Т. И. Трофимова

# Курс физики

Издание второе,
исправленное и дополненное

Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия для студентов
технических специальностей
высших учебных заведений



Москва «Высшая школа» 1990

ББК 22.3
Т70
УДК 53

Рецензенты:

кафедра физики Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина;
кафедра физики Уральского политехнического института им. С. М. Кирова

**Трофимова Т. И.**

Т70 Курс физики: Учеб. пособие для вузов.—2-е изд., перераб. и доп.— М.: Высш. шк., 1990.— 478 с.: ил.
ISBN 5-06-001540-8

Пособие составлено в соответствии с программой по физике для студентов вузов. Оно состоит из семи частей, в которых излагаются физические основы механики, молекулярной физики и термодинамики, электричества и магнетизма, оптики, квантовой физики атомов, молекул и твердых тел, физики атомного ядра и элементарных частиц. В пособии устанавливается логическая преемственность и связь между классической и современной физикой.

Во второе издание (1-е —1985 г.) внесены изменения, приведены контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения.

**ББК 22.3**

**Т $\frac{1604010000\ (4309000000)-363}{001(01)-90}$ 102—90**

**53**

ISBN 5-06-001540-8

© Т. И. Трофимова, 1990

# Предисловие

Учебное пособие написано в соответствии с действующей программой курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

Небольшой объем учебного пособия достигнут с помощью тщательного отбора и лаконичного изложения материала.

Книга состоит из семи частей. В первой части дано систематическое изложение физических основ классической механики, а также рассмотрены элементы специальной (частной) теории относительности. Вторая часть посвящена основам молекулярной физики и термодинамики. В третьей части изучаются электростатика, постоянный электрический ток и электромагнетизм. В четвертой части, посвященной изложению колебаний и волн, механические и электромагнитные колебания рассматриваются параллельно, указываются их сходства и различия и сравниваются физические процессы, происходящие при соответствующих колебаниях. В пятой части рассмотрены элементы геометрической и электронной оптики, волновая оптика и квантовая природа излучения. Шестая часть посвящена элементам квантовой физики атомов, молекул и твердых тел. В седьмой части излагаются элементы физики атомного ядра и элементарных частиц.

Изложение материала ведется без громоздких математических выкладок, должное внимание обращается на физическую суть явлений и описывающих их понятий и законов, а также на преемственность современной и классической физики. Обозначения и единицы физических величин соответствуют Государственным стандартам СССР и стандартам СЭВ.

При подготовке второго издания заново написаны некоторые параграфы, внесены исправления и дополнения по всему курсу, расширен иллюстративный материал. К каждой главе даны контрольные вопросы и задачи.

Для обозначения векторных величин на всех рисунках и в тексте использован полужирный шрифт, за исключением величин, обозначенных греческими буквами, которые по техническим причинам набраны в тексте светлым шрифтом со стрелкой.

Настоящий курс предназначен для студентов высших технических учебных заведений дневной формы обучения с ограниченным числом часов по физике, с возможностью его использования на вечерней и заочной формах обучения.

Автор выражает глубокую признательность коллегам и читателям, чьи доброжелательные замечания и пожелания способствовали улучшению книги. Автор считает своим долгом поблагодарить кафедру физики Уральского политехнического института и кафедру экспериментальной физики Ленинградского политехнического института, взявших на себя труд рецензирования рукописи при подготовке второго издания.

Автор будет благодарен за замечания и советы по улучшению пособия. Просьба направлять их в издательство «Высшая школа» по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

*Автор*

# Введение

## Предмет физики и ее связь с другими науками

Окружающий нас мир, все существующее вокруг нас и обнаруживаемое нами посредством ощущений представляет собой материю. «Материя есть философская категория для обозначения объективной реальности, которая... отображается нашими ощущениями, существуя независимо от них» (*Ленин В. И.* Полн. собр. соч. Т. 18. С. 131).

Неотъемлемым свойством материи и формой ее существования является движение. Движение в широком смысле слова — это всевозможные изменения материи — от простого перемещения до сложнейших процессов мышления. «Движение, рассматриваемое в самом общем смысле слова, т. е. понимаемое как способ существования материи, как внутренне присущий материи атрибут, обнимает собою все происходящие во Вселенной изменения и процессы, начиная от простого перемещения и кончая мышлением» (*Энгельс Ф.* Диалектика природы.— *К. Маркс, Ф. Энгельс.* Соч. 2-е изд. Т. 20. С. 391).

Разнообразные формы движения материи изучаются различными науками, в том числе и физикой. Предмет физики, как, впрочем, и любой науки, может быть раскрыт только по мере его детального изложения. Дать строгое определение предмета физики довольно сложно, потому что границы между физикой и рядом смежных дисциплин условны. На данной стадии развития нельзя сохранить определение физики только как науки о природе.

Академик А. Ф. Иоффе (1880—1960; советский физик) * определил физику как науку, изучающую общие свойства и законы движения вещества и поля. В настоящее время общепризнано, что все взаимодействия осуществляются посредством полей, например гравитационных, электромагнитных, полей ядерных сил. Поле наряду с веществом является одной из форм существования материи. Неразрывная связь поля и вещества, а также различие в их свойствах будут рассмотрены по мере изучения курса.

Физика — наука о наиболее простых и вместе с тем наиболее общих формах движения материи и их взаимных превращениях. Изучаемые физикой формы движения материи (механическая, тепловая и др.) присутствуют во всех высших и более сложных формах движения материи (химических, биологических и др.). Поэтому они, будучи наиболее простыми, являются в то же время наиболее общими формами движения материи. Высшие и более сложные формы движения материи — предмет изучения других наук (химии, биологии и др.).

Физика тесно связана с естественными науками. Как сказал академик С. И. Вавилов (1891—1955; советский физик и общественный деятель), эта теснейшая связь физики с другими отраслями естествознания привела к тому, что физика глубочайшими корнями вросла в астрономию, геологию, химию, биологию и другие естественные науки. В результате образовался ряд новых смежных дисциплин, таких, как астрофизика, геофизика, физическая химия, биофизика и др.

Физика тесно связана и с техникой, причем эта связь носит двусторонний характер. Физика выросла из потребностей техники (развитие механики у древних греков, например, было вызвано запросами строительной и военной техники того времени), и техника, в свою очередь, определяет направление физических исследо-

* Все данные приведены по биографическому справочнику Ю. А. Храмова «Физики» (М.: Наука, 1983).

ваний (например, в свое время задача создания наиболее экономичных тепловых двигателей вызвала бурное развитие термодинамики). С другой стороны, от развития физики зависит технический уровень производства. Физика — база для создания новых отраслей техники (электронная техника, ядерная техника и др.).

Физика тесно связана и с философией. Такие крупные открытия в области физики, как закон сохранения и превращения энергии, соотношение неопределенностей в атомной физике и др., являлись и являются ареной острой борьбы между материализмом и идеализмом. Верные философские выводы из научных открытий в области физики всегда подтверждали основные положения диалектического материализма, поэтому изучение этих открытий и их философское обобщение играют большую роль в формировании научного мировоззрения.

Бурный темп развития физики, растущие связи ее с техникой указывают на двоякую роль курса физики во втузе: с одной стороны, это фундаментальная база для теоретической подготовки инженера, без которой его успешная деятельность невозможна, с другой — это формирование диалектико-материалистического и научно-атеистического мировоззрения.

## Единицы физических величин

Основным методом исследования в физике является **опыт** — основанное на практике чувственно-эмпирическое познание объективной действительности, т. е. наблюдение исследуемых явлений в точно учитываемых условиях, позволяющих следить за ходом явлений и многократно воспроизводить его при повторении этих условий.

Для объяснения экспериментальных фактов выдвигаются гипотезы. **Гипотеза** — это научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо явления и требующее проверки на опыте и теоретического обоснования для того, чтобы стать достоверной научной теорией.

В результате обобщения экспериментальных фактов, а также результатов деятельности людей устанавливаются **физические законы** — устойчивые повторяющиеся объективные закономерности, существующие в природе. Наиболее важные законы устанавливают связь между физическими величинами, для чего необходимо эти величины измерять. Измерение физической величины есть действие, выполняемое с помощью средств измерений для нахождения значения физической величины в принятых единицах. Единицы физических величин можно выбрать произвольно, но тогда возникнут трудности при их сравнении. Поэтому целесообразно ввести систему единиц, охватывающую единицы всех физических величин и позволяющую оперировать с ними.

Для построения системы единиц произвольно выбирают единицы для нескольких не зависящих друг от друга физических величин. Эти единицы называются **основными.** Остальные же величины и их единицы выводятся из законов, связывающих эти величины с основными. Они называются **производными.**

В СССР, согласно Государственному стандарту (ГОСТ 8.417—81), обязательна к применению Система Интернациональная (СИ), которая строится на семи основных единицах — метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, моль, кандела — и двух дополнительных — радиан и стерадиан.

**Метр** (м) — длина пути, проходимого светом в вакууме за 1/299 792 458 с.

**Килограмм** (кг) — масса, равная массе международного прототипа килограмма (платиноиридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа).

**Секунда** (с) — время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

**Ампер** (А) — сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, создает между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

**Кельвин** (К) — 1/273,16 часть термодинамической температуры тройной точки воды.

**Моль** (моль) — количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в нуклиде $^{12}C$ массой 0,012 кг.

**Кандела** (кд) — сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср.

**Радиан** (рад) — угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

**Стерадиан** (ср) — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Для установления производных единиц используют физические законы, связывающие их с основными единицами. Например, из формулы равномерного прямолинейного движения $v = s/t$ ($s$ — пройденный путь, $t$ — время) производная единица скорости получается равной 1 м/с.

**Размерность физической величины** есть ее выражение в основных единицах. Исходя, например, из второго закона Ньютона, получим, что размерность силы

$$\dim F = MLT^{-2},$$

где M — размерность массы; L — размерность длины; T — размерность времени.

Размерности обеих частей физических равенств должны быть одинаковыми, так как физические законы не могут зависеть от выбора единиц физических величин.

Исходя из этого можно проверять правильность полученных физических формул (например, при решении задач), а также устанавливать размерности физических величин.

# I Физические основы механики

**Механика** — часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение. **Механическое движение** — это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Развитие механики как науки начинается с III в. до н. э., когда древнегреческий ученый Архимед (287—212 до н. э.) сформулировал закон равновесия рычага и законы равновесия плавающих тел. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Г. Галилеем (1564—1642) и окончательно сформулированы английским ученым И. Ньютоном (1643—1727).

Механика Галилея — Ньютона называется **классической механикой.** В ней изучаются законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света в вакууме. Законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью $c$, изучаются **релятивистской механикой,** основанной на **специальной теории относительности,** сформулированной А. Эйнштейном (1879—1955). Для описания движения микроскопических тел (отдельные атомы и элементарные частицы) законы классической механики неприменимы — они заменяются законами **квантовой механики**.

В первой части нашего курса мы будем иметь дело с механикой Галилея — Ньютона, т. е. будем рассматривать движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими скорости $c$. В классической механике общепринята концепция пространства и времени, разработанная И. Ньютоном и господствовавшая в естествознании на протяжении XVII—XIX вв. Механика Галилея — Ньютона рассматривает пространство и время как объективные формы существования материи, но в отрыве друг от друга и от движения материальных тел, что соответствовало уровню знаний того времени.

Так как механическое описание наглядно и привычно и с его помощью можно объяснить многие физические явления, в XIX в. некоторые физики стали сводить все явления к механическим. Эта точка зрения соответствовала философскому механистическому материализму. Дальнейшее развитие физики показало, однако, что многие физические явления не могут быть сведены к простейшему виду движения — механическому. Механистический материализм должен был уступить место материализму диалектическому, рассматривающему более общие виды движения материи и учитывающему все разнообразие реального мира.

Механика делится на три раздела: 1) кинематику; 2) динамику; 3) статику.

**Кинематика** изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обусловливают.

**Динамика** изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

**Статика** изучает законы равновесия системы тел. Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия. Поэтому законы статики отдельно от законов динамики физика не рассматривает.

# Глава 1
# Элементы кинематики

## § 1. Модели в механике. Система отсчета. Траектория, длина пути, вектор перемещения

Механика для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач использует разные *физические модели*. Простейшей моделью является **материальная точка** — тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Понятие материальной точки — абстрактное, но его введение облегчает решение практических задач. Например, изучая движение планет по орбитам вокруг Солнца, можно принять их за материальные точки.

Произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению **системы материальных точек.** В механике сначала изучают движение одной материальной точки, а затем переходят к изучению движения системы материальных точек.

Под воздействием тел друг на друга тела могут деформироваться, т. е. изменять свою форму и размеры. Поэтому в механике вводится еще одна модель — абсолютно твердое тело. **Абсолютно твердым телом** называется тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться и при всех условиях расстояние между двумя точками (или точнее между двумя частицами) этого тела остается постоянным.

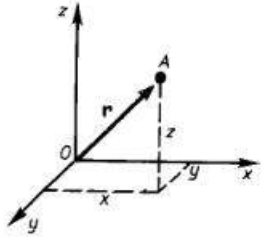



Рис. 1

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений. **Поступательное движение** — это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению. **Вращательное движение** — это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой **осью вращения.**

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась и в какие моменты времени она проходила то или иное положение.

Положение материальной точки определяется по отношению к какому-либо другому, произвольно выбранному телу, называемому **телом отсчета.** С ним связывается **система отсчета** — совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета. В декартовой системе координат, используемой наиболее часто, положение точки $A$ в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами $x$, $y$ и $z$ или радиусом-вектором $\mathbf{r}$, проведенным из начала системы координат в данную точку (рис. 1).

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются. В общем случае ее движение определяется скалярными уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad (1.1)$$

эквивалентными векторному уравнению

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \qquad (1.2)$$

Уравнения (1.1) (соответственно (1.2)) называются **кинематическими уравнениями движения материальной точки.**

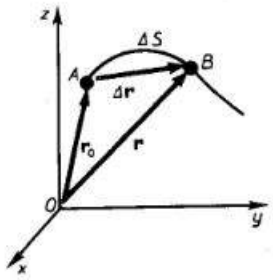



Рис. 2

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется **числом степеней свободы.** Если материальная точка свободно движется в пространстве, то, как уже было сказано, она обладает тремя степенями свободы (координаты $x$, $y$ и $z$); если она движется по некоторой поверхности, то — двумя степенями свободы, если — вдоль некоторой линии, то — одной степенью свободы.

Исключая $t$ в уравнениях (1.1) и (1.2), получим уравнение траектории движения материальной точки. **Траектория** движения материальной точки — линия, описываемая этой точкой в пространстве. В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным.

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории (рис. 2). Отсчет времени начнем с момента, когда точка находилась в положении $A$. Длина участка траектории $AB$, пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени, называется **длиной пути** $\Delta s$ и является *скалярной* функцией времени: $\Delta s = \Delta s(t)$. *Вектор* $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени), называется **перемещением.**

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta \mathbf{r}|$ равен пройденному пути $\Delta s$.

## § 2. Скорость

Для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина — скорость, которой определяется как *быстрота* движения, так и его *направление* в данный момент времени.

Пусть материальная точка движется по какой-либо криволинейной траектории так, что в момент времени $t$ ей соответствует радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ (рис. 3). В течение малого промежутка времени $\Delta t$ точка пройдет путь $\Delta s$ и получит элементарное (бесконечно малое) перемещение $\Delta \mathbf{r}$.

**Вектором средней скорости** $\langle \mathbf{v} \rangle$ называется отношение приращения $\Delta \mathbf{r}$ радиуса-вектора точки к промежутку времени $\Delta t$:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \qquad (2.1)$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta \mathbf{r}$. При неограниченном уменьшении $\Delta t$ средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется **мгновенной скоростью** $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Мгновенная скорость $\mathbf{v}$, таким образом, есть векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени. Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости $\mathbf{v}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения (рис. 3). По мере уменьшения $\Delta t$ путь $\Delta s$ все больше будет приближаться к $|\Delta \mathbf{r}|$, поэтому модуль мгновенной скорости

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

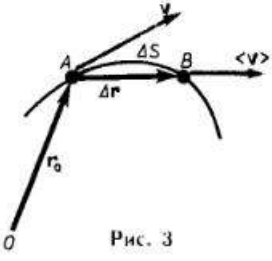



Рис. 3

Таким образом, модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt}. \qquad (2.2)$$

При **неравномерном движении** модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В данном случае пользуются скалярной величиной $\langle v \rangle$ — **средней скоростью** неравномерного движения:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Из рис. 3 вытекает, что $\langle v \rangle > |\langle \mathbf{v} \rangle|$, так как $\Delta s > |\Delta \mathbf{r}|$, и только в случае прямолинейного движения

$$\Delta s = |\Delta \mathbf{r}|.$$

Если выражение $ds = v\,dt$ (см. формулу (2.2)) проинтегрировать по времени в пределах от $t$ до $t+\Delta t$, то найдем длину пути, пройденного точкой за время $\Delta t$:

$$s = \int_t^{t+\Delta t} v\,dt. \qquad (2.3)$$

В случае **равномерного движения** числовое значение мгновенной скорости постоянно; тогда выражение (2.3) примет вид

$$s = v \int_t^{t+\Delta t} dt = v\Delta t.$$

Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от $t_1$ до $t_2$, дается интегралом

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

## § 3. Ускорение и его составляющие

В случае неравномерного движения важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени. Физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является **ускорение**.

Рассмотрим **плоское движение**, т. е. такое, при котором все участки траектории точки лежат в одной плоскости. Пусть вектор $\mathbf{v}$ задает скорость точки

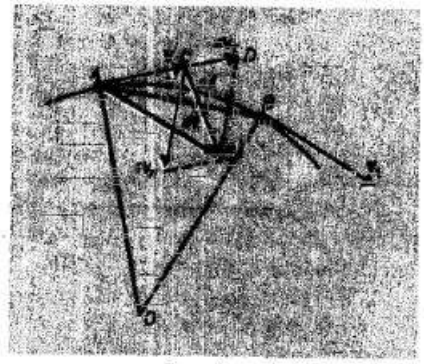


Рис. 4

$A$ в момент времени $t$. За время $\Delta t$ движущаяся точка перешла в положение $B$ и приобрела скорость, отличную от $\mathbf{v}$ как по модулю, так и направлению и равную $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$. Перенесем вектор $\mathbf{v}_1$ в точку $A$ и найдем $\Delta \mathbf{v}$ (рис. 4).

**Средним ускорением** неравномерного движения в интервале от $t$ до $t+\Delta t$ называется векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta \mathbf{v}$ к интервалу времени $\Delta t$:

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

**Мгновенным ускорением** $\mathbf{a}$ (ускорением) материальной точки в момент времени $t$ будет предел среднего ускорения:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \mathbf{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Таким образом, ускорение $\mathbf{a}$ есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени.

Разложим вектор $\Delta \mathbf{v}$ на две составляющие. Для этого из точки $A$ (рис. 4) по направлению скорости $\mathbf{v}$ отложим вектор $\overrightarrow{AD}$, по модулю равный $\mathbf{v}_1$. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{CD}$, равный $\Delta \mathbf{v}_\tau$, определяет изменение скорости *по модулю* за время $\Delta t$: $\Delta v_\tau = v_1 - v$. Вторая же составляющая вектора $\Delta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}_\tau$ характеризует изменение скорости за время $\Delta t$ *по направлению*.

**Тангенциальная составляющая ускорения**

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

т.е. равна первой производной по времени от модуля скорости, определяя тем самым быстроту изменения скорости по модулю.

Найдем вторую составляющую ускорения. Допустим, что точка $B$ достаточно близка к точке $A$, поэтому $\Delta s$ можно считать дугой окружности некоторого радиуса $r$, мало отличающейся от хорды $AB$. Тогда из подобия треугольников $AOB$ и $EAD$ следует $\Delta v_n/AB = v_1/r$, но так как $AB = v\Delta t$, то

$$\frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v v_1}{r}.$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ получим $\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}$.

Поскольку $\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}$, угол $EAD$ стремится к нулю, а так как треугольник $EAD$ равнобедренный, то угол $ADE$ между $\mathbf{v}$ и $\Delta\mathbf{v}_n$ стремится к прямому. Следовательно, при $\Delta t \to 0$ векторы $\Delta\mathbf{v}_n$ и $\mathbf{v}$ оказываются взаимно перпендикулярными. Так как вектор скорости направлен по касательной к траектории, то вектор $\Delta\mathbf{v}_n$, перпендикулярный вектору скорости, направлен к центру ее кривизны. Вторая составляющая ускорения, равная

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r},$$

называется **нормальной составляющей ускорения** и направлена по нормали к траектории к центру ее кривизны (поэтому ее называют также **центростремительным ускорением**).

**Полное ускорение** тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих (рис. 5):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n.$$

Итак, *тангенциальная* составляющая ускорения характеризует *быстроту изменения скорости по модулю* (направлена по касательной к траектории), а *нормальная* составляющая ускорения — быстроту изменения скорости по направлению (направлена к центру кривизны траектории).

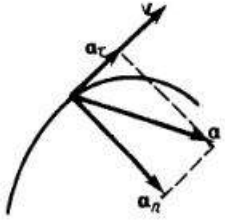


Рис. 5

В зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

1) $a_\tau = 0$, $a_n = 0$ — прямолинейное равномерное движение;

2) $a_\tau = a = \text{const}$, $a_n = 0$ — прямолинейное равнопеременное движение. При таком виде движения

$$a_\tau = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Если начальный момент времени $t_1 = 0$, а начальная скорость $v_1 = v_0$, то, обозначив $t_2 = t$ и $v_2 = v$, получим $a = (v - v_0)/t$, откуда

$$v = v_0 + at.$$

Проинтегрировав эту формулу в пределах от нуля до произвольного момента времени $t$, найдем, что длина пути, пройденного точкой, в случае равнопеременного движения

$$s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t (v_0 + at)\,dt = v_0 t + at^2/2;$$

3) $a_\tau = f(t)$, $a_n = 0$ — прямолинейное движение с переменным ускорением;

4) $a_\tau = 0$, $a_n = \text{const}$. При $a_\tau = 0$ скорость по модулю не изменяется, а изменяется по направлению. Из формулы $a_n = v^2/r$ следует, что радиус кривизны должен быть постоянным. Следовательно, движение по окружности является равномерным;

5) $a_\tau = 0$, $a_n \neq 0$ — равномерное криволинейное движение;

6) $a_\tau = \text{const}$, $a_n \neq 0$ — криволинейное равнопеременное движение;

7) $a_\tau = f(t)$, $a_n \neq 0$ — криволинейное движение с переменным ускорением.

## § 4. Угловая скорость и угловое ускорение

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Тогда отдельные точки этого тела будут описывать окружности разных радиусов, центры которых лежат на оси вращения. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса $R$ (рис. 6). Ее положение через промежуток времени $\Delta t$ зададим углом $\Delta\varphi$. Элементарные (бесконечно малые) углы поворота рассматривают как векторы. Модуль вектора $d\vec{\varphi}$ равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т. е. подчиняется **правилу правого винта** (рис. 6). Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются **псевдовекторами** или **аксиальными векторами.** Эти векторы не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

**Угловой скоростью** называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

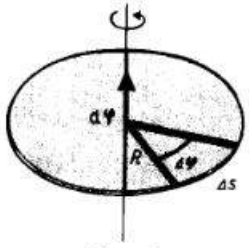



Рис. 6

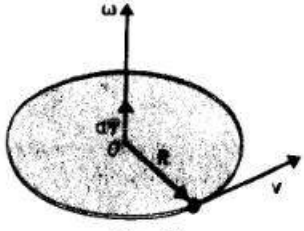



Рис. 7

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта, т. е. так же, как и вектор $d\vec{\varphi}$ (рис. 7). Размерность угловой скорости $\dim \omega = T^{-1}$, а ее единица — радиан в секунду (рад/с).

Линейная скорость точки (см. рис. 6)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} =$$

$$= R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega,$$

т. е.

$$v = \omega R.$$

В векторном виде формулу для линейной скорости можно написать как векторное произведение:

$$\mathbf{v} = [\vec{\omega}\mathbf{R}].$$

При этом модуль векторного произведения, по определению, равен $\omega R \sin(\vec{\omega}\widehat{\mathbf{R}})$, а направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{\omega}$ к $\mathbf{R}$.

Если $\omega = \text{const}$, то вращение равномерное и его можно характеризовать **периодом вращения** $T$ — временем, за которое точка совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол $2\pi$. Так как промежутку времени $\Delta t = T$ соответствует $\Delta\varphi = 2\pi$, то $\omega = 2\pi/T$, откуда

$$T = 2\pi/\omega.$$

Число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности, в единицу времени называется **частотой вращения:**

$$n = 1/T = \omega/(2\pi),$$

откуда

$$\omega = 2\pi n.$$

**Угловым ускорением** называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор

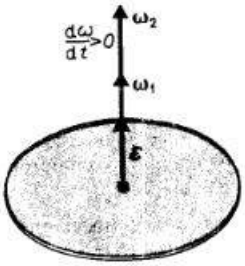


Рис. 8

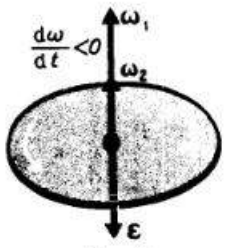


Рис. 9

$\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$ (рис. 8), при замедленном — противонаправлен ему (рис. 9).

Тангенциальная составляющая ускорения $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, $v = \omega R$ и

$$a_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon.$$

Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Таким образом, связь между линейными (длина пути $s$, пройденного точкой по дуге окружности радиуса $R$, линейная скорость $v$, тангенциальное ускорение $a_\tau$, нормальное ускорение $a_n$) и угловыми величинами (угол поворота $\varphi$, угловая скорость $\omega$, угловое ускорение $\varepsilon$) выражается следующими формулами:

$$s = R\varphi, \quad v = R\omega, \quad a_\tau = R\varepsilon, \quad a_n = \omega^2 R.$$

В случае равнопеременного движения точки по окружности ($\varepsilon = \text{const}$)

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \quad \varphi = \omega_0 t \pm \varepsilon t^2/2,$$

где $\omega_0$ — начальная угловая скорость.

## Контрольные вопросы

- Что называется материальной точкой? Почему в механике вводят такую модель?
- Что такое система отсчета?
- Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?
- Какое движение называется поступательным? вращательным?
- Дать определения векторов средней скорости и среднего ускорения, мгновенной скорости и мгновенного ускорения. Каковы их направления?
- Что характеризует тангенциальная составляющая ускорения? нормальная составляющая ускорения? Каковы их модули?
- Возможны ли движения, при которых отсутствует нормальное ускорение? тангенциальное ускорение? Приведите примеры.
- Что называется угловой скоростью? угловым ускорением? Как определяются их направления?
- Какова связь между линейными и угловыми величинами?

## Задачи

**1.1.** Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($C = 0{,}1$ м/с$^2$, $D = 0{,}03$ м/с$^3$). Определить: 1) через какое время после начала движения ускорение $a$ тела будет равно 2 м/с$^2$; 2) среднее ускорение $\langle a \rangle$ тела за этот промежуток времени. [1) 10 с; 2) 1,1 м/с$^2$]

**1.2.** Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить угол, под которым тело брошено к горизонту, если максимальная высота подъема тела равна 1/4 дальности его полета. [45°]

**1.3.** Колесо радиуса $R = 0{,}1$ м вращается так, что зависимость угловой скорости от времени задается уравнением $\omega = 2At + 5Bt^4$ ($A = 2$ рад/с$^2$ и $B = 1$ рад/с$^5$). Определить полное ускорение точек обода колеса через $t = 1$ с после начала вращения и число оборотов, сделанных колесом за это время. [$a = 8{,}5$ м/с$^2$; $N = 0{,}48$]

**1.4.** Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиуса $r=4$ м, задается уравнением $a_n=A+Bt+Ct^2$ ($A=1$ м/с$^2$, $B=6$ м/с$^3$, $C=3$ м/с$^4$). Определить: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время $t_1=5$ с после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени $t_2=1$ с. [1) 6 м/с$^2$; 2) 85 м; 3) 6,32 м/с$^2$]

**1.5.** Частота вращения колеса при равнозамедленном движении за $t=1$ мин уменьшилась от 300 до 180 мин$^{-1}$. Определить: 1) угловое ускорение колеса; 2) число полных оборотов, сделанных колесом за это время. [1) 0,21 рад/с$^2$; 2) 360]

**1.6.** Диск радиусом $R=10$ см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi=A+Bt+Ct^2+Dt^3$ ($B=1$ рад/с, $C=1$ рад/с$^2$, $D=1$ рад/с$^3$). Определить для точек на ободе колеса к концу второй секунды после начала движения: 1) тангенциальное ускорение $a_\tau$; 2) нормальное ускорение $a_n$; 3) полное ускорение $a$. [1) 0,14 м/с$^2$; 2) 28,9 м/с$^2$; 3) 28,9 м/с$^2$]

## Глава 2
## Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

### § 5. Первый закон Ньютона. Масса. Сила

Динамика является основным разделом механики, в ее основе лежат три закона Ньютона, сформулированные им в 1687 г. Законы Ньютона играют исключительную роль в механике и являются (как и все физические законы) обобщением результатов огромного человеческого опыта. Их рассматривают как *систему взаимосвязанных законов* и опытной проверке подвергают не каждый отдельный закон, а всю систему в целом.

**Первый закон Ньютона:** всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние.

Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется **инертностью.** Поэтому первый закон Ньютона называют также **законом инерции.**

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчета. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются **инерциальными системами отсчета.** Инерциальной системой отсчета является такая система, которая либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно относительно какой-то другой инерциальной системы. *Первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.*

Опытным путем установлено, что инерциальной можно считать гелиоцентрическую (звездную) систему отсчета (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определенных звезд). Система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна, однако эффекты, обусловленные ее неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач пренебрежимо малы, и в этих случаях ее можно считать инерциальной.

Из опыта известно, что при одинаковых воздействиях различные тела неодинаково изменяют скорость своего движения, т. е., иными словами, приобретают различные ускорения. Ускорение зависит не только от величины воздействия, но и от свойств самого тела (от его массы).

**Масса** тела — физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (**инертная масса**) и гравитационные (**гравитационная масса**) свойства. В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей $10^{-12}$ их значения).

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие силы. Под действием сил тело либо изменяют скорость движения, т. е. приобретают ускорения (динамическое проявление сил), либо деформируются, т. е. изменяют свою форму и размеры (статическое проявление сил). В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения. Итак, **сила** — это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

## § 6. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона — основной закон динамики поступательного движения — отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

Если рассмотреть действие различных сил на одно и то же тело, то оказывается, что ускорение, приобретаемое телом, всегда прямо пропорционально равнодействующей приложенных сил:

$$a \sim F \quad (m = \text{const}). \tag{6.1}$$

При действии одной и той же силы на тела с разными массами их ускорения оказываются различными, а именно:

$$a \sim 1/m \quad (F = \text{const}). \tag{6.2}$$

Используя выражения (6.1) и (6.2) и учитывая, что сила и ускорение — величины векторные, можем записать

$$\mathbf{a} = k\mathbf{F}/m. \tag{6.3}$$

Соотношение (6.3) выражает **второй закон Ньютона:** ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).

В СИ коэффициент пропорциональности $k = 1$. Тогда

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m,$$

или

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{6.4}$$

Учитывая, что масса материальной точки (тела) в классической механике есть величина постоянная, в выражении (6.4) ее можно внести под знак производной:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \tag{6.5}$$

Векторная величина

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \tag{6.6}$$

численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости, называется **импульсом (количеством движения)** этой материальной точки.

Подставляя (6.6) в (6.5), получим

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{6.7}$$

Это выражение — **более общая формулировка второго закона Ньютона:** скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе. Выражение (6.7) называется **уравнением движения материальной точки.**

Единица силы в СИ — **ньютон** (Н): 1 Н — сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с$^2$ в направлении действия силы:

$$1\ \text{Н} = 1\ \text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2.$$

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета. Первый закон Ньютона можно получить из второго. Действительно, в случае равенства нулю равнодействующей сил (при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел) ускорение (см. (6.3)) также равно нулю. Однако *первый закон Ньютона* рассматривается как *самостоятельный закон* (а не как следствие второго закона), так как именно он утверждает существование инерциальных систем отсчета, в которых только и выполняется уравнение (6.7).

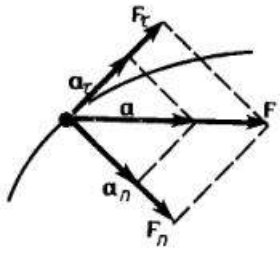



Рис. 10

В механике большое значение имеет **принцип независимости действия сил:** если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было. Согласно этому принципу, силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач. Например, на рис. 10 действующая сила $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ разложена на два компонента: тангенциальную силу $\mathbf{F}_\tau$ (направлена по касательной к траектории) и нормальную силу $\mathbf{F}_n$ (направлена по нормали к центру кривизны). Используя выражения $a_\tau=\frac{dv}{dt}$ и $a_n=\frac{v^2}{R}$, а также $v=R\omega$, можно записать:

$$F_\tau=ma_\tau=m\frac{dv}{dt};$$

$$F_n=ma_n=mv^2/R=m\omega^2R.$$

Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то, согласно принципу независимости действия сил, под $\mathbf{F}$ во втором законе Ньютона понимают результирующую силу.

## § 7. Третий закон Ньютона

Взаимодействие между материальными точками (телами) определяется **третьим законом Ньютона:** всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}, \qquad (7.1)$$

где $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; $\mathbf{F}_{21}$ — сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой. Эти силы приложены к *разным* материальным точкам (телам), всегда действуют *парами* и являются силами *одной природы*.

При использовании законов динамики иногда допускают следующую ошибку: так как действующая сила всегда вызывает равную по модулю и противоположную по направлению силу противодействия, то, следовательно, их равнодействующая должна быть равна нулю и тела вообще не могут приобрести ускорения. Однако надо помнить, что во втором законе Ньютона речь идет об ускорении, приобретаемом телом под действием приложенных к нему сил. Равенство нулю ускорения означает равенство нулю равнодействующей сил, приложенных к одному и тому же телу. Третий же закон Ньютона говорит о равенстве сил, приложенных к *различным* телам. На каждое из двух взаимодействующих тел действует только одна сила, которая и сообщает данному телу ускорение.

Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики *отдельной* материальной точки к динамике *системы* материальных точек. Это следует из того, что и для системы материальных точек взаимодействие сводится к силам парного взаимодействия между материальными точками.

## § 8. Силы трения

Обсуждая до сих пор силы, мы не интересовались их происхождением. Однако в механике мы будем рассматривать различные силы: трения, упругости, тяготения.

Из опыта известно, что всякое тело, движущееся по горизонтальной поверхности другого тела, при отсутствии действия на него других сил с течением времени замедляет свое движение и в конце концов останавливается. Это можно объяснить существованием **силы трения**, которая

препятствует скольжению соприкасающихся тел друг относительно друга. Силы трения зависят от относительных скоростей тел. Силы трения могут быть разной природы, но в результате их действия механическая энергия всегда превращается во внутреннюю энергию соприкасающихся тел.

Различают внешнее (сухое) и внутреннее (жидкое или вязкое) трение. **Внешним трением** называется трение, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении. Если соприкасающиеся тела неподвижны друг относительно друга, говорят о **трении покоя**, если же происходит относительное перемещение этих тел, то в зависимости от характера их относительного движения говорят о **трении скольжения, качения** или **верчения.**

**Внутренним трением** называется трение между частями одного и того же тела, например между различными слоями жидкости или газа, скорости которых меняются от слоя к слою. В отличие от внешнего трения здесь отсутствует трение покоя. Если тела скользят относительно друг друга и разделены прослойкой вязкой жидкости (смазки), то трение происходит в слое смазки. В таком случае говорят о **гидродинамическом трении** (слой смазки достаточно толстый) и **граничном трении** (толщина смазочной прослойки $\approx 0{,}1$ мкм и меньше).

Обсудим некоторые закономерности внешнего трения. Это трение обусловлено шероховатостью соприкасающихся поверхностей; в случае же очень гладких поверхностей трение обусловлено силами межмолекулярного притяжения.

Рассмотрим лежащее на плоскости тело (рис. 11), к которому приложена горизонтальная сила **F**. Тело придет в движение лишь тогда, когда приложенная сила **F** будет больше силы трения $\mathbf{F}_{тр}$. Французские физики **Г. Амонтон** (1663—1705) и **Ш. Кулон** (1736—1806) опытным путем установили следующий **закон:** сила трения скольжения $F_{тр}$ пропорциональна силе $N$ нормального давления, с которой одно тело действует на другое:

$$F_{тр} = fN,$$

где $f$ — коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей.

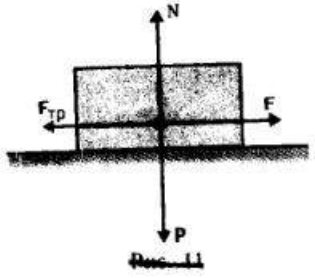


Рис. 11

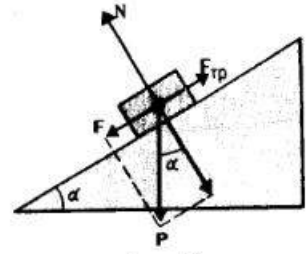


Рис. 12

Найдем значение коэффициента трения. Если тело находится на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha$ (рис. 12), то оно приходит в движение только когда тангенциальная составляющая **F** силы тяжести **P** больше силы трения $\mathbf{F}_{тр}$. Следовательно, в предельном случае (начало скольжения тела)

$$F = F_{тр},$$

или

$$P \sin \alpha_0 = fN = fP \cos \alpha_0,$$

откуда

$$f = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Таким образом, коэффициент трения равен тангенсу угла $\alpha_0$, при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости.

Для гладких поверхностей определенную роль начинает играть межмолекулярное притяжение. Поэтому Б. В. Дерягиным (р. 1902) предложен **закон трения скольжения**

$$F_{тр} = f_{ист}(N + Sp_0),$$

где $p_0$ — добавочное давление, обусловленное силами межмолекулярного притяжения, которые быстро уменьшаются с увеличением расстояния между частицами; $S$ — площадь контакта между телами; $f_{ист}$ — истинный коэффициент трения скольжения.

Трение играет большую роль в природе и технике. Благодаря трению движется транспорт, удерживается забитый в стену гвоздь и т. д.

В некоторых случаях силы трения оказывают вредное действие, и поэтому их надо уменьшать. Для этого на трущиеся поверхности наносят смазку (сила трения уменьшается примерно в 10 раз), которая заполняет неровности между этими поверхностями и располагается тонким слоем между ними так, что поверхности как бы перестают касаться друг друга, а скользят друг относительно друга отдельные слои жидкости. Таким образом, внешнее трение твердых тел заменяется значительно меньшим внутренним трением жидкости.

Радикальным способом уменьшения силы трения является замена трения скольжения трением качения (шариковые и роликовые подшипники и т. д.). **Сила трения качения** определяется по закону Кулона:

$$F_{тр} = f_к N / r, \qquad (8.1)$$

где $r$ — радиус катящегося тела; $f_к$ — коэффициент трения качения, имеющий размерность $\dim f_к = \mathrm{L}$. Из (8.1) следует, что сила трения качения обратно пропорциональна радиусу катящегося тела.

## § 9. Закон сохранения импульса. Центр масс

Для вывода закона сохранения импульса рассмотрим некоторые понятия. Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется **механической системой.** Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются **внутренними.** Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются **внешними.** Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется **замкнутой** (или **изолированной**). Если мы имеем механическую систему, состоящую из многих тел, то, согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие между этими телами, будут равны и противоположно направлены, т. е. геометрическая сумма внутренних сил равна нулю.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из $n$ тел, масса и скорость которых соответственно равны $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Пусть $\mathbf{F}_1', \mathbf{F}_2', \ldots, \mathbf{F}_n'$ — равнодействующие внутренних сил, действующих на каждое из этих тел, а $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ — равнодействующие внешних сил. Запишем второй закон Ньютона для каждого из $n$ тел механической системы:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\mathbf{v}_1) = \mathbf{F}_1' + \mathbf{F}_1,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_2\mathbf{v}_2) = \mathbf{F}_2' + \mathbf{F}_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{F}_n' + \mathbf{F}_n.$$

Складывая почленно эти уравнения, получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n) =$$

$$= \mathbf{F}_1' + \mathbf{F}_2' + \ldots + \mathbf{F}_n' + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n.$$

Но так как геометрическая сумма внутренних сил механической системы по третьему закону Ньютона равна нулю, то

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n) =$$

$$= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n,$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n, \qquad (9.1)$$

где $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i$ — импульс системы. Таким образом, производная по времени от импульса механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

В случае отсутствия внешних сил (рассматриваем замкнутую систему)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i)=0,$$

т. е.

$$\mathbf{p}=\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}_i=\text{const}.$$

Это выражение и является **законом сохранения импульса:** импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения импульса справедлив не только в классической физике, хотя он и получен как следствие законов Ньютона. Эксперименты доказывают, что он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц (они подчиняются законам квантовой механики). Этот закон носит универсальный характер, т. е. закон сохранения импульса — *фундаментальный закон природы.*

Закон сохранения импульса является следствием определенного свойства симметрии пространства — его однородности. **Однородность пространства** заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства и законы движения не изменяются, иными словами, не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета.

Отметим, что согласно (9.1), импульс сохраняется и для незамкнутой системы, если геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю.

В механике Галилея — Ньютона из-за независимости массы от скорости импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс. **Центром масс** (или **центром инерции**) системы материальных точек называется воображаемая точка $C$, положение которой характеризует распределение массы этой системы. Ее радиус-вектор равен

$$\mathbf{r}_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r}_i}{m},$$

где $m_i$ и $\mathbf{r}_i$ — соответственно масса и радиус-вектор $i$-й материальной точки; $n$ — число материальных точек в системе; $m=\sum_{i=1}^{n}m_i$ — масса системы.

Скорость центра масс

$$\mathbf{v}_C=\frac{d\mathbf{r}_C}{dt}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}_i}{m}.$$

Учитывая, что $\mathbf{p}_i=m_i\mathbf{v}_i$, а $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}_i$ есть импульс $\mathbf{p}$ системы, можно написать

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}_C, \qquad (9.2)$$

т. е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Подставив выражение (9.2) в уравнение (9.1), получим

$$m\frac{d\mathbf{v}_C}{dt}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\ldots+\mathbf{F}_n, \qquad (9.3)$$

т. е. центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему. Выражение (9.3) представляет собой **закон движения центра масс.**

В соответствии с (9.2) из закона сохранения импульса вытекает, что *центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.*

## § 10. Уравнение движения тела переменной массы

Движение некоторых тел сопровождается изменением их массы, например масса ракеты уменьшается за счет истечения газов, образующихся при сгорании топлива, и т. п.

Выведем уравнение движения тела переменной массы на примере движения ракеты. Если в момент времени $t$ масса ракеты $m$, а ее скорость $\mathbf{v}$, то по истечении времени $dt$ ее масса уменьшится на $dm$

и станет равной $m-\mathrm{d}m$, а скорость станет равной $\mathbf{v}+\mathrm{d}\mathbf{v}$. Изменение импульса системы за отрезок времени $\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}\mathbf{p}=[(m-\mathrm{d}m)(\mathbf{v}+\mathrm{d}\mathbf{v})+\mathrm{d}m(\mathbf{v}+\mathbf{u})]-m\mathbf{v},$$

где $\mathbf{u}$ — скорость истечения газов относительно ракеты. Тогда

$$\mathrm{d}\mathbf{p}=m\,\mathrm{d}\mathbf{v}+\mathbf{u}\mathrm{d}m$$

(учли, что $\mathrm{d}m\,\mathrm{d}\mathbf{v}$ — малый высшего порядка малости по сравнению с остальными).

Если на систему действуют внешние силы, то $\mathrm{d}\mathbf{p}=\mathbf{F}\,\mathrm{d}t$, поэтому

$$\mathbf{F}\mathrm{d}t=m\,\mathrm{d}\mathbf{v}+\mathbf{u}\mathrm{d}m,$$

или

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{F}-\mathbf{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}. \qquad (10.1)$$

Член $-\mathbf{u}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ называют **реактивной силой** $\mathbf{F}_\mathrm{p}$. Если $\mathbf{u}$ противоположен $\mathbf{v}$, то ракета ускоряется, а если совпадает с $\mathbf{v}$, то тормозится.

Таким образом, мы получили **уравнение движения тела переменной массы**

$$m\mathbf{a}=\mathbf{F}+\mathbf{F}_\mathrm{p}, \qquad (10.2)$$

которое впервые было выведено И. В. Мещерским (1859—1935).

