\xi - M\xi) \times (\eta - M\eta)] + \alpha^2 M(\xi - M\xi)^2 + (M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2 =$$
$$= \sigma_\eta^2 - 2\alpha \operatorname{cov}(\xi, \eta) + \alpha^2\sigma_\xi^2 + (M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2 =$$
$$= \sigma_\eta^2 - 2\alpha\rho\sigma_\xi\sigma_\eta + \alpha^2\sigma_\xi^2 + (M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2 =$$
$$= (\rho\sigma_\eta - \alpha\sigma_\xi)^2 + (1 - \rho^2)\sigma_\eta^2 + (M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2, \qquad (21)$$

де $\rho = \rho(\xi, \eta) = \dfrac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi\sigma_\eta}$ — коефіцієнт кореляції між $\xi$ і $\eta$. Звідси випливає, що умову (20) буде виконано, якщо

$$\rho\sigma_\eta - \alpha\sigma_\xi = 0, \quad M\eta - \alpha M\xi - \beta = 0,$$

звідки

$$\alpha = \rho\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}, \quad \beta = M\eta - \alpha M\xi. \qquad (22)$$

Коефіцієнт $\alpha$ називається к о е ф і ц і є н т о м р е г р е с і ї $\eta$ на $\xi$.

Рівняння прямої регресії $\eta$ на $\xi$ має вигляд

$$y = \rho\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}x + M\eta - \rho\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi,$$

або

$$y - M\eta = \rho\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x - M\xi). \qquad (23)$$

Аналогічно доводиться, що пряма регресії $\xi$ на $\eta$ має рівняння

$$x - M\xi = \rho\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(y - M\eta). \qquad (24)$$

***Теорема 3.*** *Пряма регресії $\eta$ на $\xi$ збігається з прямою регресії $\xi$ на $\eta$ тоді і тільки тоді, коли $|\rho(\xi, \eta)| = 1$.*

Д о в е д е н н я. Порівнюючи рівняння (23) і (24), неважко перевірити, що вони визначають ту саму пряму тоді і тільки тоді, коли $\rho = \dfrac{1}{\rho}$, тобто $\rho^2 = 1$. ■

**Зауваження.** З рівності (21) випливає, що для прямої регресії $\eta$ на $\xi$ має місце співвідношення

$$M(\eta-(\alpha\xi+\beta))^2=(1-\rho^2)\,\sigma_\eta^2 \tag{25}$$

(цю величину іноді називають залишковою дисперсією); аналогічне співвідношення має місце для прямої регресії $\xi$ на $\eta$. Звідси випливає, що чим менше відрізняється $|\rho|$ від 1, тим кращим можна вважати наближення $\eta$ лінійним виразом $\alpha\xi+\beta$.

**2. Вибіркові характеристики зв'язку.** Нехай $\xi$ і $\eta$ — випадкові величини, зв'язок між якими треба вивчити; в результаті $n$ випробувань дістали $n$ пар значень цих величин $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_n, y_n)$. Вибіркові середні і дисперсії позначимо відповідно $\overline{x}$, $\overline{y}$, $s_x^2$, $s_y^2$. За оцінку коефіцієнта кореляції $\rho=\rho(\xi,\eta)$ можна взяти вибірковий коефіцієнт кореляції $r$ — коефіцієнт кореляції між розподілами виборок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і $y_1, y_2, \ldots, y_n$; при цьому кожній парі $(x_i, y_i)$, як і при побудові одновимірної функції розподілу вибірки, ми приписуємо ймовірність $\frac{1}{n}$. Згідно з означенням коефіцієнта кореляції (див. § 32)

$$r=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y}}{s_x s_y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{n s_x s_y}. \tag{26}$$

Аналогічно визначаються рівняння вибіркових прямих регресії: прямої регресії $\eta$ на $\xi$

$$y-\overline{y}=r\frac{s_y}{s_x}(x-\overline{x}) \tag{27}$$

і прямої регресії $\xi$ на $\eta$

$$x-\overline{x}=r\frac{s_x}{s_y}(y-\overline{y}). \tag{28}$$

Можна довести (див. [11]), що вибірковий коефіцієнт кореляції $r$, а отже, і вибіркові коефіцієнти регресії $r\frac{s_y}{s_x}$ і $r\frac{s_x}{s_y}$ є консистентними оцінками відповідних теоретичних параметрів. Тому при достатньо великих $n$ можна сподіватись, що вибірковий коефіцієнт кореляції і вибіркові прямі регресії будуть мало відрізнятись від теоретичних.

З'ясуємо геометричний смисл вибіркових прямих регресії. Якщо $y=ax+b$ — рівняння вибіркової прямої регресії $\eta$ на $\xi$, то згідно з означенням прямої регресії



(див. (20)) повинно бути

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2=\min.$$

Інакше кажучи, пряма регресії — це пряма, яку наближено проведено через точки $(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ за методом найменших квадратів. Отже, рівняння прямих регресії доцільно знаходити лише в тому випадку, коли точки $(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ групуються поблизу деякої прямої (це можна перевірити, наприклад, побудувавши ці точки в декартовій системі координат). Якщо для точок $(x_1, y_1)$, ..., $(x_n, y_n)$ не спостерігається розміщення, близького до прямолінійного, то замість прямих регресії можна розглядати лінії вищих порядків. Так, наприклад, можна розглядати параболічну регресію

$$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma,$$

замінивши умову (20) на умову

$$M(\eta-(\alpha\xi^2+\beta\xi+\gamma))^2=\min.$$

**3. Обчислення вибіркового коефіцієнта кореляції.** При невеликому числі випробувань вибірковий коефіцієнт кореляції обчислюється безпосередньо за формулою (26). Якщо ж число випробувань $n$ дуже велике (принаймні кілька десятків), то для спрощення обчислень дані можна згрупувати і застосувати метод умовних варіант, як у попередньому параграфі. Вважатимемо, що дані уже згруповано і що пара чисел $(x_i, y_j)$ спостерігалась $n_{ij}$ разів $(i=1, 2, \ldots, k;\ j=1, 2, \ldots, l)$. Тоді ці дані записують у формі так званої кореляційної таблиці

| $\eta \backslash \xi$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $n_{11}$ | $n_{21}$ | ... | $n_{k1}$ | $n_1$ |
| $y_2$ | $n_{12}$ | $n_{22}$ | ... | $n_{k2}$ | $n_2$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $y_l$ | $n_{1l}$ | $n_{2l}$ | ... | $n_{kl}$ | $n_l$ |
| | $m_1$ | $m_2$ | ... | $m_k$ | $n$ |

У цій таблиці $m_i=\sum_{j=1}^{l}n_{ij}$, $n_j=\sum_{i=1}^{k}n_{ij}$, $\sum_{i=1}^{k}m_i=\sum_{j=1}^{l}n_j=n$ ($n$ — це число всіх спостережень). Тоді формула

(26) набуває вигляду

$$r = \frac{\sum_{i,j} n_{ij} x_i y_j - n\bar{x}\bar{y}}{n s_x s_y}. \tag{29}$$

Нехай $x_{i+1} - x_i = h_1$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, $y_{j+1} - y_j = h_2$ $(j = 1, 2, \ldots, l-1)$ — кроки таблиці. Позначимо через $i_0, j_0$ номери варіант, що лежать приблизно посередині варіаційних рядів, і введемо умовні варіанти $u_i = i - i_0$, $v_j = j - j_0$. Очевидно,

$$x_i = x_{i_0} + u_i h_1, \quad y_j = y_{j_0} + v_j h_2. \tag{30}$$

Просте обчислення показує, що формула для вибіркового коефіцієнта кореляції в умовних варіантах має такий самий вигляд, як і в початкових варіантах

$$r = \frac{\sum_{i,j} n_{ij} u_i v_j - n\bar{u}\bar{v}}{n s_u s_v}, \tag{31}$$

але обчислення $r$ за останньою формулою легше, бо $u_i, v_j$ — цілі числа.

Для доведення формули (31) підставимо в (29) вирази (30), а також (18) і (19):

$$r = \frac{\sum_{i,j} n_{ij}(x_{i_0} + u_i h_1)(y_{j_0} + v_j h_2) - n(x_{i_0} + h_1\bar{u})(y_{j_0} + h_2\bar{v})}{n h_1 s_u h_2 s_v} =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 n s_u s_v}\left(n x_{i_0} y_{j_0} + x_{i_0} h_2 n\bar{v} + y_{j_0} h_1 n\bar{u} + \right.$$

$$\left. + h_1 h_2 \sum_{i,j} n_{ij} u_i v_j - n(x_{i_0} + h_1\bar{u})(y_{j_0} + h_2\bar{v})\right) =$$

$$= \frac{\sum_{i,j} n_{ij} u_i v_j - n\bar{u}\bar{v}}{n s_u s_v}. \blacksquare$$

**Приклад.** При 296 пробах руди родовища здобуто такі дані про процентний вміст у руді свинцю ($\xi$ %) і срібла ($\eta$ %):

| $\eta$ \ $\xi$ | 0—5 | 5—10 | 10—15 | 15—20 | 20—25 | 25—30 | 30—35 | 35—40 | 40—45 | Разом |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0—4 | 115 | 9 | — | — | — | — | — | — | — | 124 |
| 4—8 | 9 | 57 | 7 | — | — | — | — | — | — | 73 |
| 8—12 | 1 | 4 | 28 | 3 | — | — | — | — | — | 36 |
| 12—16 | — | — | 8 | 12 | 4 | — | — | — | — | 24 |
| 16—20 | — | — | 1 | 6 | 7 | 1 | 1 | — | — | 16 |
| 20—24 | — | — | — | 1 | 1 | 8 | 3 | — | — | 13 |



| $\eta$ \ $\xi$ | 0—5 | 5—10 | 10—15 | 15—20 | 20—25 | 25—30 | 30—35 | 35—40 | 40—45 | Разом |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 24—28 | — | — | — | — | — | 2 | 1 | — | — | 3 |
| 28—32 | — | — | — | — | — | — | 3 | 2 | 1 | 6 |
| 32—36 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 36—40 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 1 |
| Разом | 125 | 70 | 44 | 22 | 12 | 11 | 8 | 2 | 2 | 296 |

Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції між $\xi$ і $\eta$. Написати вибіркове рівняння прямої регресії $\eta$ на $\xi$.

Перепишемо спочатку кореляційну таблицю, приймаючи за варіанти середини відповідних інтервалів: $x_1 = 2{,}5$; $x_2 = 7{,}5$; $x_3 = 12{,}5$; ...; $x_9 = 42{,}5$; $y_1 = 2$; $y_2 = 6$; $y_3 = 10$; ...; $y_{10} = 38$. Після цього введемо умовні варіанти, прийнявши за умовні нулі, наприклад, $x_3 = 12{,}5$ і $y_3 = 10$. Тоді кореляційна таблиця набуде такого вигляду:

| $v$ \ $u$ | —2 | —1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Разом |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| —2 | 115 | 9 | — | — | — | — | — | — | — | 124 |
| —1 | 9 | 57 | 7 | — | — | — | — | — | — | 73 |
| 0 | 1 | 4 | 28 | 3 | — | — | — | — | — | 36 |
| 1 | — | — | 8 | 12 | 4 | — | — | — | — | 24 |
| 2 | — | — | 1 | 6 | 7 | 1 | 1 | — | — | 16 |
| 3 | — | — | — | 1 | 1 | 8 | 3 | — | — | 13 |
| 4 | — | — | — | — | — | 2 | 1 | — | — | 3 |
| 5 | — | — | — | — | — | — | 3 | 2 | 1 | 6 |
| 6 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 7 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 1 |
| Разом | 125 | 70 | 44 | 22 | 12 | 11 | 8 | 2 | 2 | 296 |