Идея применения реактивной силы для создания летательных аппаратов высказывалась в 1881 г. Н. И. Кибальчичем (1854—1881). К. Э. Циолковский (1857—1935) в 1903 г. опубликовал статью, где предложил теорию движения ракеты и основы теории жидкостного реактивного двигателя. Поэтому его считают основателем отечественной космонавтики.

Применим уравнение (10.1) к движению ракеты, на которую не действуют никакие внешние силы. Полагая $\mathbf{F}=0$ и считая, что скорость выбрасываемых газов относительно ракеты постоянна (ракета движется прямолинейно), получим

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t},$$

откуда

$$v=-u\int\frac{\mathrm{d}m}{m}=-u\ln m+C.$$

Значение постоянной интегрирования $C$ определим из начальных условий. Если в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а ее стартовая масса $m_0$, то $C=u\ln m_0$. Следовательно,

$$v=u\ln(m_0/m). \qquad (10.3)$$

Это соотношение называется **формулой Циолковского**. Она показывает, что: 1) чем больше конечная масса ракеты $m$, тем больше должна быть стартовая масса ракеты $m_0$; 2) чем больше скорость истечения $u$ газов, тем больше может быть конечная масса при данной стартовой массе ракеты.

Выражения (10.2) и (10.3) получены для нерелятивистских движений, т. е. для случаев, когда скорости $v$ и $u$ малы по сравнению со скоростью света $c$.

## Контрольные вопросы

- Какая система отсчета называется инерциальной? Почему система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна?
- Что такое сила? Как ее можно охарактеризовать?
- Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона? Почему?
- Сформулировав три закона Ньютона, покажите, какова взаимосвязь между этими законами.
- В чем заключается принцип независимости действия сил?
- Какова физическая сущность трения? В чем отличие сухого трения от жидкого? Какие виды внешнего (сухого) трения Вы знаете?
- Что называется механической системой? Какие системы являются замкнутыми? Является ли Вселенная замкнутой системой? Почему?
- В чем заключается закон сохранения импульса? В каких системах он выполняется? Почему он является фундаментальным законом природы?

- Каким свойством пространства обусловливается справедливость закона сохранения импульса?
- Что называется центром масс системы материальных точек? Как движется центр масс замкнутой системы?

## Задачи

**2.1.** По наклонной плоскости с углом наклона $\alpha$ к горизонту, равным 30°, скользит тело. Определить скорость тела в конце третьей секунды от начала скольжения, если коэффициент трения 0,15. [10,9 м/с]

**2.2.** Самолет описывает петлю Нестерова радиусом 80 м. Какова должна быть наименьшая скорость самолета, чтобы летчик не оторвался от сиденья в верхней части петли? [28 м/с]

**2.3.** Блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$. Гири равной массы ($m_1 = m_2 = 2$ кг) соединены нитью, перекинутой через блок. Считая нить и блок невесомыми, принимая коэффициенты трения гирь о наклонные плоскости равными $f_1 = f_2 = f = 0{,}1$ и пренебрегая трением в блоке, определить: 1) ускорение, с которым движутся гири; 2) силу натяжения нити. [1) 0,24 м/с$^2$; 2) 12 Н]

**2.4.** На железнодорожной платформе установлена безоткатная пушка, из которой производится выстрел вдоль полотна под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Масса платформы с пушкой $M = 20$ т, масса снаряда $m = 10$ кг, коэффициент трения между колесами платформы и рельсами $f = 0{,}002$. Определить скорость снаряда, если после выстрела платформа откатилась на расстояние $s = 3$ м. [$v_0 = M\sqrt{2fgs}/(m\cos\alpha) = 970$ м/с]

**2.5.** На катере массой $m = 5$ т находится водомет, выбрасывающий $\mu = 25$ кг/с воды со скоростью $u = 7$ м/с относительно катера назад. Пренебрегая сопротивлением движению катера, определить: 1) скорость катера через 3 мин после начала движения; 2) предельно возможную скорость катера. [1) $v = u(1 - e^{-\mu t/m}) = 6{,}6$ м/с; 2) 7 м/с]

# Глава 3
# Работа и энергия

## § 11. Энергия, работа, мощность

Энергия — универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др. В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, горячее тело нагревает холодное), в других — переходит в иную форму (например, в результате трения механическое движение превращается в тепловое). Однако существенно, что во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной последним телом.

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие **работы силы**.

Если тело движется *прямолинейно* и на него действует постоянная сила $\mathbf{F}$, которая составляет некоторый угол $\alpha$ с направлением перемещения, то работа этой силы равна произведению проекции силы $F_s$ на направление перемещения ($F_s = F\cos\alpha$), умноженной на перемещение точки приложения силы:

$$A = F_s s = F_s \cos\alpha. \qquad (11.1)$$

В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению, поэтому формулой (11.1) пользоваться нельзя. Если, однако, рассмотреть элементарное перемещение $d\mathbf{r}$, то силу $\mathbf{F}$ можно считать постоянной, а движение точки ее

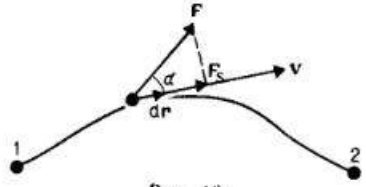


Рис. 13

приложения — прямолинейным. **Элементарной работой** силы **F** на перемещении d**r** называется *скалярная* величина

$$dA = \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = F\cos\alpha \cdot ds = F_s\,ds,$$

где $\alpha$ — угол между векторами **F** и d**r**; $ds = |d\mathbf{r}|$ — элементарный путь; $F_s$ — проекция вектора **F** на вектор d**r** (рис. 13).

Работа силы на участке траектории от точки *1* до точки *2* равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Эта сумма приводится к интегралу

$$A = \int_1^2 F\,ds\cos\alpha = \int_1^2 F_s\,ds. \qquad (11.2)$$

Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость силы $F_s$ от пути $s$ вдоль траектории *1—2*. Пусть эта зависимость представлена графически (рис. 14), тогда искомая работа $A$ определяется на графике площадью закрашенной фигуры. Если, например, тело движется прямолинейно, сила $F = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, то получим

$$A = \int_1^2 F\,ds\cos\alpha = F\cos\alpha\int_1^2 ds = Fs\cos\alpha,$$

где $s$ — пройденный телом путь (см. также формулу (11.1)).

Из формулы (11.1) следует, что при $\alpha < \pi/2$ работа силы положительна, в этом случае составляющая $\mathbf{F}_s$ совпадает

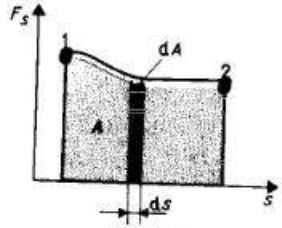


Рис. 14

по направлению с вектором скорости движения **v** (см. рис. 13). Если $\alpha > \pi/2$, то работа силы отрицательна. При $\alpha = \pi/2$ (сила направлена перпендикулярно перемещению) работа силы равна нулю.

Единица работы — **джоуль** (Дж): 1 Дж — работа, совершаемая силой в 1 Н на пути в 1 м (1 Дж = 1 Н·м).

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие **мощности**:

$$N = \frac{dA}{dt}. \qquad (11.3)$$

За время d$t$ сила **F** совершает работу **F**d**r**, и мощность, развиваемая этой силой, в данный момент времени

$$N = \frac{\mathbf{F}\,d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v},$$

т. е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы; $N$ — величина *скалярная*.

Единица мощности — **ватт** (Вт): 1 Вт — мощность, при которой за время 1 с совершается работа в 1 Дж (1 Вт = = 1 Дж/с).

## § 12. Кинетическая и потенциальная энергии

**Кинетическая энергия** механической системы — это энергия механического движения этой системы.

Сила **F**, действуя на покоящееся тело и вызывая его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы. Таким образом, работа d$A$ силы **F** на пути, который тело прошло за время возрастания скорости от 0 до **v**, идет на увеличение кинетической энергии d$T$ тела, т. е.

$$dA = dT.$$

Используя второй закон Ньютона $\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ и умножая обе части равенства на перемещение d**r**, получим

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,d\mathbf{r} = dA.$$

Так как $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, то

$$dA=m\mathbf{v}\,d\mathbf{v}=mv\,dv=dT,$$

откуда

$$T=\int_0^v mv\,dv=mv^2/2.$$

Таким образом, тело массой $m$, движущееся со скоростью $v$, обладает кинетической энергией

$$T=mv^2/2. \qquad (12.1)$$

Из формулы (12.1) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т. е. кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.

При выводе формулы (12.1) предполагалось, что движение рассматривается в инерциальной системе отсчета, так как иначе нельзя было бы использовать законы Ньютона. В разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, скорость тела, а следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы. Таким образом, кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета.

**Потенциальная энергия** — механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Пусть взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей (например, поля упругих сил, поля гравитационных сил), характеризующихся тем, что работа, совершаемая действующими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений. Такие поля называются **потенциальными**, а силы, действующие в них,— **консервативными**. Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется **диссипативной**; ее примером является сила трения.

Тело, находясь в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией $\Pi$. Работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$dA=-d\Pi. \qquad (12.2)$$

Работа $dA$ выражается как скалярное произведение силы $\mathbf{F}$ на перемещение $d\mathbf{r}$ и выражение (12.2) можно записать в виде

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r}=-d\Pi. \qquad (12.3)$$

Следовательно, если известна функция $\Pi(\mathbf{r})$, то из формулы (12.3) можно найти силу $\mathbf{F}$ по модулю и направлению.

Потенциальная энергия может быть определена исходя из (12.3) как

$$\Pi=-\int \mathbf{F}\,d\mathbf{r}+C,$$

где $C$ — постоянная интегрирования, т. е. потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной. Это, однако, не отражается на физических законах, так как в них входит или разность потенциальных энергий в двух положениях тела, или производная $\Pi$ по координатам. Поэтому потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении считают равной нулю (выбирают нулевой уровень отсчета), а энергию тела в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня.

Для консервативных сил

$$F_x=-\frac{\partial\Pi}{\partial x},\quad F_y=-\frac{\partial\Pi}{\partial y},\quad F_z=-\frac{\partial\Pi}{\partial z},$$

или в векторном виде

$$\mathbf{F}=-\operatorname{grad}\Pi, \qquad (12.4)$$

где

$$\operatorname{grad}\Pi=\frac{\partial\Pi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\Pi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\Pi}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (12.5)$$

($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы координатных осей). Вектор, определяемый выражением (12.5), называется **градиентом скаляра** $\Pi$.

Для него наряду с обозначением grad $\Pi$ применяется также обозначение $\nabla\Pi$. $\nabla$ («набла») означает символический вектор, называемый **оператором Гамильтона** * или **набла-оператором**:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}. \qquad (12.6)$$

Конкретный вид функции $\Pi$ зависит от характера силового поля. Например, потенциальная энергия тела массой $m$, поднятого на высоту $h$ над поверхностью Земли, равна

$$\Pi=mgh, \qquad (12.7)$$

где высота $h$ отсчитывается от нулевого уровня, для которого $\Pi_0=0$. Выражение (12.7) вытекает непосредственно из того, что потенциальная энергия равна работе силы тяжести при падении тела с высоты $h$ на поверхность Земли.

Так как начало отсчета выбирается произвольно, то потенциальная энергия может иметь отрицательное значение (*кинетическая энергия всегда положительна!*). Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты (глубина $h'$), $\Pi=-mgh'$.

Найдем потенциальную энергию упругодеформированного тела (пружины). Сила упругости пропорциональна деформации:

$$F_{x\,\text{упр}}=-kx,$$

где $F_{x\,\text{упр}}$ — проекция силы упругости на ось $x$; $k$ — **коэффициент упругости** (для пружины — **жесткость**), а знак минус указывает, что $F_{x\,\text{упр}}$ направлена в сторону, противоположную деформации $x$.

По третьему закону Ньютона, деформирующая сила равна по модулю силе упругости и противоположно ей направлена, т. е.

$$F_x=-F_{x\,\text{упр}}=kx.$$

Элементарная работа $dA$, совершаемая силой $F_x$ при бесконечно малой деформации $dx$, равна

$$dA=F_x\,dx=kx\,dx,$$

а полная работа

$$A=\int_0^x kx\,dx=kx^2/2$$

идет на увеличение потенциальной энергии пружины. Таким образом, потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi=kx^2/2.$$

Потенциальная энергия системы, подобно кинетической энергии, является функцией состояния системы. Она зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам.

**Полная механическая энергия системы** — энергия механического движения и взаимодействия:

$$E=T+\Pi,$$

т. е. равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

## § 13. Закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии — результат обобщения многих экспериментальных данных. Идея этого закона принадлежит М. В. Ломоносову (1711—1765), изложившему закон сохранения материи и движения, а количественная формулировка закона сохранения энергии дана немецким врачом Ю. Майером (1814—1878) и немецким естествоиспытателем Г. Гельмгольцем (1821—1894).

Рассмотрим систему материальных точек массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, движущихся со скоростями $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Пусть $\mathbf{F}_1', \mathbf{F}_2', \ldots, \mathbf{F}_n'$ — равнодействующие внутренних консервативных сил, действующих на каждую из этих точек, а $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ — равнодействующие внешних сил, которые также будем считать консервативными. Кроме того, будем считать, что на материальные точки действуют еще и внешние неконсервативные силы; равнодействующие этих сил, действующих на каждую из материальных точек, обозначим $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. При $v\ll c$ массы материальных точек

* У. Гамильтон (1805—1865) — ирландский математик и физик.

постоянны и уравнения второго закона Ньютона для этих точек следующие:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_1' + \mathbf{F}_1 + \mathbf{f}_1,$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_2' + \mathbf{F}_2 + \mathbf{f}_2,$$

. . . . . .

$$m_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \mathbf{F}_n' + \mathbf{F}_n + \mathbf{f}_n.$$

Двигаясь под действием сил, точки системы за интервал времени $dt$ совершают перемещения, соответственно равные $d\mathbf{r}_1$, $d\mathbf{r}_2$, ..., $d\mathbf{r}_n$. Умножим каждое из уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая, что $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i\, dt$, получим:

$$m_1 (\mathbf{v}_1\, d\mathbf{v}_1) - (\mathbf{F}_1' + \mathbf{F}_1)\, d\mathbf{r}_1 = \mathbf{f}_1\, d\mathbf{r}_1,$$

$$m_2 (\mathbf{v}_2\, d\mathbf{v}_2) - (\mathbf{F}_2' + \mathbf{F}_2)\, d\mathbf{r}_2 = \mathbf{f}_2\, d\mathbf{r}_2,$$

. . . . . .

$$m_n (\mathbf{v}_n\, d\mathbf{v}_n) - (\mathbf{F}_n' + \mathbf{F}_n)\, d\mathbf{r}_n = \mathbf{f}_n\, d\mathbf{r}_n.$$

Сложи эти уравнения, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{v}_i\, d\mathbf{v}_i) - \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i' + \mathbf{F}_i)\, d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i\, d\mathbf{r}_i. \qquad (13.1)$$

Первый член левой части равенства (13.1)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{v}_i\, d\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} d(m_i \mathbf{v}_i^2/2) = dT,$$

где $dT$ есть приращение кинетической энергии системы. Второй член $\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i' + \mathbf{F}_i)\, d\mathbf{r}_i$ равен элементарной работе внутренних и внешних консервативных сил, взятой со знаком минус, т. е. равен элементарному приращению потенциальной энергии $d\Pi$ системы (см. (12.2)).

Правая часть равенства (13.1) задает работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему. Таким образом, имеем

$$d(T + \Pi) = dA. \qquad (13.2)$$

При переходе системы из состояния *1* в какое-либо состояние *2*

$$\int_1^2 d(T + \Pi) = A_{12},$$

т. е. изменение полной механической энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно работе, совершенной при этом внешними неконсервативными силами. Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то из (13.2) следует, что

$$d(T + \Pi) = 0,$$

откуда

$$T + \Pi = E = \text{const}, \qquad (13.3)$$

т. е. полная механическая энергия системы сохраняется постоянной. Выражение (13.3) представляет собой **закон сохранения механической энергии**: в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется, т. е. не изменяется со временем.

Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются **консервативными системами.** Закон сохранения механической энергии можно сформулировать так: в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.

Закон сохранения механической энергии связан с *однородностью времени*, т. е. инвариантностью физических законов относительно выбора начала отсчета времени. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят лишь от начальной скорости и продолжительности свободного падения тела и не зависят от того, когда тело начало падать.

Существует еще один вид систем — **диссипативные системы**, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеха-

нические) формы энергии. Этот процесс получил название **диссипации** (или **рассеяния**) **энергии**. Строго говоря, все системы в природе являются диссипативными.

В консервативных системах полная механическая энергия остается постоянной. Могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах, так что полная энергия остается неизменной. Поэтому, как указывает Ф. Энгельс, этот закон не есть просто закон *количественного* сохранения энергии, а закон сохранения и превращения энергии, выражающий и *качественную* сторону взаимного превращения различных форм движения друг в друга. Закон сохранения и превращения энергии — *фундаментальный закон природы*, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микротел.

В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например силы трения, полная механическая энергия системы не сохраняется. Следовательно, в этих случаях закон сохранения механической энергии несправедлив. Однако при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, *энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой*. В этом и заключается *физическая сущность* закона сохранения и превращения энергии — сущность неуничтожимости материи и ее движения.

## § 14. Графическое представление энергии

Во многих задачах рассматривается одномерное движение тела, потенциальная энергия которого является функцией лишь одной переменной (например, координаты $x$), т. е. $\Pi = \Pi(x)$. График зависимости потенциальной энергии от некоторого аргумента называется **потенциальной кривой.** Анализ потенциальных кривых позволяет определить характер движения тела.

Будем рассматривать только консервативные системы, т. е. системы, в которых взаимные превращения механической энергии в другие виды отсутствуют. Тогда справедлив закон сохранения энергии в форме (13.3). Рассмотрим графическое представление потенциальной энергии для тела в однородном поле тяжести и для упругодеформированного тела.

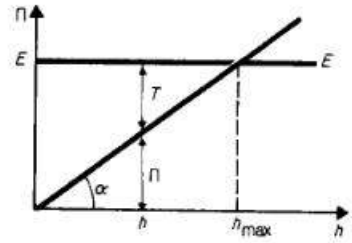


Рис. 15

Потенциальная энергия тела массой $m$, поднятого на высоту $h$ над поверхностью Земли, согласно (12.7), $\Pi(h) = mgh$. График данной зависимости $\Pi = \Pi(h)$ — прямая линия, проходящая через начало координат (рис. 15), угол наклона которой к оси $h$ тем больше, чем больше масса тела (так как $\operatorname{tg}\alpha = mg$).

Пусть полная энергия тела равна $E$ (ее график — прямая, параллельная оси $h$). На высоте $h$ тело обладает потенциальной энергией $\Pi$, которая определяется отрезком вертикали, заключенным между точкой $h$ на оси абсцисс и графиком $\Pi(h)$. Естественно, что кинетическая энергия $T$ задается ординатой между графиком $\Pi(h)$ и горизонтальной прямой $EE$. Из рис. 15 следует, что если $h = h_{max}$, то $T = 0$ и $\Pi = E = mgh_{max}$, т. е. потенциальная энергия становится максимальной и равной полной энергии.

Из приведенного графика можно найти скорость тела на высоте $h$:

$$T = E - \Pi,$$

т. е.

$$mv^2/2 = mgh_{max} - mgh,$$

откуда

$$v = \sqrt{2g(h_{max} - h)}.$$

Зависимость потенциальной энергии упругой деформации $\Pi = kx^2/2$ от деформации $x$ имеет вид параболы (рис. 16), где график заданной полной энергии тела $E$ — прямая, параллельная оси

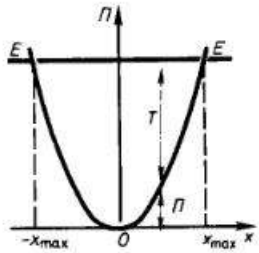



Рис. 16

абсцисс $x$, а значения $T$ и П определяются так же, как на рис. 15. Из рис. 16 следует, что с возрастанием деформации $x$ потенциальная энергия тела возрастает, а кинетическая — уменьшается. Абсцисса $x_{max}$ определяет максимально возможную деформацию растяжения тела, а $-x_{max}$ — максимально возможную деформацию сжатия, тела. Если $x=\pm x_{max}$, то $T=0$ и $\Pi=E=kx_{max}^2/2$, т. е. потенциальная энергия становится максимальной и равной полной энергии.

Из анализа графика на рис. 16 вытекает, что при полной энергии тела, равной $E$, тело не может сместиться правее $x_{max}$ и левее $-x_{max}$, так как кинетическая энергия не может быть отрицательной величиной и, следовательно, потенциальная энергия не может быть больше полной. В таком случае говорят, что тело находится в **потенциальной яме** с координатами $-x_{max}\leqslant x\leqslant x_{max}$.

В общем случае потенциальная кривая может иметь довольно сложный вид, например с несколькими чередующимися максимумами и минимумами (рис. 17). Проанализируем эту потенциальную кривую. Если $E$ — заданная полная энергия частицы, то частица может находиться только там, где $\Pi(x)\leqslant E$, т. е. в областях *I* и *III*. Переходить из области *I* в *III* и обратно частица не может, так как ей препятствует **потенциальный барьер** $CDG$, ширина которого равна интервалу значений $x$, при которых $E<\Pi$, а его высота определяется разностью $\Pi_{max}-E$. Для того чтобы частица смогла преодолеть потенциальный барьер, ей необходимо сообщить дополнительную энергию, равную высоте барьера или превышающую ее. В области *I* частица с полной энергией $E$ оказывается «запертой» в потенциальной яме $ABC$ и совершает колебания между точками с координатами $x_A$ и $x_C$.

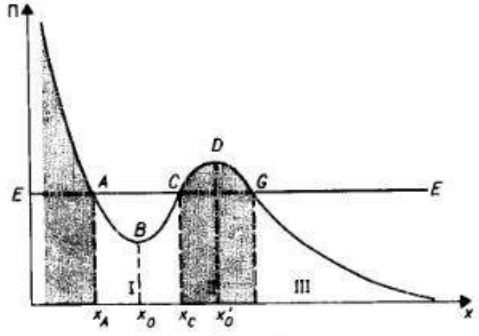



Рис. 17

В точке $B$ с координатой $x_0$ (рис. 17) потенциальная энергия частицы минимальна. Так как действующая на частицу сила (см. § 12) $F_x=-\dfrac{\partial\Pi}{\partial x}$ ($\Pi$ — функция только одной координаты), а условие минимума потенциальной энергии $\dfrac{\partial\Pi}{\partial x}=0$, то в точке $B$ $F_x=0$. При смещении частицы из положения $x_0$ (и влево, и вправо) она испытывает действие возвращающей силы, поэтому положение $x_0$ является положением **устойчивого равновесия**. Указанные условия выполняются и для точки $x_0'$ (для $\Pi_{max}$). Однако эта точка соответствует положению **неустойчивого равновесия**, так как при смещении частицы из положения $x_0'$ появляется сила, стремящаяся удалить ее от этого положения.

## § 15. Удар абсолютно упругих и неупругих тел

Примером применения законов сохранения импульса и энергии при решении реальной физической задачи является удар абсолютно упругих и неупругих тел.

**Удар** (или **соударение**) — это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. Исходя из данного определения, кроме явлений, которые можно отнести к ударам в прямом смысле этого слова

(столкновения атомов или биллиардных шаров), сюда можно отнести и такие, как удар человека о землю при прыжке с трамвая и т. д. При ударе в телах возникают столь значительные внутренние силы, что внешними силами, действующими на них, можно пренебречь. Это позволяет рассматривать соударяющиеся тела как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Тела во время удара претерпевают деформацию. Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара имеет место перераспределение энергии между соударяющимися телами. Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Это объясняется тем, что нет идеально упругих тел и идеально гладких поверхностей. Отношение нормальных составляющих относительной скорости тел после и до удара называется **коэффициентом восстановления** $\varepsilon$:

$$\varepsilon = v_n'/v_n.$$

Если для сталкивающихся тел $\varepsilon = 0$, то такие тела называются **абсолютно неупругими**, если $\varepsilon = 1$ — **абсолютно упругими.** На практике для всех тел $0 < \varepsilon < 1$ (например, для стальных шаров $\varepsilon \approx \approx 0{,}56$, для шаров из слоновой кости $\varepsilon \approx \approx 0{,}89$, для свинца $\varepsilon \approx 0$). Однако в некоторых случаях тела можно с большой точностью рассматривать либо как абсолютно упругие, либо как абсолютно неупругие.

Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется **линией удара.** Удар называется **центральным**, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс. Мы будем рассматривать только центральные абсолютно упругие и абсолютно неупругие удары.

**Абсолютно упругий удар** — столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию.

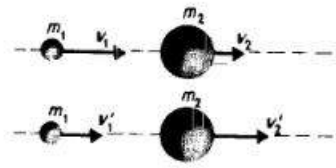


Рис. 18

Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.

Обозначим скорости шаров массами $m_1$ и $m_2$ до удара через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, после удара — через $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ (рис. 18). При прямом центральном ударе векторы скоростей шаров до и после удара лежат на прямой линии, соединяющей их центры. Проекции векторов скорости на эту линию равны модулям скоростей. Их направления учтем знаками: положительное значение припишем движению вправо, отрицательное — движению влево.

При указанных допущениях законы сохранения имеют вид

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2', \quad (15.1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}. \quad (15.2)$$

Произведя соответствующие преобразования в выражениях (15.1) и (15.2), получим

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2), \quad (15.3)$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2), \quad (15.4)$$

откуда

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'. \quad (15.5)$$

Решая уравнения (15.3) и (15.5), находим

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (15.6)$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (15.7)$$

Разберем несколько примеров.

1) При $v_2=0$

$$v_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1, \qquad (15.8)$$

$$v_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1. \qquad (15.9)$$

Проанализируем выражения (15.8) и (15.9) для двух шаров различных масс:

а) $m_1=m_2$. Если второй шар до удара висел неподвижно ($v_2=0$) (рис. 19), то после удара остановится первый шар ($v_1'=0$), а второй будет двигаться с той же скоростью и в том же направлении, в котором двигался первый шар до удара ($v_2'=v_1$);

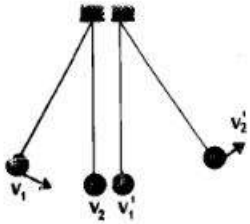



Рис. 19

б) $m_1>m_2$. Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью ($v_1'<v_1$). Скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара ($v_2'>v_1'$) (рис. 20);

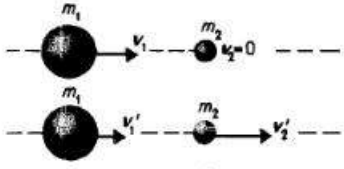



Рис. 20

в) $m_1<m_2$. Направление движения первого шара при ударе изменяется — шар отскакивает обратно. Второй шар движется в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью, т. е. $v_2'<v_1$ (рис. 21);

г) $m_2\gg m_1$ (например, столкновение шара со стеной). Из уравнений (15.8) и (15.9) следует, что $v_1'=-v_1$, $v_2'\approx$ $\approx 2m_1v_1/m_2\approx 0$.

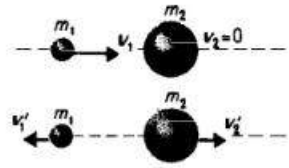



Рис. 21

2) При $m_1=m_2$ выражения (15.6) и (15.7) будут иметь вид

$$v_1'=v_2, \quad v_2'=v_1,$$

т. е. шары равной массы «обмениваются» скоростями.

**Абсолютно неупругий удар** — столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как еди-

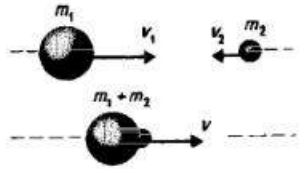



Рис. 22

ное целое. Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу (рис. 22).

Если массы шаров $m_1$ и $m_2$, их скорости до удара $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, то, используя закон сохранения импульса, можно записать

$$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2=(m_1+m_2)\,\mathbf{v},$$

откуда

$$\mathbf{v}=\frac{m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2}. \qquad (15.10)$$

Если шары движутся навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий бо́льшим импульсом. В частном случае если массы шаров равны ($m_1=m_2$), то

$$\mathbf{v}=(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)/2.$$

Выясним, как изменяется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе. Так как в процессе соударения шаров между ними дей-

ствуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии. Эту «потерю» можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара:

$$\Delta T=\left(\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}\right)-\frac{(m_1+m_2)\,v^2}{2}.$$

Используя (15.10), получим

$$\Delta T=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1-v_2)^2.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($v_2=0$), то

$$v=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2},\quad \Delta T=\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\frac{m_1v_1^2}{2}.$$

Когда $m_2\gg m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то $v\ll v_1$ и почти вся кинетическая энергия тела при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка. Наоборот, при забивании гвоздей в стену масса молотка должна быть гораздо большей ($m_1\gg m_2$), тогда $v\approx v_1$ и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение гвоздя, а не на остаточную деформацию стены.

Абсолютно неупругий удар — пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.

## Контрольные вопросы

- В чем различие между понятиями энергии и работы?
- Как найти работу переменной силы?
- Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?
- Что такое мощность? Вывести ее формулу.
- Дайте определения и выведите формулы для известных вам видов механической энергии.
- Какова связь между силой и потенциальной энергией?
- Почему изменение потенциальной энергии обусловлено только работой консервативных сил?
- В чем заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?
- Необходимо ли условие замкнутости системы для выполнения закона сохранения механической энергии?
- В чем физическая сущность закона сохранения и превращения энергии? Почему он является фундаментальным законом природы?
- Каким свойством времени обусловливается справедливость закона сохранения механической энергии?
- Что такое потенциальная яма? потенциальный барьер?
- Какие заключения о характере движения тел можно сделать из анализа потенциальных кривых?
- Как охарактеризовать положения устойчивого и неустойчивого равновесия? В чем их различие?
- Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого?
- Как определить скорости тел после центрального абсолютно упругого удара? Следствием каких законов являются эти выражения?

## Задачи

**3.1.** Определить: 1) работу поднятия груза по наклонной плоскости; 2) среднюю и 3) максимальную мощности подъемного устройства, если масса груза 10 кг, длина наклонной плоскости 2 м, угол ее наклона к горизонту 45°, коэффициент трения 0,1 и время подъема 2 с. [1) 170 Дж; 2) 85 Вт; 3) 173 Вт]

**3.2.** С башни высотой 35 м горизонтально брошен камень массой 0,3 кг. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) скорость, с которой брошен камень, если через 1 с после начала движения его кинетическая энергия 60 Дж; 2) потенциальную энергию камня через 1 с после начала движения. [1) 17,4 м/с; 2) 88,6 Дж]

**3.3.** Пренебрегая трением, определить наименьшую высоту, с которой должна скатываться тележка с человеком по желобу, переходящему в петлю радиусом 10 м, чтобы она сделала полную петлю и не выпала из желоба. [25 м]

**3.4.** Пуля массой $m=10$ г, летевшая горизонтально со скоростью $v=500$ м/с, попадает в баллистический маятник длиной $l=1$ м и массой $M=5$ кг и застревает в нем. Определить угол отклонения маятника. [18°30′]

**3.5.** Зависимость потенциальной энергии частицы в центральном силовом поле от расстояния $r$ до центра поля задается выражением $\Pi(r)=\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r}$, где $A$ и $B$ — положительные постоянные.

Определить значение $r_0$, соответствующее равновесному положению частицы. Является ли это положение положением устойчивого равновесия? [$r_0=2A/B$]

**3.6.** При центральном абсолютно упругом ударе движущееся тело массой $m_1$ ударяется в покоящееся тело массой $m_2$, в результате чего скорость первого тела уменьшается в $n=1{,}5$ раза. Определить: 1) отношение $m_1/m_2$; 2) кинетическую энергию $T_2'$, с которой начнет двигаться второе тело, если первоначальная кинетическая энергия первого тела $T_1=1000$ Дж. [1) 5; 2) 555 Дж]

**3.7.** Тело массой $m_1=4$ кг движется со скоростью $v_1=3$ м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определить количество теплоты, выделившееся при ударе. [9 Дж]

# Глава 4
# Механика твердого тела

## § 16. Момент инерции

При изучении вращения твердого тела пользуются понятием момента инерции. **Моментом инерции** системы (тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс $n$ материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$J=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу

$$J=\int r^2\,\mathrm{d}m,$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина $r$ в этом случае есть функция положения точки с координатами $x$, $y$, $z$.

В качестве примера найдем момент инерции однородного сплошного цилиндра высотой $h$ и радиусом $R$ относительно его геометрической оси (рис. 23). Разобьем

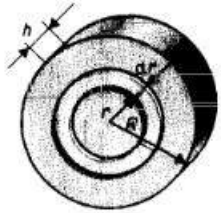


Рис. 23

цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины $dr$ с внутренним радиусом $r$ и внешним — $r+dr$. Момент инерции каждого полого цилиндра $dJ=r^2dm$ (так как $dr \ll r$, то считаем, что расстояние всех точек цилиндра от оси равно $r$), где $dm$ — масса всего элементарного цилиндра; его объем $2\pi rh\,dr$. Если $\rho$ — плотность материала, то $dm=\rho\cdot 2\pi rh\,dr$ и $dJ=2\pi h\rho r^3dr$. Тогда момент инерции сплошного цилиндра

$$J=\int dJ=2\pi h\rho\int_0^R r^3dr={}^1/_2\pi hR^4\rho,$$

но так как $\pi R^2h$ — объем цилиндра, то его масса $m=\pi R^2h\rho$, а момент инерции

$$J={}^1/_2mR^2.$$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера**: момент инерции тела $J$ относительно любой оси вращения равен моменту его инерции $J_C$ относительно параллельной оси, проходящей через центр масс $C$ тела, сложенному с произведением массы $m$ тела на квадрат расстояния $a$ между осями:

$$J=J_C+ma^2. \qquad (16.1)$$

В заключение приведем значения моментов инерции (табл. 1) для некоторых тел (тела считаются однородными, $m$ — масса тела).

Таблица 1

| Тело | Положение оси вращения | Момент инерции |
|---|---|---|
| Полый тонкостенный цилиндр радиусом $R$ | Ось симметрии | $mR^2$ |
| Сплошной цилиндр или диск радиусом $R$ | То же | ${}^1/_2\,mR^2$ |
| Прямой тонкий стержень длиной $l$ | Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину | ${}^1/_{12}\,ml^2$ |
| Прямой тонкий стержень длиной $l$ | Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец | ${}^1/_3\,ml^2$ |
| Шар радиусом $R$ | Ось проходит через центр шара | ${}^2/_5\,mR^2$ |

## § 17. Кинетическая энергия вращения

Рассмотрим абсолютно твердое тело (см. § 1), вращающееся около неподвижной оси $z$, проходящей через него (рис. 24). Мысленно разобьем это тело на маленькие объемы с элементарными массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, находящиеся на расстоянии $r_1, r_2, \ldots, r_n$ от оси вращения. При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные его элементарные объемы массами $m_i$ опишут окружности различных радиусов $r_i$ и имеют различные линейные скорости $v_i$. Но так как мы рассматриваем абсолютно твердое тело, то угловая скорость вращения этих объемов одинакова:

$$\omega=v_1/r_1=v_2/r_2=\ldots=v_n/r_n. \qquad (17.1)$$

Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{вр}=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}+\ldots+\frac{m_nv_n^2}{2},$$

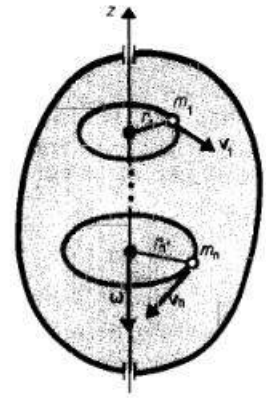



Рис. 24

или

$$T_{вр}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Используя выражение (17.1), получим

$$T_{вр}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\omega^2}{2}r_i^2=\frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i r_i^2=\frac{J_z\omega^2}{2},$$

где $J_z$ — момент инерции тела относительно оси $z$. Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела

$$T_{вр}=J_z\omega^2/2. \qquad (17.2)$$

Из сравнения формулы (17.2) с выражением (12.1) для кинетической энергии тела, движущегося поступательно ($T=mv^2/2$), следует, что момент инерции вращательного движения — *мера инертности тела*. Формула (17.2) справедлива для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T=\frac{mv_C^2}{2}+\frac{J_C\omega^2}{2},$$

где $m$ — масса катящегося тела; $v_C$ — скорость центра масс тела; $J_C$ — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; $\omega$ — угловая скорость тела.

## § 18. Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

**Моментом силы F относительно неподвижной точки** $O$ называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора **r**, проведенного из точки $O$ в точку $A$ приложения силы, на силу **F** (рис. 25):

$$\mathbf{M}=[\mathbf{rF}].$$

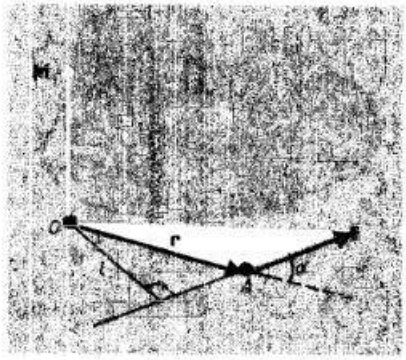



Рис. 25

Здесь **M** — псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от **r** к **F**.

Модуль момента силы

$$M=Fr\sin\alpha=Fl, \qquad (18.1)$$

где $\alpha$ — угол между **r** и **F**; $r\sin\alpha=l$ — кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой $O$ — **плечо силы**.

**Моментом силы относительно неподвижной оси** $z$ называется *скалярная* величина $M_z$, равная проекции на эту ось вектора **M** момента силы, определенного относительно произвольной точки $O$ данной оси $z$ (рис. 26). Значение момента $M_z$ не зависит от выбора положения точки $O$ на оси $z$.

Если ось $z$ совпадает с направлением вектора **M**, то момент силы представля-

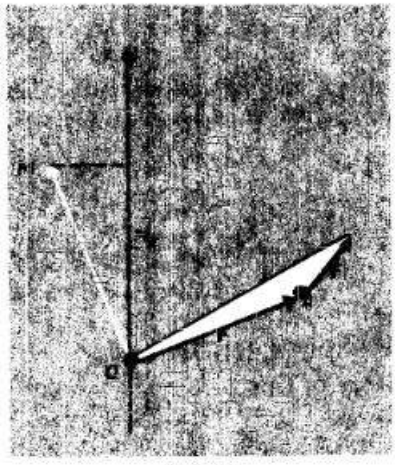



Рис. 26




Рис. 27

ется в виде вектора, совпадающего с осью:

$$\mathbf{M}_z = [\mathbf{r}\mathbf{F}]_z.$$

Найдем выражение для работы при вращении тела (рис. 27). Пусть сила $\mathbf{F}$ приложена в точке $B$, находящейся от оси вращения на расстоянии $r$, $\alpha$ — угол между направлением силы и радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Так как тело абсолютно твердое, то работа этой силы равна работе, затраченной на поворот всего тела. При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка приложения $B$ проходит путь $ds = r\,d\varphi$, и работа равна произведению проекции силы на направление смещения на величину смещения:

$$dA = F \sin\alpha\, r d\varphi. \qquad (182)$$

Учитывая (18.1), можем записать

$$dA = M_z\, d\varphi,$$

где $Fr \sin\alpha = Fl = M_z$ — момент силы относительно оси $z$. Таким образом, работа при вращении тела равна произведению момента действующей силы на угол поворота.

Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dT,$$

но

$$dT = d\left(\frac{J_z\omega^2}{2}\right) = J_z\omega\, d\omega,$$

поэтому

$$M_z d\varphi = J_z\omega\, d\omega,$$

или

$$M_z\frac{d\varphi}{dt} = J_z\omega\frac{d\omega}{dt}.$$

Учитывая, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, получим

$$M_z = J_z\frac{d\omega}{dt} = J_z\varepsilon. \qquad (18.3)$$

Уравнение (18.3) представляет собой **уравнение динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси.

Можно показать, что если ось вращения совпадает с главной осью инерции (см. § 20), проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство

$$\mathbf{M} = J\vec{\varepsilon}, \qquad (18.4)$$

где $J$ — главный момент инерции тела (момент инерции относительно главной оси).

## § 19. Момент импульса и закон его сохранения

При сравнении законов вращательного и поступательного движений просматривается аналогия между ними, только во вращательном движении вместо силы «выступает» ее момент, роль массы играет момент инерции. Какая же величина будет аналогом импульса тела? Ею является момент импульса тела относительно оси.

**Моментом импульса (количества движения)** материальной точки $A$ **относительно неподвижной точки** $O$ называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] = [\mathbf{r}\ m\mathbf{v}],$$

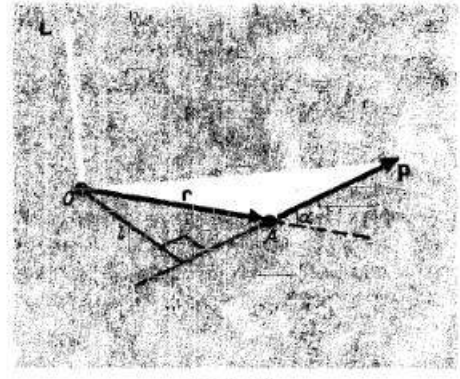



Рис. 28

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки $O$ в точку $A$; $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ — импульс материальной точки (рис. 28); $\mathbf{L}$ — псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\mathbf{r}$ к $\mathbf{p}$.

Модуль вектора момента импульса

$$L=rp\sin\alpha=mvr\sin\alpha=pl,$$

где $\alpha$ — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$, $l$ — плечо вектора $\mathbf{p}$ относительно точки $O$.

**Моментом импульса относительно неподвижной оси** $z$ называется скалярная величина $L_z$, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки $O$ данной оси. Значение момента импульса $L_z$ не зависит от положения точки $O$ на оси $z$.

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси $z$ каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса $r_i$ с некоторой скоростью $\mathbf{v}_i$. Скорость $\mathbf{v}_i$ и импульс $m_i\mathbf{v}_i$ перпендикулярны этому радиусу, т. е. радиус является плечом вектора $m_i\mathbf{v}_i$. Поэтому можем записать, что момент импульса отдельной частицы

$$L_{iz}=m_iv_ir_i \qquad (19.1)$$

и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.

**Момент импульса твердого тела** относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

$$L_z=\sum_{i=1}^{n}m_iv_ir_i.$$

Используя формулу (17.1) $v_i=\omega r_i$, получим

$$L_z=\sum_{i=1}^{n}m_i r_i^2\,\omega=\omega\sum_{i=1}^{n}m_i r_i^2=J_z\omega,$$

т. е.

$$L_z=J_z\omega. \qquad (19.2)$$

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость.

Продифференцируем уравнение (19.2) по времени:

$$\frac{dL_z}{dt}=J_z\frac{d\omega}{dt}=J_z\varepsilon=M_z,$$

т. е.

$$\frac{dL_z}{dt}=M_z.$$

Это выражение — еще одна форма **уравнения (закона) динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси: производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси.

Можно показать, что имеет место векторное равенство

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{M}. \qquad (19.3)$$

В замкнутой системе момент внешних сил $\mathbf{M}=0$ и $\frac{d\mathbf{L}}{dt}=0$, откуда

$$\mathbf{L}=\text{const}. \qquad (19.4)$$

Выражение (19.4) представляет собой **закон сохранения момента импульса**: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения момента импульса — *фундаментальный закон природы*. Он связан со свойством симметрии пространства — его *изотропностью*, т. е. с ин-

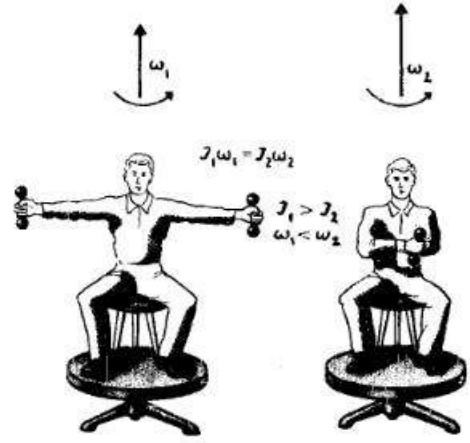



Рис. 29

Таблица 2

| Поступательное движение | | Вращательное движение | |
|---|---|---|---|
| Масса | $m$ | Момент инерции | $J$ |
| Скорость | $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ | Угловая скорость | $\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ |
| Ускорение | $\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ | Угловое ускорение | $\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ |
| Сила | $\mathbf{F}$ | Момент силы | $M_z$ или $\mathbf{M}$ |
| Импульс | $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ | Момент импульса | $L_z=J_z\omega$ |
| Основное уравнение динамики | $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$; $\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ | Основное уравнение динамики | $M_z=J_z\varepsilon$; $\mathbf{M}=\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ |
| Работа | $dA=F_s\,ds$ | Работа вращения | $M_z\,d\varphi$ |
| Кинетическая энергия | $mv^2/2$ | Кинетическая энергия вращения | $J_z\omega^2/2$ |

вариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета (относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).

Продемонстрировать закон сохранения момента импульса можно с помощью скамьи Жуковского. Пусть человек, сидящий на скамье, которая без трения вращается вокруг вертикальной оси, и держащий в вытянутых руках гантели (рис. 29), приведен во вращение с угловой скоростью $\omega_1$. Если человек прижмет гантели к себе, то момент инерции системы уменьшится. Поскольку момент внешних сил равен нулю, момент импульса системы сохраняется и угловая скорость вращения $\omega_2$ возрастает. Аналогично, гимнаст во время прыжка через голову поджимает к туловищу руки и ноги, чтобы уменьшить свой момент инерции и увеличить тем самым угловую скорость вращения.

Сопоставим основные величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение (табл. 2).

## § 20. Свободные оси. Гироскоп

Для того чтобы сохранить положение оси вращения твердого тела с течением времени неизменным, используют подшипники, в которых она удерживается. Однако существуют такие оси вращения тел, которые не изменяют своей ориентации в пространстве без действия на нее внешних сил. Эти оси называются **свободными осями** (или **осями свободного вращения**). Можно доказать, что в любом теле существуют три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс тела, которые могут служить свободными осями (они называются **главными осями инерции** тела). Например, главные оси инерции однородного прямоугольного параллелепипеда проходят через центры противоположных граней (рис. 30). Для однородного цилиндра одной из главных осей инерции является его геометрическая ось, а в качестве остальных осей могут быть две любые взаимно перпендикулярные оси, проведенные через центр масс в плоскости, перпендикулярной геометрической оси цилиндра. Главными осями инерции шара

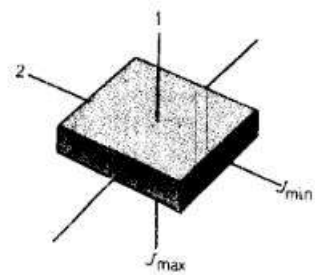


Рис. 30

являются любые три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс.

Для устойчивости вращения большое значение имеет, какая именно из свободных осей служит осью вращения.

Можно показать, что вращение вокруг главных осей с наибольшим и наименьшим моментами инерции оказывается устойчивым, а вращение около оси со средним моментом — неустойчивым. Так, если подбросить тело, имеющее форму параллелепипеда, приведя его одновременно во вращение, то оно, падая, будет устойчиво вращаться вокруг осей *1* и *2* (рис. 30).

Если, например, палочку подвесить за один конец нити, а другой конец, закрепленный к шпинделю центробежной машины, привести в быстрое вращение, то палочка будет вращаться в горизонтальной плоскости около вертикальной оси, перпендикулярной оси палочки и проходящей через ее середину (рис. 31). Это и есть свободная ось вращения (момент инерции при этом положении палочки максимальный). Если теперь палочку, вращающуюся вокруг свободной оси, освободить от внешних связей (аккуратно снять верхний конец нити с крючка шпинделя), то положение оси вращения в пространстве в течение некоторого времени сохраняется. Свойство свободных осей сохранять свое положение в пространстве широко применяется в технике. Наиболее интересны в этом плане **гироскопы** — массивные однородные тела, вращающиеся с большой угловой скоростью около своей оси симметрии, являющейся свободной осью.

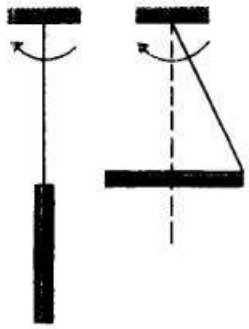


Рис. 31

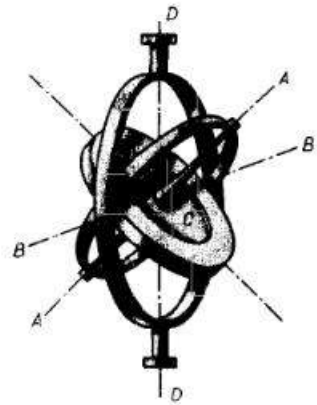



Рис. 32

Рассмотрим одну из разновидностей гироскопов — гироскоп на кардановом подвесе (рис. 32). Дискообразное тело — гироскоп — закреплено на оси $AA$, которая может вращаться вокруг перпендикулярной ей горизонтальной оси $BB$, которая, в свою очередь, может поворачиваться вокруг вертикальной оси $DD$. Все три оси пересекаются в одной точке $C$, являющейся центром масс гироскопа и остающейся неподвижной, а ось гироскопа может принять любое направление в пространстве. Силами трения в подшипниках всех трех осей и моментом импульса колец пренебрегаем.

Так как трение в подшипниках мало, то, пока гироскоп неподвижен, его оси можно придать любое направление. Если начать гироскоп быстро вращать (например, с помощью намотанной на ось веревочки) и поворачивать его подставку, то ось гироскопа сохраняет свое положение в пространстве неизменной. Это можно объяснить с помощью основного закона динамики вращательного движения. Для свободного вращающегося гироскопа сила тяжести не может изменить ориентацию его оси вращения, так как эта сила приложена к центру масс (центр вращения $C$ совпадает с центром масс), а момент силы тяжести относительно закрепленного центра масс равен нулю. Моментом сил трения мы также пренебрегаем. Поэтому если момент внешних сил относительно его закрепленного центра масс равен нулю, то, как следует из уравнения (19.3), $\mathbf{L}=$

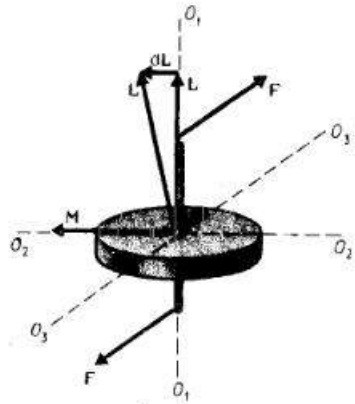


Рис. 33

$=$const, т. е. момент импульса гироскопа сохраняет свою величину и направление в пространстве. Следовательно, вместе с ним сохраняет свое положение в пространстве и ось гироскопа.

Чтобы ось гироскопа изменила свое направление в пространстве, необходимо, согласно (19.3), отличие от нуля момента внешних сил. Если момент внешних сил, приложенных к вращающемуся гироскопу относительно его центра масс, отличен от нуля, то наблюдается явление, получившее название **гироскопического эффекта**. Оно состоит в том, что под действием пары сил **F**, приложенной к оси вращающегося гироскопа, ось гироскопа (рис. 33) поворачивается вокруг прямой $O_3O_3$, а не вокруг прямой $O_2O_2$, как это казалось бы естественным на первый взгляд ($O_1O_1$ и $O_2O_2$ лежат в плоскости чертежа, а $O_3O_3$ и силы **F** перпендикулярны ей).

Гироскопический эффект объясняется следующим образом. Момент **M** пары сил **F** направлен вдоль прямой $O_2O_2$. За время $d\boldsymbol{t}$ момент импульса **L** гироскопа получит приращение $d\mathbf{L}=\mathbf{M}\,dt$ (направление $d\mathbf{L}$ совпадает с направлением **M**) и станет равным $\mathbf{L}'=\mathbf{L}+d\mathbf{L}$. Направление вектора $\mathbf{L}'$ совпадает с новым направлением оси вращения гироскопа. Таким образом, ось вращения гироскопа повернется вокруг прямой $O_3O_3$. Если время действия силы мало, то, хотя момент сил **M** и велик, изменение момента импульса $d\mathbf{L}$ гироскопа будет также весьма малым. Поэтому кратковременное действие сил практически не приводит к изменению ориентации оси вращения гироскопа в пространстве. Для ее изменения следует прикладывать силы в течение длительного времени.

Если ось гироскопа закреплена подшипниками, то вследствие гироскопического эффекта возникают так называемые **гироскопические силы**, действующие на опоры, в которых вращается ось гироскопа. Их действие необходимо учитывать при конструировании устройств, содержащих быстровращающиеся массивные составные части. Гироскопические силы имеют смысл только во вращающейся системе отсчета и являются частным случаем кориолисовой силы инерции (см. § 27).

Гироскопы применяются в различных гироскопических навигационных приборах (гирокомпас, гирогоризонт и т. д.). Другое важное применение гироскопов — поддержание заданного направления движения транспортных средств, например судна (авторулевой) и самолета (автопилот) и т. д. При всяком отклонении от курса вследствие каких-то воздействий (волны, порыва ветра и т. д.) положение оси гироскопа в пространстве сохраняется. Следовательно, ось гироскопа вместе с рамами карданова подвеса поворачивается относительно движущегося устройства. Поворот рам карданова подвеса с помощью определенных приспособлений включает рули управления, которые возвращают движение к заданному курсу.

Впервые гироскоп применен французским физиком Ж. Фуко (1819—1868) для доказательства вращения Земли.

## § 21. Деформации твердого тела

Рассматривая механику твердого тела, мы пользовались понятием абсолютно твердого тела. Однако в природе абсолютно твердых тел нет, так как все реальные тела под действием сил изменяют свою форму и размеры, т. е. *деформируются*.

**Деформация** называется **упругой**, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму. **Деформации**, которые сохраня-

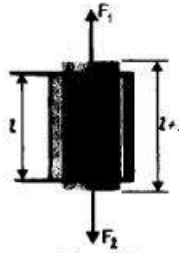


Рис. 34

ются в теле после прекращения действия внешних сил, называются **пластическими** (или **остаточными**). Деформации реального тела всегда пластические, так как они после прекращения действия внешних сил никогда полностью не исчезают. Однако если остаточные деформации малы, то ими можно пренебречь и рассматривать упругие деформации, что мы и будем делать.

В теории упругости доказывается, что все виды деформаций (растяжение или сжатие, сдвиг, изгиб, кручение) могут быть сведены к одновременно происходящим деформациям растяжения или сжатия и сдвига.

Рассмотрим однородный стержень длиной $l$ и площадью поперечного сечения $S$ (рис. 34), к концам которого приложены направленные вдоль его оси силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ ($F_1 = F_2 = F$), в результате чего длина стержня меняется на величину $\Delta l$. Естественно, что при растяжении $\Delta l$ положительно, а при сжатии — отрицательно.

Сила, действующая на единицу площади поперечного сечения, называется **напряжением:**

$$\sigma = F/S. \qquad (21.1)$$

Если сила направлена по нормали к поверхности, **напряжение** называется **нормальным,** если же по касательной к поверхности — **тангенциальным.**

Количественной мерой, характеризующей степень деформации, испытываемой телом, является его **относительная деформация.** Так, относительное изменение длины стержня (продольная деформация)

$$\varepsilon = \Delta l/l, \qquad (21.2)$$

относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \Delta d/d,$$

где $d$ — диаметр стержня.

Деформации $\varepsilon$ и $\varepsilon'$ всегда имеют разные знаки (при растяжении $\Delta l$ положительно, а $\Delta d$ отрицательно, при сжатии $\Delta l$ отрицательно, а $\Delta d$ положительно). Из опыта вытекает взаимосвязь $\varepsilon$ и $\varepsilon'$:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon,$$

где $\mu$ — положительный коэффициент, зависящий от свойств материала, называемый **коэффициентом Пуассона** *.

Английский физик Р. Гук (1635—1703) экспериментально установил, что для малых деформаций относительное удлинение $\varepsilon$ и напряжение $\sigma$ прямо пропорциональны друг другу:

$$\sigma = E\varepsilon, \qquad (21.3)$$

где коэффициент пропорциональности $E$ называется модулем Юнга **. Из выражения (21.3) видно, что **модуль Юнга** определяется напряжением, вызывающим относительное удлинение, равное единице.

Из формул (21.2), (21.3) и (21.1) вытекает, что

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES},$$

или

$$F = \frac{ES}{l}\Delta l = k\Delta l, \qquad (21.4)$$

где $k$ — **коэффициент упругости**. Выражение (21.4) также задает закон Гука, согласно которому удлинение стержня при упругой деформации пропорционально действующей на стержень силе.

Деформации твердых тел подчиняются закону Гука до известного предела. Связь между деформацией и напряжением представляется в виде диаграммы напряжений, которую мы качественно рассмотрим для металлического образца (рис. 35). Из рисунка видно, что линейная зависимость $\sigma(\varepsilon)$, установленная Гуком, выполняется

---

* С. Пуассон (1781—1840) — французский ученый.

** Т. Юнг (1773—1829) — английский ученый.

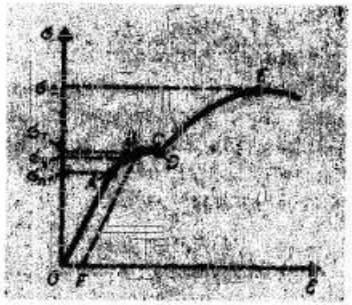


Рис. 35

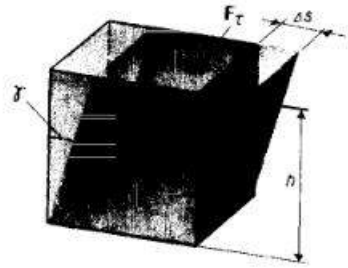


Рис. 36

лишь в очень узких пределах до так называемого **предела пропорциональности** ($\sigma_п$). При дальнейшем увеличении напряжения деформация еще упругая (хотя зависимость $\sigma(\varepsilon)$ уже не линейна) и до **предела упругости** ($\sigma_у$) остаточные деформации не возникают. За пределом упругости в теле возникают остаточные деформации и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, изобразится не кривой $BO$, а параллельной ей — $CF$. Напряжение, при котором появляется заметная остаточная деформация ($\approx 0{,}2\ \%$), называется **пределом текучести** ($\sigma_т$) — точка $C$ на кривой. В области $CD$ деформация возрастает без увеличения напряжения, т. е. тело как бы «течет». Эта область называется **областью текучести** (или **областью пластических деформаций**). Материалы, для которых область текучести значительна, называются **вязкими**, для которых же она практически отсутствует — **хрупкими**. При дальнейшем растяжении (за точку $D$) происходит разрушение тела. Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называется **пределом прочности** ($\sigma_р$).

Диаграмма напряжений для реальных твердых тел зависит от различных факторов. Одно и то же твердое тело может при кратковременном действии сил проявлять себя как хрупкое, а при длительных, но слабых силах является текучим.

Вычислим потенциальную энергию упругорастянутого (сжатого) стержня, которая равна работе, совершаемой внешними силами при деформации:

$$\Pi = A = \int_0^{\Delta l} F\,dx,$$

где $x$ — абсолютное удлинение стержня, изменяющееся в процессе деформации от 0 до $\Delta l$. Согласно закону Гука (21.4), $F = kx = ESx/l$. Поэтому

$$\Pi = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x\,dx = \frac{1}{2}\frac{ES}{l}(\Delta l)^2,$$

т. е. потенциальная энергия упругорастянутого стержня пропорциональна квадрату деформации $(\Delta l)^2$.

Деформацию сдвига проще всего осуществить, если взять брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, и приложить к нему силу $F_т$ (рис. 36), касательную к его поверхности (нижняя часть бруска закреплена неподвижно). Относительная деформация сдвига определяется из формулы

$$\operatorname{tg}\gamma = \Delta s/h,$$

где $\Delta s$ — абсолютный сдвиг параллельных слоев тела относительно друг друга; $h$ — расстояние между слоями (для малых углов $\operatorname{tg}\gamma \approx \gamma$).

## Контрольные вопросы

- Что такое момент инерции тела?
- Какова роль момента инерции во вращательном движении?
- Какова формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?
- Что называется моментом силы относительно неподвижной точки? относительно неподвижной оси? Как определяется направление момента силы?
- Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела.
- Что такое момент импульса материальной точки? твердого тела? Как определяется направление момента импульса?
- В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется? Приведите примеры.
- Каким свойством симметрии пространства обусловливается справедливость закона сохранения момента импульса?
- Сопоставьте основные уравнения динамики поступательного и вращательного движений, прокомментировав их аналогию.
- Что такое свободные оси (главные оси инерции)? Какие из них являются устойчивыми?
- Что такое гироскоп? Каковы его основные свойства?
- Сформулируйте закон Гука. Когда он справедлив?
- Дайте объяснение качественной диаграммы напряжений $\sigma(\varepsilon)$. Что такое пределы пропорциональности, упругости и прочности?
- Каков физический смысл модуля Юнга?

## Задачи

**4.1.** С одного уровня наклонной плоскости одновременно начинают скатываться без скольжения сплошные цилиндр и шар одинаковых масс и одинаковых радиусов. Определить: 1) отношение скоростей цилиндра и шара на данном уровне; 2) их отношение в данный момент времени. [1) 14/15; 2) 14/15]

**4.2.** К ободу однородного сплошного диска радиусом $R=0{,}5$ м приложена постоянная касательная сила $F=100$ Н. При вращении диска на него действует момент сил трения $M=2$ Н·м. Определить массу $m$ диска, если известно, что его угловое ускорение $\varepsilon$ постоянно и равно 12 рад/с$^2$. [32 кг]

**4.3.** Через неподвижный блок в виде однородного сплошного цилиндра массой $m=1$ кг перекинута невесомая нить, к концам которой прикреплены тела массами $m_1=1$ кг и $m_2=2$ кг. Пренебрегая трением в оси блока, определить: 1) ускорение грузов; 2) отношения $T_2/T_1$ сил натяжения нити. [1) 2,8 м/с$^2$; 2) 1,11]

**4.4.** Скорость вращения колеса, момент инерции которого 2 кг·м$^2$, вращающегося при торможении равнозамедленно, за время $t=1$ мин уменьшилась от $n_1=300$ об/мин до $n_2=180$ об/мин. Определить: 1) угловое ускорение $\varepsilon$ колеса; 2) момент $M$ силы торможения; 3) работу силы торможения. [1) 0,21 рад/с$^2$; 2) 0,42 Н·м; 3) 630 Дж]

**4.5.** Человек массой $m=80$ кг, стоящий на краю горизонтальной платформы массой $M=100$ кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой $n_1=10$ мин$^{-1}$, переходит к ее центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека — точечной массой, определить, с какой частотой $n_2$ будет тогда вращаться платформа. [26 мин$^{-1}$]

**4.6.** Определить относительное удлинение алюминиевого стержня, если при его растяжении затрачена работа 621 Дж. Длина стержня 2 м, площадь поперечного сечения 1 мм$^2$, модуль Юнга для алюминия $E=69$ ГПа. [$\Delta l/l=\sqrt{2A/(ESl)}=0{,}03$]

# Глава 5
# Тяготение. Элементы теории поля

## § 22. Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения

Еще в глубокой древности было замечено, что в отличие от звезд, которые неизменно сохраняют свое взаимное расположение в пространстве в течение столетий, планеты описывают среди звезд сложнейшие траектории. Для объяснения петлеобразного движения планет древнегреческий ученый К. Птоломей (II в. н. э.), считая Землю расположенной в центре Вселенной, предположил, что каждая из планет движется по малому кругу (эпициклу), центр которого равномерно движется по большому кругу, в центре которого находится Земля. Эта концепция получила название **птоломеевой геоцентрической системы мира** и при поддержке католической церкви господствовала почти полторы тысячи лет.

В начале XVI в. польским астрономом Н. Коперником (1473—1543) обоснована **гелиоцентрическая система** (см. § 5), согласно которой движения небесных тел объясняются движением Земли (а также других планет) вокруг Солнца и суточным вращением Земли. Теория и наблюдения Коперника воспринимались как занимательная фантазия.

К началу XVII столетия большинство ученых убедилось, однако, в справедливости гелиоцентрической системы мира. И. Кеплер (1571—1630), обработав и уточнив результаты многочисленных наблюдений датского астронома Т. Браге (1546—1601), изложил **законы движения планет**:

1. Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.

3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Впоследствии И. Ньютон, изучая движение небесных тел, на основании законов Кеплера и основных законов динамики открыл всеобщий **закон всемирного тяготения:** между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек ($m_1$ и $m_2$) и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними ($r^2$):

$$F = Gm_1m_2/r^2. \qquad (22.1)$$

Эта сила называется **гравитационной** (или **силой всемирного тяготения**). Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела. Коэффициент пропорциональности $G$ называется **гравитационной постоянной.**

Закон всемирного тяготения установлен для тел, причисляемых за материальные точки, т. е. для таких тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Если же размеры взаимодействующих тел сравнимы с расстоянием между ними, то эти тела надо разбить на точечные элементы, подсчитать по формуле (22.1) силы притяжения между всеми попарно взятыми элементами, а затем геометрически их сложить (проинтегрировать), что является довольно сложной математической задачей.

Впервые экспериментальное доказательство закона всемирного тяготения для земных тел, а также числовое определение гравитационной постоянной $G$ проведено английским физиком Г. Кавендишем (1731—1810). Принципиальная схема опыта Кавендиша, применившего **крутильные весы,** представлена на рис. 37. Легкое коромысло $A$ с двумя одинаковыми шари-

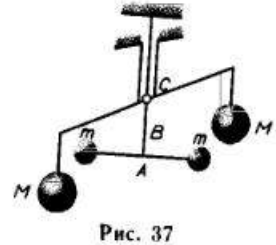



Рис. 37

ками массой $m=729$ г подвешено на упругой нити $B$. На коромысле $C$ укреплены на той же высоте массивные шары массой $M=158$ кг. Поворачивая коромысло $C$ вокруг вертикальной оси, можно изменять расстояние между шарами с массами $m$ и $M$. Под действием пары сил, приложенных к шарам $m$ со стороны шаров $M$, коромысло $A$ поворачивается в горизонтальной плоскости, закручивая нить $B$ до тех пор, пока момент сил упругости не уравновесит момента сил тяготения. Зная упругие свойства нити, по измеренному углу поворота можно найти возникающие силы притяжения, а так как массы шаров известны, то и вычислить значение $G$.

Значение $G$, приводимое в таблицах фундаментальных физических постоянных, принимается равным $6{,}6720\cdot10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$, т. е. два точечных тела массой по 1 кг каждое, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются с силой $6{,}6720\cdot10^{-11}$ Н. Очень малая величина $G$ показывает, что сила гравитационного взаимодействия может быть значительной только в случае больших масс.

## § 23. Сила тяжести и вес. Невесомость

На любое тело, расположенное вблизи Земли, действует сила тяготения $F$, под влиянием которой, согласно второму закону Ньютона, тело начнет двигаться с ускорением свободного падения $g$. Таким образом, в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой $m$ действует сила

$$\mathbf{P}=m\mathbf{g},$$

называемая **силой тяжести.**

Согласно фундаментальному физическому закону — **обобщенному закону Галилея**, все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением. Следовательно, в данном месте Земли ускорение свободного падения одинаково для всех тел. Оно изменяется вблизи поверхности Земли с широтой в пределах от 9,780 м/с$^2$ на экваторе до 9,832 м/с$^2$ на полюсах. Это обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси, с одной стороны, и сплюснутостью Земли — с другой (экваториальный и полярный радиусы Земли равны соответственно 6378 и 6357 км). Так как различие значений $g$ невелико, ускорение свободного падения, которое используется при решении практических задач, принимается равным 9,81 м/с$^2$.

Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести и сила гравитационного тяготения равны между собой:

$$P=mg=F=GmM/R^2,$$

где $M$ — масса Земли; $R$ — расстояние между телом и центром Земли. Эта формула дана для случая, когда тело находилось на поверхности Земли.

Пусть тело расположено на высоте $h$ от поверхности Земли, $R_0$ — радиус Земли, тогда

$$P=GmM/(R_0+h)^2,$$

т. е. сила тяжести с удалением от поверхности Земли уменьшается.

В физике применяется также понятие веса тела. **Весом** тела называют силу, с которой тело вследствие тяготения к Земле действует на опору (или подвес), удерживающую тело от свободного падения. Вес тела проявляется только в том случае, если тело движется с ускорением, отличным от $g$, т. е. когда на тело кроме силы тяжести действуют другие силы. Состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести, называется состоянием **невесомости.**

Таким образом, *сила тяжести действует всегда*, а *вес* появляется *только* в том случае, *когда* на тело *кроме силы тяжести действуют еще другие силы*, вследствие чего тело движется с ускорением $\mathbf{a}$, отличным от $\mathbf{g}$. Если тело движется в поле тяготения Земли с ускорением $\mathbf{a}\neq\mathbf{g}$, то к этому телу приложена дополнительная сила $\mathbf{N}$, удовлетворяющая условию

$$\mathbf{N}+\mathbf{P}=m\mathbf{a}.$$

Тогда вес тела

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{N} = \mathbf{P} - m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - m\mathbf{a} = m(\mathbf{g} - \mathbf{a}),$$

т. е. если тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, то $\mathbf{a} = 0$ и $\mathbf{P}' = m\mathbf{g}$. Если тело *свободно движется в поле тяготения* по любой траектории и в любом направлении, то $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ и $\mathbf{P}' = 0$, т. е. тело будет невесомым. Например, невесомыми являются тела, находящиеся в космических кораблях, свободно движущихся в космосе.

## § 24. Поле тяготения и его напряженность

Закон тяготения Ньютона определяет зависимость силы тяготения от масс взаимодействующих тел и расстояния между ними, но не показывает, как осуществляется это взаимодействие. Тяготение принадлежит к особой группе взаимодействий. Силы тяготения, например, не зависят от того, в какой среде взаимодействующие тела находятся. Тяготение существует и в вакууме.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью **поля тяготения,** или **гравитационного поля.** Это поле порождается телами и является формой существования материи. Основное свойство поля тяготения заключается в том, что на всякое тело массой $m$, внесенное в это поле, действует сила тяготения, т. е.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}. \qquad (24.1)$$

Вектор $\mathbf{g}$ не зависит от $m$ и называется напряженностью поля тяготения. **Напряженность поля тяготения** определяется силой, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы, и совпадает по направлению с действующей силой. Напряженность есть *силовая характеристика* поля тяготения.

Поле тяготения называется **однородным,** если его напряженность во всех точках одинакова, и **центральным,** если во всех точках поля векторы напряженности направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной точке ($A$), *неподвижной* по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета (рис. 38).

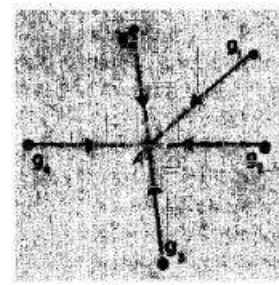


Рис. 38

Для графического изображения силового поля используются *силовые линии (линии напряженности).* Силовые линии выбираются так, что вектор напряженности поля действует по касательной к силовой линии.

## § 25. Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

Рассмотрим, чему равна работа, совершаемая силами поля тяготения при перемещении в нем материальной точки массой $m$. Вычислим, например, какую надо затратить работу для удаления тела массой $m$ от Земли. На расстоянии $R$ (рис. 39) на данное тело действует сила

$$F = GmM/R^2.$$

При перемещении этого тела на расстояние $dR$ затрачивается работа

$$dA = -G\frac{mM}{R^2}\,dR. \qquad (25.1)$$

Знак минус появляется потому, что сила и перемещение в данном случае противоположны по направлению (рис. 39).

Если тело перемещать с расстояния $R_1$

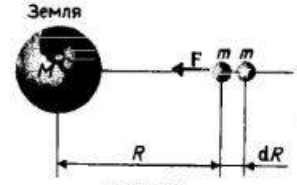



Рис. 39

до $R_2$, то затрачивается работа

$$A=\int_{P_1}^{P_2} dA=-\int_{R_1}^{R_2} G\frac{mM}{R^2}\,dR=$$

$$=m\left(\frac{GM}{R_2}-\frac{GM}{R_1}\right). \qquad (25.2)$$

Из формулы (25.2) вытекает, что затраченная работа в поле тяготения не зависит от траектории перемещения, а определяется лишь начальным и конечным положениями тела, т. е. *силы тяготения* действительно *консервативны*, а *поле тяготения является потенциальным* (см. § 12).

Согласно формуле (12.2), работа, совершаемая консервативными силами, равна изменению потенциальной энергии системы, взятому со знаком минус, т. е.

$$A=-\Delta\Pi=-(\Pi_2-\Pi_1)=\Pi_1-\Pi_2.$$

Из формулы (25.2) получаем

$$\Pi_1-\Pi_2=-m(GM/R_1-GM/R_2). \qquad (25.3)$$

Так как в формулы входит только разность потенциальных энергий в двух состояниях, то для удобства принимают потенциальную энергию при $R_2\to\infty$ равной нулю ($\lim_{R_2\to\infty}\Pi_2=0$). Тогда (25.3) запишется в виде $\Pi_1=-GmM/R_1$. Так как первая точка была выбрана произвольно, то

$$\Pi=-GmM/R.$$

Величину

$$\varphi=\Pi/m,$$

являющуюся энергетической характеристикой поля тяготения, называют потенциалом. **Потенциал поля тяготения** $\varphi$ — скалярная величина, определяемая потенциальной энергией тела единичной массы в данной точке поля или работой по перемещению единичной массы из данной точки поля в бесконечность. Таким образом, потенциал поля тяготения, создаваемого телом массой $M$, равен

$$\varphi=-GM/R, \qquad (25.4)$$

где $R$ — расстояние от этого тела до рассматриваемой точки.

Из формулы (25.4) вытекает, что геометрическое место точек с одинаковым потенциалом образует сферическую поверхность ($R=\text{const}$). Такие поверхности, для которых потенциал постоянен, называются **эквипотенциальными.**

Рассмотрим взаимосвязь между потенциалом поля тяготения ($\varphi$) и его напряженностью ($g$). Из выражений (25.1) и (25.4) следует, что элементарная работа $dA$, совершаемая силами поля при малом перемещении тела массой $m$, равна

$$dA=-m\,d\varphi.$$

С другой стороны, $dA=F\,dl$ ($dl$ — элементарное перемещение). Учитывая (24.1), получим, что

$$dA=mg\,dl,$$

т. е.

$$mg\,dl=-m\,d\varphi,$$

или

$$\mathbf{g}=-\frac{d\varphi}{dl}.$$

Величина $\frac{d\varphi}{dl}$ характеризует изменение потенциала на единицу длины в направлении перемещения в поле тяготения.

Можно показать, что

$$\mathbf{g}=-\operatorname{grad}\varphi, \qquad (25.5)$$

где $\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$ — градиент скаляра $\varphi$ (см. (12.5)). Знак минус в формуле (25.5) указывает, что вектор напряженности $\mathbf{g}$ направлен *в сторону убывания* потенциала.

В качестве частного примера, исходя из представлений теории тяготения, рассмотрим потенциальную энергию тела, находящегося на высоте $h$ относительно Земли:

$$\Pi=-\frac{GmM}{R_0+h}-\left(-\frac{GmM}{R_0}\right)=\frac{GmMh}{R_0(R_0+h)},$$

где $R_0$ — радиус Земли.

Так как

$$P = GmM/R_0^2 \quad \text{и} \quad g = P/m = GM/R_0^2, \tag{25.6}$$

то, учитывая условие $h \ll R_0$, получим

$$\Pi = mGMh/R_0^2 = mgh.$$

Таким образом, мы вывели формулу, совпадающую с (12.7), которая постулировалась раньше.

## § 26. Космические скорости

Для запуска ракет в космическое пространство надо в зависимости от поставленных целей сообщать им определенные начальные скорости, называемые космическими.

**Первой космической (или круговой) скоростью** $v_1$ называют такую минимальную скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли по круговой орбите, т. е. превратиться в искусственный спутник Земли. На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом $r$, действует сила тяготения Земли, сообщающая ему нормальное ускорение $v_1^2/r$. По второму закону Ньютона,

$$GmM/r^2 = mv_1^2/r.$$

Если спутник движется недалеко от поверхности Земли, тогда $r \approx R_0$ (радиус Земли) и $g = GM/R_0^2$(см. (25.6)), поэтому у поверхности Земли

$$v_1 = \sqrt{gR_0} = 7{,}9 \text{ км/с}.$$

Первой космической скорости недостаточно для того, чтобы тело могло выйти из сферы земного притяжения. Необходимая для этого скорость называется второй космической. **Второй космической (или параболической) скоростью** $v_2$ называют ту наименьшую скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и превратиться в спутник Солнца, т. е. чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической. Для того чтобы тело (при отсутствии сопротивления среды) могло преодолеть земное притяжение и уйти в космическое пространство, необходимо, чтобы его кинетическая энергия была равна работе, совершаемой против сил тяготения:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \int_{R_0}^{\infty} G\frac{mM}{r^2}\,dr = GmM/R_0,$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{2gR_0} = 11{,}2 \text{ км/с}.$$

**Третьей космической скоростью** $v_3$ называют скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца. Третья космическая скорость $v_3 = 16{,}7$ км/с. Сообщение телам таких больших начальных скоростей является сложной технической задачей. Ее первое теоретическое осуществление начато К. Э. Циолковским, им была выведена уже рассмотренная нами формула (10.3), позволяющая рассчитывать скорость ракет.

Впервые космические скорости были достигнуты в СССР: первая — при запуске первого искусственного спутника Земли в 1957 г., вторая — при запуске ракеты в 1959 г. После исторического полета Ю. А. Гагарина в 1961 г. начинается бурное развитие как советской, так и зарубежной космонавтики.

## § 27. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

Как уже отмечалось (см. § 5, 6), законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной системы с ускорением, называются **неинерциальными.** В неинерциальных системах законы Ньютона, вообще говоря, уже несправедливы. Однако законы динамики можно применять и для них, если кроме сил, обусловленных воздействием тел друг на друга, ввести в рассмотрение силы особого рода — так называемые **силы инерции.**

Если учесть силы инерции, то второй закон Ньютона будет справедлив для любой системы отсчета: произведение массы тела на ускорение в рассматриваемой системе отсчета равно сумме всех сил, действующих на данное тело (включая

и силы инерции). Силы инерции $\mathbf{F}_{ин}$ при этом должны быть такими, чтобы вместе с силами $\mathbf{F}$, обусловленными воздействием тел друг на друга, они сообщали телу ускорение $\mathbf{a}'$, каким оно обладает в неинерциальных системах отсчета, т. е.

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{ин}. \qquad (27.1)$$

Так как $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$ — ускорение тела в инерциальной системе отсчета), то

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} + \mathbf{F}_{ин}.$$

Силы инерции обусловлены ускоренным движением системы отсчета относительно измеряемой системы, поэтому в общем случае нужно учитывать следующие случаи проявления этих сил: 1) силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета; 2) силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета; 3) силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета.

Рассмотрим эти случаи.

**1. Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета.** Пусть на тележке к штативу на нити подвешен шарик массой $m$ (рис. 40). Пока тележка покоится или движется равномерно и прямолинейно, нить, удерживающая шарик, занимает вертикальное положение и сила тяжести $\mathbf{P}$ уравновешивается реакцией нити $\mathbf{T}$.

Если тележку привести в поступательное движение с ускорением $\mathbf{a}_0$, то нить начнет отклоняться от вертикали назад до такого угла $\alpha$, пока результирующая сила $\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{T}$ не обеспечит ускорение шарика, равное $a_0$. Таким образом, результирующая сила $\mathbf{F}$ направлена в сторону ускорения тележки $\mathbf{a}_0$ и для установившегося движения шарика (шарик теперь движется вместе с тележкой с ускорением $a_0$) равна

$$F = mg\,\mathrm{tg}\alpha = ma_0,$$

откуда угол отклонения нити от вертикали

$$\mathrm{tg}\alpha = a_0/g,$$

т. е. тем больше, чем больше ускорение тележки.

Относительно системы отсчета, связанной с ускоренно движущейся тележкой, шарик покоится, что возможно, если сила $\mathbf{F}$ уравновешивается равной и противоположно направленной ей силой $\mathbf{F}_и$, которая является ничем иным, как силой инерции, так как на шарик никакие другие силы не действуют. Таким образом,

$$\mathbf{F}_и = -m\mathbf{a}_0. \qquad (27.2)$$

Проявление сил инерции при поступательном движении наблюдается в повседневных явлениях. Например, когда поезд набирает скорость, то пассажир, сидящий по ходу поезда, под действием силы инерции прижимается к спинке сиденья. Наоборот, при торможении поезда сила инерции направлена в противоположную сторону и пассажир отделяется от спинки сиденья. Особенно эти силы заметны при внезапном торможении поезда. Силы инерции проявляются в перегрузках, которые возникают при запуске и торможении космических кораблей.

**2. Силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета.** Пусть диск равномерно вращается с угловой скоростью $\omega$ ($\omega = \mathrm{const}$) вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. На диске, на разных расстояниях от оси вращения, установлены маятники (на нитях подвешены шарики массой $m$). При вращении маятников вместе с диском шарики отклоняются от вертикали на некоторый угол (рис. 41).

В инерциальной системе отсчета, связанной, например, с помещением, где установлен диск, шарик равномерно вращается по окружности радиусом $R$ (расстояние от точки крепления маятника к диску до оси вращения). Следовательно, на него действует сила, равная $F = m\omega^2 R$ и направленная перпендикулярно оси вращения диска. Она является равнодействующей силы тяжести $\mathbf{P}$ и силы натяжения нити $\mathbf{T}$: $\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{T}$. Когда движение шарика установит-

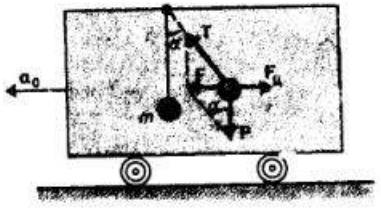



Рис. 40

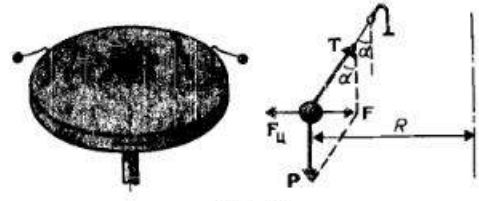



Рис. 41

ся, то $F = mg\,\mathrm{tg}\alpha = m\omega^2 R$, откуда

$$\mathrm{tg}\alpha = \omega^2 R/g,$$

т. е. углы отклонения нитей маятников будут тем больше, чем больше расстояние $R$ от шарика до оси вращения диска и чем больше угловая скорость вращения $\omega$.

Относительно системы отсчета, связанной с вращающимся диском, шарик покоится, что возможно, если сила $\mathbf{F}$ уравновешивается равной и противоположно направленной ей силой $\mathbf{F}_и$, которая является ничем иным, как силой инерции, так как на шарик никакие другие силы не действуют. Сила $\mathbf{F}_и$, называемая **центробежной силой инерции,** направлена по горизонтали от оси вращения диска и равна

$$F_и = -m\omega^2 R. \qquad (27.3)$$

Действию центробежных сил инерции подвергаются, например, пассажиры в движущемся транспорте на поворотах, летчики при выполнении фигур высшего пилотажа; центробежные силы инерции используются во всех центробежных механизмах: насосах, сепараторах и т. д., где они достигают огромных значений. При проектировании быстро вращающихся деталей машин (роторов, винтов самолетов и т. д.) принимаются специальные меры для уравновешивания центробежных сил инерции.

Из формулы (27.3) вытекает, что центробежная сила инерции, действующая на тела во вращающихся системах отсчета в направлении радиуса от оси вращения, зависит от угловой скорости вращения $\omega$ системы отсчета и радиуса $R$, но не зависит от скорости тел относительно вращающихся систем отсчета. Следовательно, центробежная сила инерции действует во вращающихся системах отсчета на все тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние, независимо от того, покоятся ли они в этой системе (как мы предполагали до сих пор) или движутся относительно нее с какой-то скоростью.

**3. Силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета.** Пусть шарик массой $m$ движется с постоянной скоростью $v'$ вдоль радиуса равномерно вращающегося диска ($v' = \mathrm{const}$, $\omega = \mathrm{const}$, $v' \perp \omega$). Если диск не вращается, то шарик, направленный вдоль радиуса, движется по радиальной прямой и попадает в точку $A$, если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик катится по кривой $OB$ (рис. 42, *а*), причем его скорость $v'$ относительно диска изменяет свое направление. Это возможно лишь тогда, если на шарик действует сила, перпендикулярная скорости $v'$.

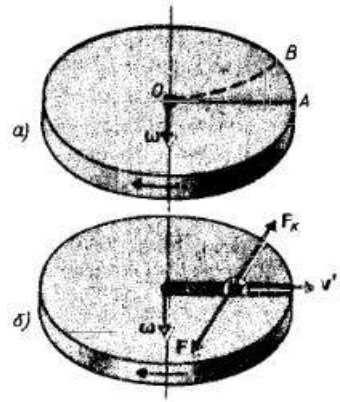



Рис. 42

Для того чтобы заставить шарик катиться по вращающемуся диску вдоль радиуса, используем жестко укрепленный вдоль радиуса диска стержень, на котором шарик движется без трения равномерно и прямолинейно со скоростью $v'$ (рис. 42, *б*). При отклонении шарика стержень действует на него с некоторой силой $\mathbf{F}$. Относительно диска (вращающейся системы отсчета) шарик движется равномерно и прямолинейно, что можно объяснить тем, что сила $\mathbf{F}$ уравновешивается приложенной к шарику силой инерции $\mathbf{F}_K$, перпендикулярной скорости $\mathbf{v}'$. Эта сила называется **кориолисовой силой инерции.**

Можно показать, что сила Кориолиса *

$$\mathbf{F}_к = 2m\,[\mathbf{v}'\vec{\omega}]. \qquad (27.4)$$

Вектор $\mathbf{F}_K$ перпендикулярен векторам скорости $\mathbf{v}'$ тела и угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ системы отсчета в соответствии с правилом правого винта.

Сила Кориолиса действует только на тела, движущиеся относительно вращающейся системы отсчета, например относительно Земли. Поэтому действием этих сил объясняется ряд наблюдаемых на Земле явлений. Так, если тело движется в северном полушарии на север (рис. 43), то действующая на него сила Кориолиса, как это следует из выражения (27.4), будет направлена вправо по отношению к направлению движения, т. е. тело несколько отклонится на восток. Если тело движется на юг, то сила Кориолиса также действует вправо, если смотреть по направлению движения, т. е. тело отклонится на запад. Поэтому в северном полушарии наблюдается более сильное подмывание правых берегов рек; правые рельсы железнодорожных путей по движению изнаши-

* Г. Кориолис (1792—1843) — французский физик и инженер.

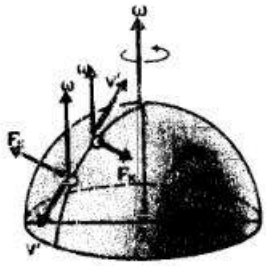



Рис. 43

бываются быстрее, чем левые, и т. д. Аналогично можно показать, что в южном полушарии сила Кориолиса, действующая на движущиеся тела, будет направлена влево по отношению к направлению движения.

Благодаря силе Кориолиса падающие на поверхность Земли тела отклоняются к востоку (на широте 60° это отклонение должно составлять 1 см при падении с высоты 100 м). С силой Кориолиса связано поведение маятника Фуко, явившееся в свое время одним из доказательств вращения Земли. Если бы этой силы не было, то плоскость колебаний качающегося вблизи поверхности Земли маятника оставалась бы неизменной (относительно Земли). Действие же сил Кориолиса приводит к вращению плоскости колебаний вокруг вертикального направления.

Раскрывая содержание $\mathbf{F}_{ин}$ в формуле (27.1), получим **основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета:**

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{и} + \mathbf{F}_{ц} + \mathbf{F}_{К},$$

где силы инерции задаются формулами (27.2) — (27.4).

Обратим еще раз внимание на то, что *силы инерции вызываются* не взаимодействием тел, а *ускоренным движением системы отсчета*. Поэтому они не подчиняются третьему закону Ньютона, так как если на какое-либо тело действует сила инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к данному телу. Два основных положения механики, согласно которым ускорение всегда вызывается силой, а сила всегда обусловлена взаимодействием между телами, в системах отсчета, движущихся с ускорением, одновременно не выполняются.

Для любого из тел, находящихся в неинерциальной системе отсчета, силы инерции являются внешними; следовательно, здесь нет замкнутых систем. Это означает, что в неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения импульса, энергии и момента импульса. Таким образом, силы инерции действуют только в неинерциальных системах. В инерциальных системах отсчета таких сил не существует.

Возникает вопрос о «реальности» или «фиктивности» сил инерции. В ньютоновской механике, согласно которой сила есть результат взаимодействия тел, на силы инерции можно смотреть как на «фиктивные», «исчезающие» в инерциальных системах отсчета. Однако возможна и другая их интерпретация. Так как взаимодействия тел осуществляются посредством силовых полей, то силы инерции рассматриваются как воздействия, которым подвергаются тела со стороны каких-то реальных силовых полей, и тогда их можно считать «реальными». Независимо от того, рассматриваются ли силы инерции в качестве «фиктивных» или «реальных», многие явления, о которых упоминалось в настоящем параграфе, объясняются с помощью сил инерции.