Звідси знаходимо

$$\bar{u} = \frac{\Sigma m_i u_i}{n} = \frac{1}{296}(125 \cdot (-2) + 70 \cdot (-1) + 44 \cdot 0 + 22 \cdot 1 +$$

$$+ 12 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6) = \frac{-320 + 133}{296} =$$

$$= -\frac{187}{296} = -0{,}632;$$

$$\bar{v} = \frac{\Sigma n_i v_i}{n} = \frac{1}{296}(124 \cdot (-2) + 73 \cdot (-1) + 36 \cdot 0 + 24 \cdot 1 +$$

$$+ 16 \cdot 2 + 13 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 7) = \frac{-321 + 144}{296} =$$

$$= -\frac{177}{296} = -0{,}598;$$

$$s_u^2 = \frac{1}{n}\Sigma m_i u_i^2 - (\bar{u})^2 = \frac{1}{296}(125 \cdot 4 + 70 \cdot 1 + 22 \cdot 1 + 12 \cdot 4 +$$

$$+ 11 \cdot 9 + 8 \cdot 16 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 36) - 0{,}632^2 = 2{,}941,$$

$$s_u = \sqrt{2,941} = 1,715;$$

$$s_v^2 = \frac{1}{n}\sum n_i v_i^2 - (\bar{v})^2 = \frac{1}{296}(124 \cdot 4 + 73 \cdot 1 + 24 \cdot 1 + 16 \cdot 4 +$$

$$+ 13 \cdot 9 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 25 + 1 \cdot 49) - 0,598^2 = 2,922,$$

$$s_v = \sqrt{2,922} = 1,710.$$

Для того, щоб обчислити $r$ за формулою (31), залишається обчислити величину

$$\sum_{i,j} n_{ij}u_i v_j = 115 \cdot 4 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 57 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 6 \cdot 2 +$$

$$+ 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 8 \cdot 9 + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 8 +$$

$$+ 3 \cdot 12 + 1 \cdot 16 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 1 \cdot 30 + 1 \cdot 42 = 966.$$

За формулою (31)

$$r = \frac{\sum_{ij} n_{ij}u_i v_j - n\bar{u}\bar{v}}{n s_u s_v} = \frac{966 - 296 \cdot (-0,632)(-0,598)}{296 \cdot 1,715 \cdot 1,710} = 0,986.$$

Оскільки $r$ дуже мало відрізняється від 1, а число випробувань $n = 296$ досить велике, то зв'язок між $\xi$ і $\eta$ повинен бути «майже лінійним».

Для знаходження вибіркового рівняння прямої регресії треба ще знайти вибіркові середні $\bar{x}$ і $\bar{y}$. За формулою (18)

$$\bar{x} = x_{i_0} + h_1\bar{u} = 12,5 + 5 \cdot (-0,632) = 9,34,$$

$$\bar{y} = y_{j_0} + h_2\bar{v} = 10 + 4 \cdot (-0,598) = 7,608,$$

а за формулами (19)

$$s_x = h_1 s_u = 5 \cdot 1,715 = 8,575, \quad s_y = h_2 s_v = 4 \cdot 1,710 = 6,84,$$

тому рівняння вибіркової прямої регресії $\eta$ на $\xi$ має вигляд (див. (27))

$$y - 7,608 = 0,986 \cdot \frac{6,84}{8,575}(x - 9,34),$$

або

$$y - 7,608 = 0,786\,(x - 9,34).$$

**Вправи**

**13.** Середня температура червня у містах $A$ ($\xi$) і $B$ ($\eta$) вимірювалась протягом 40 років. Результати вимірювань наведено у таблиці

| $\xi$ | $\eta$ | $\xi$ | $\eta$ | $\xi$ | $\eta$ | $\xi$ | $\eta$ | $\xi$ | $\eta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12,0 | 10,8 | 13,9 | 10,1 | 15,0 | 13,8 | 17,2 | 13,9 | 18,1 | 16,0 |
| 12,0 | 11,3 | 14,2 | 10,0 | 15,0 | 16,0 | 16,9 | 14,8 | 18,4 | 17,8 |
| 12,0 | 12,0 | 14,0 | 10,0 | 15,5 | 13,9 | 16,9 | 15,0 | 19,2 | 15,0 |
| 12,0 | 13,0 | 14,0 | 12,0 | 15,9 | 14,7 | 17,0 | 16,0 | 19,3 | 16,1 |
| 12,8 | 10,9 | 13,9 | 12,4 | 16,0 | 13,0 | 16,8 | 17,0 | 20,0 | 17,0 |
| 13,8 | 10,0 | 13,0 | 11,0 | 15,9 | 15,0 | 17,5 | 16,0 | 20,0 | 17,7 |
| 13,1 | 11,5 | 14,9 | 13,0 | 16,0 | 16,0 | 18,0 | 14,0 | 14,0 | 14,8 |
| 13,0 | 13,0 | 14,9 | 14,2 | 16,9 | 12,9 | 18,0 | 14,8 | 14,0 | 15,2 |



Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції між $\xi$ і $\eta$. Записати вибіркове рівняння прямої регресії $\eta$ на $\xi$. Для спрощення обчислень скласти кореляційну таблицю, провівши групування даних; для групування розбити проміжки зміни $\xi$ (12°—20°) і $\eta$ (10°—18°) на 4 проміжки по 2°.

**14.** У таблиці наведено результати вимірювання маси ($\xi$ кг) і зросту ($\eta$ см) 50 учнів:

| $\eta$ \ $\xi$ | 22,5—25,5 | 25,5—28,5 | 28,5—31,5 | 31,5—34,5 | 34,5—37,5 | Разом |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 117,5—122,5 | 1 | 3 | — | — | — | 4 |
| 122,5—127,5 | — | 2 | 6 | 1 | — | 9 |
| 127,5—132,5 | — | 1 | 5 | 5 | — | 11 |
| 132,5—137,5 | — | 1 | 6 | 7 | 2 | 16 |
| 137,5—142,5 | — | — | 1 | 4 | 2 | 7 |
| 142,5—147,5 | — | — | — | 1 | 1 | 2 |
| 147,5—152,5 | — | — | — | — | 1 | 1 |
| Разом | 1 | 7 | 18 | 18 | 6 | 50 |

Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції між $\xi$ і $\eta$. Записати рівняння прямої регресії $\xi$ на $\eta$.

**15.** У таблиці наведено результати аналізу 100 проб залізної руди деякого родовища на вміст у руді (у процентах) $Fe_2O_3$ ($\xi$) і $FeO$ ($\eta$):

| $\eta$ \ $\xi$ | 0—6 | 6—12 | 12—18 | 18—24 | 24—30 | 30—36 | Разом |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30—40 | — | — | — | 1 | — | 1 | 2 |
| 40—50 | — | — | 1 | 5 | 4 | 5 | 15 |
| 50—60 | — | — | 2 | 18 | 10 | 2 | 32 |
| 60—70 | — | 6 | 14 | 2 | 2 | — | 24 |
| 70—80 | — | 6 | 3 | — | — | — | 9 |
| 80—90 | 4 | 8 | — | — | — | — | 12 |
| 90—100 | 6 | — | — | — | — | — | 6 |
| Разом | 10 | 20 | 20 | 26 | 16 | 8 | 100 |

Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції між $\xi$ і $\eta$. Написати рівняння прямої регресії $\eta$ на $\xi$.

**16.** У деякому родовищі досліджувалась залежність вмісту сірки у залізній руді від глибини залягання. Було взято 290 проб на різних глибинах. Результати подано у кореляційній таблиці, в якій через $\xi$ позначено вміст сірки у взятих пробах (у процентах), через $\eta$ — глибину місця взяття проби.

| $\eta$ \ $\xi$ | 0,0—0,5 | 0,5—1,0 | 1,0—1,5 | 1,5—2,0 | 2,0—2,5 | 2,5—3,0 | 3,0—3,5 | 3,5—4,0 | 4,0—4,5 | 4,5—5,0 | 5,0—5,5 | 5,5—6,0 | Разом |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0—10 | 34 | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 35 |
| 10—20 | 31 | 5 | — | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | 37 |
| 20—30 | 31 | 6 | 1 | — | — | 1 | — | — | — | 1 | — | — | 40 |
| 30—40 | 18 | 6 | 3 | 3 | 4 | — | 2 | — | — | — | — | — | 36 |
| 40—50 | 12 | 6 | 1 | — | 4 | 2 | — | 3 | — | 2 | 2 | 1 | 33 |
| 50—60 | 5 | 4 | 1 | 3 | 3 | 8 | 2 | 5 | 1 | — | 1 | 2 | 35 |
| 60—70 | 4 | 1 | 2 | 4 | 1 | 4 | 6 | 5 | — | — | 2 | 1 | 30 |
| 70—80 | 1 | — | — | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | 4 | — | — | — | 16 |
| 80—90 | — | — | — | — | 3 | 2 | 5 | 1 | 2 | 1 | 1 | — | 15 |
| 90—100 | — | — | — | — | 3 | 2 | 2 | 3 | — | — | — | — | 10 |
| 100—110 | — | — | — | — | — | 1 | — | — | — | — | — | — | 1 |
| 110—120 | — | — | — | — | 1 | — | — | — | — | — | — | 1 | 2 |
| Разом | 136 | 29 | 8 | 12 | 20 | 24 | 21 | 18 | 7 | 4 | 6 | 5 | 290 |

Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції між $\xi$ і $\eta$. Записати вибіркове рівняння прямої регресії $\xi$ на $\eta$.

## Розділ VII

# НАЙПРОСТІШІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

### § 38. Поняття випадкового процесу. Ланцюги Маркова

**1. Поняття випадкового процесу.** В XX ст. потреби природознавства, зокрема фізики, поставили перед теорією ймовірностей нові задачі, для розв'язання яких існуючий апарат виявився недостатнім. Це викликало появу нової галузі теорії ймовірностей — теорії випадкових (або стохастичних) процесів. Створення цієї теорії було здійснено в тридцятих роках А. М. Колмогоровим і О. Я. Хінчиним. В сучасній теорії ймовірностей переважна більшість досліджень стосується вивчення випадкових процесів.

У цьому параграфі дано загальне означення випадкового процесу, після чого буде вивчено найпростіші з випадкових процесів — так звані ланцюги Маркова, які були запроваджені і систематично вивчені видатним російським математиком А. А. Марковим.

Означення. Нехай $\langle \Omega, \mathbf{S}, \mathbf{P} \rangle$ — ймовірнісний простір (див. § 12); $T$ — деяка числова множина. Випадковим процесом називається сім'я випадкових величин $\xi(t)$, які задані на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, \mathbf{S}, \mathbf{P} \rangle$ і залежать від параметра $t \in T$:

$$\xi(t) = \xi(\omega, t) \quad (t \in T, \ \omega \in \Omega).$$

При кожному фіксованому значенні $t = t_0$ ми маємо випадкову величину $\xi(t_0) = \xi(\omega, t_0)$, яку називають значенням (або перерізом) випадкового процесу. Якщо зафіксувати $\omega = \omega_0$, то утворюється невипадкова функція $\xi(\omega_0, t)$ від однієї дійсної змінної $t$; цю функцію називають реалізацією або траєкторією випадкового процесу. Отже, спостерігаючи випадковий процес при деякому експерименті, ми фактично спостерігаємо одну з його траєкторій. Таким чином, випадковий процес можна розглядати як сукупність усіх його перерізів або як сукупність усіх його траєкторій.

Випадкові процеси, в яких множина $T$ зчисленна, називають процесами з дискретним часом або випадковими послідовностями. Прикладом такого процесу може бути послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ (такі послідовності вивчалися в § 34); це є випадковий процес, для якого $T$ — множина натуральних чисел. Ланцюги Маркова, які будуть вивчені в цьому параграфі, також є процесами з дискретним часом.

Якщо $T$ є деяким числовим проміжком, то відповідний випадковий процес називають процесом з неперервним часом. Один з найпростіших процесів з неперервним часом — пуассонівський випадковий процес — буде розглянуто в § 39.

Звичайно, параметр $t$ не обов'язково тлумачити як час. Проте в більшості природничих задач, які приводять до випадкових процесів, параметр $t$ є часом, а значення $\xi(t)$ — це певна характеристика стану фізичної системи, яка спостерігалась в момент часу $t$.

**2. Поняття ланцюга Маркова. Матриця переходу.** Нехай здійснюється послідовність випробувань, в кожному з яких може настати одна і тільки одна з $k$ попарно несумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Позначимо через $\xi_n$ номер події, яка настала при $n$-му випробуванні (так що, наприклад, запис $\xi_n = i$ означає, що при $n$-му випробуванні настала подія $A_i$). Кажуть, що *ця послідовність випробувань (або послідовність випадкових величин $\xi_1$, $\xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$) утворює ланцюг Маркова, якщо ймовір-*

*ність того, що при $(n+1)$-му випробуванні ($n = 1, 2, \ldots$) настане певна подія $A_j$ ($j = 1, 2, \ldots, k$), залежить лише від того, яка подія настала при $n$-му випробуванні, і не залежить від результатів попередніх випробувань.*

При вивченні ланцюгів Маркова часто вживають термінологію, запозичену з фізики, а саме, кажуть про деяку фізичну систему, яка в кожний момент часу може перебувати в одному з станів $A_1, A_2, \ldots, A_k$ і може змінювати свій стан лише в певні моменти $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ . Для ланцюгів Маркова ймовірність переходу в момент часу $t_n$ до стану $A_j$ залежить лише від того, в якому стані перебувала система після моменту часу $t_{n-1}$, і не залежить від стану системи до цього моменту часу.

Згідно з означенням ланцюга Маркова при будь-яких $n, i, j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, k$; $n = 1, 2, \ldots$) визначені умовні ймовірності

$$\mathbf{P}\{\xi_{n+1} = j/\xi_1 = k_1, \ \ldots, \ \xi_{n-1} = k_{n-1}, \xi_n = i\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_{n+1} = j/\xi_n = i\} = p_{ij}^{(n)}.$$

Ланцюг Маркова називають о д н о р і д н и м, якщо умовні ймовірності $p_{ij}^{(n)}$ не залежать від $n$:

$$p_{ij}^{(n)} = p_{ij}.$$

Надалі розглядатимемо лише однорідні ланцюги Маркова, тому слово «однорідний» опускатимемо. Умовну ймовірність $p_{ij}$ називають і м о в і р н і с т ю п е р е х о д у системи (за один крок) з стану $A_i$ до стану $A_j$; це є умовна ймовірність настання події $A_j$ при деякому випробуванні за умови, що при попередньому випробуванні настала подія $A_i$. Імовірності $p_{ij}$ утворюють квадратну матрицю

$$\pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & p_{k2} & \ldots & p_{kk} \end{pmatrix},$$

яку називають м а т р и ц е ю п е р е х о д у. Ця матриця має такі властивості:

$$0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1; \quad \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \ \ldots, \ k). \qquad (1)$$

Перша властивість очевидна, оскільки $p_{ij}$ — імовірності; друга випливає з того, що система з стану $A_i$ обов'язково



переходить до одного з станів $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Матрицю, що має властивості (1), називають с т о х а с т и ч н о ю. Таким чином, матриця переходу є стохастичною. Навпаки, кожна стохастична матриця може служити матрицею переходу для деякого ланцюга Маркова.

Для задання ланцюга Маркова необхідно задати ще деякий «початковий розподіл», тобто розподіл випадкової величини $\xi_1$:

$$p_j = \mathbf{P}\{\xi_1 = j\}, \ \sum_{j=1}^{k} p_j = 1.$$

**Приклади**

**1. Випадкове блукання по прямій з поглинальними стінками.** Припустимо, що частинка, яка знаходиться на прямій, в певні моменти часу дістає випадкові поштовхи, під дією яких вона рухається по цій прямій. Частинка може перебувати лише в точках з цілими координатами *1, 2, ..., k*. В точках *1* і *k* розміщені поглинальні стінки: якщо частинка попала в одну з цих точок, то надалі вона в цій точці і залишається. Якщо ж частинка знаходиться в одній з «внутрішніх точок» *2, 3, ..., k — 1*, то кожний поштовх переводить її на одиницю вправо з імовірністю $p$ і на одиницю вліво з імовірністю $q$ ($q = 1 - p$). Зрозуміло, що в цьому прикладі ми маємо справу з ланцюгом Маркова. Неважко перевірити, що матриця переходу має такий вигляд:

$$\pi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Справді, розглянемо спочатку перший рядок цієї матриці; в ньому $p_{11} = 1$, $p_{1j} = 0$ ($j \neq 1$). Це відповідає тій обставині, що коли частинка в деякий момент перебуває в точці 1, то і в наступний момент вона буде перебувати у цій точці з імовірністю 1 (бо в цій точці — поглинальна стінка), а ймовірність її переходу в інші точки дорівнює нулю. Перейдемо до другого рядка; тут $p_{21} = q$, $p_{23} = p$, решта — нулі. Це означає, що коли частинка в деякий момент перебуває в точці *2*, то в наступний момент вона може опинитись в точці *1* з імовірністю $q$ і в точці *3* з імовірністю $p$. Аналогічний смисл мають наступні рядки матриці. Розглянемо, нарешті, останній рядок; в ньому $p_{kk} = 1$, $p_{kj} = 0$ ($j \neq k$). Це відповідає тому, що коли частинка в деякий момент перебуває в точці $k$, то і в наступний момент вона буде з імовірністю 1 перебувати в цій точці (бо в точці $k$ розміщена поглинальна стінка), а ймовірність її переходу в інші точки дорівнює нулю.

**2. Випадкове блукання по прямій з відбивальними стінками** Розглянемо ту саму задачу про випадкове блукання частинки по прямій, але з такою зміною в умові: в точках *1* і *k* розміщені відбивальні стінки. Це означає, що коли частинка в деякий момент перебуває в точці $1$, то в наступний момент вона перейде в точку $2$, а коли вона в деякий момент перебуває в точці $k$, то в наступний момент вона буде в точці $k-1$. Зрозуміло, що в цьому випадку матриця переходу має такий вигляд:

$$\pi = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Розглянуті задачі про випадкове блукання по прямій є прообразами більш складних фізичних задач теорії дифузії, броунівського руху тощо.

**3. Імовірності переходу за $n$ кроків.** Позначимо через $p_{ij}(n)$ імовірність переходу системи з стану $A_i$ до стану $A_j$ через $n$ кроків, тобто ймовірність того, що при $(s+n)$-му випробуванні настане подія $A_j$, якщо при $s$-му випробуванні настала $A_i$. Якщо $n > 1$, $m < n$, то за формулою повної ймовірності

$$p_{ij}(n) = \mathbf{P}\{\xi_{s+n} = j/\xi_s = i\} =$$
$$= \sum_{r=1}^{k} \mathbf{P}\{\ _{s+m} = r/\xi_s = i\}\ \mathbf{P}\{\xi_{s+n} = j/\xi_{s+m} = r\},$$

тобто

$$p_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}(m)\, p_{rj}(n-m). \qquad (2)$$

Якщо матрицю $(p_{ij}(n))_{i,j=1}^{k}$ позначити через $\pi(n)$ (при цьому $\pi(1) = \pi$), то остання рівність, згідно з відомим з алгебри правилом множення матриць, означає, що коли $0 < m < n$, то

$$\pi(n) = \pi(m)\,\pi(n-m). \qquad (3)$$

Зокрема, при $m = 1$ ця рівність дає

$$\pi(n) = \pi \cdot \pi(n-1), \qquad (4)$$

звідки випливає, що

$$\pi(n) = \pi^n. \qquad (5)$$

**Приклад.** Безпосередній підрахунок показує, що коли $k \geqslant 5$, то матриці переходу за два кроки $\pi(2)$ для попередніх прикладів дорівнюють відповідно:



а) для блукання частинки між поглинальними стінками

$$\pi(2) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ q & pq & 0 & p^2 & 0 & \ldots & 0 \\ q^2 & 0 & 2pq & 0 & p^2 & \ldots & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & 2pq & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix};$$

б) для блукання частинки між відбивальними стінками

$$\pi(2) = \begin{Vmatrix} q & 0 & p & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q+pq & 0 & p^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q^2 & 0 & 2pq & 0 & p^2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & 2pq & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \end{Vmatrix}.$$

**4. Теорема про граничні ймовірності.**

***Теорема А. А. Маркова (ергодична теорема).*** *Якщо при деякому $s > 0$ всі елементи матриці переходу $\pi(s)$ додатні, то існують такі сталі числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (граничні ймовірності), що незалежно від індекса $i$ мають місце рівності*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j. \qquad (6)$$

Доведення. Для будь-якого натурального $n$ і $1 \leqslant j \leqslant k$ покладемо

$$\alpha_j(n) = \min_{1\leqslant i\leqslant k} p_{ij}(n), \quad \beta_j(n) = \max_{1\leqslant i\leqslant k} p_{ij}(n)$$

і покажемо, що при кожному фіксованому $j$ послідовність $\alpha_j(1), \alpha_j(2), \ldots, \alpha_j(n), \ldots$ є неспадною, а послідовність $\beta_j(1), \beta_j(2), \ldots, \beta_j(n), \ldots$ — незростаючою. Справді, якщо $n > 1$, то, згідно з формулою (4),

$$p_{ij}(n) = \sum_{m=1}^{k} p_{im} p_{mj}(n-1) \geqslant \min_{1\leqslant m\leqslant k} p_{mj}(n-1) \sum_{m=1}^{k} p_{im} =$$
$$= \alpha_j(n-1) \sum_{m=1}^{k} p_{im} = \alpha_j(n-1).$$

Оскільки ця нерівність має місце при всіх цілих $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, то звідси випливає, що також

$$\min_{1\leqslant i\leqslant k} p_{ij}(n) \geqslant \alpha_j(n-1),$$

або

$$\alpha_j(n) \geqslant \alpha_j(n-1) \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

тобто послідовність $(\alpha_j(n))_{n=1}^{\infty}$ — неспадна. Аналогічно доводиться, що

$$\beta_j(n) \leqslant \beta_j(n-1) \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

тобто що послідовність $(\beta_j(n))_{n=1}^{\infty}$ — незростаюча. Оскільки завжди

$$\alpha_j(n) \leqslant \beta_j(n),$$

то перша з цих послідовностей обмежена зверху, а друга — знизу. Тому за теоремою про границю монотонної послідовності існують скінченні границі

$$p_j = \lim_{n\to\infty} \alpha_j(n), \quad q_j = \lim_{n\to\infty} \beta_j(n).$$

Якщо покажемо, що $p_j = q_j$ при кожному $j$, то теорему буде доведено. Справді, оскільки

$$\alpha_j(n) \leqslant p_{ij}(n) \leqslant \beta_j(n) \quad (i = 1, 2, \ldots, k; \ n = 1, 2, \ldots)$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_j(n) = \lim_{n\to\infty} \beta_j(n) = p_j,$$

то за теоремою про границю проміжної змінної також

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Таким чином, залишається довести, що $p_j = q_j$ при $j = 1, 2, \ldots, k$. А для цього досить показати, що

$$\lim_{n\to\infty} (\beta_j(n) - \alpha_j(n)) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

або, що те саме *,

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant i,m\leqslant k} |p_{ij}(n) - p_{mj}(n)| = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{7}$$

За умовою існує таке $s > 0$, що всі елементи $p_{ij}(s)$ матриці $\pi(s)$ додатні. Вважаючи, що $n > s$, за формулою (2) маємо

$$p_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}(s)\, p_{rj}(n-s),$$

* Тут і далі використовується таке очевидне твердження: якщо $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ — довільна скінченна числова множина, то

$$\max_{1\leqslant l,m\leqslant k} |z_l - z_m| = \max_{1\leqslant l\leqslant k} z_l - \min_{1\leqslant l\leqslant k} z_l.$$



звідси

$$p_{ij}(n) - p_{mj}(n) = \sum_{r=1}^{k} (p_{ir}(s) - p_{mr}(s))\, p_{rj}(n-s). \tag{8}$$

Покладемо

$$p_{ir}(s) - p_{mr}(s) = \begin{cases} \gamma_{im}^{(r)}, & \text{якщо } p_{ir}(s) - p_{mr}(s) > 0, \\ \delta_{im}^{(r)}, & \text{якщо } p_{ir}(s) - p_{mr}(s) \leqslant 0, \end{cases}$$