Силы инерции, действующие на тела в неинерциальной системе отсчета, пропорциональны их массам и при прочих равных условиях сообщают этим телам одинаковые ускорения. Поэтому в «поле сил инерции» эти тела движутся совершенно одинаково, если только одинаковы начальные условия. Тем же свойством обладают тела, находящиеся под действием сил поля тяготения.

При некоторых условиях силы инерции и силы тяготения невозможно различить. Например, движение тел в равноускоренном лифте происходит точно так же, как и в неподвижном лифте, висящем в однородном поле тяжести. Никакой эксперимент, выполненный внутри лифта, не может отделить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции.

Аналогия между силами тяготения и силами инерции лежит в основе **принципа эквивалентности гравитационных сил и сил инерции (принципа эквивалентности Эйнштейна):** все физические явления в поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем поле сил инерции, если напряженности обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а прочие начальные условия для рассматриваемых тел одинаковы. Этот принцип является основой **общей теории относительности.**

## Контрольные вопросы

- Как определяется гравитационная постоянная и каков ее физический смысл?
- Что такое вес тела? В чем отличие веса тела от силы тяжести?
- Как объяснить возникновение невесомости при свободном падении?
- Что такое напряженность поля тяготения?
- Какое поле тяготения называется однородным? центральным?
- Какие величины вводятся для характеристики поля тяготения и какова связь между ними? Дайте их определения.
- Известно, что сила тяготения пропорциональна массе тела. Почему же тяжелое тело не падает быстрее легкого?
- Покажите, что силы тяготения консервативны.
- Чему равно максимальное значение потенциальной энергии системы из двух тел, находящихся в поле тяготения? Когда оно достигается?
- Какие траектории движения имеют спутники, получившие первую и вторую космические скорости?
- Как вычисляются первая и вторая космические скорости?
- Когда и почему необходимо рассматривать силы инерции?
- Что такое силы инерции? Чем они отличаются от сил, действующих в инерциальных системах отсчета?
- Как направлены центробежная сила инерции и сила Кориолиса? Когда они проявляются? От чего зависят?
- В северном полушарии производится выстрел вдоль меридиана на север. Как скажется на движении снаряда суточное вращение Земли?
- Сформулируйте и поясните принцип эквивалентности Эйнштейна.

## Задачи

**5.1.** Два одинаковых однородных шара из одинакового материала, соприкасаясь друг с другом, притягиваются. Определить, как изменится сила притяжения, если массу шаров увеличить в $n=4$ раза. [Возрастет в 6,35 раза]

**5.2.** Плотность вещества некоторой шарообразной планеты составляет 3 г/см$^3$. Каким должен быть период обращения планеты вокруг собственной оси, чтобы на экваторе тела были невесомыми? [$T=\sqrt{3\pi/(G\rho)}=1{,}9$ ч]

**5.3.** Определить, в какой точке (считая от Земли) на прямой, соединяющей центры Земли и Луны, напряженность поля тяготения равна нулю. Расстояние между центрами Земли и Луны равно $R$, масса Земли в 81 раз больше массы Луны. [0,9 $R$]

**5.4.** Два одинаковых однородных шара из одинакового материала соприкасаются друг с другом. Определить, как изменится потенциальная энергия их гравитационного взаимодействия, если массу шаров увеличить в четыре раза. [Возрастет в 14,6 раза]

**5.5.** Два спутника одинаковой массы движутся вокруг Земли по круговым орбитам радиусов $R_1$ и $R_2$. Определить: 1) отношение полных энергий спутников $E_1/E_2$; 2) отношение их моментов импульса $L_1/L_2$. [1) $R_2/R_1$; 2) $\sqrt{R_1/R_2}$]

**5.6.** Вагон катится вдоль горизонтального участка дороги. Сила трения составляет 20% от веса вагона. К потолку вагона на нити подвешен шарик массой 10 г. Определить: 1) силу, действующую на нить; 2) угол отклонения нити от вертикали. [1) 0,10 Н; 2) 11°35′]

**5.7.** Тело массой 1,5 кг, падая свободно в течение 5 с, попадает на Землю в точку с географической широтой $\varphi=45°$. Учитывая вращение Земли, нарисовать и определить все силы, действующие на тело в момент его падения на Землю. [1) 14,7 Н; 2) 35,7 Н; 3) 7,57 мН]

# Глава 6
# Элементы механики жидкостей

## § 28. Давление в жидкости и газе

Молекулы газа, совершая беспорядочное, хаотическое движение, не связаны или весьма слабо связаны силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и в результате соударений стремятся разлететься во все стороны, заполняя весь предоставленный им объем, т. е. объем газа определяется объемом того сосуда, который газ занимает.

Как и газ, жидкость принимает форму того сосуда, в который она заключена. Но в жидкостях в отличие от газов среднее расстояние между молекулами остается практически постоянным, поэтому жидкость обладает практически неизменным объемом.

Хотя свойства жидкостей и газов во многом отличаются, в ряде механических явлений их поведение определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями. Поэтому **гидроаэромеханика** — раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами,— использует *единый подход* к изучению жидкостей и газов.

В механике с большой степенью точности жидкости и газы рассматриваются как **сплошные**, непрерывно распределенные в занятой ими части пространства. Плотность жидкости мало зависит от давления. Плотность же газов от давления зависит существенно. Из опыта известно, что сжимаемостью жидкости и газа во многих задачах можно пренебречь и пользоваться единым понятием **несжимаемой жидкости** — жидкости, плотность которой всюду одинакова и не изменяется со временем.

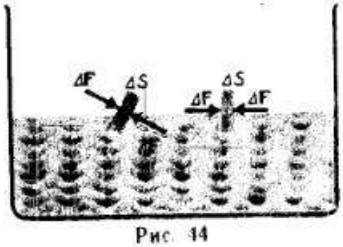


Рис. 44

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от нее, будут действовать на каждый ее элемент $\Delta S$ с силами $\Delta \mathbf{F}$, которые независимо от того, как пластинка ориентирована, будут равны по модулю и направлены перпендикулярно площадке $\Delta S$, так как наличие касательных сил привело бы частицы жидкости в движение (рис. 44).

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется **давлением** $p$ жидкости:

$$p = \Delta F / \Delta S.$$

Единица давления — **паскаль** (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м$^2$ (1 Па = 1 Н/м$^2$).

Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется **закону Паскаля** *: давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.

Рассмотрим, как влияет вес жидкости на распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости. При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость несжимаема, то ее плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении $S$ столба жидкости, его высоте $h$ и плотности $\rho$ вес $P = \rho g S h$, а давление на нижнее основание

$$p = P/S = \rho g S h / S = \rho g h, \qquad (28.1)$$

* Б. Паскаль (1623—1662) — французский ученый.

т. е. давление изменяется линейно с высотой. Давление $\rho gh$ называется **гидростатическим давлением.**

Согласно формуле (28.1), сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, определяемая **законом Архимеда:** на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа):

$$F_A = \rho g V,$$

где $\rho$ — плотность жидкости, $V$ — объем погруженного в жидкость тела.

## § 29. Уравнение неразрывности

Движение жидкостей называется **течением,** а совокупность частиц движущейся жидкости — **потоком.** Графически движение жидкостей изображается с помощью **линий тока,** которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рис. 45). Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течет медленнее. Таким образом, по картине линий тока можно судить о направлении и модуле скорости в разных точках пространства, т. е. можно определить состояние движения жидкости. Линии тока в жидкости можно «проявить», например, подмешав в нее какие-либо заметные взвешенные частицы.

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют **трубкой тока.** Течение

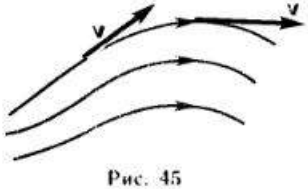



Рис. 45

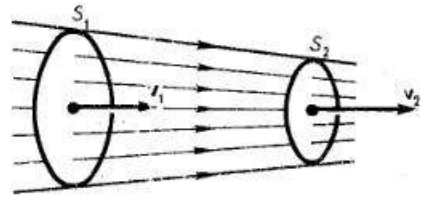



Рис. 46

жидкости называется **установившимся (или стационарным),** если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются.

Рассмотрим какую-либо трубку тока. Выберем два ее сечения $S_1$ и $S_2$, перпендикулярные направлению скорости (рис. 46).

За время $\Delta t$ через сечение $S$ проходит объем жидкости $Sv\Delta t$; следовательно, за 1 с через $S_1$ пройдет объем жидкости $S_1v_1$, где $v_1$ — скорость течения жидкости в месте сечения $S_1$. Через сечение $S_2$ за 1 с пройдет объем жидкости $S_2v_2$, где $v_2$ — скорость течения жидкости в месте сечения $S_2$. Здесь предполагается, что скорость жидкости в сечении постоянна. Если жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$), то через сечение $S_2$ пройдет такой же объем жидкости, как и через сечение $S_1$, т. е.

$$S_1v_1 = S_2v_2 = \text{const} \qquad (29.1)$$

Следовательно, произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока. Соотношение (29.1) называется **уравнением неразрывности** для несжимаемой жидкости.

## § 30. Уравнение Бернулли и следствия из него

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости (*физическая абстракция*, т. е. воображаемая жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения) трубку тока, ограниченную сечениями $S_1$ и $S_2$, по которой слева направо течет жидкость (рис. 47). Пусть в месте сечения $S_1$ скорость течения $v_1$, давление $p_1$ и высота, на которой это сечение расположено, $h_1$. Аналогично, в месте сечения $S_2$ скорость тече-

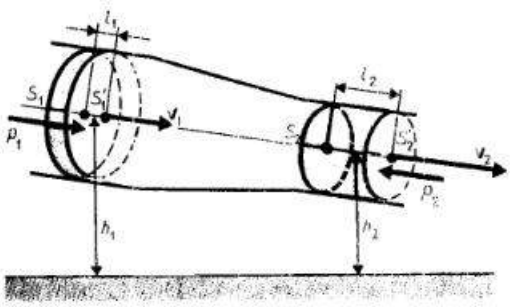



Рис. 47

ния $v_2$, давление $p_2$ и высота сечения $h_2$. За малый промежуток времени $\Delta t$ жидкость перемещается от сечений $S_1$ и $S_2$ к сечениям $S_1'$ и $S_2'$.

Согласно закону сохранения энергии, изменение полной энергии $E_2 - E_1$ идеальной несжимаемой жидкости должно быть равно работе $A$ внешних сил по перемещению массы $m$ жидкости:

$$E_2 - E_1 = A, \qquad (30.1)$$

где $E_1$ и $E_2$ — полные энергии жидкости массой $m$ в местах сечений $S_1$ и $S_2$ соответственно.

С другой стороны, $A$ — это работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключенной между сечениями $S_1$ и $S_2$, за рассматриваемый малый промежуток времени $\Delta t$. Для перенесения массы $m$ от $S_1$ до $S_1'$ жидкость должна переместиться на расстояние $l_1 = v_1 \Delta t$ и от $S_2$ до $S_2'$ — на расстояние $l_2 = v_2 \Delta t$. Отметим, что $l_1$ и $l_2$ настолько малы, что всем точкам объемов, закрашенных на рис. 47, приписывают постоянные значения скорости $v$, давления $p$ и высоты $h$. Следовательно,

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \qquad (30.2)$$

где $F_1 = p_1 S_1$ и $F_2 = -p_2 S_2$ (отрицательна, так как направлена в сторону, противоположную течению жидкости; рис. 47).

Полные энергии $E_1$ и $E_2$ будут складываться из кинетической и потенциальной энергий массы $m$ жидкости:

$$E_1 = \frac{m v_1^2}{2} + mgh_1, \qquad (30.3)$$

$$E_2 = \frac{m v_2^2}{2} + mgh_2. \qquad (30.4)$$

Подставляя (30.3) и (30.4) в (30.1) и приравнивая (30.1) и (30.2), получим

$$\frac{m v_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t =$$

$$= \frac{m v_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t. \qquad (30.5)$$

Согласно уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости (29.1), объем, занимаемый жидкостью, остается постоянным, т. е.

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t.$$

Разделив выражение (30.5) на $\Delta V$, получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2,$$

где $\rho$ — плотность жидкости. Но так как сечения выбирались произвольно, то можем записать

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \qquad (30.6)$$

Выражение (30.6) выведено швейцарским физиком Д. Бернулли (1700—1782; опубликовано в 1738 г.) и называется **уравнением Бернулли.** Как видно из его вывода, уравнение Бернулли — выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение которых не очень велико.

Величина $p$ в формуле (30.6) называется **статическим давлением** (давление жидкости на поверхность обтекаемого ею тела), величина $\rho v^2/2$ — **динамическим давлением.** Как уже указывалось выше (см. § 28), величина $\rho g h$ представляет собой **гидростатическое давление.**

Для горизонтальной трубки тока ($h_1 = h_2$) выражение (30.6) принимает вид

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}, \qquad (30.7)$$

где $p + \rho v^2/2$ называется **полным давлением.**

Из уравнения Бернулли (30.7) для горизонтальной трубки тока и уравнения неразрывности (29.1) следует, что при те-

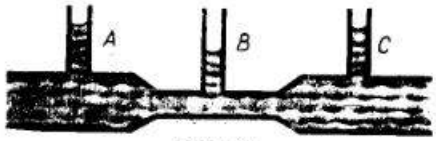



Рис. 48

чении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах, т. е. там, где скорость меньше. Это можно продемонстрировать, установив вдоль трубы ряд **манометров** (рис. 48). В соответствии с уравнением Бернулли опыт показывает, что в манометрической трубке $B$, прикрепленной к узкой части трубы, уровень жидкости ниже, чем в манометрических трубках $A$ и $C$, прикрепленных к широкой части трубы.

Так как динамическое давление связано со скоростью движения жидкости (газа), то уравнение Бернулли позволяет измерять скорость потока жидкости. Для этого применяется трубка Пито — Прандтля (рис. 49). Прибор состоит из двух изогнутых под прямым углом трубок, противоположные концы которых присоединены к манометру. С помощью одной из трубок измеряется полное давление ($p_0$), с помощью другой — статическое ($p$). Манометром измеряется разность давлений:

$$p_0 - p = \rho_0 g h, \qquad (30.8)$$

где $\rho_0$ — плотность жидкости в манометре. С другой стороны, согласно уравнению Бернулли, разность полного и статического давлений равна динамическому давлению:

$$p_0 - p = \rho v^2/2. \qquad (30.9)$$

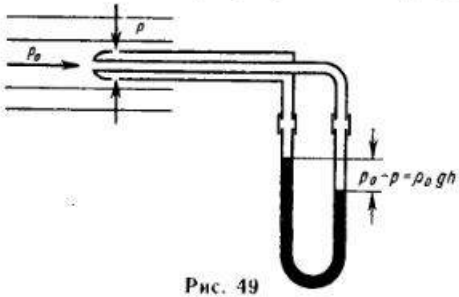



Рис. 49

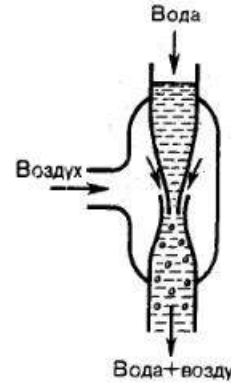



Рис. 50

Из формул (30.8) и (30.9) получаем искомую скорость потока жидкости:

$$v = \sqrt{2\rho_0 g h/\rho}.$$

Уменьшение статического давления в точках, где скорость потока больше, положено в основу работы **водоструйного насоса** (рис. 50). Струя воды подается в трубку, открытую в атмосферу, так что давление на выходе из трубки равно атмосферному. В трубке имеется сужение, по которому вода течет с большей скоростью. В этом месте давление меньше атмосферного. Это давление устанавливается и в откачанном сосуде, который связан с трубкой через разрыв, имеющийся в ее узкой части. Воздух увлекается вытекающей с большой скоростью водой из узкого конца. Таким образом можно откачивать воздух из сосуда до давления 100 мм рт. ст. (1 мм рт. ст. = 133,32 Па).

Уравнение Бернулли используется для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда. Рассмотрим цилиндрический сосуд с жидкостью, в боковой стенке которого на некоторой глубине ниже уровня жидкости имеется маленькое отверстие (рис. 51).

Рассмотрим два сечения (на уровне $h_1$ свободной поверхности жидкости в сосуде и на уровне $h_2$ выхода ее из отверстия). Напишем для них уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Так как давления $p_1$ и $p_2$ в жидкости на уровнях первого и второго сечений равны

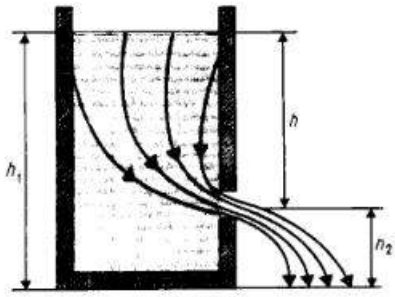



Рис. 51

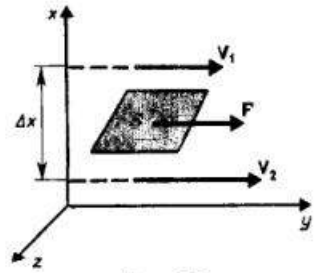



Рис. 52

атмосферному, т. е. $p_1 = p_2$, то уравнение будет иметь вид

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{v_2^2}{2} + gh_2.$$

Из уравнения неразрывности (29.1) следует, что $v_2/v_1 = S_1/S_2$, где $S_1$ и $S_2$ — площади поперечных сечений сосуда и отверстия. Если $S_1 \gg S_2$, то членом $v_1^2/2$ можно пренебречь и

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh,$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Это выражение получило название **формулы Торричелли** *.

## § 31. Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей

**Вязкость (внутреннее трение)** — это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

Сила внутреннего трения **F** тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя $S$ (рис. 52), и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою. На рисунке представлены два слоя, отстоящие друг от друга на расстоянии $\Delta x$ и движущиеся со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. При этом $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \Delta\mathbf{v}$. Направление, в котором отсчитывается расстояние между слоями, *перпендикулярно* скорости течения слоев. Величина $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении $x$, перпендикулярном направлению движения слоев, и называется **градиентом скорости**. Таким образом, модуль силы внутреннего трения

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S, \qquad (31.1)$$

где коэффициент пропорциональности $\eta$, зависящий от природы жидкости, называется **динамической вязкостью** (или просто **вязкостью**).

Единица вязкости — **паскаль-секунда** (Па·с): 1 Па·с равен динамической вязкости среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, возникает сила внутреннего трения в 1 Н на 1 м$^2$ поверхности касания слоев (1 Па·с = 1 Н·с/м$^2$).

Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем бóльшие силы внутреннего трения в ней возникают. Вязкость зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей $\eta$ с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на различие в них

* Э. Торричелли (1608—1647) — итальянский физик и математик.

механизмов внутреннего трения. Особенно сильно от температуры зависит вязкость масел. Например, вязкость касторового масла в интервале 18—40 °С падает в четыре раза. Советский физик П. Л. Капица (1894—1984; Нобелевская премия 1978 г.) открыл, что при температуре 2,17 К жидкий гелий переходит в сверхтекучее состояние, в котором его вязкость равна нулю.

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется **ламинарным (слоистым)**, если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и **турбулентным (вихревым)**, если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы.

При турбулентном течении частицы жидкости приобретают составляющие скоростей, перпендикулярные течению, поэтому они могут переходить из одного слоя в другой. Скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Так как частицы жидкости переходят из одного слоя в другой, то их скорости в различных слоях мало отличаются. Из-за большого градиента скоростей у поверхности трубы обычно происходит образование вихрей.

Профиль усредненной скорости при турбулентном течении в трубах (рис. 53) отличается от параболического профиля при ламинарном течении более быстрым возрастанием скорости у стенок трубы и меньшей кривизной в центральной части течения.

Английский ученый О. Рейнольдс (1842—1912) в 1883 г. установил, что характер течения зависит от безразмерной величины, называемой **числом Рейнольдса**:

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho\langle v\rangle d}{\eta}=\frac{\langle v\rangle d}{\nu},$$

где $\nu=\eta/\rho$ — **кинематическая вязкость**; $\rho$ — плотность жидкости; $\langle v\rangle$ — средняя по сечению трубы скорость жидкости; $d$ — характерный линейный размер, например диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ($\mathrm{Re}\leqslant 1000$) наблюдается ламинарное течение, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области $1000\leqslant\mathrm{Re}\leqslant 2000$, а при $\mathrm{Re}=2300$ (для гладких труб) течение — турбулентное. Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

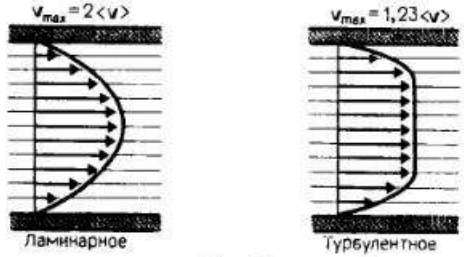



Рис. 53

## § 32. Методы определения вязкости

**1. Метод Стокса** *. Этот метод определения вязкости основан на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

На шарик, падающий в жидкости вертикально вниз, действуют три силы: сила тяжести $P=\frac{4}{3}\pi r^3\rho g$ ($\rho$ — плотность шарика), сила Архимеда $F_A=\frac{4}{3}\pi r^3\rho' g$ ($\rho'$ — плотность жидкости) и сила сопротивления, эмпирически установленная Дж. Стоксом: $F=6\pi\eta r v$, где $r$ — радиус шарика, $v$ — его скорость. При равномерном движении шарика

$$P=F_A+F,$$

* Дж. Стокс (1819—1903) — английский физик и математик.

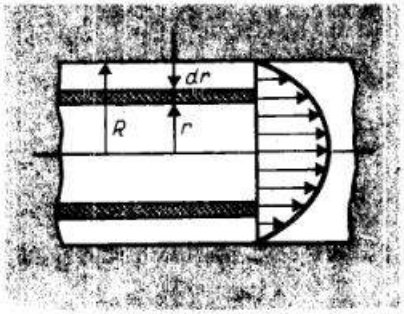



Рис. 54

или

$$^4/_3\pi r^3\rho g = {}^4/_3\pi r^3\rho' g + 6\pi\eta r v,$$

откуда

$$v = \frac{2(\rho-\rho')gr^2}{9\eta}.$$

Измерив скорость равномерного движения шарика, можно определить вязкость жидкости (газа).

**2. Метод Пуазейля** *. Этот метод основан на ламинарном течении жидкости в тонком капилляре. Рассмотрим капилляр радиусом $R$ и длиной $l$. В жидкости мысленно выделим цилиндрический слой радиусом $r$ и толщиной $dr$ (рис. 54). Сила внутреннего трения (см. (31.1)), действующая на боковую поверхность этого слоя,

$$F = -\eta\frac{dv}{dr}dS = -\eta 2\pi r l\frac{dv}{dr},$$

где $dS$ — боковая поверхность цилиндрического слоя; знак минус означает, что при возрастании радиуса скорость уменьшается.

Для установившегося течения жидкости сила внутреннего трения, действующая на боковую поверхность цилиндра, уравновешивается силой давления, действующей на его основание:

$$-\eta 2\pi r l\frac{dv}{dr} = \Delta p\pi r^2,$$

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l}r\,dr.$$

После интегрирования, полагая, что у стенок имеет место прилипание жидкости, т. е. скорость на расстоянии $R$ от оси равна нулю, получим

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2).$$

Отсюда видно, что скорости частиц жидкости распределяются по параболическому закону, причем вершина параболы лежит на оси трубы (см. также рис. 53).

За время $t$ из трубы вытечет жидкость, объем которой

$$V = \int_0^R vt\cdot 2\pi r\,dr = \frac{2\pi\Delta pt}{4\eta l}\int_0^R r(R^2-r^2)\,dr =$$

$$= \frac{\pi\Delta pt}{2\eta l}\left[\frac{r^2R^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi R^4\Delta pt}{8\eta l},$$

откуда вязкость

$$\eta = \frac{\pi R^4\Delta pt}{8Vl}.$$

## § 33. Движение тел в жидкостях и газах

Одной из важнейших задач аэро- и гидродинамики является исследование движения твердых тел в газе и жидкости, в частности изучение тех сил, с которыми среда действует на движущееся тело. Эта проблема приобрела особенно большое значение в связи с бурным развитием авиации и увеличением скорости движения морских судов.

На тело, движущееся в жидкости или газе, действуют две силы (равнодействую-

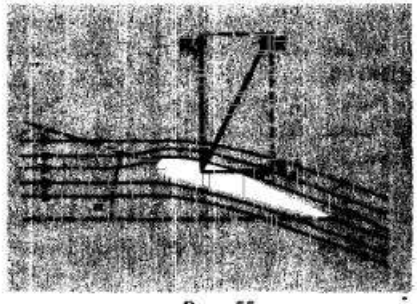


Рис. 55

* Ж. Пуазейль (1799—1868) — французский физиолог и физик.

щую их обозначим **R**), одна из которых ($\mathbf{R}_x$) направлена в сторону, противоположную движению тела (в сторону потока),— **лобовое сопротивление,** а вторая ($\mathbf{R}_y$) перпендикулярна этому направлению — **подъемная сила** (рис. 55).

Если тело симметрично и его ось симметрии совпадает с направлением скорости, то на него действует только лобовое сопротивление, подъемная же сила в этом случае равна нулю. Можно доказать,

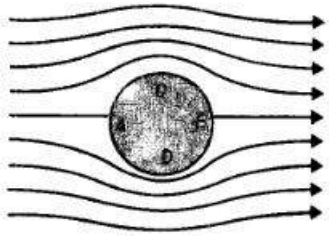


Рис. 56

что в *идеальной жидкости* равномерное движение происходит без лобового сопротивления. Если рассмотреть движение цилиндра в такой жидкости (рис. 56), то картина линий тока симметрична как относительно прямой, проходящей через точки $A$ и $B$, так и относительно прямой, проходящей через точки $C$ и $D$, т. е. результирующая сила давления на поверхность цилиндра будет равна нулю.

Иначе обстоит дело при движении тел в вязкой жидкости (особенно при увеличении скорости обтекания). Вследствие вязкости среды в области, прилегающей к поверхности тела, образуется пограничный слой частиц, движущихся с меньшими скоростями. В результате тормозящего действия этого слоя возникает вращение частиц и движение жидкости в пограничном слое становится вихревым. Если тело не имеет обтекаемой формы (нет плавно утончающейся хвостовой части), то пограничный слой жидкости отрывается от поверхности тела. За телом возникает течение жидкости (газа), направленное противоположно набегающему потоку. Оторвавшийся по-

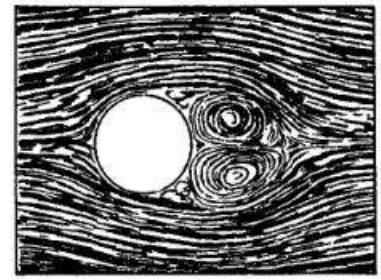


Рис. 57

граничный слой, следуя за этим течением, образует вихри, вращающиеся в противоположные стороны (рис. 57).

Лобовое сопротивление зависит от формы тела и его положения относительно потока, что учитывается безразмерным коэффициентом сопротивления $C_x$, определяемым экспериментально:

$$R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S, \qquad (33.1)$$

где $\rho$ — плотность среды; $v$ — скорость движения тела; $S$ — наибольшее поперечное сечение тела.

Составляющую $R_x$ можно значительно уменьшить, подобрав тело такой формы, которая не способствует образованию завихрения.

Подъемная сила может быть определена формулой, аналогичной (33.1):

$$R_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где $C_y$ — безразмерный коэффициент подъемной силы.

Для крыла самолета требуется большая подъемная сила при малом лобовом сопротивлении (это условие выполняется при малых **углах атаки** $\alpha$ (угол к потоку); см. рис. 55). Крыло тем лучше удовлетворяет этому условию, чем больше величина $K = C_y/C_x$, называемая **качеством крыла.** Большие заслуги в конструировании требуемого профиля крыла и изучении влияния геометрической формы тела на коэффициент подъемной силы принадлежат «отцу русской авиации» Н. Е. Жуковскому (1847—1921).

## Контрольные вопросы

- Что такое давление в жидкости? Давление — величина векторная или скалярная? Какова единица давления в СИ?
- Сформулируйте и поясните законы Паскаля и Архимеда.
- Что называют линией тока? трубкой тока?
- Что характерно для установившегося течения жидкости?
- Каков физический смысл и как вывести уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости?
- Какой закон выражает уравнение Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости? Выведите это уравнение.
- Как в потоке жидкости измерить статическое давление? динамическое давление? полное давление?
- Что такое градиент скорости?
- Каков физический смысл коэффициента динамической вязкости?
- Какое течение жидкости называется ламинарным? турбулентным? Что характеризует число Рейнольдса?
- Поясните (с выводом) практическое применение методов Стокса и Пуазейля.
- Каковы причины возникновения лобового сопротивления тела, движущегося в жидкости? Может ли оно быть равным нулю?
- Как объяснить возникновение подъемной силы (см. рис. 55)?

## Задачи

**6.1.** Полый железный шар ($\rho = 7{,}87$ г/см$^3$) весит в воздухе 5 Н, а в воде ($\rho' = 1$ г/см$^3$) — 3 Н. Пренебрегая выталкивающей силой воздуха, определить объем внутренней полости шара. [ 139 см$^3$ ]

**6.2.** Бак цилиндрической формы площадью основания $S = 1$ м$^2$ и объемом $V = 3$ м$^3$ заполнен водой. Пренебрегая вязкостью воды, определить время $t$, необходимое для опустошения бака, если на дне бака образовалось круглое отверстие площадью $S_1 = 10$ см$^2$.

$$\left[ t = \frac{1}{S_1}\sqrt{\frac{2SV}{g}} = 13 \text{ мин} \right]$$

**6.3.** Сопло фонтана, дающего вертикальную струю высотой $H = 5$ м, имеет форму усеченного конуса, сужающегося вверх. Диаметр нижнего сечения $d_1 = 6$ см, верхнего — $d_2 = 2$ см. Высота сопла $h = 1$ м. Пренебрегая сопротивлением воздуха в струе и сопротивлением в сопле, определить: 1) расход воды в 1 с, подаваемой фонтаном; 2) разность $\Delta p$ давления в нижнем сечении и атмосферного давления. Плотность воды $\rho = 1$ г/см$^3$. [ 1) $\sqrt{2gH}\,\pi d_2^2/4 = 3{,}1 \times 10^{-3}$ м$^3$/с; 2) $\Delta p = \rho g h + \rho g H (1 - d_2^4 / d_1^4) = 58.3$ кПа ]

**6.4.** На горизонтальной поверхности стоит цилиндрический сосуд, в боковой поверхности которого имеется отверстие. Поперечное сечение отверстия значительно меньше поперечного сечения самого сосуда. Отверстие расположено на расстоянии $h_1 = 64$ см ниже уровня воды в сосуде, который поддерживается постоянным, и на расстоянии $h_2 = 25$ см от дна сосуда. Пренебрегая вязкостью воды, определить, на каком расстоянии по горизонтали от сосуда падает на поверхность струя, вытекающая из отверстия. [80 см]

**6.5.** В широком сосуде, наполненном глицерином (плотность $\rho = 1{,}2$ г/см$^3$), падает с установившейся скоростью 5 см/с стеклянный шарик ($\rho' = 2{,}7$ г/см$^3$) диаметром 1 мм. Определить динамическую вязкость глицерина. [1,6 Па·с]

**6.6.** В боковую поверхность цилиндрического сосуда, установленного на столе, вставлен на высоте $h_1 = 5$ см от его дна капилляр внутренним диаметром $d = 2$ мм и длиной $l = 1$ см. В сосуде поддерживается постоянный уровень машинного масла (плотность $\rho = 0{,}9$ г/см$^3$ и динамическая вязкость $\eta = 0{,}1$ Па·с) на высоте $h_2 = 80$ см выше капилляра. Определить, на каком

расстоянии по горизонтали от конца капилляра падает на поверхность стола струя масла, вытекающая из отверстия. [ $s = d^2 \rho h_2 \sqrt{2gh_1} / (32 l \eta) = 8{,}9$ см ]

**6.7.** Определить наибольшую скорость, которую может приобрести свободно падающий в воздухе ($\rho = 1{,}29$ г/см$^3$) стальной шарик ($\rho' = 9$ г/см$^3$) массой $m = 20$ г. Коэффициент $C_x$ принять равным 0,5. [ 94 см/с ]

## Глава 7

# Элементы специальной (частной) теории относительности

### § 34. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности

Если системы отсчета движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно и в одной из них справедливы законы динамики Ньютона, то эти системы являются инерциальными. Установлено также, что во всех инерциальных системах отсчета законы классической динамики имеют одинаковую форму; в этом суть **механического принципа относительности (принципа относительности Галилея).**

Для его доказательства рассмотрим две системы отсчета: инерциальную систему $K$ (с координатами $x$, $y$, $z$), которую условно будем считать неподвижной, и систему $K'$ (с координатами $x'$, $y'$, $z'$), движущуюся относительно $K$ равномерно и прямолинейно со скоростью $\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} = \text{const}$). Отсчет времени начнем с момента, когда начала координат обеих систем совпадают. Пусть в произвольный момент времени $t$ расположение этих систем друг относительно друга имеет вид, изображенный на рис. 58. Скорость $\mathbf{u}$ направлена вдоль $OO'$, радиус-вектор, проведенный из $O$ в $O'$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{u}t$.

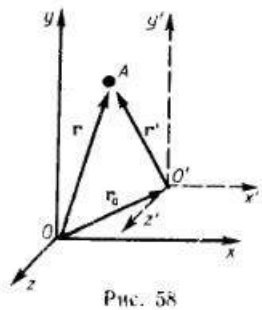



Рис. 58

Найдем связь между координатами произвольной точки $A$ в обеих системах. Из рис. 58 видно, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t. \qquad (34.1)$$

Уравнение (34.1) можно записать в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} x = x' + u_x t, \\ y = y' + u_y t, \\ z = z' + u_z t. \end{cases} \qquad (34.2)$$

Уравнения (34.1) и (34.2) носят название **преобразований координат Галилея.**

В частном случае, когда система $K'$ движется со скоростью $\mathbf{v}$ вдоль положительного направления оси $x$ системы $K$ (в начальный момент времени оси координат совпадают), преобразования координат Галилея имеют вид

$$\begin{cases} x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z'. \end{cases}$$

В классической механике предполагается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчета, т. е. к преобразованиям (34.2) можно добавить еще одно уравнение:

$$t = t'. \qquad (34.3)$$

Записанные соотношения справедливы лишь в случае классической механики ($u \ll c$), а при скоростях, сравнимых со скоростью света, преобразования Галилея заменяются более общими преобразованиями Лоренца * (§ 36).

Продифференцировав выражение (34.1) по времени (с учетом (34.3)), полу-

* Х. Лоренц (1853–1928) — нидерландский физик-теоретик.

чим уравнение

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}, \qquad (34.4)$$

которое представляет собой **правило сложения скоростей в классической механике.**

Ускорение в системе отсчета $K$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\mathbf{v}' + \mathbf{u})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{a}'.$$

Таким образом, ускорение точки $A$ в системах отсчета $K$ и $K'$, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, одинаково:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'. \qquad (34.5)$$

Следовательно, если на точку $A$ другие тела не действуют ($\mathbf{a} = 0$), то, согласно (34.5), и $\mathbf{a}' = 0$, т. е. система $K'$ является инерциальной (точка движется относительно нее равномерно и прямолинейно или покоится).

Таким образом, из соотношения (34.5) вытекает доказательство механического принципа относительности: уравнения динамики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой не изменяются, т. е. являются **инвариантными** по отношению к преобразованиям координат. Галилей обратил внимание, что никакими механическими опытами, проведенными в данной инерциальной системе отсчета, нельзя установить, покоится ли она или движется равномерно и прямолинейно. Например, сидя в каюте корабля, движущегося равномерно и прямолинейно, мы не можем определить, покоится корабль или движется, не выглянув в окно.

## § 35. Постулаты специальной (частной) теории относительности

Классическая механика Ньютона прекрасно описывает движение макротел, движущихся с малыми скоростями ($v \ll c$). Однако в конце XIX в. выяснилось, что выводы классической механики противоречат некоторым опытным данным, в частности при изучении движения быстрых заряженных частиц оказалось, что их движение не подчиняется законам механики. Далее возникли затруднения при попытках применить механику Ньютона к объяснению распространения света. Если источник и приемник света движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, то, согласно классической механике, измеренная скорость должна зависеть от относительной скорости их движения. Американский физик А. Майкельсон (1852—1913) в своем знаменитом опыте в 1881 г., а затем в 1887 г. совместно с Е. Морли (американский физик, 1838—1923) — **опыт Майкельсона — Морли** — пытался обнаружить движение Земли относительно эфира (эфирный ветер), применяя интерферометр Майкельсона (см. § 175). Обнаружить эфирный ветер Майкельсону не удалось, как впрочем, не удалось его обнаружить и в других многочисленных опытах. Опыты «упрямо» показывали, что скорости света в двух движущихся друг относительно друга системах равны. Это противоречило правилу сложения скоростей классической механики.

Одновременно было показано противоречие между классической теорией и уравнениями (см. § 139) Дж. К. Максвелла (английский физик, 1831—1879), лежащими в основе понимания света как электромагнитной волны.

Для объяснения этих и некоторых других опытных данных необходимо было создать новую механику, которая, объясняя эти факты, содержала бы ньютоновскую механику как предельный случай для малых скоростей ($v \ll c$). Это и удалось сделать А. Эйнштейну, одному из основателей современной физики, который, по словам В. И. Ленина, является одним «из великих преобразователей естествознания». А. Эйнштейн пришел к выводу о том, что мирового эфира — особой среды, которая могла бы быть принята в качестве абсолютной системы,— не существует. Существование постоянной скорости распространения света в вакууме находилось в согласии с уравнениями Максвелла.

Таким образом, А. Эйнштейн заложил основы **специальной теории относительности.** Эта теория представляет собой современную физическую теорию пространства и времени, в которой, как и в классической ньютоновской механике, предполагается, что время однородно (см. § 13), а про-

странство однородно (см. § 9) и изотропно (см. § 19). Специальная теория относительности часто называется также **релятивистской теорией**, а специфические явления, описываемые этой теорией,— **релятивистскими эффектами**.

В основе специальной теории относительности лежат **постулаты Эйнштейна**, сформулированные им в 1905 г.

**I. Принцип относительности:** никакие опыты (механические, электрические, оптические), проведенные внутри данной инерциальной системы отсчета, не дают возможности обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно; *все законы природы инвариантны* по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

**II. Принцип инвариантности скорости света:** *скорость света в вакууме* не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и *одинакова во всех инерциальных системах отсчета*.

Первый постулат Эйнштейна, являясь обобщением механического принципа относительности Галилея *на любые физические процессы*, утверждает, таким образом, что физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, а уравнения, описывающие эти законы, одинаковы по форме во всех инерциальных системах отсчета. Согласно этому постулату, все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны, т. е. явления (механические, электродинамические, оптические и др.) во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково.

Согласно второму постулату Эйнштейна, *постоянство скорости света — фундаментальное свойство природы*, которое констатируется как опытный факт.

Специальная теория относительности потребовала отказа от привычных представлений о пространстве и времени, принятых в классической механике, поскольку они противоречили принципу постоянства скорости света. Потеряло смысл не только абсолютное пространство, но и абсолютное время.

Постулаты Эйнштейна и теория, построенная на их основе, установили новый взгляд на мир и новые пространственно-временны́е представления, такие, например, как относительность длин и промежутков времени, относительность одновременности событий. Эти и другие следствия из теории Эйнштейна находят надежное экспериментальное подтверждение, являясь тем самым обоснованием постулатов Эйнштейна — обоснованием специальной теории относительности.

## § 36. Преобразования Лоренца

Анализ явлений в инерциальных системах отсчета, проведенный А. Эйнштейном на основе сформулированных им постулатов, показал, что классические преобразования Галилея несовместимы с ними и, следовательно, должны быть заменены преобразованиями, удовлетворяющими постулатам теории относительности.

Для иллюстрации этого вывода рассмотрим две инерциальные системы отсчета: $K$ (с координатами $x$, $y$, $z$) и $K'$ (с координатами $x'$, $y'$, $z'$), движущуюся относительно $K$ (вдоль оси $x$) со скоростью $\mathbf{v}=\text{const}$ (рис. 59). Пусть в начальный момент времени $t=t'=0$, когда начала координат $O$ и $O'$ совпадают, излучается световой импульс. Согласно второму постулату Эйнштейна, скорость света в обеих системах одна и та же и равна $c$. Поэтому если за время $t$ в системе $K$ сигнал дойдет до некоторой точки $A$ (рис. 59), пройдя расстояние

$$x=ct, \tag{36.1}$$

то в системе $K'$ координата светового импульса в момент достижения точки $A$

$$x'=ct', \tag{36.2}$$

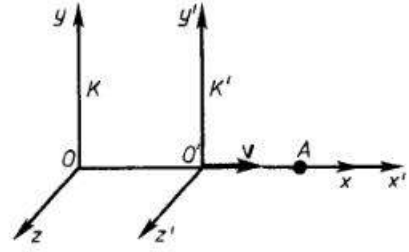



Рис. 59

где $t'$ — время прохождения светового импульса от начала координат до точки $A$ в системе $K'$. Вычитая (36.1) из (36.2), получим

$$x' - x = c(t' - t).$$

Так как $x' \neq x$ (система $K'$ перемещается по отношению к системе $K$), то

$$t' \neq t,$$

т. е. отсчет времени в системах $K$ и $K'$ различен — *отсчет времени имеет относительный характер* (в классической физике считается, что время во всех инерциальных системах отсчета течет одинаково, т. е. $t = t'$).

Эйнштейн показал, что в теории относительности классические преобразования Галилея, описывающие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой (см. § 34):

$$K \to K' \qquad K' \to K$$

$$\begin{cases} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t', \end{cases}$$

— заменяются преобразованиями Лоренца, удовлетворяющими постулатам Эйнштейна (формулы представлены для случая, когда $K'$ движется относительно $K$ со скоростью $v$ вдоль оси $x$).

Эти преобразования предложены Лоренцом в 1904 г., еще до появления теории относительности, как преобразования, относительно которых уравнения Максвелла (см. § 139) инвариантны.

**Преобразования Лоренца** имеют вид

$$K \to K' \qquad K' \to K$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1^2 - \beta}}; \end{cases} \tag{36.3}$$

$$\beta = v/c.$$

Из сравнения приведенных уравнений вытекает, что они симметричны и отличаются лишь знаком при $v$. Это очевидно, так как если скорость движения системы $K'$ относительно системы $K$ равна $v$, то скорость движения $K$ относительно $K'$ равна $-v$.

Из преобразований Лоренца вытекает также, что при малых скоростях (по сравнению со скоростью света), т. е. когда $\beta \ll 1$, они переходят в классические преобразования Галилея (в этом заключается суть **принципа соответствия**), которые являются, следовательно, предельным случаем преобразований Лоренца. При $v > c$ выражения (36.3) для $x$, $t$, $x'$, $t'$ теряют физический смысл (становятся мнимыми). Это находится, в свою очередь, в соответствии с тем, что движение со скоростью, большей скорости света в вакууме, невозможно.

Из преобразований Лоренца следует очень важный вывод о том, что как расстояние, так и промежуток времени между двумя событиями меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, в то время как в рамках преобразований Галилея эти величины считались абсолютными, не изменяющимися при переходе от системы к системе. Кроме того, как пространственные, так и временные преобразования (см. (36.3)) не являются независимыми, поскольку в закон преобразования координат входит время, а в закон преобразования времени — пространственные координаты, т. е. устанавливается взаимосвязь пространства и времени. Таким образом, теория Эйнштейна оперирует не с трехмерным пространством, к которому присоединяется понятие времени, а рассматривает неразрывно связанные пространственные и временные координаты, образующие четырехмерное пространство-время.

## § 37. Следствия из преобразований Лоренца

**1. Одновременность событий в разных системах отсчета.** Пусть в системе $K$ в точках с координатами $x_1$ и $x_2$ в моменты времени $t_1$ и $t_2$ происходят два события.