тоді

$$\sum_r \gamma_{im}^{(r)} - \sum_r \delta_{im}^{(r)} = \sum_{r=1}^{k} (p_{ir}(s) - p_{mr}(s)) =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} p_{ir}(s) - \sum_{r=1}^{k} p_{mr}(s) = 1 - 1 = 0,$$

звідки

$$\sum_r \gamma_{im}^{(r)} = \sum_r \delta_{im}^{(r)} = h_{im}.$$

Оскільки за припущенням $p_{ir}(s) > 0$ $(i, r = 1, 2, \ldots, k)$, то

$$h_{im} = \sum_r \gamma_{im}^{(r)} \leqslant \sum_{r=1}^{k} |p_{ir}(s) - p_{mr}(s)| < \sum_{r=1}^{k} p_{ir}(s) = 1,$$

отже,

$$0 \leqslant h_{im} < 1 \quad (i, m = 1, 2, \ldots, k). \tag{9}$$

Якщо тепер покласти

$$h = \max_{1\leqslant i,m\leqslant k} h_{im},$$

то, оскільки число всіх значень $h_{im}$ скінченне, з (9) випливає, що також

$$0 \leqslant h < 1. \tag{10}$$

З рівності (8) випливає, що при всіх $i, m = 1, 2, \ldots, k$

$$|p_{ij}(n) - p_{mj}(n)| = \Big| \sum_r \gamma_{im}^{(r)} p_{rj}(n-s) - $$

$$- \sum_r \delta_{im}^{(r)} p_{rj}(n-s) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big| \max_{1\leqslant r\leqslant k} p_{rj}(n-s) \sum_r \gamma_{im}^{(r)} - \min_{1\leqslant r\leqslant k} p_{rj}(n-s) \sum_r \delta_{im}^{(r)} \Big| =$$

$$= h_{im} \left(\max_{1\leqslant r\leqslant k} p_{rj}(n-s) - \min_{1\leqslant r\leqslant k} p_{rj}(n-s)\right) \leqslant$$

$$\leqslant h \left(\max_{1\leqslant r\leqslant k} p_{rj}(n-s) - \min_{1\leqslant r\leqslant k} p_{rj}(n-s)\right) =$$

$$= h \max_{1\leqslant i,m\leqslant k} |p_{ij}(n-s) - p_{mj}(n-s)|,$$

і тому

$$\max_{1\leqslant i,m\leqslant k}|p_{ij}(n)-p_{mj}(n)|\leqslant h\max_{1\leqslant i,m\leqslant k}|p_{ij}(n-s)-$$
$$-p_{mj}(n-s)|.$$

Застосувавши цю нерівність $\left[\frac{n}{s}\right]$ разів $\left(\left[\frac{n}{s}\right]\right.$ — ціла частина числа $\left.\frac{n}{s}\right)$, дістанемо

$$\max_{1\leqslant i,m\leqslant k}|p_{ij}(n)-p_{mj}(n)|\leqslant h^{\left[\frac{n}{s}\right]}\max_{1\leqslant i,m\leqslant k}\left|p_{ij}\left(n-\left[\frac{n}{s}\right]s\right)-\right.$$
$$\left.-p_{mj}\left(n-\left[\frac{n}{s}\right]s\right)\right|.$$

Проте другий множник правої частини не перевищує одиниці, тому

$$\max_{1\leqslant i,m\leqslant k}|p_{ij}(n)-p_{mj}(n)|\leqslant h^{\left[\frac{n}{s}\right]}.$$

Переходячи в цій нерівності до границі при $n\to\infty$, враховуючи (10), дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant i,m\leqslant k}|p_{ij}(n)-p_{mj}(n)|=0,$$

тобто доведено співвідношення (7), а разом з тим і теорему. ■

Ланцюг Маркова, для якого існують граничні ймовірності $p_j=\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}(n)$, називають **ергодичним**. Фізичний смисл поняття ергодичності полягає в тому, що коли ланцюг Маркова є ергодичним, то після великого числа випробувань імовірність того, що система перебуває в стані $A_j$, дорівнює $p_j$, тобто ймовірність перебування системи в тому чи іншому стані практично не залежить від того, в якому стані вона перебувала в початковий момент.

Зупинимось ще на питанні про обчислення граничних імовірностей $p_j$. Оскільки (див. (4))

$$\pi(n)=\pi(n-1)\pi,$$

то

$$p_{ij}(n)=\sum_{r=1}^{k}p_{ir}(n-1)p_{rj}\quad(i,j=1,2,\ldots,k).$$



Якщо виконано умови теореми Маркова, то, переходячи в цих рівностях до границі при $n\to\infty$, дістанемо

$$p_j=\sum_{r=1}^{k}p_rp_{rj}\quad(j=1,2,\ldots,k).$$

Крім того, переходячи в рівності

$$\sum_{j=1}^{k}p_{ij}(n)=1$$

до границі при $n\to\infty$, знайдемо

$$\sum_{j=1}^{k}p_j=1.$$

Таким чином, граничні ймовірності $p_1, p_2, \ldots, p_k$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases}p_j=\sum\limits_{r=1}^{k}p_rp_{rj}\quad(j=1,2,\ldots,k),\\ \sum\limits_{j=1}^{k}p_j=1.\end{cases}\tag{11}$$

Неважко довести, що ця система рівнянь має єдиний розв'язок.

**Приклад.** Ланцюг Маркова має таку матрицю переходу:

$$\pi=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}.$$

Показати, що цей ланцюг ергодичний і знайти граничні ймовірності.

Безпосереднє обчислення показує, що

$$\pi^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

тобто умови теореми Маркова виконуються при $s=2$, отже, ланцюг є ергодичним. Знайдемо граничні ймовірності. Для цього запишемо систему рівнянь (11)

$$\begin{cases} p_1 = 0 \cdot p_1 + \frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{2} p_3, \\ p_2 = \frac{1}{2} p_1 + 0 \cdot p_2 + \frac{1}{2} p_3, \\ p_3 = \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2} p_2 + 0 \cdot p_3, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1; \end{cases}$$

в цій системі третє рівняння є наслідком перших двох, тому система зводиться до такої:

$$\begin{cases} 2p_1 - p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - 2p_2 + p_3 = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$.

## § 39. Пуассонівський випадковий процес

У цьому параграфі розглянемо один з найпростіших випадкових процесів з неперервним часом — пуассонівський процес; цей процес особливо часто зустрічається в різноманітних практичних застосуваннях.

Нехай деяка подія $A$ може наставати у випадкові моменти часу. Позначимо через $\xi(t)$ число появ цієї події за проміжок часу від 0 до $t$. Випадковий процес $\xi(t)$ називається **пуассонівським**, якщо виконуються такі умови:

1. Імовірність $k$ появ події $A$ за час від $T$ до $T + t$ не залежить від $T$; ця ймовірність не залежить також від того, скільки разів наставала подія $A$ до моменту $T$. Позначимо цю ймовірність через $\mathbf{P}_k(t)$; таким чином,

$$\mathbf{P}_k(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = k\}.$$

2. Якщо $t \to 0$, то

$$\mathbf{P}_1(t) = \lambda t + o(t),$$
$$\mathbf{P}_k(t) = o(t) \text{ при } k \geqslant 2,$$
$$\mathbf{P}_0(t) = 1 - \lambda t + o(t),$$

де $\lambda > 0$ — деяка стала, а $o(t)$ — нескінченно мала вищого порядку відносно $t$ $\left(\text{тобто } \lim\limits_{t \to 0} \frac{o(t)}{t} = 0\right)$. Ця умова означає, що ймовірність настання однієї події за малий проміжок часу пропорційна величині цього проміжку, а настання більше однієї події за малий проміжок часу є практично неможливим.

Виведемо формули для ймовірностей $\mathbf{P}_k(t)$. Для цього знайдемо систему диференціальних рівнянь, яку задовольняють $\mathbf{P}_k(t)$, і проінтегруємо її.

Обчислимо ймовірність $\mathbf{P}_k(t + \Delta t)$ того, що за час від 0 до $t + \Delta t$ подія $A$ настане $k$ разів. Ці $k$ появ події можуть розподілитись $k + 1$ різними способами, а саме: за проміжок часу від 0 до $t$ подія може настати $j$ разів, а за час від $t$ до $t + \Delta t$ — настати $k - j$ разів ($j = 0, 1, 2, \ldots, k$). Тому за формулою повної ймовірності

$$\mathbf{P}_k(t + \Delta t) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{P}_j(t)\, \mathbf{P}_{k-j}(\Delta t),$$

або

$$\mathbf{P}_k(t + \Delta t) = \sum_{j=0}^{k-2} \mathbf{P}_j(t)\, \mathbf{P}_{k-j}(\Delta t) + \mathbf{P}_{k-1}(t)\, \mathbf{P}_1(\Delta t) +$$
$$+ \mathbf{P}_k(t)\, \mathbf{P}_0(\Delta t) \quad (k \geqslant 1),$$
$$\mathbf{P}_0(t + \Delta t) = \mathbf{P}_0(t)\, \mathbf{P}_0(\Delta t).$$

Звідси, враховуючи умову 2, дістанемо

$$\mathbf{P}_k(t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)\, \mathbf{P}_k(t) + \lambda \Delta t \mathbf{P}_{k-1}(t) + o(\Delta t)$$
$$(k \geqslant 1),$$
$$\mathbf{P}_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)\, \mathbf{P}_0(t) + o(\Delta t).$$

З цих рівностей знаходимо

$$\frac{\mathbf{P}_k(t + \Delta t) - \mathbf{P}_k(t)}{\Delta t} = -\lambda \mathbf{P}_k(t) + \lambda \mathbf{P}_{k-1}(t) +$$
$$+ \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad (k \geqslant 1),$$
$$\frac{\mathbf{P}_0(t + \Delta t) - \mathbf{P}_0(t)}{\Delta t} = -\lambda \mathbf{P}_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, маємо

$$\frac{d\mathbf{P}_k(t)}{dt} = -\lambda \mathbf{P}_k(t) + \lambda \mathbf{P}_{k-1}(t) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

$$\frac{d\mathbf{P}_0(t)}{dt} = -\lambda \mathbf{P}_0(t). \tag{13}$$

При цьому з умов 2 випливає, що шукані ймовірності $\mathbf{P}_k(t)$ задовольняють такі початкові умови:

$$\mathbf{P}_0(0) = 1; \quad \mathbf{P}_k(0) = 0 \quad (k \geqslant 1). \tag{14}$$

Проінтегрувавши рівняння (13) з урахуванням початкової умови $P_0(0) = 1$, знайдемо

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \qquad (15)$$

Нескінченну рекурентну систему диференціальних рівнянь (12) перетворимо за допомогою підстановки

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} v_k(t), \qquad (16)$$

де $v_k(t)$ — нова невідома функція (зокрема, в силу (15), $v_0(t) \equiv 1$). Підставивши цей вираз в (12), дістанемо:

$$\frac{dv_k(t)}{dt} = \lambda v_{k-1}(t), \qquad (17)$$

причому з (14) випливає, що

$$v_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (18)$$

Оскільки $v_0(t) = 1$, то, поклавши в (17) $k = 1$, знайдемо

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = \lambda, \quad v_1(0) = 0,$$

звідки

$$v_1(t) = \lambda t.$$

Покладемо в (17) $k = 2$ і врахуємо початкову умову (18)

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = \lambda^2 t, \quad v_2(0) = 0,$$

звідки

$$v_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!}.$$

Покажемо, що взагалі

$$v_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \ (k = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (19)$$

Насправді, припускаючи, що при деякому $k$ ця формула має місце, з (17) і (18) дістанемо

$$\frac{dv_{k+1}(t)}{dt} = \lambda \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad v_{k+1}(0) = 0,$$

звідси

$$v_{k+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!},$$

що і доводить правильність формули (19) для всіх цілих $k$.



Підставляючи вираз (19) в рівність (16), остаточно маємо

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (20)$$

Ця формула і дає розв'язок поставленої задачі. Таким чином, кожний переріз пуассонівського процесу $\xi(t)$, тобто його значення при заданому $t$, є випадковою величиною, що розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda t$.

Умови 1 і 2, що визначають пуассонівський випадковий процес, з великою точністю виконуються в багатьох природних явищах і технічних процесах. Наведемо приклади (їх число можна було б значно збільшити).