В системе $K'$ им соответствуют координаты $x_1'$ и $x_2'$ и моменты времени $t_1'$ и $t_2'$. Если *события в системе K происходят в одной точке* ($x_1 = x_2$) *и являются одновременными* ($t_1 = t_2$), то, согласно преобразованиям Лоренца (36.3),

$$x_1' = x_2', \quad t_1' = t_2',$$

т. е. *эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета.*

Если *события в системе K пространственно разобщены* ($x_1 \neq x_2$), *но одновременны* ($t_1 = t_2$), *то в системе K'*, согласно преобразованиям Лоренца (36.3),

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$t_1' = \frac{t - vx_1/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2' = \frac{t - vx_2/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$x_1' \neq x_2', \quad t_1' \neq t_2'.$$

Таким образом, в системе $K'$ эти события, *оставаясь пространственно разобщенными, оказываются и неодновременными.* Знак разности $t_2' - t_1'$ определяется знаком выражения $v(x_1 - x_2)$, поэтому в различных точках системы отсчета $K'$ (при разных $v$) разность $t_2' - t_1'$ будет различной по величине и может отличаться по знаку. Следовательно, в одних системах отсчета первое событие может предшествовать второму, в то время как в других системах отсчета, наоборот, второе событие предшествует первому. Сказанное, однако, не относится к причинно-следственным событиям, так как можно показать, что порядок следования причинно-следственных событий одинаков во всех инерциальных системах отсчета.

**2. Длительность событий в разных системах отсчета.** Пусть в некоторой точке (с координатой $x$), покоящейся относительно системы $K$, происходит событие, длительность которого (разность показаний часов в конце и начале события) $\tau = t_2 - t_1$, где индексы 1 и 2 соответствуют началу и концу события. Длительность этого же события в системе $K$

$$\tau' = t_2' - t_1', \tag{37.1}$$

причем началу и концу события, согласно (36.3), соответствуют

$$t_1' = \frac{t_1 - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2' = \frac{t_2 - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{37.2}$$

Подставляя (37.2) в (37.1), получим

$$\tau' = (t_2 - t_1)/\sqrt{1-\beta^2},$$

или

$$\tau' = \tau/\sqrt{1-\beta^2}. \tag{37.3}$$

Из соотношения (37.3) вытекает, что $\tau \leqslant \tau'$, т. е. *длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна.* Этот результат может быть еще истолкован следующим образом: интервал времени $\tau'$, отсчитанный по часам в системе $K'$, с точки зрения наблюдателя в системе $K$, продолжительнее интервала $\tau$, отсчитанного по его часам. Следовательно, *часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов*, т. е. ход часов замедляется в системе отсчета, относительно которой часы движутся. На основании относительности понятий «неподвижная» и «движущаяся» системы соотношения для $\tau$ и $\tau'$ обратимы. Из (37.3) следует, что замедление хода часов становится заметным лишь при скоростях, близких к скорости света в вакууме.

В связи с обнаружением релятивистского эффекта замедления хода часов в свое время возникла проблема «парадокса часов» (иногда рассматривается как «парадокс близнецов»), вызвавшая многочисленные дискуссии. Представим себе, что осуществляется фантастический космический полет к звезде, находящейся на расстоянии 500 световых лет (расстояние, на которое свет от звезды до Земли доходит за 500 лет), со скоростью, близкой

к скорости света ($\sqrt{1-\beta^2}=0{,}001$). По земным часам полет до звезды и обратно продлится 1000 лет, в то время как для системы корабля и космонавта в нем такое же путешествие займет всего 1 год. Таким образом, космонавт возвратится на Землю в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ раз более молодым, чем его брат-близнец, оставшийся на Земле. Это явление, получившее название **парадокса близнецов**, в действительности парадокса не содержит. Дело в том, что принцип относительности утверждает равноправность не всяких систем отсчета, а только инерциальных. Неправильность рассуждения состоит в том, что системы отсчета, связанные с близнецами,— не эквивалентны: земная система инерциальна, а корабельная — неинерциальна, поэтому к ним принцип относительности неприменим.

Релятивистский эффект замедления хода часов является совершенно реальным и получил экспериментальное подтверждение при изучении нестабильных, самопроизвольно распадающихся элементарных частиц в опытах с $\pi$-мезонами. Среднее время жизни покоящихся $\pi$-мезонов (по часам, движущимся вместе с ними) $\tau \approx 2{,}2 \cdot 10^{-8}$ с. Следовательно, $\pi$-мезоны, образующиеся в верхних слоях атмосферы (на высоте $\approx 30$ км) и движущиеся со скоростью, близкой к скорости света, должны были бы проходить расстояния $c\tau \approx 6{,}6$ м, т. е. не могли бы достигать земной поверхности, что противоречит действительности. Объясняется это релятивистским эффектом замедления хода времени: для земного наблюдателя срок жизни $\pi$-мезона $\tau' = \tau/\sqrt{1-\beta^2}$, а путь этих частиц в атмосфере $v\tau' = \beta c\tau' = \beta c\tau/\sqrt{1-\beta^2}$. Так как $\beta \approx 1$, то $v\tau' \gg c\tau$.

**3. Длина тел в разных системах отсчета.** Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси $x'$ и покоящийся относительно системы $K'$. Длина стержня в системе $K'$ будет $l'_0 = x'_2 - x'_1$, где $x'_1$ и $x'_2$ — не изменяющиеся со временем $t'$ координаты начала и конца стержня, а индекс 0 показывает, что в системе отсчета $K'$ стержень покоится. Определим длину этого стержня в системе $K$, относительно которой он движется со скоростью $v$. Для этого необходимо измерить координаты его концов $x_1$ и $x_2$ в системе $K$ *в один и тот же момент времени* $t$. Их разность $l = x_2 - x_1$ и даст длину стержня в системе $K$. Используя преобразования Лоренца (36.3), получим

$$l'_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

т. е.

$$l'_0 = l/\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (37.4)$$

Таким образом, длина стержня, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины, измеренной в системе, относительно которой стержень покоится. Если стержень покоится в системе $K$, то, определяя его длину в системе $K'$, опять-таки придем к выражению (37.4).

Из выражения (37.4) следует, что линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз, т. е. так называемое **лоренцево сокращение длины** *тем больше, чем больше скорость движения.* Из второго и третьего уравнений преобразований Лоренца (36.3) следует, что

$$y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1 \quad \text{и} \quad z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1,$$

т. е. *поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.* Таким образом, *линейные размеры тела наибольшие в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело покоится.*

**4. Релятивистский закон сложения скоростей.** Рассмотрим движение материальной точки в системе $K'$, в свою очередь движущейся относительно системы $K$ со скоростью $v$. Определим скорость этой же точки в системе $K$. Если в системе $K$ движение точки в каждый момент времени $t$ определяется координатами $x$, $y$, $z$, а в системе $K'$ в момент времени $t'$ —

координатами $x'$, $y'$, $z'$, то

$$u_x=\frac{dx}{dt},\quad u_y=\frac{dy}{dt},\quad u_z=\frac{dz}{dt}$$

и

$$u'_x=\frac{dx'}{dt'},\quad u'_y=\frac{dy'}{dt'},\quad u'_z=\frac{dz'}{dt'}$$

представляют собой соответственно проекции на оси $x$, $y$, $z$ и $x'$, $y'$, $z'$ вектора скорости рассматриваемой точки относительно систем $K$ и $K'$.

Согласно преобразованиям Лоренца (36.3),

$$dx=\frac{dx'+v\,dt'}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad dy=dy',\quad dz=dz',$$

$$dt=\frac{dt'+v\,dx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Произведя соответствующие преобразования, получаем **релятивистский закон сложения скоростей** специальной теории относительности:

$$K'\to K \qquad\qquad K\to K'$$

$$\begin{cases} u_x=\dfrac{u'_x+v}{1+vu'_x/c^2}, \\ u_y=\dfrac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2}, \\ u_z=\dfrac{u'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'_x=\dfrac{u_x-v}{1-vu_x/c^2}, \\ u'_y=\dfrac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-vu_x/c^2}, \\ u'_z=\dfrac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-vu_x/c^2}. \end{cases} \tag{37.5}$$

Если материальная точка движется параллельно оси $x$, то скорость $u$ относительно системы $K$ совпадает с $u_x$, а скорость $u'$ относительно $K'$ — с $u'_x$. Тогда закон сложения скоростей примет вид

$$u=\frac{u'+v}{1+vu'/c^2},\quad u'=\frac{u-v}{1-vu/c^2}. \tag{37.6}$$

Легко убедиться в том, что если скорости $v$, $u'$ и $u$ малы по сравнению со скоростью света $c$, то формулы (37.5) и (37.6) переходят в закон сложения скоростей в классической механике (см. (34.4)). Таким образом, законы релятивистской механики в предельном случае для малых скоростей (по сравнению со скоростью света) переходят в законы классической физики, которая, следовательно, является частным случаем механики Эйнштейна для малых скоростей.

Релятивистский закон сложения скоростей подчиняется второму постулату Эйнштейна (см. § 35). Действительно, если $u'=c$, то формула (37.6) примет вид $u=\dfrac{c+v}{1+cv/c}=c$ (аналогично можно показать, что при $u=c$ скорость $u'$ также равна $c$). Этот результат свидетельствует о том, что релятивистский закон сложения скоростей находится в согласии с постулатами Эйнштейна.

Докажем также, что если складываемые скорости сколь угодно близки к скорости света $c$, то их результирующая скорость будет всегда меньше или равна $c$. В качестве примера рассмотрим предельный случай $u'=v=c$. После подстановки в формулу (37.6) получим $u=c$. Таким образом, при сложении любых скоростей результат не может превысить скорости света $c$ в вакууме. *Скорость света в вакууме есть предельная скорость*, которую невозможно превысить. Скорость света в какой-либо среде, равная $c/n$ ($n$ — абсолютный показатель преломления среды), предельной величиной не является (подробнее см. § 189).

## § 38. Интервал между событиями

Преобразования Лоренца и следствия из них приводят к выводу об относительности длин и промежутков времени, значение которых в различных системах отсчета разное. В то же время относительный характер длин и промежутков времени в теории Эйнштейна означает относительность отдельных компонентов какой-то реальной физической величины, не зависящей от системы отсчета, т. е. являющейся *инвариантной* по отношению к преобразованиям координат. В четырехмерном пространстве Эйнштейна, в котором каждое событие характеризуется четырьмя координатами

$(x, y, z, t)$, такой физической величиной является **интервал** между двумя событиями:

$$s_{12}=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-\to\ldots}$$
$$\ldots\to\overline{-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}, \quad (38.1)$$

где $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=l_{12}$ — расстояние между точками обычного трехмерного пространства, в которых эти события произошли. Введя обозначение $t_{12}=t_2-t_1$, получим

$$s_{12}=\sqrt{c^2t_{12}^2-l_{12}^2}.$$

Покажем, что интервал между двумя событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета. Обозначив $\Delta t=t_2-t_1$, $\Delta x=x_2-x_1$, $\Delta y=y_2-y_1$ и $\Delta z=z_2-z_1$, выражение (38.1) можно записать в виде

$$s_{12}^2=c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2.$$

Интервал между теми же событиями в системе $K'$ равен

$$(s'_{12})^2=c^2(\Delta t')^2-(\Delta x')^2-(\Delta y')^2-(\Delta z')^2. \quad (38.2)$$

Согласно преобразованиям Лоренца (36.3),

$$\Delta x'=\frac{\Delta x-v\,\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \Delta y'=\Delta y,\quad \Delta z'=\Delta z,$$

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-v\,\Delta x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Подставив эти значения в (38.2), после элементарных преобразований получим, что $(s'_{12})^2=c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2$, т. е.

$$(s'_{12})^2=s_{12}^2.$$

Обобщая полученные результаты, можно сделать вывод, что интервал, определяя пространственно-временные соотношения между событиями, является инвариантом при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Инвариантность интервала означает, что, несмотря на относительность длин и промежутков времени, течение событий носит объективный характер и не зависит от системы отсчета.

Теория относительности, таким образом, сформулировала новое представление о пространстве и времени, обобщенное далее в диалектическом материализме. Пространственно-временные отношения являются не абсолютными величинами, как утверждала механика Галилея — Ньютона, а относительными. Следовательно, представления об абсолютном пространстве и времени являются несостоятельными. Кроме того, инвариантность интервала между двумя событиями свидетельствует о том, что пространство и время органически связаны между собой и образуют единую форму существования материи — пространство-время. Пространство и время не существуют вне материи и независимо от нее. Ф. Энгельс подчеркивал, что «обе эти формы существования материи без материи суть ничто, простые представления, абстракции, существующие только в нашей голове» (*Маркс К.* и *Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. Т. 20. С. 550).

Дальнейшее развитие теории относительности (**общая теория относительности, или теория тяготения**) показало, что свойства пространства-времени в данной области определяются действующими в ней полями тяготения. При переходе к космическим масштабам геометрия пространства-времени не является евклидовой (т. е. не зависящей от размеров области пространства-времени), а изменяется от одной области к другой в зависимости от концентрации масс в этих областях и их движения.

## § 39. Основной закон релятивистской динамики материальной точки

Согласно представлениям классической механики, масса тела есть величина постоянная. Однако в конце XIX столетия на опытах с быстро движущимися электронами было установлено, что масса тела зависит от скорости его движения, а именно возрастает с увеличением скорости

по закону

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad (39.1)$$

где $m_0$ — **масса покоя** материальной точки, т. е. масса, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой материальная точка находится в покое; $c$ — скорость света в вакууме; $m$ — масса точки в системе отсчета, относительно которой она движется со скоростью $v$.

Из принципа относительности Эйнштейна (см. § 35), утверждающего инвариантность всех законов природы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, следует условие инвариантности уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца. Основной закон динамики Ньютона

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

оказывается также инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца, если в нем справа стоит производная по времени *от релятивистского импульса.*

**Основной закон релятивистской динамики** материальной точки имеет вид

$$\mathbf{F}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathbf{v}\right), \qquad (39.2)$$

или

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}, \qquad (39.3)$$

где

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathbf{v} \qquad (39.4)$$

— **релятивистский импульс** материальной точки.

Отметим, что уравнение (39.3) внешне совпадает с основным уравнением ньютоновской механики (6.7). Однако физический смысл его другой: справа стоит производная по времени *от релятивистского импульса,* определяемого формулой (39.4). Таким образом, уравнение (39.2) инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца и, следовательно, удовлетворяет принципу относительности Эйнштейна. Следует учитывать, что ни импульс, ни сила не являются инвариантными величинами. Более того, в общем случае ускорение не совпадает по направлению с силой.

В силу *однородности пространства* (см. § 9) в релятивистской механике выполняется **закон сохранения релятивистского импульса:** релятивистский импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени. Часто вообще не оговаривают, что рассматривают релятивистский импульс, так как если тела движутся со скоростями, близкими к $c$, то можно использовать только релятивистское выражение для импульса.

Анализ формул (39.1), (39.4) и (39.2) показывает, что при скоростях, значительно меньших скорости света, уравнение (39.2) переходит в основной закон (см. (6.5)) классической механики. Следовательно, условием применимости законов классической (ньютоновской) механики является условие $v \ll c$. Законы классической механики получаются как следствие теории относительности для предельного случая $v \ll c$ (формально переход осуществляется при $c \to \infty$). Таким образом, *классическая механика — это механика макротел, движущихся с малыми скоростями* (по сравнению со скоростью света в вакууме).

Экспериментальное доказательство зависимости массы от скорости (39.1) является подтверждением справедливости специальной теории относительности. В дальнейшем (см. § 116) будет показано, что на основании этой зависимости производятся расчеты ускорителей.

## § 40. Закон взаимосвязи массы и энергии

Найдем кинетическую энергию релятивистской частицы (материальной точки). Раньше (§ 12) было показано, что приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном перемещении равно работе силы на этом перемещении:

$$dT=dA \text{ или } dT=\mathbf{F}\,d\mathbf{r}. \qquad (40.1)$$

Учитывая, что $d\mathbf{r}=\mathbf{v}\,dt$, и подставив в (40.1) выражение (39.2), получим

$$dT=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\mathbf{v}\,dt=$$

$$=\mathbf{v}\,d\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Преобразовав данное выражение с учетом того, что $\mathbf{v}\,d\mathbf{v}=v\,dv$, и формулы (39.1), придем к выражению

$$dT=d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=c^2\,dm, \tag{40.2}$$

т. е. приращение кинетической энергии частицы пропорционально приращению ее массы.

Так как кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а ее масса равна массе покоя $m_0$, то, проинтегрировав (40.2), получим

$$T=(m-m_0)\,c^2, \tag{40.3}$$

или кинетическая энергия релятивистской частицы имеет вид

$$T=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right). \tag{40.4}$$

Выражение (40.4) при скоростях $v\ll c$ переходит в классическое:

$$T=m_0v^2/2$$

(разлагая в ряд $(1-v^2/c^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}\times$ $\times\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\ldots$ при $v\ll c$, правомерно пренебречь членами второго порядка малости).

А. Эйнштейн обобщил положение (40.2), предположив, что оно справедливо не только для кинетической энергии материальной точки, но и для полной энергии, а именно: любое изменение массы $\Delta m$ сопровождается изменением полной энергии материальной точки,

$$\Delta E=c^2\,\Delta m. \tag{40.5}$$

Отсюда А. Эйнштейн пришел к универсальной зависимости между полной энергией тела $E$ и его массой $m$:

$$E=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{40.6}$$

Уравнение (40.6), равно как и (40.5), выражает *фундаментальный* закон природы — **закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии:** полная энергия системы равна произведению ее массы на квадрат скорости света в вакууме. Отметим, что в полную энергию $E$ не входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле.

Закон (40.6) можно, учитывая выражение (40.3), записать в виде

$$E=m_0\,c^2+T,$$

откуда следует, что покоящееся тело ($T=0$) также обладает энергией

$$E_0=m_0\,c^2,$$

называемой **энергией покоя.** Классическая механика энергию покоя $E_0$ не учитывает, считая, что при $v=0$ энергия покоящегося тела равна нулю.

В силу *однородности времени* (см. § 13) в релятивистской механике, как и в классической, выполняется **закон сохранения энергии:** полная энергия замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Из формул (40.6) и (39.4) найдем релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом частицы:

$$E^2=m^2c^4=m_0^2\,c^4+p^2c^2,$$

$$E=\sqrt{m_0^2\,c^4+p^2c^2}. \tag{40.7}$$

Возвращаясь к уравнению (40.6), отметим еще раз, что оно имеет *универсальный характер.* Оно применимо ко всем формам энергии, т. е. можно утверждать, что с энергией, какой бы формы она ни была, связана масса

$$m=E/c^2 \tag{40.8}$$

и, наоборот, со всякой массой связана определенная энергия (40.6).

Чтобы охарактеризовать прочность

связи и устойчивость системы каких-либо частиц (например, атомного ядра как системы из протонов и нейтронов), рассматривают энергию связи. **Энергия связи системы** равна работе, которую необходимо затратить, чтобы разложить эту систему на составные части (например, атомное ядро — на протоны и нейтроны). Энергия связи системы

$$E_{св} = \sum_{i=1}^{n} m_{0i}c^2 - M_0c^2, \qquad (40.9)$$

где $m_{0i}$ — масса покоя $i$-й частицы в свободном состоянии; $M_0$ — масса покоя системы, состоящей из $n$ частиц.

Закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии блестяще подтвержден экспериментом о выделении энергии при протекании ядерных реакций. Он широко используется для расчета энергетических эффектов при ядерных реакциях и превращениях элементарных частиц.

Рассматривая выводы специальной теории относительности, видим, что она, как, впрочем, и любые крупные открытия, потребовала пересмотра многих установившихся и ставших привычными представлений. Масса тела не остается постоянной величиной, а зависит от скорости тела; длина тел и длительность событий не являются абсолютными величинами, а носят относительный характер; наконец, масса и энергия оказались связанными друг с другом, хотя они и являются качественно различными свойствами материи.

Эту ломку укоренившихся представлений некоторые буржуазные философы пытались использовать для распространения двух разновидностей идеализма: энергетизма и философского релятивизма. Первая из этих теорий рассматривала возможность преобразования массы в энергию и, наоборот, энергии в массу, «доказывая» «эквивалентность материи и энергии». Закон взаимосвязи массы и энергии действительно утверждает, что любые превращения энергии тела сопровождаются изменениями его массы, однако при этом масса не «переходит в энергию». Закон взаимосвязи массы и энергии является подтверждением неразрывности материи и движения — одного из основных положений диалектического материализма.

Философский релятивизм считает, что наше познание относительно и зависит «от выбора точки зрения наблюдателя». Однако из постулатов и следствий теории Эйнштейна относительность нашего познания не вытекает. Тот факт, что длина тел и длительность событий в разных инерциальных системах отсчета различны, не дает оснований считать, что объективное описание окружающего нас мира невозможно. В. И. Ленин в книге «Материализм и эмпириокритицизм» писал: «Человеческие представления о пространстве и времени относительны, но из этих относительных представлений складывается абсолютная истина, эти относительные представления, развиваясь, идут по линии абсолютной истины, приближаются к ней. Изменчивость человеческих представлений о пространстве и времени так же мало опровергает объективную реальность того и другого, как изменчивость научных знаний о строении и формах движения материи не опровергает объективной реальности внешнего мира» (Полн. собр. соч. Т. 18. С. 181).

Основной вывод теории относительности сводится к тому, что пространство и время органически взаимосвязаны и образуют единую форму существования материи — пространство-время. Только поэтому пространственно-временной интервал между двумя событиями является абсолютным, в то время как пространственные и временны́е промежутки между этими событиями относительны. Следовательно, вытекающие из преобразований Лоренца следствия являются выражением объективно существующих пространственно-временны́х соотношений движущейся материи.

## Контрольные вопросы

- В чем физическая сущность механического принципа относительности?
- В чем заключается правило сложения скоростей в классической механике?
- Каковы причины возникновения специальной теории относительности?
- В чем заключаются основные постулаты специальной теории относительности?
- Зависит ли от скорости движения системы отсчета скорость тела? скорость света?
- Запишите и прокомментируйте преобразования Лоренца. При каких условиях они переходят в преобразования Галилея?
- Какой вывод о пространстве и времени можно сделать на основе преобразований Лоренца?
- Одновременны ли события в системе $K'$, если в системе $K$ они происходят в одной точке и одновременны? в системе $K$ события разобщены, но одновременны? Обосновать ответ.
- Какие следствия вытекают из специальной теории относительности для размеров тел и длительности событий в разных системах отсчета? Обосновать ответ.
- При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составит 25%?
- В чем состоит «парадокс близнецов» и как его разрешить?
- В чем заключается релятивистский закон сложения скоростей? Как показать, что он находится в согласии с постулатами Эйнштейна?
- Как определяется интервал между событиями? Доказать, что он является инвариантом при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.
- Какой вид имеет основной закон релятивистской динамики материальной точки? Чем он отличается от основного закона ньютоновской механики?
- В чем заключается закон сохранения релятивистского импульса? релятивистской массы?
- Как выражается кинетическая энергия в релятивистской механике? При каком условии релятивистская формула для кинетической энергии переходит в классическую формулу?
- Сформулируйте и запишите закон взаимосвязи массы и энергии. В чем его физическая сущность? Приведите примеры его экспериментального подтверждения.

## Задачи

**7.1.** Определить собственную длину стержня (длину, измеренную в системе, относительно которой стержень покоится), если в лабораторной системе (системе отсчета, связанной с измерительными приборами) его скорость $v=0{,}8\ c$, длина $l=1$ м и угол между ним и направлением движения $\theta=30°$. $\left[l_0=l\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)(1-v^2/c^2)}=1{,}53\ \text{м}\right]$

**7.2.** Собственное время жизни частицы отличается на 1,5% от времени жизни по неподвижным часам. Определить $\beta=v/c$. [0,172]

**7.3.** Тело с массой покоя 2 кг движется со скоростью 200 Мм/с в системе $K'$, которая сама движется относительно системы $K$ со скоростью 200 Мм/с. Определить: 1) скорость тела относительно системы $K$; 2) его массу в этой системе. [1) 277 Мм/с; 2) 5,2 кг]

**7.4.** Воспользовавшись тем, что интервал — инвариантная величина по отношению к преобразованиям координат, определить расстояние, которое пролетел $\pi$-мезон с момента рождения до распада, если время его жизни в этой системе отсчета $\Delta t=5$ мкс, а собственное время жизни (время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом) $\Delta t_0=2{,}2$ мкс. [1,35 км]

**7.5.** Определить скорость, при которой релятивистский импульс частицы превышает ее ньютоновский импульс в пять раз. [0,98 $c$]

**7.6.** Определить скорость, полученную электроном, если он прошел ускоряющую разность потенциалов 1,2 МэВ. [2,86 Мм/с]

**7.7.** Определить релятивистский импульс электрона, кинетическая энергия которого 1 Гэв. [$5{,}34\cdot10^{-19}$ Н·с]

# 2 Основы молекулярной физики и термодинамики

**Статистический и термодинамический методы исследования.** Молекулярная физика и термодинамика — разделы физики, в которых изучаются **макроскопические процессы** в телах, связанные с огромным числом содержащихся в телах атомов и молекул. Для исследования этих процессов применяют два качественно различных и взаимно дополняющих друг друга метода: **статистический (молекулярно-кинетический)** и **термодинамический.** Первый лежит в основе молекулярной физики, второй — термодинамики.

**Молекулярная физика** — раздел физики, изучающий строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.

Идея об атомном строении вещества высказана древнегреческим философом Демокритом (460—370 до н. э.). Атомистика возрождается вновь лишь в XVII в. и развивается в работах М. В. Ломоносова, взгляды которого на строение вещества и тепловые явления были близки к современным. Строгое развитие молекулярной теории относится к середине XIX в. и связано с работами немецкого физика Р. Клаузиуса (1822—1888), английского физика Дж. Максвелла (1831—1879) и австрийского физика Л. Больцмана (1844—1906).

Процессы, изучаемые молекулярной физикой, являются результатом совокупного действия огромного числа молекул. Законы поведения огромного числа молекул, являясь статистическими закономерностями, изучаются с помощью **статистического метода.** Этот метод основан на том, что свойства макроскопической системы в конечном счете определяются свойствами частиц системы, особенностями их движения и *усредненными* значениями динамических характеристик этих частиц (скорости, энергии и т. д.). Например, температура тела определяется скоростью беспорядочного движения его молекул, но так как в любой момент времени разные молекулы имеют различные скорости, то она может быть выражена только через среднее значение скорости движения молекул. Нельзя говорить о температуре одной молекулы. Таким образом, макроскопические характеристики тел имеют физический смысл лишь в случае большого числа молекул.

**Термодинамика** — раздел физики, изучающий общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями. Термодинамика не рассматривает микропроцессы, которые лежат в основе этих превращений. Этим **термодинамический метод** отличается от статистического. Термодинамика базируется на двух началах — фундаментальных законах, установленных в результате обобщения опытных данных.

Область применения термодинамики значительно шире, чем молекулярно-кинетической теории, ибо нет таких областей физики и химии, в которых нельзя было бы пользоваться термодинамическим методом. Однако, с другой стороны, термодинамический метод несколько ограничен: термодинамика ничего не говорит о микроскопическом строении вещества, о механизме явлений, а лишь устанавливает связи между макроскопическими

свойствами вещества. Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика взаимно дополняют друг друга, образуя единое целое, но отличаясь различными методами исследования.

Термодинамика имеет дело с **термодинамической системой** — совокупностью макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с другими телами (внешней средой). Основа термодинамического метода — определение состояния термодинамической системы. Состояние системы задается **термодинамическими параметрами (параметрами состояния)** — совокупностью физических величин, характеризующих свойства термодинамической системы. Обычно в качестве параметров состояния выбирают температуру, давление и удельный объем.

Температура — одно из основных понятий, играющих важную роль не только в термодинамике, но и в физике в целом. **Температура** — физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы. В соответствии с решением XI Генеральной конференции по мерам и весам (1960) в настоящее время можно применять только две температурные шкалы — **термодинамическую** и **Международную практическую,** градуированные соответственно в кельвинах (К) и в градусах Цельсия (°С).

В **Международной практической шкале** температура замерзания и кипения воды при давлении $1{,}013 \cdot 10^5$ Па соответственно 0 и 100 °С (так называемые **реперные точки**).

**Термодинамическая температурная шкала** определяется по одной реперной точке, в качестве которой взята **тройная точка воды** (температура, при которой лед, вода и насыщенный пар при давлении 609 Па находятся в термодинамическом равновесии). Температура этой точки по термодинамической шкале равна 273,16 К (точно). Градус Цельсия равен кельвину. В термодинамической шкале температура замерзания воды равна 273,15 К (при том же давлении, что и в Международной практической шкале), поэтому, по определению, термодинамическая температура и температура по Международной практической шкале связаны соотношением $T = 273{,}15 + t$. Температура $T = 0$ называется **нулем кельвин.** Анализ различных процессов показывает, что 0 К недостижим, хотя приближение к нему сколь угодно близко возможно.

**Удельный объем** $v$ — это объем единицы массы. Когда тело однородно, т. е. его плотность $\rho = \text{const}$, то $v = V/m = 1/\rho$. Так как при постоянной массе удельный объем пропорционален общему объему, то макроскопические свойства однородного тела можно характеризовать объемом тела.

Параметры состояния системы могут изменяться. Любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из ее термодинамических параметров, называется **термодинамическим процессом.** Макроскопическая система находится в **термодинамическом равновесии**, если ее состояние с течением времени не меняется (предполагается, что внешние условия рассматриваемой системы при этом не изменяются).

# Глава 8
# Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов

## § 41. Опытные законы идеального газа

В молекулярно-кинетической теории пользуются *идеализированной моделью* **идеального газа,** согласно которой:

1) собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда;

2) между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;

3) столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Модель идеального газа можно использовать при изучении реальных газов, так как они в условиях, близких к нор-

мальным (например, кислород и гелий), а также при низких давлениях и высоких температурах близки по своим свойствам к идеальному газу. Кроме того, внеся поправки, учитывающие собственный объем молекул газа и действующие молекулярные силы, можно перейти к теории реальных газов.

Опытным путем, еще до появления молекулярно-кинетической теории, был установлен целый ряд законов, описывающих поведение идеальных газов, которые мы и рассмотрим.

**Закон Бойля — Мариотта** *: для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная:

$$pV = \text{const} \qquad (41.1)$$

при $T = \text{const}$, $m = \text{const}$.

Кривая, изображающая зависимость между величинами $p$ и $V$, характеризующими свойства вещества при постоянной температуре, называется **изотермой**. Изотермы представляют собой гиперболы, расположенные на графике тем выше, чем выше температура, при которой происходит процесс (рис. 60).

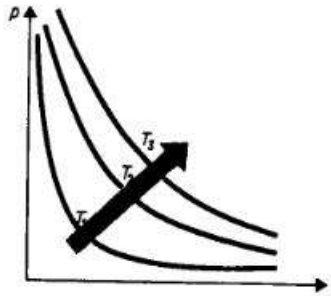
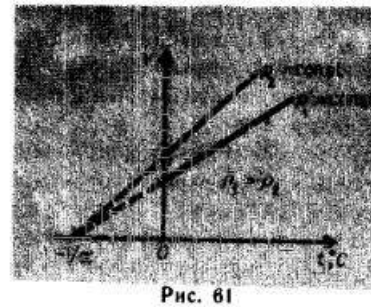


Рис. 60

**Закон Гей-Люссака** **: 1) объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \qquad (41.2)$$

при $p = \text{const}$, $m = \text{const}$;


Рис. 61

2) давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой:

$$p = p_0(1 + \alpha t) \qquad (41.3)$$

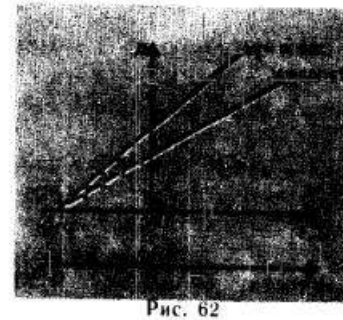
при $V = \text{const}$, $m = \text{const}$.

В этих уравнениях $t$ — температура по шкале Цельсия, $p_0$ и $V_0$ — давление и объем при 0 °С, коэффициент $\alpha = 1/273{,}15\ \text{K}^{-1}$.

**Процесс**, протекающий при постоянном давлении, называется **изобарным**. На диаграмме в координатах $V$, $t$ (рис. 61) этот процесс изображается прямой, называемой **изобарой**. **Процесс**, протекающий при постоянном объеме, называется **изохорным**. На диаграмме в координатах $p$, $t$ (рис. 62) он изображается прямой, называемой **изохорой**.

Из (41.2) и (41.3) следует, что изобары и изохоры пересекают ось температур в точке $t = -1/\alpha = -273{,}15$ °С, определяемой из условия $1 + \alpha t = 0$. Если сместить начало отсчета в эту точку, то происходит переход к шкале Кельвина (рис. 62), откуда

$$T = t + 1/\alpha.$$


Рис. 62

* Р. Бойль (1627—1691) — английский ученый; Э. Мариотт (1620—1684) — французский физик.

** Ж. Гей-Люссак (1778—1850) — французский ученый.

Вводя в формулы (41.2) и (41.3) термодинамическую температуру, законам Гей-Люссака можно придать более удобный вид:

$$V = V_0(1+\alpha t) = V_0[1+\alpha(T-1/\alpha)] = V_0\alpha T,$$

$$p = p_0(1+\alpha t) = p_0[1+\alpha(T-1/\alpha)] = p_0\alpha T,$$

или

$$V_1/V_2 = T_1/T_2 \qquad (41.4)$$

при $p = \text{const}$, $m = \text{const}$,

$$p_1/p_2 = T_1/T_2 \qquad (41.5)$$

при $V = \text{const}$, $m = \text{const}$,

где индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям, лежащим на одной изобаре или изохоре.

**Закон Авогадро** *: моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях этот объем равен $22{,}41 \cdot 10^{-3}$ м$^3$/моль.

По определению, в одном моле различных веществ содержится одно и то же число молекул, называемое **постоянной Авогадро**:

$$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

**Закон Дальтона** **: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в нее газов, т. е.

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — **парциальные давления** — давления, которые оказывали бы газы смеси, если бы они одни занимали объем, равный объему смеси при той же температуре.

## § 42. Уравнение Клапейрона — Менделеева

Как уже указывалось, состояние некоторой массы газа определяется тремя термодинамическими параметрами: давлением $p$, объемом $V$ и температурой $T$. Между этими параметрами существует определенная связь, называемая **уравнением состояния**, которое в общем виде дается выражением

$$f(p, V, T) = 0,$$

где каждая из переменных является функцией двух других.

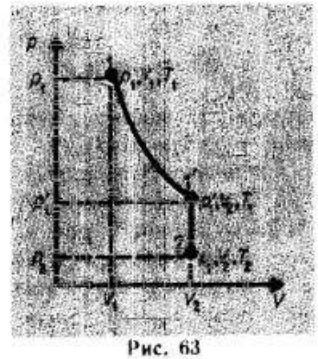


Рис. 63

Французский физик и инженер Б. Клапейрон (1799—1864) вывел уравнение состояния идеального газа, объединив законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака. Пусть некоторая масса газа занимает объем $V_1$, имеет давление $p_1$ и находится при температуре $T_1$. Эта же масса газа в другом произвольном состоянии характеризуется параметрами $p_2$, $V_2$, $T_2$ (рис. 63). Переход из состояния *1* в состояние *2* осуществляется в виде двух процессов: 1) изотермического (изотерма $1-1'$), 2) изохорного (изохора $1'-2$).

В соответствии с законами Бойля — Мариотта (41.1) и Гей-Люссака (41.5) запишем:

$$p_1 V_1 = p_1' V_2, \qquad (42.1)$$

$$\frac{p_1'}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}. \qquad (42.2)$$

Исключив из уравнений (42.1) и (42.2) $p_1'$, получим

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Так как состояния *1* и *2* были выбраны произвольно, то для данной массы газа

---

* А. Авогадро (1776—1856) — итальянский физик и химик.

** Дж. Дальтон (1766—1844) — английский химик и физик.

величина $pV/T$ остается постоянной, т. е.

$$pV/T = B = \text{const}. \qquad (42.3)$$

Выражение (42.3) является **уравнением Клапейрона**, в котором $B$ — газовая постоянная, *различная для разных газов*.

Русский ученый Д. И. Менделеев (1834—1907) объединил уравнение Клапейрона с законом Авогадро, отнеся уравнение (42.3) к одному молю, использовав молярный объем $V_m$. Согласно закону Авогадро, при одинаковых $p$ и $T$ моли всех газов занимают одинаковый молярный объем $V_m$, поэтому постоянная $B$ будет *одинаковой для всех газов*. Эта общая для всех газов постоянная обозначается $R$ и называется **молярной газовой постоянной**. Уравнению

$$pV_m = RT \qquad (42.4)$$

удовлетворяет лишь идеальный газ, и оно является **уравнением состояния идеального газа**, называемым также **уравнением Клапейрона — Менделеева.**

Числовое значение молярной газовой постоянной определим из формулы (42.4), полагая, что моль газа находится при нормальных условиях ($p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 273{,}15$ К, $V_m = 22{,}41 \cdot 10^{-3}$ м$^3$/моль): $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

От уравнения (42.4) для моля газа можно перейти к уравнению Клапейрона — Менделеева для произвольной массы газа. Если при некоторых заданных давлений и температуре один моль газа занимает молярный объем $V_m$, то при тех же условиях масса $m$ газа займет объем $V = (m/M)\,V_m$, где $M$ — **молярная масса** (масса одного моля вещества). Единица молярной массы — килограмм на моль (кг/моль). Уравнение Клапейрона — Менделеева для массы $m$ газа

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT, \qquad (42.5)$$

где $\nu = m/M$ — количество вещества.

Часто пользуются несколько иной формой уравнения состояния идеального газа, вводя **постоянную Больцмана:**

$$k = R/N_A = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}.$$

Исходя из этого уравнение состояния (42.4) запишем в виде

$$p = RT/V_m = kN_AT/V_m = nkT,$$

где $N_A/V_m = n$ — концентрация молекул (число молекул в единице объема). Таким образом, из уравнения

$$p = nkT \qquad (42.6)$$

следует, что давление идеального газа при данной температуре прямо пропорционально концентрации его молекул (или плотности газа). При одинаковых температуре и давлении все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул. Число молекул, содержащихся в 1 м$^3$ газа при *нормальных условиях*, называется **числом Лошмидта** *:

$$N_L = p_0/(kT_0) = 2{,}68 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

## § 43. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

Для вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории рассмотрим одноатомный идеальный газ. Предположим, что молекулы газа движутся хаотически, число взаимных столкновений между молекулами газа пренебрежимо мало по сравнению с числом ударов о стенки сосуда, а соударения молекул со стенками сосуда абсолютно упругие. Выделим на стенке сосуда некоторую элементарную площадку $\Delta S$ (рис. 64) и вычислим давление, оказываемое на эту площадку. При каждом соударении молекула, движущаяся перпендикулярно площадке, передает ей импульс $m_0v - (-m_0v) = 2m_0v$, где $m_0$ — масса молекулы, $v$ — ее скорость. За время $\Delta t$ площадки $\Delta S$ достигнут только те молекулы, которые заключены в объеме цилиндра с основанием $\Delta S$ и высотой $v\Delta t$ (рис. 64). Число этих молекул равно $n\Delta Sv\Delta t$ ($n$ — концентрация молекул).

Необходимо, однако, учитывать, что реально молекулы движутся к площадке

* И. Лошмидт (1821—1895) — австрийский химик и физик.

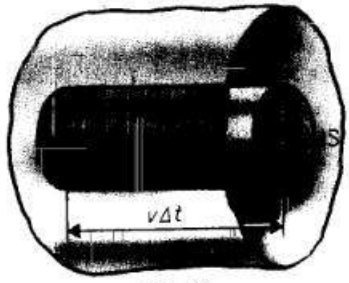



Рис. 64

$\Delta S$ под разными углами и имеют различные скорости, причем скорость молекул при каждом соударении меняется. Для упрощения расчетов хаотическое движение молекул заменяют движением вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, так что в любой момент времени вдоль каждого из них движется $^1/_3$ молекул, причем половина молекул ($^1/_6$) движется вдоль данного направления в одну сторону, половина — в противоположную. Тогда число ударов молекул, движущихся в заданном направлении, о площадку $\Delta S$ будет $^1/_6\, n\Delta S v\Delta t$. При столкновении с площадкой эти молекулы передадут ей импульс

$$\Delta P = 2m_0 v \cdot {}^1/_6 n\Delta S v\Delta t = {}^1/_3 n m_0 v^2 \Delta S \Delta t.$$

Тогда давление газа, оказываемое им на стенку сосуда,

$$p = \Delta P/(\Delta t \Delta S) = {}^1/_3 n m_0 v^2. \quad (43.1)$$

Если газ в объеме $V$ содержит $N$ молекул, движущихся со скоростями $v_1, v_2, \ldots, v_N$, то целесообразно рассматривать **среднюю квадратичную скорость**

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^2}, \quad (43.2)$$

характеризующую всю совокупность молекул газа.

Уравнение (43.1) с учетом (43.2) примет вид

$$p = {}^1/_3 n m_0 \langle v_{кв} \rangle^2. \quad (43.3)$$

Выражение (43.3) называется **основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов.** Точный расчет с учетом движения молекул по всевозможным направлениям дает ту же формулу.

Учитывая, что $n = N/V$, получим

$$pV = {}^1/_3 N m_0 \langle v_{кв} \rangle^2, \quad (43.4)$$

или

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} E, \quad (43.5)$$

где $E$ — суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа.

Так как масса газа $m = Nm_0$, то уравнение (43.4) можно переписать в виде

$$pV = {}^1/_3 m \langle v_{кв} \rangle^2.$$

Для одного моля газа $m = M$ ($M$ — молярная масса), поэтому

$$pV_m = {}^1/_3 M \langle v_{кв} \rangle^2,$$

где $V_m$ — молярный объем. С другой стороны, по уравнению Клапейрона — Менделеева, $pV_m = RT$. Таким образом,

$$RT = {}^1/_3 M \langle v_{кв} \rangle^2,$$

откуда

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (43.6)$$

Так как $M = m_0 N_A$, где $m_0$ — масса одной молекулы, а $N_A$ — постоянная Авогадро, то из уравнения (43.6) следует, что

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad (43.7)$$

где $k = R/N_A$ — постоянная Больцмана. Отсюда найдем, что при комнатной температуре молекулы кислорода имеют среднюю квадратичную скорость 480 м/с, водорода — 1900 м/с. При температуре жидкого гелия те же скорости будут соответственно 40 и 160 м/с.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = E/N = m_0 \langle v_{кв} \rangle^2/2 = {}^3/_2 kT \quad (43.8)$$

(использовали формулы (43.5) и (43.7)) пропорциональна термодинамической температуре и зависит только от нее. Из этого уравнения следует, что при $T = 0$ $\langle \varepsilon_0 \rangle = 0$,

т. е. при 0 К прекращается поступательное движение молекул газа, а следовательно, его давление равно нулю. Таким образом, термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа и формула (43.8) раскрывает молекулярно-кинетическое толкование температуры.

## § 44. Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории молекулам задавали различные скорости. В результате многократных соударений скорость каждой молекулы изменяется по модулю и направлению. Однако из-за хаотического движения молекул все направления движения являются равновероятными, т. е. в любом направлении в среднем движется одинаковое число молекул.

По молекулярно-кинетической теории, как бы ни изменялись скорости молекул при столкновениях, средняя квадратичная скорость молекул массой $m_0$ в газе, находящемся в состоянии равновесия при $T=\text{const}$, остается постоянной и равной $\langle v_{\text{кв}}\rangle=\sqrt{3kT/m_0}$. Это объясняется тем, что в газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, которое подчиняется вполне определенному статистическому закону. Этот закон теоретически выведен Дж. Максвеллом.

При выводе закона распределения молекул по скоростям Максвелл предполагал, что газ состоит из очень большого числа $N$ тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при одинаковой температуре. Предполагалось также, что силовые поля на газ не действуют.

Закон Максвелла описывается некоторой функцией $f(v)$, называемой **функцией распределения молекул по скоростям**. Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные $dv$, то на каждый интервал скорости будет приходиться некоторое число молекул $dN(v)$, имеющих скорость, заключенную в этом интервале. Функция $f(v)$ определяет относительное число молекул $dN(v)/N$, скорости которых лежат в интервале от $v$ до $v+dv$, т. е.

$$dN(v)/N=f(v)\,dv,$$

откуда

$$f(v)=\frac{dN(v)}{N\,dv}.$$

Применяя методы теории вероятностей, Максвелл нашел функцию $f(v)$ — **закон для распределения молекул идеального газа по скоростям:**

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2e^{-m_0v^2/(2kT)}. \quad (44.1)$$

Из (44.1) видно, что конкретный вид функции зависит от рода газа (от массы молекулы) и от параметра состояния (от температуры $T$).

График функции (44.1) приведен на рис. 65. Так как при возрастании $v$ множитель $e^{-m_0v^2/(2kT)}$ уменьшается быстрее, чем растет множитель $v^2$, то функция $f(v)$, начинаясь от нуля, достигает максимума при $v_в$ и затем асимптотически стремится к нулю. Кривая несимметрична относительно $v_в$.

Относительное число молекул $dN(v)/N$, скорости которых лежат в интервале от $v$ до $v+dv$, находится как площадь более светлой полоски на рис. 65. Площадь, ограниченная кривой распределения

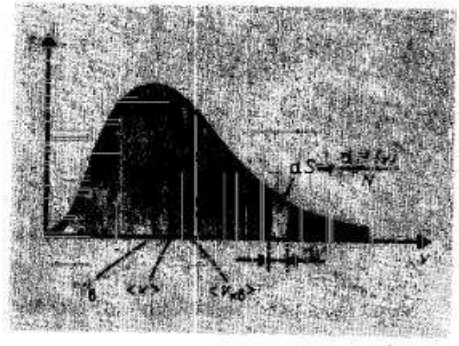


Рис. 65

и осью абсцисс, равна единице. Это означает, что функция $f(v)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^\infty f(v)\,dv = 1.$$

Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна, называется **наиболее вероятной скоростью.** Значение наиболее вероятной скорости можно найти продифференцировав выражение (44.1) (постоянные множители опускаем) по аргументу $v$, приравняв результат нулю и используя условие для максимума выражения $f(v)$:

$$\frac{d}{dv}\left(v^2 e^{-m_0 v^2/(2kT)}\right) =$$

$$= 2v\left(1 - \frac{m_0 v^2}{2kT}\right) e^{-m_0 v^2/(2kT)} = 0.$$

Значения $v=0$ и $v=\infty$ соответствуют минимумам выражения (44.1), а значение $v$, при котором выражение в скобках становится равным нулю, и есть искомая наиболее вероятная скорость $v_в$:

$$v_в = \sqrt{2kT/m_0} = \sqrt{2RT/M}. \quad (44.2)$$

Из формулы (44.2) следует, что при повышении температуры максимум функции распределения молекул по скоростям (рис. 66) сместится вправо (значение наиболее вероятной скорости становится больше). Однако площадь, ограниченная кривой, остается неизменной, поэтому при повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться и понижаться.

**Средняя скорость молекулы $\langle v \rangle$ (средняя арифметическая скорость)** определяется по формуле

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty v\,dN(v) = \int_0^\infty v f(v)\,dv.$$

Подставляя сюда $f(v)$ и интегрируя, получим

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_0)} = \sqrt{8RT/(\pi M)}. \quad (44.3)$$

Скорости, характеризующие состояние газа: 1) наиболее вероятная $v_в = \sqrt{2RT/M}$; 2) средняя $\langle v \rangle = \sqrt{8RT/(\pi M)} = 1{,}13\,v_в$; 3) средняя квадратичная $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{3RT/M} = 1{,}22\,v_в$ (рис. 65).

Исходя из распределения молекул по скоростям

$$dN(v) = N \cdot 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2/(2kT)}\,dv \quad (44.4)$$

можно найти распределение молекул газа по значениям кинетической энергии $\varepsilon$. Для этого перейдем от переменной $v$ к переменной $\varepsilon = m_0 v^2/2$. Подставив в (44.4) $v = \sqrt{2\varepsilon/m_0}$ и $dv = (2m^0\varepsilon)^{-1/2}\,d\varepsilon$, получим

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\,\varepsilon^{1/2}\,e^{-\varepsilon/(kT)}\,d\varepsilon =$$

$$= N f(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

где $dN(\varepsilon)$ — число молекул, имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключенную в интервале от $\varepsilon$ до $\varepsilon + d\varepsilon$.

Таким образом, **функция распределения молекул по энергиям теплового движения**

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\,\varepsilon^{1/2}\,e^{-\varepsilon/(kT)}.$$

Средняя кинетическая энергия $\langle \varepsilon \rangle$ молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon \rangle = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon)\,d\varepsilon =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\,e^{-\varepsilon/(kT)}\,d\varepsilon = {}^3/_2 kT,$$

т. е. получили результат, совпадающий с формулой (43.8).

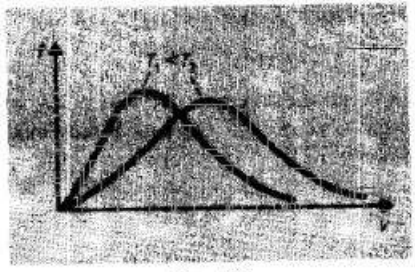


Рис. 66

## § 45. Барометрическая формула. Распределение Больцмана

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов и максвелловского распределения молекул по скоростям предполагалось, что на молекулы газа внешние силы не действуют, поэтому молекулы равномерно распределены по объему. Однако молекулы любого газа находятся в потенциальном поле тяготения Земли. Тяготение, с одной стороны, и тепловое движение молекул — с другой, приводят к некоторому стационарному состоянию газа, при котором давление газа с высотой убывает.

Выведем закон изменения давления с высотой, предполагая, что поле тяготения однородно, температура постоянна и масса всех молекул одинакова. Если атмосферное давление на высоте $h$ равно $p$ (рис. 67), то на высоте $h+dh$ оно равно $p+dp$ (при $dh>0$ $dp<0$, так как давление с высотой убывает). Разность давлений $p$ и $p+dp$ равна весу газа, заключенного в объеме цилиндра высотой $dh$ с основанием площадью, равной единице площади:

$$p-(p+dp)=\rho g\,dh,$$

где $\rho$ — плотность газа на высоте $h$ ($dh$ настолько мало, что при изменении высоты в этом пределе плотность газа можно считать постоянной). Следовательно,

$$dp=-\rho g\,dh. \qquad (45.1)$$

Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа $pV=(m/M)RT$ ($m$ — масса газа, $M$ — молярная масса газа), находим, что

$$\rho=m/V=pM/(RT).$$

Подставив это выражение в (45.1), получим

$$dp=-\frac{Mg}{RT}p\,dh,$$

или

$$\frac{dp}{p}=-\frac{Mg}{RT}dh.$$

С изменением высоты от $h_1$ до $h_2$ давление изменяется от $p_1$ до $p_2$ (рис. 67), т. е.

$$\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p}=-\frac{Mg}{RT}\int_{h_1}^{h_2}dh,$$

$$\ln\frac{p_2}{p_1}=-\frac{Mg}{RT}(h_2-h_1),$$

или

$$p_2=p_1e^{-Mg(h_2-h_1)/(RT)}. \qquad (45.2)$$

Выражение (45.2) называется **барометрической формулой**. Она позволяет найти атмосферное давление в зависимости от высоты или, измерив давление, найти высоту. Так как высоты обозначаются относительно уровня моря, где давление считается нормальным, то выражение (45.2) может быть записано в виде

$$p=p_0e^{-Mgh/(RT)}, \qquad (45.3)$$

где $p$ — давление на высоте $h$.

Прибор для определения высоты над земной поверхностью называется **высотомером** (или **альтиметром**). Его работа основана на использовании формулы (45.3). Из этой формулы следует, что давление с высотой убывает тем быстрее, чем тяжелее газ.

Барометрическую формулу (45.3) можно преобразовать, если воспользоваться выражением (42.6) $p=nkT$:

$$n=n_0e^{-Mgh/(RT)},$$

где $n$ — концентрация молекул на высоте $h$, $n_0$ — то же на высоте $h=0$. Так как $M=m_0N_A$ ($N_A$ — постоянная Авогадро, $m_0$ — масса одной молекулы), а $R=kN_A$, то

$$n=n_0e^{-m_0gh/(kT)}, \qquad (45.4)$$

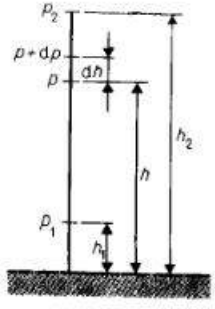



Рис. 67

где $m_0gh=\Pi$ — потенциальная энергия молекулы в поле тяготения, т. е.

$$n=n_0e^{-\Pi/(kT)}. \qquad (45.5)$$

Выражение (45.5) называется **распределением Больцмана** во внешнем потенциальном поле. Из него следует, что при постоянной температуре плотность газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.

Если частицы имеют одинаковую массу и находятся в состоянии хаотического теплового движения, то распределение Больцмана (45.5) справедливо в любом внешнем потенциальном поле, а не только в поле сил тяжести.

## § 46. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул

Молекулы газа, находясь в состоянии хаотического движения, непрерывно сталкиваются друг с другом. Между двумя последовательными столкновениями молекулы проходят некоторый путь $l$, который называется **длиной свободного пробега.** В общем случае длина пути между последовательными столкновениями различна, но так как мы имеем дело с огромным числом молекул и они находятся в беспорядочном движении, то можно говорить о **средней длине свободного пробега молекул** $\langle l\rangle$.

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется **эффективным диаметром молекулы** $d$ (рис. 68). Он зависит от скорости сталкивающихся молекул, т. е. от температуры газа (несколько уменьшается с ростом температуры).

Так как за 1 с молекула проходит в среднем путь, равный средней арифметической скорости $\langle v\rangle$, и если $\langle z\rangle$ — среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой газа за 1 с, то средняя длина свободного пробега

$$\langle l\rangle=\langle v\rangle/\langle z\rangle.$$

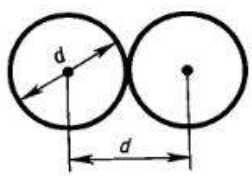
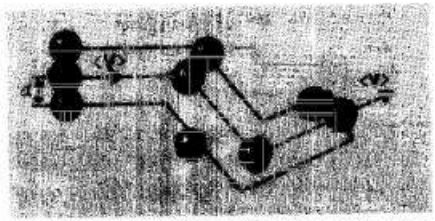


Рис. 68


Рис. 69

Для определения $\langle z\rangle$ представим себе молекулу в виде шарика диаметром $d$, которая движется среди других «застывших» молекул. Эта молекула столкнется только с теми молекулами, центры которых находятся на расстояниях, равных или меньших $d$, т. е. лежат внутри «ломаного» цилиндра радиусом $d$ (рис. 69).

Среднее число столкновений за 1 с равно числу молекул в объеме «ломаного» цилиндра:

$$\langle z\rangle=nV,$$

где $n$ — концентрация молекул, $V=\pi d^2\langle v\rangle$ ($\langle v\rangle$ — средняя скорость молекулы или путь, пройденный ею за 1 с). Таким образом, **среднее число столкновений**

$$\langle z\rangle=n\pi d^2\langle v\rangle.$$

Расчеты показывают, что при учете движения других молекул

$$\langle z\rangle=\sqrt{2}\,\pi d^2n\langle v\rangle.$$

Тогда средняя длина свободного пробега

$$\langle l\rangle=1/(\sqrt{2}\pi d^2n),$$

т. е. $\langle l\rangle$ обратно пропорциональна концентрации $n$ молекул. С другой стороны, из (42.6) следует, что при постоянной температуре $n$ пропорциональна давлению $p$. Следовательно,

$$\frac{\langle l_1\rangle}{\langle l_2\rangle}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{p_2}{p_1}.$$

## § 47. Опытное обоснование молекулярно-кинетической теории

Рассмотрим некоторые явления, экспериментально подтверждающие основные положения и выводы молекулярно-кинетической теории.

**1. Броуновское движение.** Шотландский ботаник Р. Броун (1773—1858), наблюдая под микроскопом взвесь цветочной пыльцы в воде, обнаружил, что частицы пыльцы оживленно и беспорядочно двигались, то вращаясь, то перемещаясь с места на место, подобно пылинкам в солнечном луче. Впоследствии оказалось, что подобное сложное зигзагообразное движение характерно для любых частиц малых размеров ($\approx 1$ мкм), взвешенных в газе или жидкости. Интенсивность этого движения, называемого **броуновским**, повышается с ростом температуры среды, с уменьшением вязкости и размеров частиц (независимо от их химической природы). Причина броуновского движения долго оставалась неясной. Лишь через 80 лет после обнаружения этого эффекта ему было дано объяснение: броуновское движение взвешенных частиц вызывается ударами молекул среды, в которой частицы взвешены. Так как молекулы движутся хаотически, то броуновские частицы получают толчки с разных сторон, поэтому и совершают движение столь причудливой формы. Таким образом, броуновское движение является подтверждением выводов молекулярно-кинетической теории о хаотическом тепловом движении атомов и молекул.

**2. Опыт Штерна.** Первое экспериментальное определение скоростей молекул выполнено немецким физиком О. Штерном (1888—1970). Его опыты позволили также оценить распределение молекул по скоростям. Схема установки Штерна представлена на рис. 70. Вдоль оси внутреннего цилиндра с щелью натянута платиновая проволока, покрытая слоем серебра, которая нагревается током при откачанном воздухе. При нагревании серебро испаряется. Атомы серебра, вылетая через щель, попадают на внутреннюю поверхность второго цилиндра, давая изображение щели $O$. Если прибор привести во вращение вокруг общей оси цилиндров, то атомы серебра осядут не против щели, а сместятся от точки $O$ на некоторое расстояние $s$. Изображение щели получается размытым. Исследуя толщину осажденного слоя, можно оценить распределение молекул по скоростям, которое соответствует максвелловскому распределению.

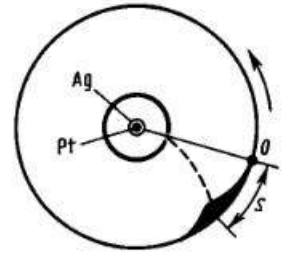


Рис. 70

Зная радиусы цилиндров, их угловую скорость вращения, а также измеряя $s$, можно вычислить скорость движения атомов серебра при данной температуре проволоки. Результаты опыта показали, что средняя скорость атомов серебра близка к той, которая следует из максвелловского распределения молекул по скоростям.

**3. Опыт Ламмерт.** Этот опыт позволяет более точно определить закон распределения молекул по скоростям. Схема вакуумной установки приведена на рис. 71. Молекулярный пучок, сформированный источником, проходя через щель, попадает в приемник. Между источником и приемником помещают два диска с прорезями, закрепленных на общей оси. При неподвижных дисках молекулы достигают приемника, проходя через прорези в обоих

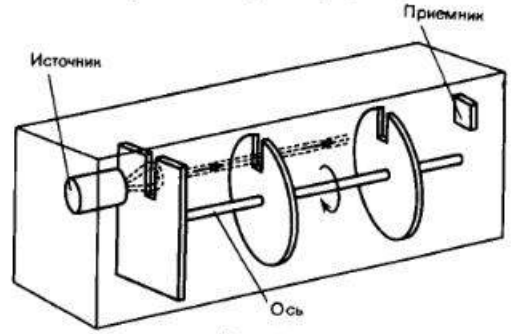


Рис. 71

дисках. Если ось привести во вращение, то приемника достигнут только те прошедшие прорезь в первом диске молекулы, которые затрачивают для пробега между дисками время, равное или кратное времени оборота диска. Другие же молекулы задерживаются вторым диском. Меняя угловую скорость вращения дисков и измеряя число молекул, попадающих в приемник, можно выявить закон распределения скоростей молекул. Этот опыт также подтвердил справедливость максвелловского распределения молекул по скоростям.

**4. Опытное определение постоянной Авогадро.** Воспользовавшись идеей распределения молекул по высоте (см. формулу (45.4)), французский ученый Ж. Перрен (1870—1942) экспериментально определил постоянную Авогадро. Исследуя под микроскопом броуновское движение, он убедился, что броуновские частицы распределяются по высоте подобно молекулам газа в поле тяготения. Применив к ним больцмановское распределение, можно записать

$$n = n_0 e^{-(m-m_1)gh/(kT)},$$

где $m$ — масса частицы, $m_1$ — масса вытесненной ею жидкости: $m = {}^4/_3 \pi r^3 \rho$, $m_1 = {}^4/_3 \pi r^3 \rho_1$ ($r$ — радиус частицы, $\rho$ — плотность частицы, $\rho_1$ — плотность жидкости).

Если $n_1$ и $n_2$ — концентрации частиц на уровнях $h_1$ и $h_2$, а $k = R/N_A$, то

$$N_A = \frac{3RT \ln (n_1/n_2)}{4\pi r^3 (\rho - \rho_1) g (h_2 - h_1)}.$$

Значение $N_A$, получаемое из работ Ж. Перрена, соответствовало значениям, полученным в других опытах, что подтверждает применимость к броуновским частицам распределения (45.4).

## § 48. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах

В термодинамически неравновесных системах возникают особые *необратимые* процессы, называемые **явлениями переноса**, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы, импульса. К явлениям переноса относятся **теплопроводность** (обусловлена *переносом энергии*), **диффузия** (обусловлена *переносом массы*) и **внутреннее трение** (обусловлено *переносом импульса*). Для простоты ограничимся *одномерными* явлениями переноса. Систему отсчета будем выбирать так, чтобы ось $x$ была ориентирована в направлении переноса.

**1. Теплопроводность.** Если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, т. е., иными словами, выравнивание температур.

Перенос энергии в форме теплоты подчиняется **закону Фурье:**

$$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}, \qquad (48.1)$$

где $j_E$ — **плотность теплового потока** — величина, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты *в единицу времени через единичную площадку*, перпендикулярную оси $x$, $\lambda$ — **теплопроводность**, $\frac{dT}{dx}$ — градиент температуры, равный скорости изменения температуры на единицу длины $x$ в направлении нормали к этой площадке. Знак минус показывает, что при теплопроводности энергия переносится в направлении убывания температуры (поэтому знаки $j_E$ и $\frac{dT}{dx}$ противоположны). Теплопроводность $\lambda$ численно равна плотности теплового потока при градиенте температуры, равном единице.

Можно показать, что

$$\lambda = {}^1/_3 c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle, \qquad (48.2)$$

где $c_V$ — *удельная теплоемкость газа при постоянном объеме* (количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг газа на 1 К при постоянном объеме), $\rho$ — плотность газа, $\langle v \rangle$ — средняя скорость теплового движения молекул, $\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега.

**2. Диффузия.** Явление диффузии заключается в том, что происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твердых тел; диффузия сводится к обмену масс частиц этих тел, возникает и продолжается, пока существует градиент плотности. Во время становления молекулярно-кинетической теории по вопросу диффузии возникли противоречия. Так как молекулы движутся с огромными скоростями, диффузия должна происходить очень быстро. Если же открыть в комнате сосуд с пахучим веществом, то запах распространяется довольно медленно. Однако противоречия здесь нет. Молекулы при атмосферном давлении обладают малой длиной свободного пробега и, сталкиваясь с другими молекулами, в основном «стоят» на месте.

Явление диффузии для химически однородного газа подчиняется **закону Фика:**

$$j_m = -D\frac{d\rho}{dx}, \qquad (48.3)$$

где $j_m$ — **плотность потока массы** — величина, определяемая массой вещества, диффундирующего *в единицу времени через единичную площадку*, перпендикулярную оси $x$, $D$ — **диффузия (коэффициент диффузии)**, $\frac{d\rho}{dx}$ — градиент плотности, равный скорости изменения плотности на единицу длины $x$ в направлении нормали к этой площадке. Знак минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности (поэтому знаки $j_m$ и $\frac{d\rho}{dx}$ противоположны). Диффузия $D$ численно равна плотности потока массы при градиенте плотности, равном единице. Согласно кинетической теории газов,

$$D = {}^1/_3 \langle v \rangle \langle l \rangle. \qquad (48.4)$$

**3. Внутреннее трение (вязкость).** Механизм возникновения внутреннего трения между параллельными слоями газа (жидкости), движущимися с различными скоростями, заключается в том, что из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, движущегося медленнее — увеличивается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Согласно формуле (31.1), сила внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости) подчиняется **закону Ньютона:**

$$F = \eta \left|\frac{dv}{dx}\right| S, \qquad (48.5)$$

где $\eta$ — динамическая вязкость (вязкость), $\frac{dv}{dx}$ — градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости в направлении $x$, перпендикулярном направлению движения слоев, $S$ — площадь, на которую действует сила $F$.

Взаимодействие двух слоев согласно второму закону Ньютона можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени передается импульс, по модулю равный действующей силе. Тогда выражение (48.5) можно представить в виде

$$j_p = -\eta\frac{dv}{dx}, \qquad (48.6)$$

где $j_p$ — **плотность потока импульса** — величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении оси $x$ через единичную площадку, перпендикулярную оси $x$, $\frac{dv}{dx}$ — градиент скорости. Знак минус указывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости (поэтому знаки $j_p$ и $\frac{dv}{dx}$ противоположны).

Динамическая вязкость $\eta$ численно равна плотности потока импульса при градиенте скорости, равном единице; она вычисляется по формуле

$$\eta = {}^1/_3\rho \langle v \rangle \langle l \rangle. \qquad (48.7)$$

Из сопоставления формул (48.1), (48.3) и (48.6), описывающих явления переноса, следует, что закономерности всех явлений переноса сходны между собой. Эти законы были установлены задолго до того, как они были обоснованы

и выведены из молекулярно-кинетической теории, позволившей установить, что внешнее сходство их математических выражений обусловлено общностью лежащего в основе явлений теплопроводности, диффузии и внутреннего трения молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их хаотического движения и столкновений друг с другом.

Рассмотренные законы Фурье, Фика и Ньютона не вскрывают молекулярно-кинетического смысла коэффициентов $\lambda$, $D$ и $\eta$. Выражения для коэффициентов переноса выводятся из кинетической теории. Они записаны без вывода, так как строгое рассмотрение явлений переноса довольно громоздко, а качественное — не имеет смысла. Формулы (48.2), (48.4) и (48.7) связывают коэффициенты переноса и характеристики теплового движения молекул. Из этих формул вытекают простые зависимости между $\lambda$, $D$ и $\eta$:

$$\begin{cases} \eta = \rho D, \\ \lambda/(\eta c_V) = 1. \end{cases}$$

Используя эти формулы, можно по найденным из опыта одним величинам определить другие.

## § 49. Вакуум и методы его получения. Свойства ультраразреженных газов

Если из сосуда откачивать газ, то по мере понижения давления число столкновений молекул друг с другом уменьшается, что приводит к увеличению их длины свободного пробега. При достаточно большом разрежении столкновения между молекулами относительно редки, поэтому основную роль играют столкновения молекул со стенками сосуда. **Вакуумом** называется состояние газа, при котором средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ сравнима или больше характерного линейного размера $d$ сосуда, в котором газ находится. В зависимости от соотношения $\langle l \rangle$ и $d$ различают **низкий** ($\langle l \rangle \ll d$), **средний** ($\langle l \rangle \leqslant d$), **высокий** ($\langle l \rangle > d$) и **сверхвысокий** ($\langle l \rangle \gg d$) вакуум. Газ в состоянии высокого вакуума называется **ультраразреженным.**

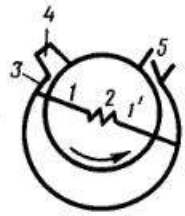


Рис. 72

Вопросы создания вакуума имеют большое значение в технике, так как, например, во многих современных электронных приборах используются электронные пучки, формирование которых возможно лишь в условиях вакуума. Для получения различных степеней разрежения применяются **вакуумные насосы.** В настоящее время применяются вакуумные насосы, позволяющие получить предварительное разрежение (форвакуум) до $\approx 0{,}13$ Па, а также вакуумные насосы и лабораторные приспособления, позволяющие получить давление до 13,3 мкПа — 1,33 пПа ($10^{-7} - 10^{-14}$ мм рт. ст.).

Принцип работы форвакуумного насоса представлен на рис. 72. Внутри цилиндрической полости корпуса вращается эксцентрично насаженный цилиндр. Две лопасти *1* и *1'*, вставленные в разрез цилиндра и раздвигаемые пружиной *2*, разделяют пространство между цилиндром и стенкой полости на две части. Газ из откачиваемого сосуда поступает в область *3*, по мере поворачивания цилиндра лопасть *1* отходит, пространство *3* увеличивается и газ засасывается через трубку *4*. При дальнейшем вращении лопасть *1'* отключает пространство *3* от трубки *4* и начинает вытеснять газ через клапан *5* наружу. Весь процесс непрерывно повторяется.

Для получения высокого вакуума применяются **диффузионные насосы** (рабочее вещество — ртуть или масло), которые не способны откачивать газ из сосудов начиная с атмосферного давления, но способны создавать добавочную разность давлений, поэтому их употребляют вместе с форвакуумными насосами. Рассмотрим схему действия диффузионного насоса (рис. 73). В колбе ртуть нагревается, пары ртути, поднимаясь по трубке *1*, вырывают-

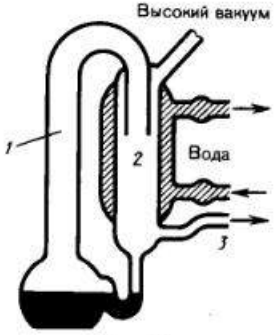



Рис. 73

ся из сопла 2 с большой скоростью, увлекая за собой молекулы газа из откачиваемого сосуда (в нем создан предварительный вакуум). Эти пары, попадая затем в «водяную рубашку», конденсируются и стекают обратно в резервуар, а захваченный газ выходит в пространство (через трубку 3), в котором уже создан форвакуум. Если применять многоступенчатые насосы (несколько сопл расположены последовательно), то реально при хороших уплотнениях можно с помощью них получить разрежение до $10^{-7}$ мм рт. ст.

Для дальнейшего понижения давления применяются так называемые «ловушки». Между диффузионным насосом и откачиваемым объектом располагают специально изогнутое колено (1 или 2) соединительной трубки (ловушку), которую охлаждают жидким азотом (рис. 74). При такой температуре пары ртути (масла) вымораживаются и давление в откачиваемом сосуде понижается приблизительно на 1—2 порядка. Описанные ловушки называют **охлаждаемыми;** можно применять также **неохлаждаемые ловушки.** Специальное рабочее вещество (например, алюмогель) помещают в один из отростков соединительной трубки вблизи откачиваемого

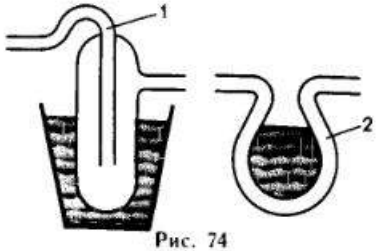



Рис. 74

объекта, которое поддерживается при температуре 300 °С. При достижении высокого вакуума алюмогель охлаждается до комнатной температуры, при которой он начинает поглощать имеющиеся в системе пары. Преимущество этих ловушек состоит в том, что с их помощью в откачиваемых объектах можно поддерживать высокий вакуум уже после непосредственной откачки в течение даже нескольких суток.

Остановимся на некоторых свойствах ультраразреженных газов. Так как в состоянии ультраразрежения молекулы практически друг с другом не сталкиваются, то газ в этом состоянии не обладает внутренним трением. Отсутствие соударений между молекулами разреженного газа отражается также на механизме теплопроводности. Если при обычных давлениях перенос энергии молекулами производится «эстафетой», то при ультраразрежении каждая молекула *сама* должна перенести энергию от одной стенки сосуда к другой. Явление уменьшения теплопроводности вакуума при понижении давления используется на практике для создания тепловой изоляции. Например, для уменьшения теплообмена между телом и окружающей средой тело помещают в сосуд Дьюара *, имеющий двойные стенки, между которыми находится разреженный воздух, теплопроводность которого очень мала.

Рассмотрим два сосуда 1 и 2, поддерживаемых соответственно при температурах $T_1$ и $T_2$ (рис. 75) и соединенных между собой трубкой. Если длина свободного пробега молекул гораздо меньше диаметра соединительной трубки ($\langle l \rangle \ll d$), то стационарное состояние газа характеризуется равенством давлений в обоих сосудах ($p_1 = p_2$). Стационарное же

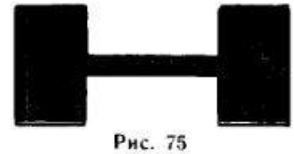


Рис. 75

* Д. Дьюар (1842—1923) — английский химик и физик.

состояние ультраразреженного газа ($\langle l \rangle \gg d$), находящегося в двух сосудах, соединенных трубкой, возможно лишь в том случае, когда встречные потоки частиц, перемещающихся из одного сосуда в другой, одинаковы, т. е.

$$n_1 \langle v_1 \rangle = n_2 \langle v_2 \rangle, \qquad (49.1)$$

где $n_1$ и $n_2$ — концентрации молекул в обоих сосудах, $\langle v_1 \rangle$ и $\langle v_2 \rangle$ — средние скорости молекул. Учитывая, что $n = p/(kT)$ и $\langle v \rangle = \sqrt{8RT/(\pi M)}$, из условия (49.1) получаем

$$p_1/p_2 = \sqrt{T_1/T_2}, \qquad (49.2)$$

т. е. в условиях высокого вакуума выравнивания давлений не происходит. Если в откачанный стеклянный баллон (рис. 76) на пружину *1* насадить слюдяной листочек *2*, одна сторона которого зачернена, и освещать его, то возникнет разность температур между светлой и зачерненной поверхностями листочка. Из выражения (49.2) следует, что в данном случае разным будет и давление, т. е. молекулы от зачерненной поверхности будут отталкиваться с большей силой, чем от светлой, в результате чего листочек отклонится. Это явление называется **радиометрическим эффектом.** На радиометрическом эффекте основано действие **радиометрического манометра.**

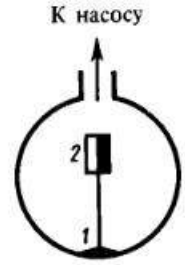


Рис. 76

## Контрольные вопросы

- Почему термодинамический и статистический (молекулярно-кинетический) методы исследования макроскопических систем качественно различны и взаимно дополняют друг друга?
- Что такое термодинамические параметры? Какие термодинамические параметры вам известны?
- Как объяснить закон Бойля—Мариотта с точки зрения молекулярно-кинетической теории?
- Какими законами описываются изобарные и изохорные процессы?
- Каков физический смысл постоянной Авогадро? числа Лошмидта?
- При некоторых значениях температуры и давления азот количеством вещества 1 моль занимает объем 20 л. Какой объем при этих же условиях займет водород количеством вещества 1 моль?
- В чем заключается молекулярно-кинетическое толкование давления газа? термодинамической температуры?
- В чем содержание и какова цель вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов?
- Каков физический смысл функции распределения молекул по скоростям? по энергиям?
- Как, зная функцию распределения молекул по скоростям, перейти к функции распределения по энергиям?
- Во сколько раз и как изменится средняя скорость движения молекул при переходе от кислорода к водороду?
- В чем суть распределения Больцмана?
- Зависит ли средняя длина свободного пробега молекул от температуры газа? Почему?
- Как изменится средняя длина свободного пробега молекул с увеличением давления?
- В чем сущность явлений переноса? Каковы они и при каких условиях возникают?
- Объяснить физическую сущность законов Фурье? Фика? Ньютона?
- Каков механизм теплопроводности ультраразреженных газов?

## Задачи

**8.1.** Начертить и объяснить графики изотермического и изобарного процессов в координатах $p$ и $V$, $p$ и $T$, $T$ и $V$.

**8.2.** В сосуде при температуре $t=20$ °С и давлении $p=0{,}2$ МПа содержится смесь газов — кислорода массой $m_1=16$ г и азота массой $m_2=21$ г. Определить плотность смеси. [2,5 кг/м$^3$]

**8.3.** Определить наиболее вероятную скорость молекул газа, плотность которого при давлении 40 кПа составляет 0,35 кг/м$^3$. [478 м/с]

**8.4.** Используя закон для распределения молекул идеального газа по скоростям, найти закон, выражающий распределение молекул по относительным скоростям $u$ ($u=v/v_в$). [$f(u)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}u^2$]

**8.5.** Воспользовавшись законом распределения идеального газа по относительным скоростям (см. задачу 8.4), определить, какая доля молекул кислорода, находящегося при температуре $t=0$ °С, имеет скорости от 100 до 110 м/с. [0,4]

**8.6.** На какой высоте плотность воздуха в два раза меньше, чем его плотность на уровне моря? Считать, что температура воздуха везде одинакова и равна 273 К. [5,5 км]

**8.7.** Определить среднюю продолжительность свободного пробега молекул водорода при температуре 300 К и давлении 5 кПа. Эффективный диаметр молекул принять равным 0,28 нм. [170 нс]

**8.8.** Коэффициенты диффузии и внутреннего трения при некоторых условиях равны соответственно $1{,}42\cdot10^{-4}$ м$^2$/с и 8,5 мкПа·с. Определить концентрацию молекул воздуха при этих условиях. [$1{,}25\cdot10^{24}$ м$^{-3}$]

# Глава 9
# Основы термодинамики

## § 50. Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул

Важной характеристикой термодинамической системы является ее **внутренняя энергия** $U$ — энергия хаотического (теплового) движения микрочастиц системы (молекул, атомов, электронов, ядер и т. д.) и энергия взаимодействия этих частиц. Из этого определения следует, что к внутренней энергии не относятся кинетическая энергия движения системы как целого и потенциальная энергия системы во внешних полях.

Внутренняя энергия — *однозначная функция* термодинамического состояния системы, т. е. в каждом состоянии система обладает вполне определенной внутренней энергией (она не зависит от того, как система пришла в данное состояние). Это означает, что при переходе системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии определяется только разностью значений внутренней энергии этих состояний и не зависит от пути перехода.

В § 1 было введено понятие числа степеней свободы — числа независимых переменных (координат), полностью определяющих положение системы в пространстве. В ряде задач молекулу одноатомного газа (рис. 77, *а*) рассматривают как материальную точку, которой приписывают три

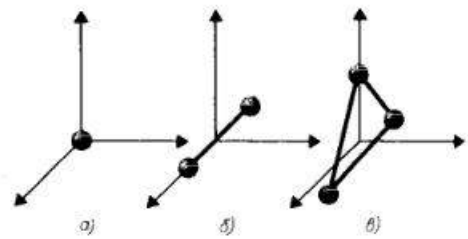



Рис. 77

степени свободы поступательного движения. При этом энергию вращательного движения можно не учитывать ($r \to 0$, $J = mr^2 \to 0$, $T_{вр} = J\omega^2/2 \to 0$).

В классической механике молекула двухатомного газа в первом приближении рассматривается как совокупность двух материальных точек, жестко связанных недеформируемой связью (рис. 77,*б*). Эта система кроме трех степеней свободы поступательного движения имеет еще две степени свободы вращательного движения. Вращение вокруг третьей оси (оси, проходящей через оба атома) лишено смысла. Таким образом, двухатомный газ обладает пятью степенями свободы ($i = 5$). Трехатомная (рис. 77,*в*) и многоатомная нелинейные молекулы имеют шесть степеней свободы: три поступательных и три вращательных. Естественно, что жесткой связи между атомами не существует. Поэтому для реальных молекул необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения.

Независимо от общего числа степеней свободы молекул три степени свободы всегда поступательные. Ни одна из поступательных степеней свободы не имеет преимущества перед другими, поэтому на каждую из них приходится в среднем одинаковая энергия, равная $^1/_3$ значения $\langle \varepsilon_0 \rangle$ в (43.8):

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{\langle \varepsilon_0 \rangle}{3} = \frac{1}{2} kT.$$

В классической статистической физике выводится **закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул**: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная $kT/2$, а на каждую колебательную степень свободы — в среднем энергия, равная $kT$. Колебательная степень «обладает» вдвое большей энергией потому, что на нее приходится не только кинетическая энергия (как в случае поступательного и вращательного движений), но и потенциальная, причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы. Таким образом, средняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где $i$ — сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = i_{пост} + i_{вращ} + 2i_{колеб}.$$

В классической теории рассматривают молекулы с жесткой связью между атомами; для них $i$ совпадает с числом степеней свободы молекулы.

Так как в идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю (молекулы между собой не взаимодействуют), то внутренняя энергия, отнесенная к одному молю газа, будет равна сумме кинетических энергий $N_A$ молекул:

$$U_m = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{i}{2} RT. \qquad (50.1)$$

Внутренняя энергия для произвольной массы $m$ газа

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} RT,$$

где $M$ — молярная масса, $\nu$ — количество вещества.

## § 51. Первое начало термодинамики

Рассмотрим термодинамическую систему, для которой механическая энергия не изменяется, а изменяется лишь ее внутренняя энергия. Внутренняя энергия системы может изменяться в результате различных процессов, например совершения над системой работы и сообщения ей теплоты. Так, вдвигая поршень в цилиндр, в котором находится газ, мы сжимаем этот газ, в результате чего его температура повышается, т. е. тем самым изменяется (увеличивается) внутренняя энергия газа. С другой стороны, температуру газа и его внутреннюю энергию можно повысить за счет сообщения ему некоторого количества теплоты — энергии, переданной системе внешними телами путем теплообмена (процесс обмена внутренними энергиями при контакте тел с разными температурами).

Таким образом, можно говорить о двух формах передачи энергии от одних тел к другим: работе и теплоте. Энергия механического движения может превращаться в энергию теплового движения и наоборот. При этих превращениях соблюдается закон сохранения и превращения энергии; применительно к термодинамическим процессам этим законом и является первое начало термодинамики, установленное в результате обобщения многовековых опытных данных.

Допустим, что некоторая система (газ, заключенный в цилиндр под поршнем), обладая внутренней энергией $U_1$, получила некоторое количество теплоты $Q$ и, перейдя в новое состояние, характеризующееся внутренней энергией $U_2$, совершила работу $A$ над внешней средой, т. е. против внешних сил. Количество теплоты считается положительным, когда оно подводится к системе, а работа — положительной, когда система совершает ее против внешних сил. Опыт показывает, что в соответствии с законом сохранения энергии при любом способе перехода системы из первого состояния во второе изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ будет одинаковым и равным разности между количеством теплоты $Q$, полученным системой, и работой $A$, совершенной системой против внешних сил:

$$\Delta U = Q - A,$$

или

$$Q = \Delta U + A. \qquad (51.1)$$

Уравнение (51.1) выражает **первое начало термодинамики:** теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил.

Выражение (51.1) в дифференциальной форме будет иметь вид

$$dQ = dU + dA,$$

или в более корректной форме

$$\delta Q = dU + \delta A, \qquad (51.2)$$

где $dU$ — бесконечно малое изменение внутренней энергии системы, $\delta A$ — элементарная работа, $\delta Q$ — бесконечно малое количество теплоты. В этом выражении $dU$ является полным дифференциалом, а $\delta A$ и $\delta Q$ таковыми не являются. В дальнейшем будем использовать запись первого начала термодинамики в форме (51.2).

Из формулы (51.1) следует, что в СИ количество теплоты выражается в тех же единицах, что работа и энергия, т. е. в джоулях (Дж).

Если система периодически возвращается в первоначальное состояние, то изменение ее внутренней энергии $\Delta U = 0$. Тогда, согласно первому началу термодинамики,

$$A = Q,$$

т. е. **вечный двигатель первого рода** — периодически действующий двигатель, который совершал бы бо́льшую работу, чем сообщенная ему извне энергия,— невозможен (одна из формулировок первого начала термодинамики).

## § 52. Работа газа при изменении его объема

Для рассмотрения конкретных процессов найдем в общем виде внешнюю работу, совершаемую газом при изменении его объема. Рассмотрим, например, газ, находящийся под поршнем в цилиндрическом сосуде (рис. 78). Если газ, расширяясь, передвигает поршень на бесконечно малое расстояние $dl$, то производит над ним работу

$$\delta A = F\,dl = pS\,dl = p\,dV,$$

где $S$ — площадь поршня, $S\,dl = dV$ — изменение объема системы. Таким образом,

$$\delta A = p\,dV. \qquad (52.1)$$

Полную работу $A$, совершаемую газом при изменении его объема от $V_1$ до $V_2$, найдем

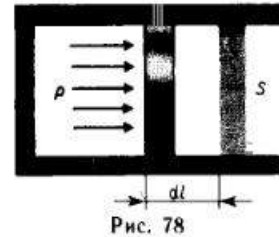


Рис. 78

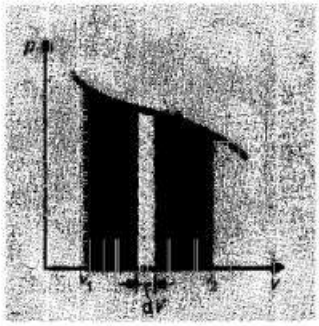



Рис. 79

интегрированием формулы (52.1):

$$A=\int_{V_1}^{V_2} p\,dV. \qquad (52.2)$$

Результат интегрирования определяется характером зависимости между давлением и объемом газа. Найденное для работы выражение (52.2) справедливо при любых изменениях объема твердых, жидких и газообразных тел.

Произведенную при том или ином процессе работу можно изобразить графически с помощью кривой в координатах $p$, $V$. Например, изменение давления газа при его расширении изобразится кривой на рис. 79. При увеличении объема на $dV$ совершаемая газом работа равна $pdV$, т. е. определяется площадью полоски с основанием $dV$ на рисунке. Поэтому полная работа, совершаемая газом при расширении от объема $V_1$ до объема $V_2$, определяется площадью, ограниченной осью абсцисс, кривой $p=f(V)$ и прямыми $V_1$ и $V_2$.

Графически можно изображать только **равновесные процессы** — процессы, состоящие из последовательности равновесных состояний. Они протекают так, что изменение термодинамических параметров за конечный промежуток времени бесконечно мало. Все реальные процессы неравновесны (они протекают с конечной скоростью), но в ряде случаев неравновесностью реальных процессов можно пренебречь (чем медленнее процесс протекает, тем он ближе к равновесному). В дальнейшем рассматриваемые процессы будем считать равновесными.

## § 53. Теплоемкость

**Удельная теплоемкость вещества** — величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c=\frac{\delta Q}{m\,dT}.$$

Единица удельной теплоемкости — джоуль на килограмм-кельвин (Дж/(кг·К)).

**Молярная теплоемкость** — величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моля вещества на 1 К:

$$C_m=\frac{\delta Q}{\nu\,dT}, \qquad (53.1)$$

где $\nu=m/M$ — количество вещества, выражающее число молей.

Единица молярной теплоемкости — джоуль на моль-кельвин (Дж/(моль·К)).

Удельная теплоемкость $c$ связана с молярной $C_m$ соотношением

$$C_m=cM, \qquad (53.2)$$

где $M$ — молярная масса вещества.

Различают теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении, если в процессе нагревания вещества его объем или давление поддерживается постоянным.

Запишем выражение первого начала термодинамики (51.2) для 1 моля газа с учетом формул (52.1) и (53.1):

$$C_m\,dT=dU_m+p\,dV_m. \qquad (53.3)$$

Если газ нагревается при постоянном объеме, то работа внешних сил равна нулю (см. (52.1)) и сообщаемая газу извне теплота идет только на увеличение его внутренней энергии:

$$C_V=\frac{dU_m}{dT}, \qquad (53.4)$$

т. е. молярная теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V$ равна изменению внутренней энергии 1 моля газа при повышении его температуры на 1 К. Согласно формуле (50.1),

$$dU_m=\frac{i}{2}R\,dT,$$

тогда

$$C_V = iR/2. \qquad (53.5)$$

Если газ нагревается при постоянном давлении, то выражение (53.3) можно записать в виде

$$C_p = \frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}T} + \frac{p\,\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}T}.$$

Учитывая, что $\frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}T}$ не зависит от вида процесса (внутренняя энергия идеального газа не зависит ни от $p$, ни от $V$, а определяется лишь температурой $T$) и всегда равна $C_V$ (см. (53.4)); продифференцировав уравнение Клапейрона — Менделеева $pV_m = RT$ (42.4) по $T$ ($p$ = const), получим

$$C_p = C_V + R. \qquad (53.6)$$

Выражение (53.6) называется **уравнением Майера;** оно показывает, что $C_p$ всегда больше $C_V$ на величину молярной газовой постоянной. Это объясняется тем, что при нагревании газа при постоянном давлении требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа.

Использовав (53.5), выражение (53.6) можно записать в виде

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \qquad (53.7)$$

При рассмотрении термодинамических процессов важно знать характерное для каждого газа отношение $C_p$ к $C_V$:

$$\gamma = C_p/C_V = (i+2)/i. \qquad (53.8)$$

Из формул (53.5) и (53.7) следует, что молярные теплоемкости определяются лишь числом степеней свободы и не зависят от температуры. Это утверждение молекулярно-кинетической теории справедливо в довольно широком интервале температур лишь для одноатомных газов. Уже у двухатомных газов число степеней свободы, проявляющееся в теплоемкости, зависит от температуры. Молекула двухатомного газа обладает тремя поступательными, двумя вращательными и одной колебательной степенями свободы.