1) Число $\xi(t)$ атомів радіоактивної речовини, що розпалися за проміжок часу $t$, задовольняє ці умови.

2) Число $\xi(t)$ викликів, що надходять на телефонну станцію за час $t$ (в робочі години доби), задовольняє умови, що визначають пуассонівський процес.

## ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

### Розділ I

**1.** 30. **2.** 36. **3.** $6\cdot5\cdot4=120$. **5.** $A_{12}^5$. **6.** $A_6^3=120$; $A_5^2\cdot 3=60$. **7.** $A_{30}^3$. **8.** $A_{15}^3$. **9.** $7!=5040$. **10.** $8!=40\,320$. **11.** $C_5^3=10$. **12.** а) $C_{52}^5\cdot C_{52}^3$; б) $C_{52}^5\cdot C_{47}^3$. **13.** $C_{12}^4\cdot A_{15}^4$. **14.** $3C_6^2\cdot C_{60}^{20}$; $5C_{60}^{20}$. **15.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **16.** $C_{15}^4$. **17.** $C_{20}^{10}$. **18.** $C_{15}^5\cdot C_{10}^5$. **20.** $2^{10}-C_{10}^0-C_{10}^1=1013$. **21.** $\bar A_{11}^{10}=11^{10}$. **22.** $3^m$. **23.** $k^n$. **24.** $2^{10}$. **25.** а) 6; б) $\frac{12!}{3!\,2!\,2!}$. **26.** $\frac{15!}{(5!)^3}$. **27.** $C_{20}^5\cdot C_{15}^5\cdot C_{10}^5=\frac{20!}{(5!)^4}$. **28.** а) $C_{21}^{12}$; б) $C_{17}^8$; в) $C_{10}^8=C_{10}^2$. **29.** $C_{19}^{15}$. **31.** $\bar C_k^n$. **32.** 6; 14. **33.** 11; 1; 0; 3. **34.** $7^2=49$; $7\cdot6=42$. **35.** $5\cdot6=30$. **36.** $C_{m+1}^n$. Вказівка. Якщо спочатку покласти в ряд $m$ білих куль, то для чорних куль треба вибрати $n$ місць з $m+1$. **37.** $C_n^{m-1}$ замків, $n-m+1$ ключів до кожного замка. Вказівка. Кожній групі з $m-1$ членів комісії відповідає певний замок, якого вони не можуть відкрити; ключі від цього замка повинні бути у решти членів комісії. **38.** $A_{10}^6$. **39.** $C_n^2$. **40.** $1+\frac{n(n+1)}{2}$. Вказівка. Якщо жодні дві прямі не паралельні і жодні три не перетинаються в одній точці, то після проведення $k-1$ прямих $k$-та пряма збільшує число частин на $k$. Тому шукане число дорівнює $2+2+3+4+\cdots+n$. **41.** $\frac{n^3+5n+6}{6}$. Вказівка. Якщо шукане число позначити через $a_n$, то, використовуючи результат попередньої задачі, легко дістати рекурентну формулу $a_{n+1}=a_n+\frac{n(n+1)}{2}+1$. **42.** $\frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$. Вказівка. Число всіх діагоналей дорівнює $\frac{n(n-3)}{2}$, а число точок перетину діагоналей дорівнює $C_n^4$ (кожній точці перетину відповідає пара діагоналей, тобто 4 вершини, і навпаки). Тому, проводячи послідовно по одній діагоналі, дістанемо, що шукане число дорівнює $1+C_n^4+\frac{n(n-3)}{2}$. **44.** $k=\frac{n}{2}$, якщо $n$ — парне; $k=\frac{n-1}{2}$ і $k=\frac{n+1}{2}$, якщо $n$ — непарне. Вказівка. Використати результат попередньої задачі. **45.** $(n!)^2$. **46.** $A_{25}^4$. **47.** $A_8^4$. **48.** $(n-2)!$ **49.** $2(n-2)!\,(n-r-1)$. **50.** $\bar C_n^{k-n}=C_{k-1}^{n-1}$. **51.** $\bar C_3^5=C_7^2=21$. **52.** $C_{k-1}^{n-1}$. Вказівка. Порівняйте з задачею 50. **53.** $3C_5^3=30$. **54.** $2(5!)^2=28\,800$. **55.** 2880. **56.** $4C_{24}^2$. **57.** $(C_{26}^{13})^2$. **58.** $2^{32}$. **59.** $\frac{24!}{4!}$. Вказівка. Приєднати до 20 книг 4 однакові перегородки і розглянути перестановки цих 24 предметів. **60.** $\frac{8!}{3!}$. Вказівка. Порівняйте з попередньою задачею. **66.** 10%.



### Розділ II

**4.** а) $A\bar B\bar C$; б) $AB\bar C$; в) $A\cup B\cup C$; г) $\bar A\bar B\bar C$; д) $ABC$; е) $\bar A\cup\bar B\cup\bar C$. **5.** $\frac{A_8^6}{8^6}$. **6.** а) $\frac{C_2^1\cdot C_8^4}{C_{10}^5}=\frac{5}{9}$; б) $1-\frac{C_8^5}{C_{10}^5}=\frac{7}{9}$. **7.** а) $\frac{C_9^3\cdot C_6^3}{3^9}$; б) $\frac{C_9^4\cdot C_5^3\cdot 3!}{3^9}$. **8.** $1-\frac{A_{12}^k}{12^k}$, якщо $k\leqslant 12$; 1, якщо $k>12$. **9.** $\frac{12!}{12^{12}}$. **10.** $1-\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$, якщо $k\leqslant n-m$; 1, якщо $k>n-m$. **11.** а) $\frac{5}{6^2}$; б) $\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$; в) $\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$; г) $\frac{5}{6}$. **12.** $\frac{10\cdot2\cdot8!}{10!}=\frac{2}{9}$. **13.** а) $\frac{C_2^1\cdot C_{18}^9}{C_{20}^{10}}=\frac{10}{19}$; б) $\frac{C_4^2\cdot C_{16}^8}{C_{20}^{10}}=\frac{135}{323}$. **14.** $\frac{C_n^k}{n^k}$, якщо $k\leqslant n$; 0, якщо $k>n$. **15.** $\frac{1}{k!}$. **16.** а) $\frac{27}{6^3}=\frac{1}{8}$; б) $\frac{25}{216}$; в) $\frac{21}{216}=\frac{7}{72}$; г) $\frac{1}{2}$. **26.** а) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; б) $\frac{2}{\pi}$. **27.** $2k-k^2$. **28.** $\frac{1}{4}$. **29.** $\frac{(a-d)^2}{a^2}$. **30.** $\frac{a-r}{a}$. **31.** $\frac{r^2}{R^2}$. **32.** $\frac{2}{3}$. **34.** а) 0,56; б) 0,06; в) 0,94; г) 0,38. **35.** а) $\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}=0{,}006$; б) $\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{9}{10}=0{,}504$; в) 0,994. **36.** $1-(1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_n)$. **38.** $\frac{2}{5}$. **39.** а) $\frac{m-1}{m+n-1}$; б) $\frac{m}{m+n-1}$. **40.** 0. **41.** $1-\sqrt[4]{0{,}41}\approx0{,}2$. **42.** 5. **43.** 0,75. **44.** 0,5. **45.** $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{n_i}$. **46.** $\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2+1}{n_2+1}+\left(1-\frac{m_1}{n_1}\right)\frac{m_2}{n_2+1}$. **47.** 0,52. **48.** а) $\frac{5}{14}$,

$\frac{5}{14}$, $\frac{2}{7}$; б) $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$. **49.** Обидві ймовірності дорівнюють $\frac{m}{n}$. **50.** $1-(1-pp_1-(1-p)\,p_0)^n$. **51.** 0,998. **Вказівка.** Застосувати формулу Байєса. **52.** Нехай $A$ — вийняли одну чорну і три білі кулі, $H_i$ — в урні $i$ білих куль і $3-i$ чорних ($i=0, 1, 2, 3$). Тоді $\mathrm{P}(H_0/A)=\mathrm{P}(H_3/A)=0$, $\mathrm{P}(H_1/A)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(H_2/A)=\frac{4}{5}$. **53.** $\frac{20}{21}=0{,}952$. **54.** 0,214. **55.** Нехай $A$ — вийнято білу кулю, $H_i$ — урна містить $i$ білих куль і $n-i$ чорних ($i=0, 1, \ldots, n$). Тоді $\mathrm{P}(H_i/A)=\frac{2i}{n(n+1)}$; найбільш імовірним є $H_n$. **56.** $\frac{2}{3}$. **Вказівка.** Використати результат попередньої задачі і формулу повної ймовірності. **57.** Імовірність того, що $C$ влучив, дорівнює $\frac{10}{19}>\frac{1}{2}$. **58.** $\frac{3}{29}$. **64.** $\overline{A}$ — поява цифри принаймні при одному з двох підкидань монети; $\overline{B}$ — принаймні один промах при трьох пострілах; $\overline{C}$ — три промахи при трьох пострілах. **65.** $A=A_1A_2A_3$; $B=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; $C=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$; $D=\overline{B \cup C}$. **67.** $A=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$; $B=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$; $C=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$; $D=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$; $E=A_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3\ldots\overline{A}_n \cup \ldots \cup \overline{A}_1\ldots\overline{A}_{n-1}A_n$; $F=\overline{A \cup E}$; $\overline{A}=D$; $\overline{B}=C$.

**68.** $\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$. **69.** $1-\frac{C_{n-m}^r}{C_n^r}$. **70.** $\frac{(k-1)(n-k)}{C_n^2}$.

**72.** $\frac{4^3}{C_{52}^3}$. **73.** $\frac{(C_{26}^{13})^2}{C_{52}^{26}}\approx 0{,}22$. **74.** $1-\frac{C_{28}^4}{C_{32}^4}\approx 0{,}43$. **75.** $\frac{4C_{24}^2}{C_{32}^{10}}$.

**76.** $\frac{C_4^2\cdot C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}}\approx 0{,}39$. **77.** $\frac{4C_{13}^4\cdot C_{39}^2}{C_{52}^6}$. **78.** $\frac{6!}{6^6}\approx 0{,}0154$.

**79.** $\frac{12!}{2^6\cdot 6^{12}}$. **80.** $\frac{n!}{6^n\cdot n_1!\,n_2!\ldots n_6!}$. **81.** **Вказівка.** Треба довести, що $1-\frac{5^4}{6^4}>1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, тобто, що $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}>\left(\frac{5}{6}\right)^4$, або $\left(\frac{35}{36}\right)^6>\frac{5}{6}$; остання нерівність легко доводиться за допомогою нерівності Бернуллі $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$ ($\alpha>-1$, $n>1$). **82.** $\frac{2^n}{C_{2n}^n}$. **88.** $\frac{1}{2}$. **89.** $\frac{6}{19}$. **90.** 0,121. **Вказівка.** $\Omega=\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 24,\ 0\leqslant y\leqslant 24\}$; $A=\{(x, y)\in\Omega: x\leqslant y\leqslant x+1,\ y\leqslant x\leqslant y+2\}$. **92.** а) $\frac{n^2}{12m}$ при $m\geqslant n^2$; $\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{m}}{6n}$



при $m\leqslant n^2$; б) $\frac{n^{3/2}}{5m}$ при $n^3\leqslant m^2$, $\frac{1}{2}\left(1-0{,}6\frac{m^{3/2}}{n}\right)$ при $n^3\geqslant m^2$. **93.** $\left(1-\frac{3a}{l}\right)^2$ при $\frac{l}{3}\leqslant a\leqslant\frac{l}{2}$; $1-3\left(1-\frac{a}{l}\right)^2$ при $\frac{l}{2}\leqslant a\leqslant l$. **95.** $1-\frac{5^9}{6^9}:\left(1-\frac{5^{10}}{6^{10}}\right)=1-\frac{6\cdot 5^9}{6^{10}-5^{10}}$. **96.** $\frac{21}{46}$. **97.** Події $A$ і $B$ незалежні. **101.** а) $(1-p_1)\ldots(1-p_n)$; б) $1-(1-p_1)\ldots(1-p_n)$; в) $p_1(1-p_2)\ldots(1-p_n)+(1-p_1)p_2(1-p_3)\ldots(1-p_n)+\cdots+(1-p_1)\ldots(1-p_{n-1})p_n$. **102.** $1-(1-p)^n$. **103.** $p_0=(1-\mathrm{P}(A_1))(1-\mathrm{P}(A_2))$; $p_1=\mathrm{P}(A_1)(1-\mathrm{P}(A_2))+(1-\mathrm{P}(A_1))\mathrm{P}(A_2)$; $p_2=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)$. **105.** $\frac{n+2}{2(n+1)}$. **107.** $\frac{k_1m_1(m_2+n_2)}{k_1m_1(m_2+n_2)+k_2m_2(m_1+n_1)}$. **109.** $\frac{m-2}{m+n-2}$. **110.** $\frac{np_2}{p_1+np_2}$.

## Розділ III

**1.** а) $P_8(3)=\frac{C_8^3\cdot 5^3}{6^8}$; б) $1-P_8(0)-P_8(1)-P_8(2)$. **2.** а) $\frac{5}{32}$; б) $\frac{1}{32}$. **3.** а) $P_5(0)=0{,}95^5$; б) $P_5(2)=C_5^2\cdot 0{,}05^2\times 0{,}95^3$. **4.** а) $P_4(3)=C_4^3\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{1}{4}$, $P_8(5)=C_8^5\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{7}{32}$, тому більш імовірно виграти три партії з чотирьох; б) більш імовірно виграти не менше п'яти партій з восьми. **5.** а) $C_{10}^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^7$. **6.** 0,64. **7.** $1-0{,}8^{18}-18\cdot 0{,}8^{17}\cdot 0{,}2\approx 0{,}901$. **8.** 0,353. **9.** $1-0{,}9^5\approx 0{,}41$. **10.** $1-0{,}8^3=0{,}488$. **11.** З умови $0{,}1\geqslant 0{,}8^n\left(1+\frac{n}{4}+\frac{n(n-1)}{32}\right)$ знаходимо $n\geqslant 25$. **12.** $n\geqslant 10$. **13.** 8. **14.** 4; 0,251. **15.** 24 або 25. **16.** $1099\leqslant n\leqslant 1119$. **17.** 0,3125. **18.** $\frac{135}{512}$. **20.** $\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^5$. **21.** $1-0{,}9^{10}\approx 0{,}651$; **22.** **22.** а) 0,168; б) 0,815. **23.** $1-e^{-1}\approx 0{,}63$. **24.** $e^{-0{,}5}\approx 0{,}61$. **25.** 0,9596. **26.** 0,143. **27.** 0,63. **28.** $\frac{C_{996}^{50}}{C_{1000}^{50}}\approx 0{,}814$; за формулою Пуассона $e^{-0{,}2}\approx 0{,}819$. **29.** а) 0,9380; б) 0,00051; в) 0,1606. **30.** 0,00016. **31.** 1) а) 0,135; б) 0,677; 2) 110. **33.** З умови $1-e^{-x}\geqslant 0{,}99$ дістаємо $x\geqslant 5$. **34.** а) 3; б) 0,2306; в) 0,5. **35.** а) 0,8859; б) 1) 0,9651; 2) 0,5. **36.** а) 0,00778; б) 0,174. **37.** $2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{1600}{0{,}25}}\right)\cdot 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{1600}{0{,}04}}\right)\approx 0{,}3933$. **38.** а) $0{,}5641/\sqrt{N}$; б) $\sqrt{\frac{2}{N}}\,\varphi\left(m\sqrt{\frac{2}{N}}\right)$. **39.** а) $2\Phi(1)=0{,}6827$; б) $2\Phi(2)=0{,}9545$; в) $2\Phi(3)=0{,}9973$. **41.** $n\geqslant 152$.

Вказівка. Повинно бути $P\{5 \leqslant \mu \leqslant n\} = \Phi\left(\frac{n-0{,}1n}{\sqrt{n\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\right) - \Phi\left(\frac{5-0{,}1n}{\sqrt{n\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\right) \geqslant 0{,}997$, або $\Phi(3\sqrt{n}) + \Phi\left(\frac{n-50}{3\sqrt{n}}\right) \geqslant 0{,}997$. Оскільки $3\sqrt{n} > 3\sqrt{5} > 6{,}7$, то $\Phi(3\sqrt{n}) = 0{,}5$, отже, $\Phi\left(\frac{n-50}{3\sqrt{n}}\right) \geqslant 0{,}497$. **42.** $1 \leqslant \mu \leqslant 19$. **43.** 177. **44.** $1 \leqslant \mu \leqslant 5$. **45.** а) $3919 \leqslant n \leqslant 16\,432$; б) $5488 \leqslant n \leqslant 11\,634$. **46.** 0,6196. **47.** 6147. **48.** $15 \leqslant \mu \leqslant 33$. **51.** 0,018; 0,082. **52.** 0,105; 0,195. **53.** а) 0,75; 0,95; б) 0,818; 0,882.

## Розділ IV

**1.** $F(x) = \begin{cases} 0; & x \leqslant 0, \\ 1/4; & 0 < x \leqslant 1, \\ 3/4; & 1 < x \leqslant 2, \\ 1; & x > 2. \end{cases}$ **2.** $F(x) = \begin{cases} 0; & x \leqslant 0, \\ 0{,}1; & 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}3; & 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}6; & 2 < x \leqslant 3, \\ 1; & x > 3. \end{cases}$

**4.** $P\{\xi < 2\} = p_0 + p_1 = p + (1-p)p = 2p - p^2$; $P\{\xi \geqslant 2\} = 1 - P\{\xi < 2\} = (1-p)^2$. **5.** $p_k = P\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1}p$ $(k = 1, 2, \ldots)$. **7** $p_k = P\{\xi = k\} = (1-p)^k p$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$; $p_n = (1-p)^n$. **9.** $F(x) = \begin{cases} 0; & x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}; & x \geqslant 0. \end{cases}$ **10.** в), г), д). **11.** а) $a = \frac{\lambda}{2}$. **13.** а) $\eta$ рівномірно розподілена на $[0; 1]$. Вказівка. Якщо $x \leqslant 0$, то $F_\eta(x) = P\{|\xi| < x\} = 0$; якщо $x > 0$, то $F_\eta(x) = P\{|\xi| < x\} = P\{-x < \xi < x\} = F_\xi(x) - F_\xi(-x)$; б) $F_\eta(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $F_\eta(x) = x/2$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $F_\eta(x) = (x+1)/4$ при $1 \leqslant x \leqslant 3$, $F_\eta(x) = 1$ при $x \geqslant 3$. **14.** а) $a = \frac{2}{\pi}$; б) $F(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e^x$; $P\{\xi \geqslant 1\} = 1 - F(1) = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e$. **15.** а) $a = 0{,}5$. **16.** а) $a = 0{,}5$. **18.** Сумісний розподіл задається такою таблицею:

| $\eta \backslash \xi$ | 0 | 1 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 25/36 | 5/36 | 5/6 |
| 1 | 5/36 | 1/36 | 1/6 |
| $\Sigma$ | 5/6 | 1/6 | 1 |



**20.** $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$. **21.** $P\{\xi + \eta = k\} = \frac{k+1}{(n+1)^2}$ при $k = 0, 1, \ldots, n$; $P\{\xi + \eta = k\} = \frac{2n+1-k}{(n+1)^2}$ при $k = n+1, \ldots, 2n$. Вказівка. Врахувати, що $P\{\xi + \eta = k\} = P\{\xi = k - \eta\} = \sum_m P\{\xi = m\} P\{\eta = k - m\}$ і підрахувати кількість можливих значень $m$ з умов $0 \leqslant m \leqslant n$; $0 \leqslant k - m \leqslant n$. **22.** $p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1 - |x|, & |x| \leqslant 1. \end{cases}$ **23.** а) $p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0, 1), \\ \ln x, & x \in (0, 1). \end{cases}$ б) та сама щільність, що у вправі 22.

## Розділ V

**1.** а) $M\xi = 1{,}7$; $D\xi = 0{,}61$; $\sigma_\xi = 0{,}78$; б) $M\xi = 0$; $D\xi = 4{,}8$; $\sigma_\xi = 2{,}19$. **2.** $M\xi = 3{,}5$; $D\xi = 2{,}917$; $\sigma_\xi = 1{,}71$. **3.** $M\xi = 7$; $D\xi = 5{,}83$; $\sigma_\xi = 2{,}42$. Вказівка. Врахувати, що $\xi = \xi_1 + \xi_2$, де $\xi_1$ — число очок на першому кубику, $\xi_2$ — на другому. **4.** $M\xi = 0$; $D\xi = \frac{n(n+1)}{3}$. **5.** $M\xi^n = 1$, якщо $n$ парне, $M\xi^n = 0$, якщо $n$ непарне; $M(e^{it\xi}) = \cos t$. **7.** $M\xi = p_1 + p_2$; $D\xi = p_1 + p_2 - p_1^2 - p_2^2$. **8.** $M\xi = \frac{1 - q^n}{p}$; $D\xi = \frac{q - (2n-1)q^n + (2n-1)q^{n+1} - q^{2n}}{(1-q)^2}$, де $q = 1 - p$.

**9.** $M\xi = \frac{1-p}{p}$; $D\xi = \frac{1-p}{p^2}$. Вказівка. $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k p = pq\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = pq\left(\frac{q}{1-q}\right)'$, де $q = 1 - p$. Аналогічно обчислюється $M\xi^2$. **10.** $M\xi = \frac{m+n}{m}$; $D\xi = \frac{n(m+n)}{m^2}$. **16.** $p(x) = 1/6$ при $x \in (1, 7)$; $p(x) = 0$ при $x \notin (1, 7)$. **17.** $M(\xi\eta) = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$. **18.** $M\xi = \frac{1}{\lambda}$; $D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$; $\sigma_\xi = \frac{1}{\lambda}$. **19.** $M\xi = 0$, $D\xi = \frac{\pi^2}{4} - 2$; медіана і мода дорівнюють нулю. **20.** 0. **21.** $M\xi = 4/3$; $D\xi = 2/9$ $P\{|\xi - M\xi| < 0{,}5\} = 2/3$. **22.** Мода і математичне сподівання дорівнюють нулю; $D\xi = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}$. **23.** $M\xi = 0$. **25.** $M\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}$ $D\xi = \frac{4-\pi}{4h^2}$; мода дорівнює $1/4\sqrt{2}$. **26.** $M\xi = \alpha a + \beta b + \gamma$; $D\xi = \alpha^2\sigma_1^2 + \beta^2\sigma_2^2 + 2\alpha\beta r\sigma_1\sigma_2$. **27.** $F_\xi(x) = 1 - e^{-\alpha x}$; $F_\eta(y) = 1 - e^{-\beta y}$, отже, $F(x, y) = F_\xi(x) F_\eta(y)$, тобто ξ і η незалежні; $M\xi = \frac{1}{\alpha}$, $M\eta = \frac{1}{\beta}$, $D\xi = \frac{1}{\alpha^2}$, $D\eta = \frac{1}{\beta^2}$, $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$. **28.** $\rho(\xi, \eta) = 0$ при $m = 2k$; $\rho(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{2(2m+1)}}{m+1}$ при $m = 2k - 1$. **31.** $P\{|\xi - M\xi| \leqslant 3\sigma\} \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} \approx 0{,}889$. **32.** а) $P\{\xi > 1\,000\,000\} \leqslant \frac{360\,000}{1\,000\,000} = 0{,}36$; б) $P\{\xi > 1\,000\,000\} = P\{|\xi - M\xi| > 640\,000\} \leqslant \frac{40\,000^2}{1\,000\,000^2} = 0{,}0016$. **33.** $P\{\xi > 175\} \leqslant 0{,}31$. **34.** $P\{\xi \leqslant 200\} \geqslant 1 - \frac{75}{200} = 0{,}625$. **35.** $10{,}8 \leqslant \xi \leqslant 29{,}2$. Вказівка. Використати другу нерівність Чебишова. **36.** $P\{|\xi| > 5\} < 0{,}16$. **38.** 222 223; 1472. **39.** Має місце. **40.** Має місце.