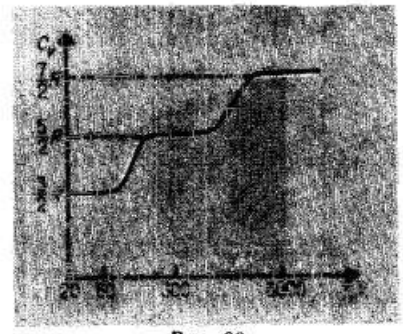


Рис. 80

По закону равномерного распределения энергии по степеням свободы (см. § 50), для комнатных температур $C_V = {}^7/_2 R$. Из качественной экспериментальной зависимости молярной теплоемкости $C_V$ водорода (рис. 80) следует, что $C_V$ зависит от температуры: при низкой температуре ($\approx$50 K) $C_V = {}^3/_2 R$, при комнатной — $C_V = {}^5/_2 R$ (вместо расчетных ${}^7/_2 R$!) и очень высокой — $C_V = {}^7/_2 R$. Это можно объяснить, предположив, что при низких температурах наблюдается только поступательное движение молекул, при комнатных — добавляется их вращение, а при высоких — к этим двум видам движения добавляются еще колебания молекул.

Расхождение теории и эксперимента нетрудно объяснить. Дело в том, что при вычислении теплоемкости надо учитывать квантование энергии вращения и колебаний молекул (возможны не любые вращательные и колебательные энергии, а лишь определенный дискретный ряд значений энергий). Если энергия теплового движения недостаточна, например, для возбуждения колебаний, то эти колебания не вносят своего вклада в теплоемкость (соответствующая степень свободы «замораживается» — к ней неприменим закон равнораспределения энергии). Этим объясняется, что теплоемкость моля двухатомного газа — водорода — при комнатной температуре равна ${}^5/_2 R$ вместо ${}^7/_2 R$. Аналогично можно объяснить уменьшение теплоемкости при низкой температуре («замораживаются» вращательные степени сво-

боды) и увеличение при высокой («возбуждаются» колебательные степени свободы).

## § 54. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Среди равновесных процессов, происходящих с термодинамическими системами, выделяются **изопроцессы**, при которых один из основных параметров состояния сохраняется постоянным.

**Изохорный процесс** ($V=\text{const}$). Диаграмма этого процесса **(изохора)** в координатах $p$, $V$ изображается прямой, параллельной оси ординат (рис. 81), где процесс *1—2* есть изохорное нагревание, а *1—3* — изохорное охлаждение. При изохорном процессе газ не совершает работы над внешними телами, т. е.

$$\delta A = p\,dV = 0.$$

Как уже указывалось в § 53, из первого начала термодинамики ($\delta Q = dU + \delta A$) для изохорного процесса следует, что вся теплота, сообщаемая газу, идет на увеличение его внутренней энергии:

$$\delta Q = dU.$$

Согласно формуле (53.4),

$$dU_m = C_V\,dT.$$

Тогда для произвольной массы газа получим

$$\delta Q = dU = \frac{m}{M} C_V\,dT. \qquad (54.1)$$

**Изобарный процесс** ($p=\text{const}$). Диаграмма этого процесса **(изобара)** в координатах $p$, $V$ изображается прямой, параллельной оси $V$. При изобарном процессе работа газа (см. (52.2)) при расширении объема от $V_1$ до $V_2$ равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = p(V_2 - V_1) \qquad (54.2)$$

и определяется площадью прямоугольника, выполненного в цвете на рис. 82. Если использовать уравнение (42.5) Клапейрона — Менделеева для выбранных нами двух состояний, то

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1,\ pV_2 = \frac{m}{M} RT_2,$$

откуда

$$V_2 - V_1 = \frac{m}{M}\frac{R}{p}(T_2 - T_1).$$

Тогда выражение (54.2) для работы изобарного расширения примет вид

$$A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \qquad (54.3)$$

Из этого выражения вытекает *физический смысл молярной газовой постоянной* $R$: если $T_2 - T_1 = 1$ К, то для 1 моля газа $R = A$, т. е. $R$ численно равна работе изобарного расширения 1 моля идеального газа при нагревании его на 1 К.

В изобарном процессе при сообщении газу массой $m$ количества теплоты

$$\delta Q = \frac{m}{M} C_p\,dT$$

его внутренняя энергия возрастает на величину (согласно формуле (53.4))

$$dU = \frac{m}{M} C_V\,dT.$$

При этом газ совершит работу, определяемую выражением (54.3).

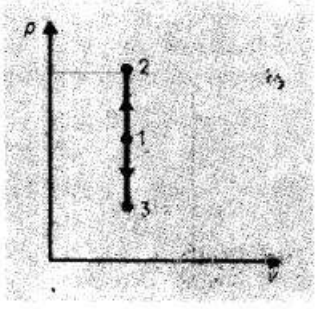


Рис. 81

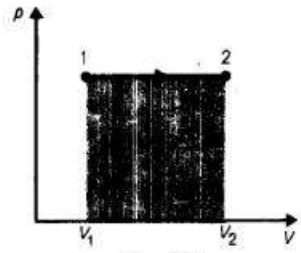


Рис. 82

**Изотермический процесс** ($T=\text{const}$). Как уже указывалось в § 41, изотермический процесс описывается законом Бойля — Мариотта:

$$pV=\text{const}.$$

Диаграмма этого процесса **(изотерма)** в координатах $p$, $V$ представляет собой гиперболу (см. рис. 60), расположенную на диаграмме тем выше, чем выше температура, при которой происходил процесс.

Исходя из выражений (52.2) и (42.5) найдем работу изотермического расширения газа:

$$A=\int_{V_1}^{V_2} p\,dV=\int_{V_1}^{V_2}\frac{m}{M}RT\frac{dV}{V}=$$

$$=\frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}=\frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Так как при $T=\text{const}$ внутренняя энергия идеального газа не изменяется:

$$dU=\frac{m}{M}C_V\,dT=0,$$

то из первого начала термодинамики ($\delta Q=dU+\delta A$) следует, что для изотермического процесса

$$\delta Q=\delta A,$$

т. е. все количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется на совершение им работы против внешних сил:

$$Q=A=\frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}=\frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{54.4}$$

Следовательно, для того чтобы при работе расширения температура не уменьшалась, к газу в течение изотермического процесса необходимо подводить количество теплоты, эквивалентное внешней работе расширения.

## § 55. Адиабатический процесс. Политропный процесс

**Адиабатическим** называется процесс, при котором отсутствует теплообмен ($\delta Q=0$) между системой и окружающей средой. К адиабатическим процессам можно отнести все быстропротекающие процессы. Например, адиабатическим процессом можно считать процесс распространения звука в среде, так как скорость распространения звуковой волны настолько велика, что обмен энергией между волной и средой произойти не успевает. Адиабатические процессы применяются в двигателях внутреннего сгорания (расширение и сжатие горючей смеси в цилиндрах), в холодильных установках и т. д.

Из первого начала термодинамики ($\delta Q=dU+\delta A$) для адиабатического процесса следует, что

$$\delta A=-dU, \tag{55.1}$$

т. е. внешняя работа совершается за счет изменения внутренней энергии системы.

Используя выражения (52.1) и (53.4), для произвольной массы газа перепишем уравнение (55.1) в виде

$$p\,dV=-\frac{m}{M}C_V\,dT. \tag{55.2}$$

Продифференцировав уравнение состояния для идеального газа $pV=\frac{m}{M}RT$, получим

$$p\,dV+V\,dp=\frac{m}{M}R\,dT. \tag{55.3}$$

Исключим из (55.2) и (55.3) температуру $T$:

$$\frac{p\,dV+V\,dp}{p\,dV}=-\frac{R}{C_V}=-\frac{C_p-C_V}{C_V}.$$

Разделив переменные и учитывая, что $C_p/C_V=\gamma$ (см. (53.8)), найдем

$$dp/p=-\gamma\,dV/V.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от $p_1$ до $p_2$ и соответственно от $V_1$ до $V_2$, а затем потенцируя, придем к выражению

$$p_2/p_1=(V_1/V_2)^{\gamma},$$

или

$$p_1V_1^{\gamma}=p_2V_2^{\gamma}.$$

Так как состояния *1* и *2* выбраны произвольно, то можно записать

$$pV^{\gamma}=\text{const}. \tag{55.4}$$

Полученное выражение есть **уравнение адиабатического процесса,** называемое также **уравнением Пуассона.**

Для перехода к переменным $T$, $V$ или $p$, $T$ исключим из (55.4) с помощью уравнения Клапейрона — Менделеева

$$pV=\frac{m}{M}RT$$

соответственно давление или объем:

$$TV^{\gamma-1}=\text{const}, \qquad (55.5)$$

$$T^{\gamma}p^{1-\gamma}=\text{const}. \qquad (55.6)$$

Выражения (55.4) — (55.6) представляют собой уравнения адиабатического процесса. В этих уравнениях безразмерная величина (см. (53.8) и (53.2))

$$\gamma=C_p/C_V=c_p/c_V=(i+2)/i \qquad (55.7)$$

называется **показателем адиабаты** (или **коэффициентом Пуассона**). Для одноатомных газов (Ne, He и др.), достаточно хорошо удовлетворяющих условию идеальности, $i=3$, $\gamma=1{,}67$. Для двухатомных газов ($H_2$, $N_2$, $O_2$ и др.) $i=5$, $\gamma=1{,}4$. Значения $\gamma$, вычисленные по формуле (55.7), хорошо подтверждаются экспериментом.

Диаграмма адиабатического процесса **(адиабата)** в координатах $p$, $V$ изображается гиперболой (рис. 83). На рисунке видно, что адиабата ($pV^{\gamma}=\text{const}$) более крута, чем изотерма ($pV=\text{const}$). Это объясняется тем, что при адиабатическом сжатии *1—3* увеличение давления газа обусловлено не только уменьшением его объема, как при изотермическом сжатии, но и повышением температуры.

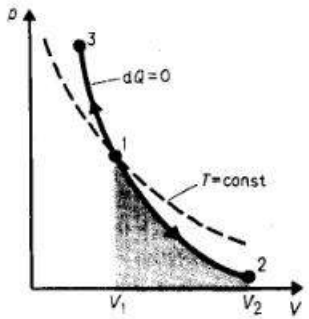



Рис. 83

Вычислим работу, совершаемую газом в адиабатическом процессе. Запишем уравнение (55.2) в виде

$$\delta A=-\frac{m}{M}C_V\,dT.$$

Если газ адиабатически расширяется от объема $V_1$ до $V_2$, то его температура уменьшается от $T_1$ до $T_2$ и работа расширения идеального газа

$$A=-\frac{m}{M}C_V\int_{T_1}^{T_2}dT=\frac{m}{M}C_V(T_1-T_2). \qquad (55.8)$$

Применяя те же приемы, что и при выводе формулы (55.5), выражение (55.8) для работы при адиабатическом расширении можно преобразовать к виду

$$A=\frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]=$$

$$=\frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{M}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где $p_1V_1=\frac{m}{M}RT_1$.

Работа, совершаемая газом при адиабатическом расширении *1—2* (определяется площадью, выполненной в цвете на рис. 83), меньше, чем при изотермическом. Это объясняется тем, что при адиабатическом расширении происходит охлаждение газа, тогда как при изотермическом — температура поддерживается постоянной за счет притока извне эквивалентного количества теплоты.

Рассмотренные изохорный, изобарный, изотермический и адиабатический процессы имеют общую особенность — они происходят при постоянной теплоемкости. В первых двух процессах теплоемкости соответственно равны $C_V$ и $C_p$, в изотермическом процессе ($dT=0$) теплоемкость равна $\pm\infty$, в адиабатическом ($\delta Q=0$) теплоемкость равна нулю. Процесс, в котором теплоемкость остается постоянной, называется **политропным.**

Исходя из первого начала термодинамики при условии постоянства теплоемкости ($C=\text{const}$) можно вывести уравнение политропы:

$$pV^n=\text{const}, \qquad (55.9)$$

где $n=(C-C_p)/(C-C_V)$ — показатель политропы. Очевидно, что при $C=0$, $n=\gamma$ из (55.9) получается уравнение адиабаты; при $C=\infty$, $n=1$ — уравнение изотермы; при $C=C_p$, $n=0$ — уравнение изобары, при $C=C_V$, $n=\pm\infty$ — уравнение изохоры. Таким образом, все рассмотренные процессы являются частными случаями политропного процесса.

## § 56. Круговой процесс (цикл). Обратимые и необратимые процессы

**Круговым процессом** (или **циклом**) называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное. На диаграмме процессов цикл изображается замкнутой кривой (рис. 84). Цикл, совершаемый идеальным газом, можно разбить на процессы расширения (*1—2*) и сжатия (*2—1*) газа. Работа расширения (определяется площадью фигуры $1a2V_2V_1 1$) положительна ($dV>0$), работа сжатия (определяется площадью фигуры $2b1V_1V_2 2$) отрицательна ($dV<0$). Следовательно, работа, совершаемая газом за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой. Если за **цикл** совершается положительная работа $A=\oint p\,dV>0$ (цикл протекает по часовой стрелке), то он называется **прямым** (рис. 84, *а*), если за цикл совершается отрицательная работа $A=\oint p\,dV<0$ (цикл протекает против часовой стрелки), то он называется **обратным** (рис. 84, *б*).

Прямой цикл используется в *тепловых двигателях* — периодически действующих двигателях, совершающих работу за счет полученной извне теплоты. Обратный цикл используется в *холодильных машинах* — периодически действующих установках, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

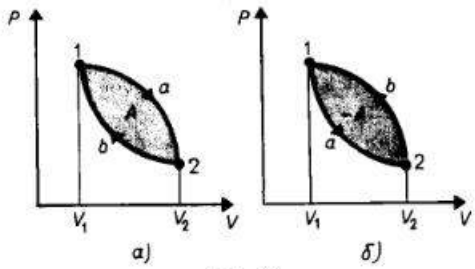


Рис. 84

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние и, следовательно, полное изменение внутренней энергии газа равно нулю. Поэтому первое начало термодинамики (51.1) для кругового процесса

$$Q=\Delta U+A=A, \qquad (56.1)$$

т. е. работа, совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты. Однако в результате кругового процесса система может теплоту как получать, так и отдавать, поэтому

$$Q=Q_1-Q_2,$$

где $Q_1$ — количество теплоты, полученное системой, $Q_2$ — количество теплоты, отданное системой. Поэтому **термический коэффициент полезного действия для кругового процесса**

$$\eta=\frac{A}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}. \qquad (56.2)$$

Термодинамический процесс называется **обратимым,** если он может происходить как в прямом, так и в обратном направлении, причем если такой процесс происходит сначала в прямом, а затем в обратном направлении и система возвращается в исходное состояние, то в окружающей среде и в этой системе не происходит никаких изменений. Всякий процесс, не удовлетворяющий этим условиям, является **необратимым.**

Любой равновесный процесс является обратимым. Обратимость равновесного процесса, происходящего в системе, следует из того, что ее любое промежуточное состояние есть состояние термодинамического равновесия; для него «безразлично», идет процесс в прямом или обратном направлении. Реальные процессы сопровождаются диссипацией энергии (из-за трения, теплопроводности и т. д.), которая нами не обсуждается. *Обратимые процессы — это идеализация реальных процессов.* Их рассмотрение важно по двум при-

чинам: 1) многие процессы в природе и технике практически обратимы; 2) обратимые процессы являются наиболее экономичными; имеют максимальный термический коэффициент полезного действия, что позволяет указать пути повышения к. п. д. реальных тепловых двигателей.

## § 57. Энтропия, ее статистическое толкование и связь с термодинамической вероятностью

Понятие энтропии введено в 1865 г. Р. Клаузиусом. Для выяснения физического содержания этого понятия рассматривают отношение теплоты $Q$, полученной телом в изотермическом процессе, к температуре $T$ теплоотдающего тела, называемое **приведенным количеством теплоты.**

Приведенное количество теплоты, сообщаемое телу на бесконечно малом участке процесса, равно $\delta Q/T$. Строгий теоретический анализ показывает, что приведенное количество теплоты, сообщаемое телу *в любом обратимом круговом процессе*, равно нулю:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \qquad (57.1)$$

Из равенства нулю интеграла (57.1), взятого по замкнутому контуру, следует, что подынтегральное выражение $\delta Q/T$ есть полный дифференциал некоторой функции, которая определяется только состоянием системы и не зависит от пути, каким система пришла в это состояние. Таким образом,

$$\frac{\delta Q}{T} = dS. \qquad (57.2)$$

*Функция состояния*, дифференциалом которой является $\delta Q/T$, называется **энтропией** и обозначается $S$.

Из формулы (57.1) следует, что для *обратимых процессов* изменение энтропии

$$\Delta S = 0. \qquad (57.3)$$

В термодинамике доказывается, что энтропия системы, совершающей *необратимый цикл*, возрастает:

$$\Delta S > 0. \qquad (57.4)$$

Выражения (57.3) и (57.4) относятся только к *замкнутым системам*, если же система обменивается теплотой с внешней средой, то ее энтропия может вести себя любым образом. Соотношения (57.3) и (57.4) можно представить в виде **неравенства Клаузиуса**

$$\Delta S \geqslant 0, \qquad (57.5)$$

т. е. энтропия замкнутой системы может *либо возрастать* (в случае необратимых процессов), *либо оставаться постоянной* (в случае обратимых процессов).

Если система совершает равновесный переход из состояния *1* в состояние *2*, то, согласно (57.2), изменение энтропии

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}, \qquad (57.6)$$

где подынтегральное выражение и пределы интегрирования надо выразить через величины, характеризующие исследуемый процесс. Формула (57.6) определяет энтропию лишь с точностью до *аддитивной постоянной*. Физический смысл имеет не сама энтропия, а разность энтропий.

Исходя из выражения (57.6), найдем изменение энтропии в процессах идеального газа. Так как $dU = \frac{m}{M} C_V\, dT$, $\delta A = p dV = \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V}$, то

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V},$$

или

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M}\left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1}\right), \qquad (57.7)$$

т. е. изменение энтропии $\Delta S_{1\to 2}$ идеального газа при переходе его из состояния *1* в состояние *2 не зависит от вида процесса перехода 1→2.*

Так как для адиабатического процесса $\delta Q = 0$, то $\Delta S = 0$ и, следовательно, $S = \text{const}$, т. е. адиабатический обратимый

процесс протекает при постоянной энтропии. Поэтому его часто называют **изоэнтропийным процессом.** Из формулы (57.7) следует, что при изотермическом процессе ($T_1=T_2$)

$$\Delta S=\frac{m}{M}R\ln\frac{V_2}{V_1};$$

при изохорном процессе ($V_1=V_2$)

$$\Delta S=\frac{m}{M}C_V\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Энтропия обладает свойством *аддитивности: энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему.* Свойством аддитивности обладают также внутренняя энергия, масса, объем (температура и давление таким свойством не обладают).

Более глубокий смысл энтропии вскрывается в статистической физике, энтропия связывается с термодинамической вероятностью состояния системы. **Термодинамическая вероятность** $W$ состояния системы — это *число способов*, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние (по определению, $W\geqslant 1$, т. е. термодинамическая вероятность не есть вероятность в математическом смысле (последняя $\leqslant 1$!)).

Согласно Больцману (1872), *энтропия* $S$ системы и термодинамическая вероятность связаны между собой следующим образом:

$$S=k\ln W, \qquad (57.8)$$

где $k$ — постоянная Больцмана. Таким образом, энтропия определяется логарифмом числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние. Следовательно, энтропия может рассматриваться *как мера вероятности* состояния термодинамической системы. Формула Больцмана (57.8) позволяет дать энтропии следующее *статистическое* толкование: *энтропия является мерой неупорядоченности системы.* В самом деле, чем больше число микросостояний, реализующих данное макросостояние, тем больше энтропия. В состоянии равновесия — наиболее вероятного состояния системы — число микросостояний максимально, при этом максимальна и энтропия.

Так как реальные процессы необратимы, то можно утверждать, что все процессы в замкнутой системе ведут к увеличению ее энтропии — **принцип возрастания энтропии.** При статистическом толковании энтропии это означает, что процессы в замкнутой системе идут в направлении увеличения числа микросостояний, иными словами, от менее вероятных состояний к более вероятным, до тех пор пока вероятность состояния не станет максимальной.

Сопоставляя выражения (57.5) и (57.8), видим, что энтропия и термодинамическая вероятность состояний замкнутой системы могут либо возрастать (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянными (в случае обратимых процессов).

Отметим, однако, что эти утверждения имеют место для систем, состоящих из очень большого числа частиц, но могут нарушаться в системах с малым числом частиц. Для «малых» систем могут наблюдаться флуктуации, т. е. энтропия и термодинамическая вероятность состояний замкнутой системы на определенном отрезке времени могут убывать, а не возрастать, или оставаться постоянными.

## § 58. Второе начало термодинамики

Первое начало термодинамики, выражая закон сохранения и превращения энергии, не позволяет установить направление протекания термодинамических процессов. Кроме того, можно представить множество процессов, не противоречащих первому началу, в которых энергия сохраняется, а в природе они не осуществляются. Появление второго начала термодинамики — необходимость дать ответ на вопрос, какие процессы в природе возможны, а какие нет — определяет направление развития процессов.

Используя понятие энтропии и неравенство Клаузиуса (см. § 57), **второе на-**

**чало термодинамики** можно сформулировать как **закон возрастания энтропии** замкнутой системы при необратимых процессах: любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.

Можно дать более краткую формулировку второго начала термодинамики: *в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает*. Здесь существенно, что речь идет о замкнутых системах, так как в незамкнутых системах энтропия может вести себя любым образом (убывать, возрастать, оставаться постоянной). Кроме того, отметим еще раз, что энтропия остается постоянной в замкнутой системе только при обратимых процессах. При необратимых процессах в замкнутой системе энтропия всегда возрастает.

Формула Больцмана (57.8) позволяет объяснить постулируемое вторым началом термодинамики возрастание энтропии в замкнутой системе при необратимых процессах: *возрастание энтропии* означает переход системы *из менее вероятных в более вероятные* состояния. Таким образом, формула Больцмана позволяет дать статистическое толкование второго начала термодинамики. Оно, являясь статистическим законом, описывает закономерности хаотического движения большого числа частиц, составляющих замкнутую систему.

Укажем еще две формулировки второго начала термодинамики:

1) **по Кельвину:** невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу;

2) **по Клаузиусу:** невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от менее нагретого тела к более нагретому.

Можно довольно просто доказать (предоставим это читателю) эквивалентность формулировок Кельвина и Клаузиуса. Кроме того, показано, что если в замкнутой системе провести воображаемый процесс, противоречащий второму началу термодинамики в формулировке Клаузиуса, то он сопровождается уменьшением энтропии. Это же доказывает эквивалентность формулировки Клаузиуса (а следовательно, и Кельвина) и статистической формулировки, согласно которой энтропия замкнутой системы не может убывать.

В середине XIX в. возникла проблема так называемой **тепловой смерти Вселенной.** Рассматривая Вселенную как замкнутую систему и применяя к ней второе начало термодинамики, Клаузиус свел его содержание к утверждению, что энтропия Вселенной должна достигнуть своего максимума. Это означает, что со временем все формы движения должны перейти в тепловую. Переход же теплоты от горячих тел к холодным приведет к тому, что температура всех тел во Вселенной сравняется, т. е. наступит полное тепловое равновесие и все процессы во Вселенной прекратятся — наступит тепловая смерть Вселенной. Ошибочность вывода о тепловой смерти заключается в том, что бессмысленно применять второе начало термодинамики к незамкнутым системам, например к такой безграничной и бесконечно развивающейся системе, как Вселенная. На несостоятельность вывода о тепловой смерти указывал также Ф. Энгельс в работе «Диалектика природы».

Первые два начала термодинамики дают недостаточно сведений о поведении термодинамических систем при нуле Кельвина. Они дополняются **третьим началом термодинамики,** или **теоремой Нернста * — Планка:** энтропия всех тел в состоянии равновесия стремится к нулю по мере приближения температуры к нулю Кельвина:

$$\lim_{T\to 0} S = 0.$$

Так как энтропия определяется с точностью до аддитивной постоянной, то эту постоянную удобно взять равной нулю (отметим, однако, что это произвольное допущение, поскольку энтропия по своей *сущности* всегда определяется с точностью до аддитивной постоянной). Из теоремы Нернста—Планка следует, что теплоемкости $C_p$ и $C_V$ при 0 К равны нулю.

* В. Ф. Г. Нернст (1864—1941) — немецкий физик и физикохимик.

## § 59. Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно и его к. п. д. для идеального газа

Из формулировки второго начала термодинамики по Кельвину следует, что **вечный двигатель второго рода** — периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет охлаждения одного источника теплоты,— невозможен. Для иллюстрации этого положения рассмотрим работу теплового двигателя (исторически второе начало термодинамики и возникло из анализа работы тепловых двигателей).

Принцип действия теплового двигателя приведен на рис. 85. От термостата * с более высокой температурой $T_1$, называемого **нагревателем**, за цикл отнимается количество теплоты $Q_1$, а термостату с более низкой температурой $T_2$, называемому **холодильником**, за цикл передается количество теплоты $Q_2$, при этом совершается работа $A=Q_1-Q_2$.

Чтобы термический коэффициент полезного действия теплового двигателя (56.2) был $\eta=1$, должно быть выполнено условие $Q_2=0$, т. е. тепловой двигатель должен иметь один источник теплоты, а это невозможно. Так, французский физик и инженер Н. Л. С. Карно (1796—1832) показал, что для работы теплового двигателя необходимо не менее двух источников теплоты с различными температурами, иначе это противоречило бы второму началу термодинамики.

Двигатель второго рода, будь он возможен, был бы практически вечным. Охлаждение, например, воды океанов на 1° дало бы огромную энергию. Масса воды в мировом океане составляет примерно $10^{18}$ т, при охлаждении которой на 1° выделилось бы примерно $10^{24}$ Дж теплоты, что эквивалентно полному сжиганию $10^{14}$ т угля. Железнодорожный состав, нагруженный этим количеством угля, растянулся бы на расстояние $10^{10}$ км, что приблизительно совпадает с размерами Солнечной системы!




Рис. 85




Рис. 86

Процесс, обратный происходящему в тепловом двигателе, используется в холодильной машине, принцип действия которой представлен на рис. 86. Системой за цикл от термостата с более низкой температурой $T_2$ отнимается количество теплоты $Q_2$ и отдается термостату с более высокой температурой $T_1$ количество теплоты $Q_1$. Для кругового процесса, согласно (56.1), $Q=A$, но, по условию, $Q=Q_2-Q_1<0$, поэтому $A<0$ и $Q_2-Q_1=-A$, или $Q_1=Q_2+A$, т. е. количество теплоты $Q_1$, отданное системой источнику теплоты при более высокой температуре $T_1$, больше количества теплоты $Q_2$, полученного от источника теплоты при более низкой температуре $T_2$, на величину работы, совершенной над системой. Следовательно, без совершения работы нельзя отбирать теплоту от менее нагретого тела и отдавать ее более нагретому. Это утверждение есть не что иное, как второе начало термодинамики в формулировке Клаузиуса.

Однако второе начало термодинамики не следует представлять так, что оно совсем запрещает переход теплоты от менее нагретого тела к более нагретому. Ведь именно такой переход осуществляется в холодильной машине. Но при этом надо помнить, что внешние силы совершают работу над системой, т. е. этот переход не является единственным результатом процесса.

Основываясь на втором начале термодинамики, **Карно** вывел **теорему**, носящую теперь его имя: из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей ($T_1$) и холодильников ($T_2$), наибольшим к. п. д. обладают обратимые машины; при этом

* Термодинамическая система, которая может обмениваться теплотой с телами без изменения температуры.

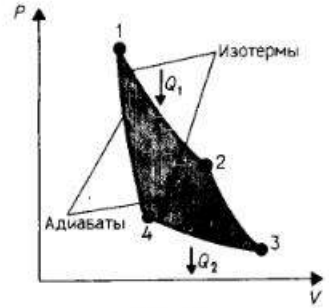



**Рис. 87**

к. п. д. обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей ($T_1$) и холодильников ($T_2$), равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела (тела, совершающего круговой процесс и обменивающегося энергией с другими телами).

Карно теоретически проанализировал обратимый наиболее экономичный цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат, и называемый **циклом Карно.** Рассмотрим *прямой цикл* Карно, в котором в качестве рабочего тела используется идеальный газ, заключенный в сосуд с подвижным поршнем.

Цикл Карно изображен на рис. 87, где изотермические расширение и сжатие заданы соответственно кривыми *1—2* и *3—4*, а адиабатические расширение и сжатие — кривыми *2—3* и *4—1*. При изотермическом процессе $U=\text{const}$, поэтому, согласно (54.4), количество теплоты $Q_1$, полученное газом от нагревателя, равно работе расширения $A_{12}$, совершаемой газом при переходе из состояния *1* в состояние *2*:

$$A_{12}=\frac{m}{M}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}=Q_1. \quad (59.1)$$

При адиабатическом расширении *2—3* теплообмен с окружающей средой отсутствует и работа расширения $A_{23}$ совершается за счет изменения внутренней энергии (см. (55.1) и (55.8)):

$$A_{23}=-\frac{m}{M}C_V(T_2-T_1).$$

Количество теплоты $Q_2$, отданное газом холодильнику при изотермическом сжатии, равно работе сжатия $A_{34}$:

$$A_{34}=\frac{m}{M}RT_2\ln\frac{V_4}{V_3}=-Q_2. \quad (59.2)$$

Работа адиабатического сжатия

$$A_{41}=-\frac{m}{M}C_V(T_1-T_2)=-A_{23}.$$

Работа, совершаемая в результате кругового процесса,

$$A=A_{12}+A_{23}+A_{34}+A_{41}=$$

$$=Q_1+A_{23}-Q_2-A_{23}=Q_1-Q_2$$

и, как можно показать, определяется площадью, выполненной в цвете на рис. 87.

Термический к. п. д. цикла Карно, согласно (56.2),

$$\eta=A/Q_1=(Q_1-Q_2)/Q_1.$$

Применив уравнение (55.5) для адиабат *2—3* и *4—1*, получим

$$T_1V_2^{\gamma-1}=T_2V_3^{\gamma-1},\ T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_4^{\gamma-1},$$

откуда

$$V_2/V_1=V_3/V_4. \quad (59.3)$$

Подставляя (59.1) и (59.2) в формулу (56.2) и учитывая (59.3), получим

$$\eta=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=$$

$$=\frac{\frac{m}{M}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}-\frac{m}{M}RT_2\ln\frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}}=$$

$$=\frac{T_1-T_2}{T_1}, \quad (59.4)$$

т. е. для цикла Карно к. п. д. действительно определяется только температурами нагревателя и холодильника. Для его повышения необходимо увеличивать разность температур нагревателя и холодильника. Например, при $T_1=400$ К и $T_2=300$ К $\eta=0{,}25$. Если же температуру нагревателя повысить на 100 К, а температуру холодильника понизить на 50 К, то $\eta=0{,}5$. К. п. д. всякого реального теплового двигателя из-за трения и неизбежных тепловых потерь гораздо меньше вычисленного для цикла Карно.

Обратный цикл Карно лежит в основе действия **тепловых насосов.** В отличие от холодильных машин тепловые насосы до-

лжны как можно больше тепловой энергии отдавать горячему телу, например системе отопления. Часть этой энергии отбирается от окружающей среды с более низкой температурой, а часть — получается за счет механической работы, производимой, например, компрессором.

Теорема Карно послужила основанием для установления **термодинамической шкалы температур.** Сравнив левую и правую части формулы (59.4), получим

$$T_2/T_1 = Q_2/Q_1, \qquad (59.5)$$

т. е. для сравнения температур $T_1$ и $T_2$ двух тел необходимо осуществить обратимый цикл Карно, в котором одно тело используется в качестве нагревателя, другое — холодильника. Из равенства (59.5) видно, что отношение температур тел равно отношению отданного в этом цикле количества теплоты к полученному. Согласно теореме Карно, химический состав рабочего тела не влияет на результаты сравнения температур, поэтому такая термодинамическая шкала не связана со свойствами какого-то определенного термометрического тела. Отметим, что практически таким образом сравнивать температуры трудно, так как реальные термодинамические процессы, как уже указывалось, являются необратимыми.

## Контрольные вопросы

- В чем суть закона Больцмана о равнораспределении энергии по степеням свободы молекул? Почему колебательная степень свободы обладает вдвое большей энергией, чем поступательная и вращательная?
- Что такое внутренняя энергия идеального газа? Какими параметрами она определяется? В результате каких процессов может изменяться внутренняя энергия системы?
- Что такое теплоемкость газа? Какая из теплоемкостей — $C_v$ или $C_p$ — больше и почему?
- Как объяснить температурную зависимость молярной теплоемкости водорода?
- Чему равна работа изобарного расширения моля идеального газа при нагревании на 1 К?
- Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется при постоянном давлении?
- Температура газа в цилиндре постоянна. Запишите на основе первого начала термодинамики соотношение между сообщенным количеством теплоты и совершенной работой.
- Газ переходит из одного и того же начального состояния *1* в одно и то же конечное состояние *2* в результате следующих процессов: а) изотермического; б) изобарного; в) изохорного. Рассмотрев эти процессы графически, показать: 1) когда работа расширения максимальна; 2) когда газу сообщается максимальное количество теплоты.
- Газ переходит из одного и того же начального состояния *1* в одно и то же конечное состояние *2* в результате следующих процессов: а) изобарного процесса; б) последовательных изохорного и изотермического процессов. Рассмотрите эти переходы графически. Одинаковы или различны в обоих случаях: 1) изменение внутренней энергии? 2) затраченное количество теплоты?
- Почему адиабата более крута, чем изотерма?
- Как изменится температура газа при его адиабатическом сжатии?
- Показатель политропы $n > 1$. Нагревается или охлаждается идеальный газ при сжатии?
- Чем отличаются обратимые и необратимые процессы? Почему все реальные процессы необратимы?
- В каком направлении может изменяться энтропия замкнутой системы? незамкнутой системы?
- Дайте понятие энтропии (определение, размерность и математическое выражение энтропии для различных процессов).
- Изобразите в системе координат $T$, $S$ изотермический и адиабатический процессы.
- Возможен ли процесс, при котором теплота, взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу?
- Представив цикл Карно на диаграмме $p$, $V$ графически, укажите, какой площадью определяется: 1) работа, совершенная над газом; 2) работа, совершенная самим расширяющимся газом.
- Представьте графически цикл Карно в переменных $T$, $S$.

## Задачи

**9.1.** Азот массой 1 кг находится при температуре 280 К. Определить: 1) внутреннюю энергию молекул азота; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул азота. Газ считать идеальным. [1) 208 кДж; 2) 83,1 кДж]

**9.2.** Определить удельные теплоемкости $c_V$ и $c_p$ некоторого двухатомного газа, если плотность этого газа при нормальных условиях 1,43 кг/м$^3$. [$c_V = 650$ Дж/(кг·К), $c_p = 910$ Дж/(кг·К)]

**9.3.** Водород массой $m = 20$ г был нагрет на $\Delta T = 100$ К при постоянном давлении. Определить: 1) количество теплоты $Q$, переданное газу; 2) приращение $\Delta U$ внутренней энергии газа; 3) работу $A$ расширения. [1) 29,3 кДж; 2) 20,9 кДж; 3) 8,4 кДж]

**9.4.** Кислород объемом 2 л находится под давлением 1 МПа. Определить, какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его давление вдвое в результате изохорного процесса. [5 кДж]

**9.5.** Некоторый газ массой 2 кг находится при температуре 300 К и под давлением 0,5 МПа. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в три раза. Работа, затраченная на сжатие, $A = -1{,}37$ кДж. Определить: 1) какой это газ; 2) первоначальный удельный объем газа. [1) гелий; 2) 1,25 м$^3$/кг]

**9.6.** Двухатомный идеальный газ занимает объем $V_1 = 1$ л и находится под давлением $p_1 = 0{,}1$ МПа. После адиабатического сжатия газ характеризуется объемом $V_2$ и давлением $p_2$. В результате последующего изохорного процесса газ охлаждается до первоначальной температуры, а его давление $p_3 = 0{,}2$ МПа. Определить: 1) объем $V_2$; 2) давление $p_2$. Представить эти процессы графически. [1) 0,5 л; 2) 0,26 МПа]

**9.7.** Идеальный газ количеством вещества $\nu = 2$ моль сначала изобарно нагрели так, что его объем увеличился в $n = 2$ раза, а затем изохорно охладили так, что давление газа уменьшилось в $n = 2$ раза. Определить приращение энтропии в ходе указанных процессов. [11,5 Дж/К]

**9.8.** Тепловая машина, совершая обратимый цикл Карно, за один цикл совершает работу 1 кДж. Температура нагревателя 400 К, а холодильника 300 К. Определить: 1) к.п.д. машины; 2) количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя за цикл; 3) количество теплоты, отданное холодильнику за цикл. [1) 25%; 2) 4 кДж; 3) 3 кДж]

**9.9.** Идеальный газ совершает цикл Карно, термический к.п.д. которого равен 0,3. Определить работу изотермического сжатия газа, если работа изотермического расширения составляет 300 Дж. [−210 Дж]

# Глава 10

# Реальные газы, жидкости и твердые тела

## § 60. Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия

Модель идеального газа, используемая в молекулярно-кинетической теории газов, позволяет описывать поведение разреженных реальных газов при достаточно высоких температурах и низких давлениях. При выводе уравнения состояния идеального газа размерами молекул и их взаимодействием друг с другом пренебрегают. Повышение давления приводит к уменьшению среднего расстояния между молекулами, поэтому необходимо учитывать объем молекул и взаимодействие между ними. Так, в 1 м$^3$ газа при нормальных условиях содержится $2{,}68 \cdot 10^{25}$ молекул, занимающих объем примерно $10^{-4}$ м$^3$ (радиус молекулы примерно $10^{-10}$ м), которым по сравнению с объемом газа (1 м$^3$) можно пренебречь. При давлении 500 МПа (1 атм = 101,3 кПа) объем молекул составит уже половину всего объема газа. Таким образом, при высоких давлениях и низких температурах указанная модель идеального газа непригодна.

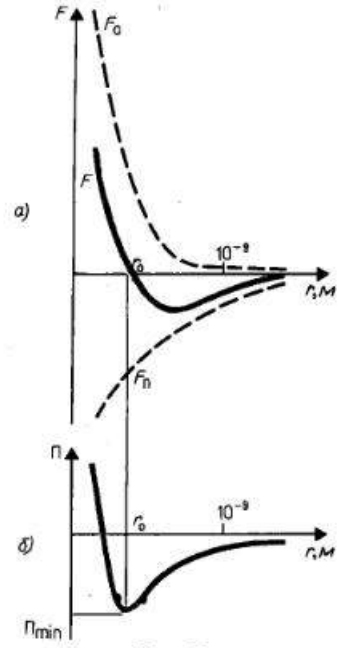



**Рис. 88**

При рассмотрении **реальных газов** — газов, свойства которых зависят от взаимодействия молекул, надо учитывать **силы межмолекулярного взаимодействия.** Они проявляются на расстояниях $\leqslant 10^{-9}$ м и быстро убывают при увеличении расстояния между молекулами. Такие силы называются **короткодействующими.**

В XX в., по мере развития представлений о строении атома и квантовой механики, было выяснено, что между молекулами вещества одновременно действуют **силы притяжения** и **силы отталкивания.** На рис. 88, *а* приведена качественная зависимость сил межмолекулярного взаимодействия от расстояния $r$ между молекулами, где $F_0$ и $F_п$ — соответственно силы отталкивания и притяжения, а $F$ — их результирующая. Силы отталкивания считаются *положительными*, а силы взаимного притяжения — *отрицательными*.

На расстоянии $r=r_0$ результирующая сила $F=0$, т. е. силы притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга. Таким образом, расстояние $r_0$ соответствует равновесному расстоянию между молекулами, на котором бы они находились в отсутствие теплового движения. При $r<r_0$ преобладают силы отталкивания ($F>0$), при $r>r_0$ — силы притяжения ($F<0$). На расстояниях $r>10^{-9}$ м межмолекулярные силы взаимодействия практически отсутствуют ($F\to 0$).

Элементарная работа $\delta A$ силы $F$ при увеличении расстояния между молекулами на $dr$ совершается за счет уменьшения взаимной потенциальной энергии молекул, т. е.

$$\delta A = F\,dr = -d\Pi. \qquad (60.1)$$

Из анализа качественной зависимости потенциальной энергии взаимодействия молекул от расстояния между ними (рис. 88, *б*) следует, что если молекулы находятся друг от друга на расстоянии, на котором межмолекулярные силы взаимодействия не действуют ($r\to\infty$), то $\Pi=0$. При постепенном сближении молекул между ними появляются силы притяжения ($F<0$), которые совершают положительную работу ($\delta A = F\,dr>0$). Тогда, согласно (60.1), потенциальная энергия взаимодействия уменьшается, достигая минимума при $r=r_0$. При $r<r_0$ с уменьшением $r$ силы отталкивания ($F>0$) резко возрастают и совершаемая против них работа отрицательна ($\delta A = F\,dr<0$). Потенциальная энергия начинает тоже резко возрастать и становится положительной. Из данной потенциальной кривой следует, что система из двух взаимодействующих молекул в состоянии устойчивого равновесия ($r=r_0$) обладает минимальной потенциальной энергией.

Критерием различных агрегатных состояний вещества является соотношение величин $\Pi_{min}$ и $kT$. $\Pi_{min}$ — наименьшая потенциальная энергия взаимодействия молекул — определяет работу, которую нужно совершить против сил притяжения для того, чтобы разъединить молекулы, находящиеся в равновесии ($r=r_0$); $kT$ определяет удвоенную среднюю энергию, приходящуюся на одну степень свободы хаотического теплового движения молекул.

Если $\Pi_{min}\ll kT$, то вещество находится в газообразном состоянии, так как интенсивное тепловое движение молекул препятствует соединению молекул, сблизив-

шихся до расстояния $r_0$, т. е. вероятность образования агрегатов из молекул достаточно мала. Если $\Pi_{min} \gg kT$, то вещество находится в твердом состоянии, так как молекулы, притягиваясь друг к другу, не могут удалиться на значительные расстояния и колеблются около положений равновесия, определяемого $r_0$. Если $\Pi_{min} \approx kT$, то вещество находится в жидком состоянии, так как в результате теплового движения молекулы перемещаются в пространстве, обмениваясь местами, но не расходясь на расстояние, превышающее $r_0$.

Таким образом, любое вещество в зависимости от температуры может находиться в газообразном, жидком или твердом агрегатном состоянии, причем температура перехода из одного агрегатного состояния в другое зависит от значения $\Pi_{min}$ для данного вещества. Например, у инертных газов $\Pi_{min}$ мало, а у металлов — велико, поэтому при обычных (комнатных) температурах они находятся соответственно в газообразном и твердом состояниях.

## § 61. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Как уже указывалось в § 60, для реальных газов необходимо учитывать размеры молекул и их взаимодействие друг с другом, поэтому модель идеального газа и уравнение Клапейрона—Менделеева (42.4) $pV_m = RT$ (для моля газа), описывающее идеальный газ, для реальных газов непригодны.

Учитывая собственный объем молекул и сил межмолекулярного взаимодействия, голландский физик И. Ван-дер-Ваальса (1837—1923) вывел уравнения состояния реального газа. Ван-дер-Ваальсом в уравнение Клапейрона—Менделеева введены две поправки.

**1. Учет собственного объема молекул.** Наличие сил отталкивания, которые противодействуют проникновению в занятый молекулой объем других молекул, сводится к тому, что фактический свободный объем, в котором могут двигаться молекулы реального газа, будет не $V_m$, а $V_m - b$, где $b$ — объем, занимаемый самими молекулами. Объем $b$ равен учетверенному собственному объему молекул. Если, например, в сосуде находятся две молекулы, то центр любой из них не может приблизиться к центру другой молекулы на расстояние, меньшее диаметра $d$ молекулы. Это означает, что для центров обеих молекул оказывается недоступным сферический объем радиуса $d$, т. е. объем, равный восьми объемам молекулы, а в расчете на одну молекулу — учетверенный объем молекулы.

**2. Учет притяжения молекул.** Действие сил притяжения газа приводит к появлению дополнительного давления на газ, называемого **внутренним давлением.** По вычислениям Ван-дер-Ваальса, внутреннее давление обратно пропорционально квадрату молярного объема, т. е.

$$p' = a/V_m^2, \qquad (61.1)$$

где $a$ — постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения, $V_m$ — молярный объем.