**Розділ VI**

**1.** $\bar{x} = 4{,}47$; $s^2 = 0{,}0117$; $s_1^2 = 0{,}0121$. **2.** а) 1) (4,41; 4,53); 2) (4,42; 4,52); б) 1) (4.40; 4,54); 2) (4,42; 4,52). **3.** а) $\bar{x} = 40{,}35$; $s_1^2 = 0{,}00187$; б) $\bar{x} = 40{,}35$; $s_1^2 = 0{,}00196$. **4.** а) (40,339; 40,361); б) (40,344; 40,356). **5.** $\bar{x} = 349$; $s_1 = 108$. **6.** $\bar{x} = 4{,}3$; $s_1^2 = 92{,}25$. **7.** (2,94; 5,66). **8.** $\bar{x} = 14{,}54$; $s_1^2 = 0{,}0015$. **9.** $\bar{x} = 4{,}004$; $s^2 = 0{,}0159$; $s_1^2 = 0{,}0160$. **10.** а) $\bar{x} = 2{,}484$; $s^2 = 0{,}0207$; б) $s^2 = 0{,}282$. **11.** $\bar{x} = 21{,}84$; $s^2 = 6{,}64$; $P\{|a - 21{,}84| \leqslant 0{,}009\} \approx 2\Phi\left(\frac{0{,}09 \cdot \sqrt{2500}}{\sqrt{6{,}64}}\right) = 2\Phi(1{,}75) = 0{,}9199$. **12.** $\bar{x} = 2$; $s^2 = 4{,}95$; надійний інтервал (0,3; 3,7). **13.** $r = 0{,}997$, отже, залежність практично є лінійною; $y - 13{,}8 = 0{,}213\,(x - 15{,}6)$. **14.** $r = 0{,}694$, отже, залежність можна вважати близькою до лінійної; $x = 0{,}288y - 6{,}942$. **15.** $r = -0{,}85$, отже, залежність близька до лінійної; $y = -1{,}46x + 88{,}9$. **16.** $r = 0{,}64$; $x - 1{,}53 = 0{,}0335 \times (y - 41{,}72)$.

## ДОДАТОК

*Таблиця 1*

**Таблиця значень функції** $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3443 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

*Таблиця 2*

**Таблиця значень функції Лапласа** $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,00000 | 00 399 | 00 798 | 01 197 | 01 595 | 01 994 | 02 392 | 02 790 | 03 188 | 03 586 |
| 0,1 | 03983 | 04 380 | 04 776 | 05 172 | 05 567 | 05 962 | 06 356 | 06 749 | 07 142 | 07 535 |
| 0,2 | 07926 | 08 317 | 08 706 | 09 095 | 09 483 | 09 871 | 10 257 | 10 642 | 11 026 | 11 409 |
| 0,3 | 11791 | 12 172 | 12 552 | 12 930 | 13 307 | 13 683 | 14 058 | 14 431 | 14 803 | 15 173 |
| 0,4 | 15542 | 15 910 | 16 276 | 16 640 | 17 003 | 17 364 | 17 724 | 18 082 | 18 439 | 18 793 |
| 0,5 | 19146 | 19 497 | 19 847 | 20 194 | 20 540 | 20 884 | 21 226 | 21 566 | 21 904 | 22 240 |
| 0,6 | 22575 | 22 907 | 23 237 | 23 565 | 23 891 | 24 215 | 24 537 | 24 857 | 25 175 | 25 490 |
| 0,7 | 25804 | 26 115 | 26 424 | 26 730 | 27 035 | 27 337 | 27 637 | 27 935 | 28 230 | 28 524 |
| 0,8 | 28814 | 29 103 | 29 389 | 29 673 | 29 955 | 30 234 | 30 511 | 30 785 | 31 057 | 31 327 |
| 0,9 | 31594 | 31 859 | 32 121 | 32 381 | 32 639 | 32 894 | 33 147 | 33 398 | 33 646 | 33 891 |
| 1,0 | 34134 | 34 375 | 34 614 | 34 850 | 35 083 | 35 314 | 35 543 | 35 769 | 35 993 | 36 214 |
| 1,1 | 36433 | 36 650 | 36 864 | 37 076 | 37 286 | 37 493 | 37 698 | 37 900 | 38 100 | 38 298 |
| 1,2 | 38493 | 38 686 | 38 877 | 39 065 | 39 251 | 39 435 | 39 617 | 39 796 | 39 973 | 40 147 |
| 1,3 | 40320 | 40 490 | 40 658 | 40 824 | 40 988 | 41 149 | 41 309 | 41 466 | 41 621 | 41 774 |
| 1,4 | 41 924 | 42 073 | 42 220 | 42 364 | 42 507 | 42 647 | 42 786 | 42 922 | 43 056 | 43 189 |
| 1,5 | 43 319 | 43 448 | 43 574 | 43 699 | 43 822 | 43 943 | 44 062 | 44 179 | 44 295 | 44 408 |
| 1,6 | 44 520 | 44 630 | 44 738 | 44 845 | 44 950 | 45 053 | 45 154 | 45 254 | 45 352 | 45 449 |
| 1,7 | 45 543 | 45 637 | 45 728 | 45 818 | 45 907 | 45 994 | 46 080 | 46 164 | 46 246 | 46 327 |
| 1,8 | 46 407 | 46 485 | 46 562 | 46 638 | 46 712 | 46 784 | 46 856 | 46 926 | 46 995 | 47 062 |
| 1,9 | 47 128 | 47 193 | 47 257 | 47 320 | 47 381 | 47 441 | 47 500 | 47 558 | 47 615 | 47 670 |
| 2,0 | 47 725 | 47 778 | 47 831 | 47 882 | 47 932 | 47 982 | 48 030 | 48 077 | 48 124 | 48 169 |
| 2,1 | 48 214 | 48 257 | 48 300 | 48 311 | 48 382 | 48 422 | 48 461 | 48 500 | 48 537 | 48 574 |
| 2,2 | [illegible] | 48 645 | 48 679 | 48 713 | 48 745 | 48 778 | 48 809 | 48 840 | 48 870 | 48 899 |
| 2,3 | 48 928 | 48 956 | 48 983 | 49 010 | 49 036 | 49 061 | 49 086 | 49 111 | 49 134 | 49 158 |
| 2,4 | 49 180 | 49 202 | 49 224 | 49 245 | 49 266 | 49 286 | 49 305 | 49 124 | 49 343 | 49 361 |
| 2,5 | 49 379 | 49 396 | 49 413 | 49 430 | 49 446 | 49 461 | 49 477 | 49 492 | 49 506 | 49 520 |
| 2,6 | 49 534 | 49 547 | 49 560 | 49 573 | 49 585 | 49 598 | 49 609 | 49 621 | 49 632 | 49 643 |
| 2,7 | 49 653 | 49 664 | 49 674 | 49 683 | 49 693 | 49 702 | 49 711 | 49 720 | 49 728 | 49 736 |
| 2,8 | 49 744 | 49 752 | 49 760 | 49 767 | 49 774 | 49 781 | 49 788 | 49 795 | 49 801 | 49 807 |
| 2,9 | 49 813 | 49 819 | 49 825 | 49 831 | 49 836 | 49 841 | 49 846 | 49 851 | 49 856 | 49 861 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3,0 | 0,49865 | 3,5 | 0,49 977 | 4,0 | 0,499968 |
| 3,1 | 49 903 | 3,6 | 49984 | 4,5 | 499997 |
| 3,2 | 49 931 | 3,7 | 49989 | 5,0 | 49999997 |
| 3,3 | 49 952 | 3,8 | 49993 | | |
| 3,4 | 49 966 | 3,9 | 49995 | | |

*Таблиця 3*

**Таблиця розподілу Пуассона** $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

| $k$ \ $\lambda$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,904837 | 818 731 | 740 818 | 670 320 | 606 531 | 548 812 |
| 1 | 090484 | 163 746 | 222 245 | 268 128 | 303 265 | 329 287 |
| 2 | 004524 | 016 375 | 033 337 | 053 626 | 075 816 | 098 786 |
| 3 | 000151 | 001 091 | 003 334 | 007 150 | 012 636 | 019 757 |
| 4 | 000004 | 000 055 | 000 250 | 000 715 | 001 580 | 002 964 |
| 5 | | 000 002 | 000 015 | 000 057 | 000 158 | 000 356 |
| 6 | | | 000 001 | 000 004 | 000 013 | 000 035 |
| 7 | | | | | 000 001 | 000 003 |

| $k$ \ $\lambda$ | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 2,0 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,496585 | 449 329 | 406 570 | 367 879 | 135 335 | 049 787 |
| 1 | 347610 | 359 463 | 365 913 | 367 879 | 270 671 | 149 361 |
| 2 | 121663 | 143 785 | 164 661 | 183 940 | 270 671 | 224 042 |
| 3 | 028388 | 038 343 | 049 398 | 061 313 | 180 447 | 224 042 |
| 4 | 004968 | 007 669 | 011 115 | 015 328 | 090 224 | 168 031 |
| 5 | 000695 | 001 227 | 002 001 | 003 066 | 036 089 | 100 819 |
| 6 | 000081 | 000 164 | 000 300 | 000 511 | 012 030 | 050 409 |
| 7 | 000008 | 000 019 | 000 039 | 000 073 | 003 437 | 021 604 |
| 8 | | 000 002 | 000 004 | 000 009 | 000 859 | 008 101 |
| 9 | | | | 000 001 | 000 191 | 002 701 |
| 10 | | | | | 000 038 | 000 810 |
| 11 | | | | | 000 007 | 000 221 |
| 12 | | | | | 000 001 | 000 055 |
| 13 | | | | | | 000 013 |
| 14 | | | | | | 000 003 |
| 15 | | | | | | 000 001 |

| $k$ \ $\lambda$ | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,018316 | 006 738 | 002 479 | 000 912 | 000 335 | 000 123 |
| 1 | 073263 | 033 690 | 014 873 | 006 383 | 002 684 | 001 111 |
| 2 | 146525 | 084 224 | 044 618 | 022 341 | 010 735 | 004 998 |
| 3 | 195367 | 140 374 | 089 235 | 052 129 | 028 626 | 014 994 |
| 4 | 195367 | 175 467 | 133 853 | 091 226 | 057 252 | 033 737 |
| 5 | 156293 | 175 467 | 160 623 | 127 717 | 091 604 | 060 727 |
| 6 | 104194 | 146 223 | 160 623 | 149 003 | 122 138 | 091 090 |
| 7 | 059540 | 104 445 | 137 677 | 149 003 | 139 587 | 117 116 |
| 8 | 029770 | 065 278 | 103 258 | 130 377 | 139 587 | 131 756 |





| $k$ \ $\lambda$ | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 013231 | 036 266 | 068 838 | 101 405 | 124 077 | 131 756 |
| 10 | 005292 | 018 133 | 041 303 | 070 983 | 099 262 | 118 580 |
| 11 | 001925 | 008 242 | 022 529 | 045 171 | 072 190 | 097 020 |
| 12 | 000642 | 003 434 | 011 262 | 026 350 | 048 127 | 072 765 |
| 13 | 000197 | 001 321 | 005 199 | 014 188 | 029 616 | 050 376 |
| 14 | 000056 | 000 472 | 002 228 | 007 094 | 016 924 | 032 384 |
| 15 | 000015 | 000 157 | 000 891 | 003 311 | 009 026 | 019 431 |
| 16 | 000004 | 000 049 | 000 334 | 001 448 | 004 513 | 010 930 |
| 17 | 000001 | 000 014 | 000 118 | 000 596 | 002 124 | 005 786 |
| 18 | | 000 004 | 000 039 | 000 232 | 000 944 | 002 893 |
| 19 | | 000 001 | 000 012 | 000 085 | 000 397 | 001 370 |
| 20 | | | 000 004 | 000 030 | 000 159 | 000 617 |
| 21 | | | 000 001 | 000 010 | 000 061 | 000 264 |
| 22 | | | | 000 003 | 000 022 | 000 108 |
| 23 | | | | 000 001 | 000 008 | 000 042 |
| 24 | | | | | 000 003 | 000 016 |
| 25 | | | | | 000 001 | 000 006 |
| 26 | | | | | | 000 002 |
| 27 | | | | | | 000 001 |

*Таблиця 4*

**Розподіл Пуассона. Таблиця значень** $\sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

| $m$ \ $\lambda$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 |
| 1 | 0,095163 | 0,181269 | 0,259182 | 0,329680 | 0,393469 |
| 2 | 004679 | 017523 | 036936 | 061552 | 090204 |
| 3 | 000155 | 001149 | 003600 | 007926 | 014388 |
| 4 | | 000057 | 000266 | 000776 | 001752 |

| $m$ \ $\lambda$ | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 |
| 1 | 0,451188 | 0,503415 | 0,550671 | 0,593430 | 0,632121 |
| 2 | 121901 | 155805 | 191208 | 227518 | 264241 |
| 3 | 023155 | 034142 | 047423 | 062857 | 080301 |
| 4 | 003358 | 005753 | 009080 | 013459 | 018988 |
| 5 | 000394 | 000786 | 001411 | 002344 | 003660 |
| 6 | | | 000184 | 000343 | 000594 |

| m \ λ | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 |
| 1 | 0,698806 | 0,753403 | 0,798103 | 0,834701 | 0,864665 |
| 2 | 337373 | 408167 | 475069 | 537163 | 593994 |
| 3 | 120513 | 166502 | 216642 | 269379 | 323324 |
| 4 | 033769 | 053725 | 078813 | 108708 | 142877 |
| 5 | 007746 | 014253 | 023682 | 036407 | 052653 |
| 6 | 001500 | 003201 | 006040 | 010378 | 016564 |
| 7 | 000251 | 000622 | 001336 | 002569 | 004534 |
| 8 | | | 000260 | 000562 | 001097 |
| 9 | | | | | 000237 |

| m \ λ | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3,0 | 4,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 |
| 1 | 0,889197 | 0,909282 | 0,925726 | 0,939190 | 0,950213 | 0,981684 |
| 2 | 645130 | 691559 | 732615 | 768922 | 800852 | 908422 |
| 3 | 377286 | 480291 | 481570 | 530546 | 576810 | 761897 |
| 4 | 180648 | 221227 | 263998 | 308063 | 352768 | 566530 |
| 5 | 072496 | 085869 | 122577 | 152324 | 184737 | 371163 |
| 6 | 024910 | 035673 | 049037 | 065110 | 083918 | 214870 |
| 7 | 007461 | 011594 | 017170 | 024411 | 033509 | 110674 |
| 8 | 001978 | 003339 | 005334 | 008131 | 011905 | 051134 |
| 9 | 000470 | 000862 | 001487 | 002433 | 003803 | 021363 |
| 10 | | | 000376 | 000660 | 001102 | 008132 |
| 11 | | | | | 000292 | 002840 |
| 12 | | | | | | 000915 |

| m \ λ | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 |
| 1 | 0,993262 | 0,997521 | 0,999088 | 0,999665 | 0,999877 | 0,999955 |
| 2 | 959572 | 982649 | 922705 | 996981 | 998766 | 999501 |
| 3 | 875348 | 938031 | 970364 | 986246 | 993768 | 997231 |
| 4 | 734974 | 848796 | 918235 | 957620 | 978774 | 989664 |
| 5 | 559507 | 714943 | 827008 | 900368 | 945036 | 970747 |
| 6 | 384039 | 554320 | 299292 | 808764 | 884309 | 932914 |
| 7 | 237817 | 393697 | 550289 | 686626 | 793219 | 869859 |
| 8 | 133372 | 256020 | 401286 | 547039 | 676103 | 779779 |
| 9 | 068094 | 152763 | 270909 | 407453 | 544347 | 667180 |
| 10 | 031828 | 083924 | 169504 | 283376 | 412592 | 542070 |





| m \ λ | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 013 695 | 042 621 | 098 521 | 184 114 | 294 012 | 416 960 |
| 12 | 005 453 | 020 092 | 053 350 | 111 924 | 196 662 | 303 224 |
| 13 | 002 019 | 008 827 | 027 000 | 063 797 | 124 227 | 208 444 |
| 14 | 000 698 | 003 628 | 012 811 | 034 181 | 073 851 | 135 536 |
| 15 | | 001 400 | 005 717 | 017 257 | 041 466 | 083 459 |
| 16 | | 000 509 | 002 407 | 008 231 | 022 036 | 048 740 |
| 17 | | | 000 958 | 003 718 | 011 106 | 027 042 |
| 18 | | | | 001 594 | 005 320 | 014 278 |
| 19 | | | | 000 650 | 002 426 | 007 187 |
| 20 | | | | | 001 056 | 003 454 |
| 21 | | | | | 000 439 | 001 588 |
| 22 | | | | | | 000 700 |

*Таблиця 5*

**Таблиця значень $t_\beta = t(\beta,\ n)$ (розподіл Стьюдента)**

| h \ β | 0,95 | 0,99 | 0,999 | n \ β | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2,78 | 4,60 | 8,61 | 20 | 2,093 | 2,861 | 3,883 |
| 6 | 2,47 | 4,03 | 6,86 | 25 | 2,064 | 2,797 | 3,745 |
| 7 | 2,45 | 3,71 | 5,96 | 30 | 2,045 | 2,756 | 3,659 |
| 8 | 2,37 | 3,50 | 5,41 | 35 | 2,032 | 2,729 | 3,600 |
| 9 | 2,31 | 2,36 | 5,04 | 40 | 2,023 | 2,708 | 3,558 |
| 10 | 2,26 | 3,25 | 4,78 | 45 | 2,016 | 2,692 | 3,527 |
| 11 | 2,23 | 3,17 | 4,59 | 50 | 2,009 | 2,679 | 3,502 |
| 12 | 2,20 | 3,11 | 4,44 | 60 | 2,001 | 2,662 | 3,464 |
| 13 | 2,18 | 3,06 | 4,32 | 70 | 1,996 | 2,649 | 3,439 |
| 14 | 2,16 | 3,01 | 4,22 | 80 | 1,991 | 2,640 | 3,418 |
| 15 | 2,15 | 2,98 | 4,14 | 90 | 1,987 | 2,633 | 3,403 |
| 16 | 2,13 | 2,95 | 4,07 | 100 | 1,984 | 2,627 | 3,392 |
| 17 | 2,12 | 2,92 | 4,02 | 120 | 1,980 | 2,617 | 2,384 |
| 18 | 2,11 | 2,90 | 3,97 | ∞ | 1,960 | 2,576 | 3,291 |
| 19 | 2,10 | 2,88 | 3,92 | | | | |

# СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


**Підручники, навчальні посібники та монографії**

1. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональний анализ: Курс лекций.— К. : Вища шк., 1990.— 600 с.
2. *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей.— М. : Наука, 1972.— 288 с.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1979.— 408 с.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов.— М. : Наука, 1977.— 568 с.
5. *Гливенко В. И.* Курс теории вероятностей.— М. : ГОНТИ, 1939.— 220 с.
6. *Гнеденко Б. В.* Курс теорії ймовірностей.— К. : Рад. шк., 1949.— 360 с.
7. *Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж.* Введение в конечную математику.— М. : Мир, 1965.— 486 с.
8. *Коваленко И. Н., Филиппова А. А.* Теория вероятностей и математическая статистика.— М. : Высш. шк., 1973.— 368 с.
9. *Колмогоров А. Н.* Основные законы теории вероятностей.— М. : ОНТИ, 1936.— 80 с.
10. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1975.— 496 с.
11. *Крамер Г.* Математические методы статистики.— М. : Изд-во иностр. лит., 1948.— 632 с.
12. *Крамер Г.* Случайные величины и распределения вероятностей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1947.— 144 с.
13. *Павловский З.* Введение в математическую статистику.— М. : Статистика, 1967.— 285 с.
14. *Райзер Г. Дж.* Комбинаторная математика.— М. : Мир, 1966.— 154 с.
15. *Скороход А. В.* Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1975.— 344 с.
16. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1972.— 230 с.
17. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т.— М. : Мир, 1967.— Т. 1— 498 с.
18. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчислений: В 3 т.— М. : Наука, 1970.— Т. 1—3.
19. *Халмош П.* Теория меры.— М. : Изд-во иностр. лит., 1953.— 291 с.
20. *Эрдеш П., Спенсер Дж.* Вероятностные методы в комбинаторике.— М. : Мир, 1976.— 132 с.





**Збірники задач**

21. *Бадрухаев Х. М.* Сборник задач по теории вероятностей.— М. : Просвещение, 1985.— 160 с.
22. *Сборник* задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А. А. Свешникова.— М. : Наука, 1970.— 656 с.
23. *Гиленко Н. Д.* Задачник по теории вероятностей.— М. : Учпедгиз, 1943.— 140 с.
24. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.— М. : Высш. шк., 1979.— 400 с.
25. *Теорія* ймовірностей: Збірник задач / За ред. А. В. Скорохода.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1976.— 384 с.
26. *Емельянов Г. В., Скитович В. П.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1967.— 331 с.
27. *Мешалкин Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1963.— 156 с.
28. *Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теории вероятностей.— М. : Наука, 1980.— 223 с.

**Науково-популярні книги**

29. *Борель Э.* Вероятность и достоверность.— М. : Физматгиз, 1961.— 120 с.
30. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика.— М. : Наука, 1969.— 328 с.
31. *Виленкин Н. Я.* Популярная комбинаторика.— М. : Наука, 1975.— 208 с.
32. *Гнеденко Б. В.* Беседы о математической статистике.— М. : Знание, 1968.— 48 с.
33. *Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей.— М. : Наука, 1967.— 168 с.
34. *Єжов І. І., Скороход А. В., Ядренко М. Й.* Елементи комбінаторики.— К. : Вища шк., 1972.— 84 с.
35. *Китайгородский А. И.* Невероятно — не факт.— М. : Мол. гвардия, 1972.— 244 с.
36. *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.* Введение в теорию вероятностей.— М. : Наука, 1982.— 160 с.
37. *Мостеллер Ф.* Пятьдесят вероятностных занимательных задач.— М. : Наука, 1971.— 104 с.
38. *Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж.* Вероятность.— М. : Мир, 1969.— 432 с.
39. *Реньи А.* Трилогия о математике.— М. : Мир, 1980.— 376 с.
40. *Скороход А. В.* Вероятность вокруг нас.— К. : Наук. думка, 1980.— 196 с.
41. *Тарнопольский В. Г., Васильченко В. Г.* Елементи теорії ймовірностей.— К. : Рад. шк., 1972.— 72 с.
42. *Тутубалин В. Н.* Границы применимости.— М. : Знание, 1977.— 64 с.
43. *Тутубалин В. Н.* Статистическая обработка рядов наблюдений.— М. : Знание, 1973.— 64 с.
44. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей в естествознании.— М. : Знание, 1972.— 48 с.
45. *Тюрин Ю. Н.* Что такое математическая статистика.— М. : Знание, 1975.— 64 с.
46. *Яглом А. М., Яглом И. М.* Вероятность и информация.— М. : Наука, 1972.— 420 с.

## ЗМІСТ







Навчальне видання

*Шефтель Зіновій Григорович*

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ**

2-ге видання,
перероблене і доповнене

Обкладинка художника *В. Г. Самсонова*
Художній редактор *С. В. Анненков*
Технічний редактор *Т. Г. Шепновська*
Коректор *Н. І. Хоменко*

Здано до набору 28.09.93. Підписано до друку 06.09.94. Формат 84×108 1/32. Папір друк. № 2. Гарнітура літературна. Високий друк. Умовн.-друк. арк. 10,08 Умовн. фарбовідб. 10,34. Обл.-вид. арк. 11,0. Вид. № 9646. Замовлення № 3—2566

Видавництво «Вища школа», 252054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7

Надруковано з матриць Головного підприємства республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига», 252057, Київ-57, вул. Довженка, 3 в Київській книжковій друкарні наукової книги, 252004, Київ-4, вул. Терещенківська, 4. Зам. 4-937.