Вводя эти поправки, получим **уравнение Ван-дер-Ваальса** *для моля газа* **(уравнение состояния реальных газов)**:

$$(p + a/V_m^2)(V_m - b) = RT. \qquad (61.2)$$

Для произвольного количества вещества $\nu$ газа ($\nu = m/M$) с учетом того, что $V = \nu V_m$, уравнение Ван-дер-Ваальса примет вид

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT,$$

или

$$(p + \nu^2 a/V^2)(V - \nu b) = \nu RT,$$

где поправки $a$ и $b$ — постоянные для каждого газа величины, определяемые опытным путем (записываются уравнения Ван-дер-Ваальса для двух известных из опыта состояний газа и решаются относительно $a$ и $b$).

При выводе уравнения Ван-дер-Ваальса сделан целый ряд упрощений, поэтому оно также весьма приближенное, хотя и лучше (особенно для несильно сжатых газов) согласуется с опытом, чем уравнение состояния идеального газа.

Уравнение Ван-дер-Ваальса не единственное уравнение, описывающее реальные газы. Существуют и другие уравнения, некоторые из них даже точнее описывают реальные газы, но не рассматриваются из-за их сложности.

## § 62. Изотермы Ван-дер-Ваальса и их анализ

Для исследования поведения реального газа рассмотрим **изотермы Ван-дер-Ваальса** — кривые зависимости $p$ от $V_m$ при заданных $T$, определяемые уравнением Ван-дер-Ваальса (61.2) для *моля* газа. Эти кривые (рассматриваются для четырех различных температур; рис. 89) имеют довольно своеобразный характер. При высоких температурах ($T > T_к$) изотерма реального газа отличается от изотермы идеального газа только некоторым искажением ее формы, оставаясь монотонно спадающей кривой. При некоторой температуре $T_к$ на изотерме имеется лишь одна точка перегиба $K$. Эта **изотерма** называется **критической**, соответствующая ей температура $T_к$ — **критической температурой.** Критическая изотерма имеет лишь одну точку перегиба $K$, называемую **критической точкой;** в этой точке касательная к ней параллельна оси абсцисс. Соответствующие этой точке **объем** $V_к$ и **давление** $p_к$ называются также **критическими.** Состояние с критическими параметрами ($p_к$, $V_к$, $T_к$) называется **критическим состоянием.** При низких температурах ($T < T_к$) изотермы имеют волнообразный участок, сначала монотонно опускаясь вниз, затем монотонно поднимаясь вверх и снова монотонно опускаясь.

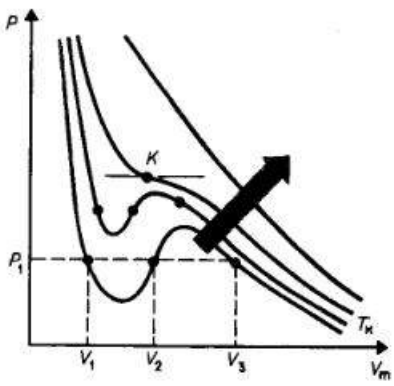



Рис. 89

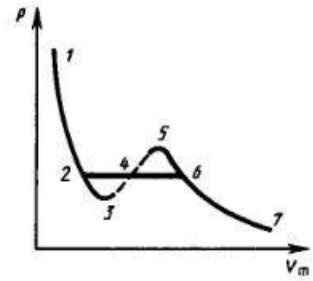



Рис. 90

Для пояснения характера изотерм преобразуем уравнение Ван-дер-Ваальса (61.2) к виду

$$pV_m^3 - (RT + pb)\,V_m^2 + aV_m - ab = 0. \qquad (62.1)$$

Уравнение (62.1) при заданных $p$ и $T$ является уравнением третьей степени относительно $V_m$; следовательно, оно может иметь либо три вещественных корня, либо один вещественный и два мнимых, причем физический смысл имеют лишь вещественные положительные корни. Поэтому первому случаю соответствуют изотермы при низких температурах (три значения объема газа $V_1$, $V_2$ и $V_3$ отвечают (символ «m» для простоты опускаем) одному значению давления $p_1$), второму случаю — изотермы при высоких температурах.

Рассматривая различные участки изотермы при $T < T_к$ (рис. 90), видим, что на участках *1—3* и *5—7* при уменьшении объема $V_m$ давление $p$ возрастает, что естественно. На участке *3—5* сжатие вещества приводит к уменьшению давления; практика же показывает, что такие состояния в природе не осуществляются. Наличие участка *3—5* означает, что при постепенном изменении объема вещество не может оставаться все время в виде однородной среды; в некоторый момент должно наступить скачкообразное изменение состояния и распад вещества на две фазы. Таким образом, истинная изотерма будет иметь вид ломаной линии *7—6—2—1*. Часть *7—6* отвечает газообразному состоянию, а часть *2—1* — жидкому. В состояниях, соответствующих горизонталь-

ному участку изотермы *6—2*, наблюдается равновесие жидкой и газообразной фаз вещества. Вещество в газообразном состоянии при температуре ниже критической называется **паром**, а пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется **насыщенным.**

Данные выводы, следующие из анализа уравнения Ван-дер-Ваальса, были подтверждены опытами ирландского ученого Т. Эндрюса (1813—1885), изучавшего изотермическое сжатие углекислого газа. Отличие экспериментальных (Эндрюс) и теоретических (Ван-дер-Ваальс) изотерм заключается в том, что превращению газа в жидкость в первом случае соответствуют горизонтальные участки, а во втором — волнообразные.

Для нахождения критических параметров подставим их значения в уравнение (62.1) и запишем

$$p_к V^3 - (RT_к + p_к b)V^2 + aV - ab = 0 \qquad (62.2)$$

(символ «m» для простоты опускаем). Поскольку в критической точке все три корня совпадают и равны $V_к$, уравнение приводится к виду

$$p_к (V - V_к)^3 = 0,$$

или

$$p_к V^3 - 3p_к V_к V^2 + 3p_к V_к^2 V - p_к V_к = 0. \qquad (62.3)$$

Так как уравнения (62.2) и (62.3) тождественны, то в них должны быть равны и коэффициенты при неизвестных соответствующих степеней. Поэтому можно записать

$$p_к V_к^3 = ab, \quad 3p_к V_к^2 = a, \quad 3p_к V_к = RT_к + p_к b.$$

Решая полученные уравнения, найдем:

$$V_к = 3b, \quad p_к = a/(27b^2), \quad T_к = 8a/(27Rb). \qquad (62.4)$$

Если через крайние точки горизонтальных участков семейства изотерм провести линию, то получится колоколообразная кривая (рис. 91), ограничивающая область двухфазных состояний вещества. Эта кривая и критическая изотерма делят

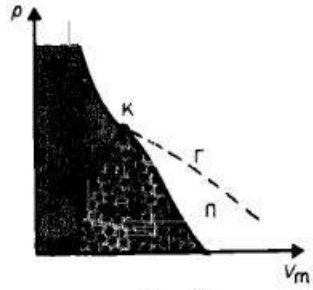



Рис. 91

диаграмму $p$, $V_m$ под изотермой на три области: под колоколообразной кривой располагается область двухфазных состояний (жидкость и насыщенный пар), слева от нее находится область жидкого состояния, а справа — область пара. Пар отличается от остальных газообразных состояний тем, что при изотермическом сжатии претерпевает процесс сжижения. Газ же при температуре выше критической не может быть превращен в жидкость ни при каком давлении.

Сравнивая изотерму Ван-дер-Ваальса с изотермой Эндрюса (верхняя кривая на рис. 92), видим, что последняя имеет прямолинейный участок *2—6*, соответствующий двухфазным состояниям вещества. Правда, при некоторых условиях могут быть реализованы состояния, изображаемые участками ван-дер-ваальсовой изотермы *5—6* и *2—3*. Эти неустойчивые состояния называются **метастабильными.** Участок *2—3* изображает **перегретую жидкость**, *5—6* — **пересыщенный пар.** Обе фазы ограниченно устойчивы.

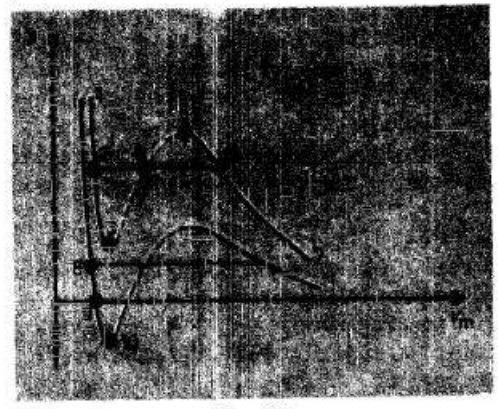



Рис. 92

При достаточно низких температурах изотерма пересекает ось $V_m$, переходя в область отрицательных давлений (нижняя кривая на рис. 92). Вещество под отрицательным давлением находится в состоянии растяжения. При некоторых условиях такие состояния также реализуются. Участок *8—9* на нижней изотерме соответствует **перегретой жидкости,** участок *9—10* — **растянутой жидкости.**

## § 63. Внутренняя энергия реального газа

Внутренняя энергия реального газа складывается из кинетической энергии теплового движения его молекул (определяет внутреннюю энергию идеального газа, равную $C_V T$; см. § 53) и потенциальной энергии межмолекулярного взаимодействия. Потенциальная энергия реального газа обусловлена только силами притяжения между молекулами. Наличие сил притяжения приводит к возникновению внутреннего давления на газ (см. (61.1)):

$$p' = a/V_m^2.$$

Работа, которая затрачивается для преодоления сил притяжения, действующих между молекулами газа, как известно из механики, идет на увеличение потенциальной энергии системы, т. е. $\delta A = p' \mathrm{d}V_m = \delta\Pi$, или $\delta\Pi = \frac{a}{V_m^2}\mathrm{d}V_m$, откуда

$$\Pi = -a/V_m$$

(постоянная интегрирования принята равной нулю). Знак минус означает, что молекулярные силы, создающие внутреннее давление $p'$, являются силами притяжения (см. § 60).

Учитывая оба слагаемых, получим, что внутренняя энергия моля реального газа

$$U_m = C_V T - a/V_m \qquad (63.1)$$

растет с повышением температуры и увеличением объема.

Если газ расширяется без теплообмена с окружающей средой (адиабатический процесс, т. е. $\delta Q = 0$) и не совершает внешней работы (расширение газа в вакуум, т. е. $\delta A = 0$), то на основании первого начала термодинамики ($\delta Q = (U_2 - U_1) + \delta A$) получим, что

$$U_1 = U_2. \qquad (63.2)$$

Следовательно, при адиабатическом расширении без совершения внешней работы внутренняя энергия газа не изменяется.

Равенство (63.2) формально справедливо как для идеального, так и для реального газов, но физически для обоих случаев совершенно различно. Для идеального газа равенство $U_1 = U_2$ означает равенство температур ($T_1 = T_2$), т. е. при адиабатическом расширении идеального газа в вакуум его температура не изменяется. Для реального газа из равенства (63.2), учитывая, что для моля газа

$$U_1 = C_V T_1 - a/V_1, \quad U_2 = C_V T_2 - a/V_2, \qquad (63.3)$$

получаем

$$T_1 - T_2 = \frac{a}{C_V}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right).$$

Так как $V_2 > V_1$, то $T_1 > T_2$, т. е. реальный газ при адиабатическом расширении в вакуум охлаждается. При адиабатическом сжатии реальный газ нагревается.

## § 64. Эффект Джоуля — Томсона

Если идеальный газ адиабатически расширяется и совершает при этом работу, то он охлаждается, так как работа в данном случае совершается за счет его внутренней энергии (см. § 55). Подобный процесс, но с реальным газом — адиабатическое расширение реального газа с совершением внешними силами положительной работы — осуществили английские физики Дж. Джоуль (1818—1889) и У. Томсон (лорд Кельвин, 1824—1907).

Рассмотрим эффект Джоуля — Томсона. На рис. 93 представлена схема их опыта. В теплоизолированной трубке с пористой перегородкой находится два поршня, которые могут перемещаться без трения. Пусть сначала слева от перегородки газ под поршнем 1 находится под давлением $p_1$, занимает объем $V_1$ при температуре $T_1$, а справа газ отсутствует (по-

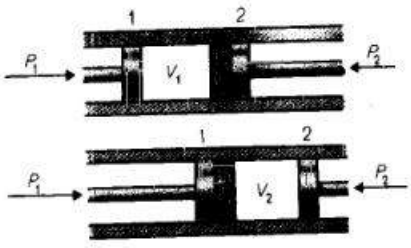



**Рис. 93**

ршень 2 придвинут к перегородке). После прохождения газа через пористую перегородку в правой части газ характеризуется параметрами $p_2$, $V_2$, $T_2$. Давления $p_1$ и $p_2$ поддерживаются постоянными ($p_1 > p_2$).

Так как расширение газа происходит без теплообмена с окружающей средой (адиабатически), то на основании первого начала термодинамики

$$\delta Q = (U_2 - U_1) + \delta A = 0. \qquad (64.1)$$

Внешняя работа, совершаемая газом, состоит из положительной работы при движении поршня 2 ($A_2 = p_2 V_2$) и отрицательной при движении поршня 1 ($A_1 = p_1 V_1$), т. е. $\delta A = A_2 - A_1$. Подставляя выражения для работ в формулу (64.1), получим

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2. \qquad (64.2)$$

Таким образом, в опыте Джоуля — Томсона сохраняется (остается неизменной) величина $U + pV$. Она является функцией состояния и называется **энтальпией.**

Ради простоты рассмотрим *1 моль* газа. Подставив в формулу (64.2) выражение (63.3) и рассчитанные из уравнения Ван-дер-Ваальса (61.2) значения $p_1 V_1$ и $p_2 V_2$ (символ «m» опять опускаем) и производя элементарные преобразования, получим

$$T_2 - T_1 = \frac{2a(1/V_2 - 1/V_1) - b(p_2 - p_1)}{C_V + R} - \frac{ab(1/V_2^2 - 1/V_1^2)}{C_V + R}. \qquad (64.3)$$

Из выражения (64.3) следует, что знак разности $(T_2 - T_1)$ зависит от того, какая из поправок Ван-дер-Ваальса играет бóльшую роль. Проанализируем данное выражение, сделав допущение, что $p_2 \ll p_1$ и $V_2 \gg V_1$:

1) $a \approx 0$ — не учитываем силы притяжения между молекулами, а учитываем лишь размеры самих молекул. Тогда

$$T_2 - T_1 \approx \frac{-b(p_2 - p_1)}{C_V + R} > 0,$$

т. е. газ в данном случае нагревается;

2) $b \approx 0$ — не учитываем размеров молекул, а учитываем лишь силы притяжения между молекулами. Тогда

$$T_2 - T_1 \approx \frac{2a(1/V_2 - 1/V_1)}{C_V + R} < 0,$$

т. е. газ в данном случае охлаждается;

3) учитываем обе поправки. Подставив в выражение (64.3) вычисленное из уравнения Ван-дер-Ваальса (61.2) значение $p_1$, имеем

$$T_2 - T_1 \approx \frac{-\dfrac{2a}{V_1} + \dfrac{bRT_1}{V_1 - b}}{C_V + R} + \frac{\dfrac{ba}{V_1^2} - \dfrac{ab}{V_1^2}}{C_V + R} = \frac{\dfrac{bRT_1}{V_1 - b} - \dfrac{2a}{V_1}}{C_V + R}, \qquad (64.4)$$

т. е. знак разности температур зависит от значений начального объема $V_1$ и начальной температуры $T_1$.

Изменение температуры реального газа в результате его адиабатического расширения, или, как говорят, **адиабатического дросселирования** — медленного прохождения газа под действием перепада давления сквозь **дроссель** (например, пористую перегородку), называется **эффектом Джоуля — Томсона**. Эффект Джоуля — Томсона принято называть **положительным**, если газ в процессе дросселирования охлаждается ($\Delta T < 0$), и **отрицательным**, если газ нагревается ($\Delta T > 0$).

В зависимости от условий дросселирования для одного и того же газа эффект Джоуля — Томсона может быть как положительным, так и отрицательным. Температура, при которой (для данного давления) происходит изменение знака эффекта Джоуля — Томсона, называется **темпе-**

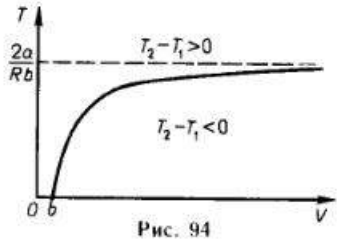


Рис. 94

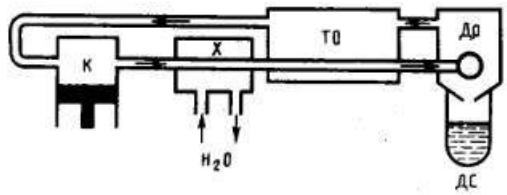


Рис. 95

**ратурой инверсии.** Ее зависимость от объема получим, приравняв выражение (64.4) нулю:

$$T=\frac{2a}{Rb}\left(1-\frac{b}{V}\right). \qquad (64.5)$$

Кривая, определяемая уравнением (64.5),— **кривая инверсии** — приведена на рис. 94. Область выше этой кривой соответствует отрицательному эффекту Джоуля — Томсона, ниже — положительному. Отметим, что при больших перепадах давления на дросселе температура газа изменяется значительно. Так, при дросселировании от 20 до 0,1 МПа и начальной температуре 17 °С воздух охлаждается на 35 °С.

Эффект Джоуля — Томсона обусловлен отклонением газа от идеальности. В самом деле, для моля идеального газа $pV_m=RT$, поэтому выражение (64.2) примет вид

$$C_VT_1+RT_1=C_VT_2+RT_2,$$

откуда следует, что $T_1=T_2$.

## § 65. Сжижение газов

Превращение любого газа в жидкость — **сжижение газа** — возможно лишь при температуре ниже критической (см. § 62). При ранних попытках сжижения газов оказалось, что некоторые газы ($Cl_2$, $CO_2$, $NH_3$) легко сжижались изотермическим сжатием, а целый ряд газов ($O_2$, $N_2$, $H_2$, He) сжижению не поддавался. Подобные неудачные попытки объяснил Д. И. Менделеев, показавший, что сжижение этих газов производилось при температуре, большей критической, и поэтому заранее было обречено на неудачу. Впоследствии удалось получить жидкий кислород, азот и водород (их критические температуры равны соответственно 154,4, 126,1 и 33 К), а в 1908 г. нидерландский физик Г. Камерлинг-Оннес (1853—1926) добился сжижения гелия, имеющего самую низкую критическую температуру (5,3 К).

Для сжижения газов чаще применяются два промышленных метода, в основе которых используется либо эффект Джоуля — Томсона, либо охлаждение газа при совершении им работы.

Схема одной из установок, в которой используется эффект Джоуля Томсона,— **машины Линде*** — представлена на рис. 95. Воздух в компрессоре (К) сжимается до давления в десятки мегапаскаль и охлаждается в холодильнике (Х) до температуры ниже температуры инверсии, в результате чего при дальнейшем расширении газа наблюдается положительный эффект Джоуля — Томсона (охлаждение газа при его расширении). Затем сжатый воздух проходит по внутренней трубе теплообменника (ТО) и пропускается через дроссель (Др), при этом он сильно расширяется и охлаждается. Расширившийся воздух вновь засасывается по внешней трубе теплообменника, охлаждая вторую порцию сжатого воздуха, текущего по внутренней трубе. Так как каждая следующая порция воздуха предварительно охлаждается, а затем пропускается через дроссель, то температура понижается все больше. В результате 6—8-часового цикла часть воздуха ($\approx 5\,\%$), охлаждаясь до температуры ниже критической, сжижается и поступает в дьюаровский сосуд (ДС) (см. § 49), а остальная его часть возвращается в теплообменник.

Второй метод сжижения газов основан

* К. Линде (1842—1934) — немецкий физик и инженер.

на охлаждении газа при совершении им работы. Сжатый газ, поступая в поршневую машину (**детандер**), расширяется и совершает при этом работу по передвижению поршня. Так как работа совершается за счет внутренней энергии газа, то его температура при этом понижается.

Академик П. Л. Капица предложил вместо детандера применять **турбодетандер**, в котором газ, сжатый всего лишь до 500—600 кПа, охлаждается, совершая работу по вращению турбины. Этот метод успешно применен Капицей для сжижения гелия, предварительное охлаждение которого производилось жидким азотом. Современные мощные холодильные установки работают по принципу турбодетандера.

## § 66. Свойства жидкостей. Поверхностное натяжение

Жидкость является агрегатным состоянием вещества, промежуточным между газообразным и твердым, поэтому она обладает свойствами как газообразных, так и твердых веществ. Жидкости, подобно твердым телам, обладают определенным объемом, а подобно газам, принимают форму сосуда, в котором они находятся (см. § 28). Молекулы газа практически не связаны между собой силами межмолекулярного взаимодействия, и в данном случае средняя энергия теплового движения молекул газа гораздо больше средней потенциальной энергии, обусловленной силами притяжения между ними (см. § 60), поэтому молекулы газа разлетаются в разные стороны и газ занимает предоставленный ему объем. В твердых и жидких телах силы притяжения между молекулами уже существенны и удерживают молекулы на определенном расстоянии друг от друга. В этом случае средняя энергия хаотического теплового движения молекул меньше средней потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия, и ее недостаточно для преодоления сил притяжения между молекулами, поэтому твердые тела и жидкости имеют определенный объем.

Рентгеноструктурный анализ жидкостей показал, что характер расположения частиц жидкости промежуточен между газом и твердым телом. В газах молекулы движутся хаотично, поэтому нет никакой закономерности в их взаимном расположении. Для твердых тел наблюдается так называемый *дальний порядок* в расположении частиц, т. е. их упорядоченное расположение, повторяющееся на больших расстояниях. В жидкостях имеет место так называемый *ближний порядок* в расположении частиц, т. е. их упорядоченное расположение, повторяющееся на расстояниях, сравнимых с межатомными.

Теория жидкости до настоящего времени полностью не развита. Разработка ряда проблем в исследовании сложных свойств жидкости принадлежит Я. И. Френкелю (1894—1952). Тепловое движение в жидкости он объяснял тем, что каждая молекула в течение некоторого времени колеблется около определенного положения равновесия, после чего скачком переходит в новое положение, отстоящее от исходного на расстоянии порядка межатомного. Таким образом, молекулы жидкости довольно медленно перемещаются по всей массе жидкости и диффузия происходит гораздо медленнее, чем в газах. С повышением температуры жидкости частота колебательного движения резко увеличивается, возрастает подвижность молекул, что, в свою очередь, является причиной уменьшения вязкости жидкости.

На каждую молекулу жидкости со стороны окружающих молекул действуют силы притяжения, быстро убывающие с расстоянием (см. рис. 88); следовательно, начиная с некоторого минимального расстояния силами притяжения между молекулами можно пренебречь. Это расстояние (порядка $10^{-9}$ м) называется **радиусом молекулярного действия** $r$, а сфера радиуса $r$ — **сферой молекулярного действия.**

Выделим внутри жидкости какую-либо молекулу $A$ (рис. 96) и проведем вокруг нее сферу радиуса $r$. Достаточно, согласно определению, учесть действие на данную молекулу только тех молекул, которые находятся внутри сферы молекулярного действия. Силы, с которыми эти молекулы действуют на молекулу $A$, направлены в разные стороны и в среднем скомпенси-

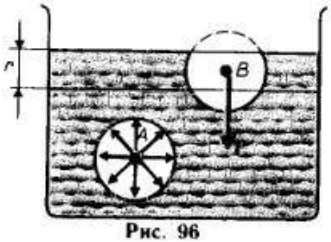


Рис. 96

рованы, поэтому результирующая сила, действующая на молекулу внутри жидкости со стороны других молекул, равна нулю. Иначе обстоит дело, если молекула, например молекула $B$, расположена от поверхности на расстоянии, меньшем $r$. В данном случае сфера молекулярного действия лишь частично расположена внутри жидкости. Так как концентрация молекул в расположенном над жидкостью газе мала по сравнению с их концентрацией в жидкости, то равнодействующая сил $\mathbf{F}$, приложенных к каждой молекуле поверхностного слоя, не равна нулю и направлена внутрь жидкости. Таким образом, результирующие силы всех молекул поверхностного слоя оказывают на жидкость давление, называемое **молекулярным** (или **внутренним**). Молекулярное давление не действует на тело, помещенное в жидкость, так как оно обусловлено силами, действующими только между молекулами самой жидкости.

Суммарная энергия частиц жидкости складывается из энергии их хаотического теплового движения и потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия. Для перемещения молекулы из глубины жидкости в поверхностный слой надо затратить работу. Эта работа совершается за счет кинетической энергии молекул и идет на увеличение их потенциальной энергии. Поэтому молекулы поверхностного слоя жидкости обладают большей потенциальной энергией, чем молекулы внутри жидкости. Эта дополнительная энергия, которой обладают молекулы в поверхностном слое жидкости, называемая **поверхностной энергией**, пропорциональна площади слоя $\Delta S$:

$$\Delta E = \sigma \Delta S, \qquad (66.1)$$

где $\sigma$ — поверхностное натяжение, определяемое как плотность поверхностной энергии.

Так как равновесное состояние характеризуется минимумом потенциальной энергии, то жидкость при отсутствии внешних сил будет принимать такую форму, чтобы при заданном объеме она имела минимальную поверхность, т. е. форму шара. Наблюдая мельчайшие капельки, взвешенные в воздухе, можем видеть, что они действительно имеют форму шариков, но несколько искаженную из-за действия сил земного тяготения. В условиях невесомости капля любой жидкости (независимо от ее размеров) имеет сферическую форму, что доказано экспериментально на космических кораблях.

Итак, условием устойчивого равновесия жидкости является минимум поверхностной энергии. Это означает, что жидкость при заданном объеме должна иметь наименьшую площадь поверхности, т. е. жидкость стремится сократить площадь свободной поверхности. В этом случае поверхностный слой жидкости можно уподобить растянутой упругой пленке, в которой действуют силы натяжения.

Рассмотрим поверхность жидкости (рис. 97), ограниченную замкнутым контуром. Под действием сил поверхностного натяжения (направлены по касательной к поверхности жидкости и перпендикулярно участку контура, на который они действуют) поверхность жидкости сократилась и рассматриваемый контур переместился в положение, отмеченное светло-серым цветом. Силы, действующие со стороны выделенного участка на граничащие с ним участки, совершают работу

$$\Delta A = f \Delta l \Delta x,$$

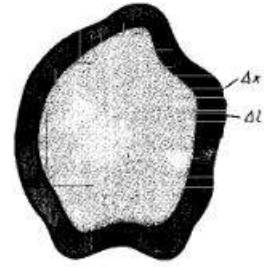


Рис. 97

где $f = F/\Delta l$ — сила поверхностного натяжения, действующая на единицу длины контура поверхности жидкости.

Из рис. 97 видно, что $\Delta l \Delta x = \Delta S$, т. е

$$\Delta A = f \Delta S. \qquad (66.2)$$

Эта работа совершается за счет уменьшения поверхностной энергии, т. е.

$$\Delta A = \Delta E. \qquad (66.3)$$

Из сравнения выражений (66.1) — (66.3) видно, что

$$\sigma = f, \qquad (66.4)$$

т. е. **поверхностное натяжение** $\sigma$ равно силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины контура, ограничивающего поверхность. Единица поверхностного натяжения — ньютон на метр (Н/м) или джоуль на квадратный метр (Дж/м$^2$) (см. (66.4) и (66.1)). Большинство жидкостей при температуре 300 К имеет поверхностное натяжение порядка $10^{-2}$—$10^{-1}$ Н/м. Поверхностное натяжение с повышением температуры уменьшается, так как увеличиваются средние расстояния между молекулами жидкости.

Поверхностное натяжение существенным образом зависит от примесей, имеющихся в жидкостях. **Вещества**, ослабляющие поверхностное натяжение жидкости, называются **поверхностно-активными**. Наиболее известным поверхностно-активным веществом по отношению к воде является мыло. Оно сильно уменьшает ее поверхностное натяжение (примерно с $7{,}5 \cdot 10^{-2}$ до $4{,}5 \cdot 10^{-2}$ Н/м). Поверхностно-активными веществами, понижающими поверхностное натяжение воды, являются также спирты, эфиры, нефть и др.

Существуют вещества (сахар, соль), которые увеличивают поверхностное натяжение жидкости благодаря тому, что их молекулы взаимодействуют с молекулами жидкости сильнее, чем молекулы жидкости между собой. Например, если посолить мыльный раствор, то в поверхностный слой жидкости выталкивается молекул мыла больше, чем в пресной воде. В мыловаренной технике мыло «высаливается» этим способом из раствора.

## § 67. Смачивание

Из практики известно, что капля воды растекается на стекле и принимает форму, изображенную на рис. 98, в то время как ртуть на той же поверхности превращается в несколько сплюснутую каплю (рис. 99). В первом случае говорят, что жидкость *смачивает* твердую поверхность, во втором — *не смачивает* ее. Смачивание зависит от характера сил, действующих между молекулами поверхностных слоев соприкасающихся сред. Для смачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела больше, чем между молекулами самой жидкости, и жидкость стремится увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом. Для несмачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела меньше, чем между молекулами жидкости, и жидкость стремится уменьшить поверхность своего соприкосновения с твердым телом.

К линии соприкосновения трех сред (точка $O$ есть ее пересечение с плоскостью чертежа) приложены три силы поверхностного натяжения, которые направлены по касательной внутрь поверхности соприкосновения соответствующих двух сред (рис. 98 и 99). Эти силы, отнесенные к *единице длины* линии соприкосновения, равны соответствующим поверхностным

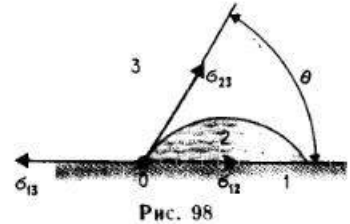


Рис. 98

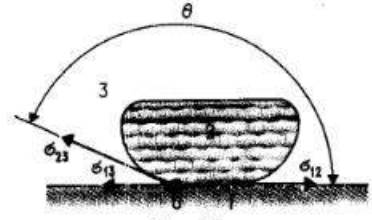


Рис. 99

натяжениям $\sigma_{12}$, $\sigma_{13}$, $\sigma_{23}$. Угол $\theta$ между касательными к поверхности жидкости и твердого тела называется **краевым углом.** Условием равновесия капли (рис. 98) является равенство нулю суммы проекций сил поверхностного натяжения на направление касательной к поверхности твердого тела, т. е.

$$-\sigma_{13}+\sigma_{12}+\sigma_{23}\cos\theta=0,$$

откуда

$$\cos\theta=(\sigma_{13}-\sigma_{12})/\sigma_{23}. \qquad (67.1)$$

Из условия (67.1) вытекает, что краевой угол может быть острым или тупым в зависимости от значений $\sigma_{13}$ и $\sigma_{12}$. Если $\sigma_{13}>\sigma_{12}$, то $\cos\theta>0$ и угол $\theta$ — острый (рис. 98), т. е. жидкость смачивает твердую поверхность. Если $\sigma_{13}<\sigma_{12}$, то $\cos\theta<0$ и угол $\theta$ — тупой (рис. 99), т. е. жидкость не смачивает твердую поверхность.

Краевой угол удовлетворяет условию (67.1), если

$$|\sigma_{13}-\sigma_{12}|/\sigma_{23}\leqslant 1. \qquad (67.2)$$

Если условие (67.2) не выполняется, то капля жидкости *2* ни при каких значениях $\theta$ не может находиться в равновесии. Если $\sigma_{13}>\sigma_{12}+\sigma_{23}$, то жидкость растекается по поверхности твердого тела, покрывая его тонкой пленкой (например, керосин на поверхности стекла),— имеет место **полное смачивание** (в данном случае $\theta=0$). Если $\sigma_{12}>\sigma_{13}+\sigma_{23}$, то жидкость стягивается в шаровую каплю, в пределе имея с ней лишь одну точку соприкосновения (например, капля воды на поверхности парафина),— имеет место **полное несмачивание** (в данном случае $\theta=\pi$).

Смачивание и несмачивание являются понятиями относительными, т. е. жидкость, смачивающая одну твердую поверхность, не смачивает другую. Например, вода смачивает стекло, но не смачивает парафин; ртуть не смачивает стекло, но смачивает чистые поверхности металлов.

Явления смачивания и несмачивания имеют большое значение в технике. Например, в методе флотационного обогащения руды (отделение руды от пустой породы) ее, мелко раздробленную, взбалтывают в жидкости, смачивающей пустую породу и не смачивающей руду. Через эту смесь продувается воздух, а затем она отстаивается. При этом смоченные жидкостью частицы породы опускаются на дно, а крупинки минералов «прилипают» к пузырькам воздуха и всплывают на поверхность жидкости. При механической обработке металлов их смачивают специальными жидкостями, что облегчает и ускоряет обработку.

## § 68. Давление под искривленной поверхностью жидкости

Если поверхность жидкости не плоская, а искривленная, то она оказывает на жидкость *избыточное (добавочное) давление.* Это давление, обусловленное силами поверхностного натяжения, для выпуклой поверхности положительно, а для вогнутой поверхности — отрицательно.

Для расчета избыточного давления предположим, что свободная поверхность жидкости имеет форму сферы радиуса $R$, от которой мысленно отсечен шаровой сегмент, опирающийся на окружность радиуса $r=R\sin\alpha$ (рис. 100). На каждый бесконечно малый элемент длины $\Delta l$ этого контура действует сила поверхностного натяжения $\Delta F=\sigma\Delta l$, касательная к поверхности сферы. Разложив $\Delta\mathbf{F}$ на два компонента ($\Delta\mathbf{F}_1$ и $\Delta\mathbf{F}_2$), видим, что геометрическая сумма сил $\Delta\mathbf{F}_2$ равна нулю, так как эти силы на противоположных сторонах контура направлены в обратные стороны и взаимно уравновешиваются. Поэтому равнодействующая сил поверхностного натяжения, действующих на вырезанный сегмент, направлена перпендикулярно плоскости сечения внутрь жидко-

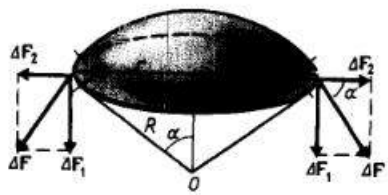


Рис. 100

сти и равна алгебраической сумме составляющих $\Delta F_l$:

$$F=\sum \Delta F_l=\sum \Delta F \sin\alpha=$$

$$=\sum \sigma \Delta l \frac{r}{R}=\frac{\sigma r}{R}\sum \Delta l=\frac{\sigma r}{R}2\pi r.$$

Разделив эту силу на площадь основания сегмента $\pi r^2$, вычислим избыточное (добавочное) давление на жидкость, создаваемое силами поверхностного натяжения и обусловленное кривизной поверхности:

$$\Delta p=\frac{F}{S}=\frac{2\sigma\pi r^2}{R\pi r^2}=\frac{2\sigma}{R}. \qquad (68.1)$$

Если поверхность жидкости вогнутая, то можно доказать, что результирующая сила поверхностного натяжения направлена из жидкости и равна

$$\Delta p=-2\sigma/R. \qquad (68.2)$$

Следовательно, давление внутри жидкости под вогнутой поверхностью меньше, чем в газе, на величину $\Delta p$.

Формулы (68.1) и (68.2) являются частным случаем **формулы Лапласа***, определяющей избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны:

$$\Delta p=\sigma(1/R_1+1/R_2), \qquad (68.3)$$

где $R_1$ и $R_2$ — радиусы кривизны двух любых взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости в данной точке. Радиус кривизны положителен, если центр кривизны соответствующего сечения находится внутри жидкости, и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости.

Для сферической искривленной поверхности ($R_1=R_2=R$) выражение (68.3) переходит в (68.1), для цилиндрической ($R_1=R$ и $R_2=\infty$) — избыточное давление

$$\Delta p=\sigma(1/R+1/\infty)=\sigma/R.$$

Для плоской поверхности ($R_1=R_2=\infty$) силы поверхностного натяжения избыточного давления не создают.

* П. Лаплас (1749—1827) — французский ученый.

## § 69. Капиллярные явления

Если поместить узкую трубку (**капилляр**) одним концом в жидкость, налитую в широкий сосуд, то вследствие смачивания или несмачивания жидкостью стенок капилляра кривизна поверхности жидкости в капилляре становится значительной. Если жидкость смачивает материал трубки, то внутри ее поверхность жидкости — **мениск** — имеет вогнутую форму, если не смачивает — выпуклую (рис. 101).

Под вогнутой поверхностью жидкости появится отрицательное избыточное давление, определяемое по формуле (68.2). Наличие этого давления приводит к тому, что жидкость в капилляре поднимается, так как под плоской поверхностью жидкости в широком сосуде избыточного давления нет. Если же жидкость не смачивает стенки капилляра, то положительное избыточное давление приведет к опусканию жидкости в капилляре. Явление изменения высоты уровня жидкости в капиллярах называется **капиллярностью.** Жидкость в капилляре поднимается или опускается на такую высоту $h$, при которой давление столба жидкости (**гидростатическое давление**) $\rho gh$ уравновешивается избыточным давлением $\Delta p$, т. е.

$$2\sigma/R=\rho gh,$$

где $\rho$ — плотность жидкости, $g$ — ускорение свободного падения.

Если $r$ — радиус капилляра, $\theta$ — краевой угол, то из рис. 101 следует, что $(2\sigma\cos\theta)/r=\rho gh$, откуда

$$h=(2\sigma\cos\theta)/(\rho g r). \qquad (69.1)$$

В соответствии с тем, что смачивающая жидкость по капилляру поднимается, а несмачивающая — опускается, из фор-

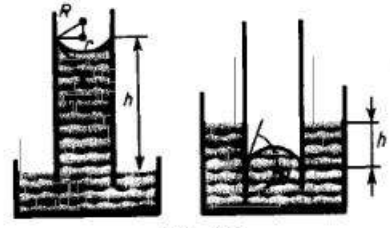



Рис. 101

мулы (69.1) при $\theta < \pi/2$ ($\cos\theta > 0$) получим положительные значения $h$, а при $\theta > \pi/2$ ($\cos\theta < 0$) — отрицательные. Из выражения (69.1) видно также, что высота поднятия (опускания) жидкости в капилляре обратно пропорциональна его радиусу. В тонких капиллярах жидкость поднимается достаточно высоко. Так, при полном смачивании ($\theta = 0$) вода ($\rho = 1000$ кг/м$^3$, $\sigma = 0{,}073$ Н/м) в капилляре диаметром 10 мкм поднимается на высоту $h \approx 3$ м.

Капиллярные явления играют большую роль в природе и технике. Например, влагообмен в почве и в растениях осуществляется за счет поднятия воды по тончайшим капиллярам. На капиллярности основано действие фитилей, впитывание влаги бетоном и т. д.

## § 70. Твердые тела. Моно- и поликристаллы

Твердые тела (кристаллы) характеризуются наличием значительных сил межмолекулярного взаимодействия и сохраняют постоянными не только свой объем, но и форму. Кристаллы имеют правильную геометрическую форму, которая, как показали рентгенографические исследования немецкого физика-теоретика М. Лауэ (1879—1960), является результатом упорядоченного расположения частиц (атомов, молекул, ионов), составляющих кристалл. Структура, для которой характерно регулярное расположение частиц с периодической повторяемостью в трех измерениях, называется **кристаллической решеткой**. Точки, в которых расположены частицы, а точнее — точки, относительно которых частицы совершают колебания, называются **узлами кристаллической решетки**.

Кристаллические тела можно разделить на две группы: монокристаллы и поликристаллы. **Монокристаллы** — твердые тела, частицы которых образуют единую кристаллическую решетку. Кристаллическая структура монокристаллов обнаруживается по их внешней форме. Хотя внешняя форма монокристаллов одного вида может быть различной, но углы между соответствующими гранями у них остаются постоянными. Это **закон постоянства углов**, сформулированный М. В. Ломоносовым. Он сделал важный вывод, что правильная форма кристаллов связана с закономерным размещением частиц, образующих кристалл. Монокристаллами являются большинство минералов. Однако крупные природные монокристаллы встречаются довольно редко (например, лед, поваренная соль, исландский шпат). В настоящее время многие монокристаллы выращиваются искусственно. Условия роста крупных монокристаллов (чистый раствор, медленное охлаждение и т. д.) часто не выдерживаются, поэтому большинство твердых тел имеет мелкокристаллическую структуру, т. е. состоит из множества беспорядочно ориентированных мелких кристаллических зерен. Такие твердые тела называются **поликристаллами** (многие горные породы, металлы и сплавы).

Характерной особенностью монокристаллов является их **анизотропность**, т. е. зависимость физических свойств — упругих, механических, тепловых, электрических, магнитных, оптических — от направления. Анизотропия монокристаллов объясняется тем, что в кристаллической решетке различно число частиц, приходящихся на одинаковые по длине, но разные по направлению отрезки (рис. 102), т. е. плотность расположения частиц кристаллической решетки по разным направлениям не одинакова, что и приводит к различию свойств кристалла вдоль этих направлений. В поликристаллах анизотропия наблюдается только для отдельных мелких кристалликов, но их различная

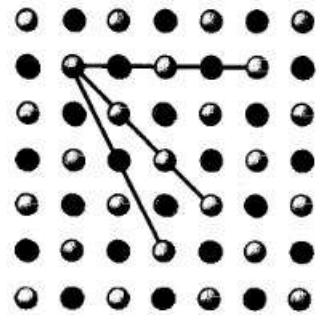


Рис. 102

ориентация приводит к тому, что свойства поликристалла по всем направлениям в среднем одинаковы.

## § 71. Типы кристаллических твердых тел

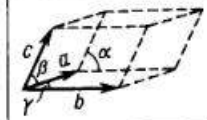
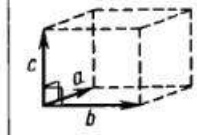
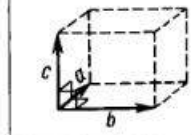
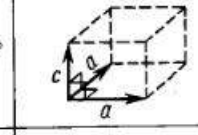
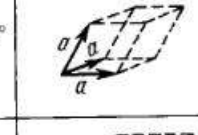
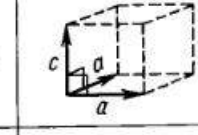
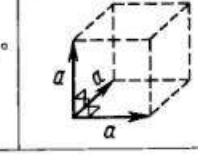
Существует два признака для классификации кристаллов: 1) кристаллографический; 2) физический (природа частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки, и характер сил взаимодействия между ними).

**1. Кристаллографический признак кристаллов.** В данном случае важна только пространственная периодичность в расположении частиц, поэтому можно отвлечься от их внутренней структуры, рассматривая частицы как геометрические точки.

Кристаллическая решетка может обладать различными видами симметрии. **Симметрия кристаллической решетки** — ее свойство совмещаться с собой при некоторых пространственных перемещениях, например параллельных переносах, поворотах, отражениях или их комбинациях и т. д. Кристаллической решетке, как доказал русский кристаллограф Е. С. Федоров (1853—1919), присущи 230 комбинаций элементов симметрии, или 230 различных **пространственных групп.**

С переносной симметрией в трехмерном пространстве связывают понятие трехмерной периодической структуры — **пространственной решетки,** или **решетки Бравэ**, представление о которой введено французским кристаллографом О. Бравэ (1811—1863). Всякая пространственная решетка может быть составлена повторением в трех различных направлениях одного и того же структурного элемента — **элементарной ячейки.** Всего существует 14 типов решеток Бравэ, различающихся по виду переносной симметрии. Они распределяются по семи **кристаллографическим системам**, или **сингониям,** представленным в порядке возрастающей симметрии в табл. 3. Для описания элементарных ячеек пользуются кристаллографическими осями координат, которые проводят параллельно ребрам элементарной ячейки, а начало координат выбирают в левом углу передней грани элементарной ячейки. Элементарная кристаллическая ячейка представляет собой параллелепипед, построенный на ребрах $a$, $b$, $c$ с углами $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ между ребрами (табл. 3). Величины $a$, $b$ и $c$ и $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ называются **параметрами элементарной ячейки** и однозначно ее определяют.

Таблица 3

| Кристаллографическая система | Характеристика элементарной ячейки | Форма элементарной ячейки |
|---|---|---|
| Триклинная | $a \neq b \neq c$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ |  |
| Моноклинная | $a \neq b \neq c$, $\alpha = \beta = 90° \neq \gamma$ |  |
| Ромбическая | $a \neq b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$ |  |
| Тетрагональная | $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$ |  |
| Ромбоэдрическая (тригональная) | $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$ |  |
| Гексагональная | $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 60°$ |  |
| Кубическая | $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$ |  |

**2. Физический признак кристаллов.** В зависимости от рода частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки, и характера сил взаимодействия между ними кристаллы разделяются на четыре типа: ионные, атомные, металлические, молекулярные.

**Ионные кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располагаются поочередно ионы противоположного знака. Типичными ионными кристаллами являются большинство галоидных соединений щелочных металлов (NaCl, CsCl, KBr и т. д.), а также оксидов различных элементов (MgO, CaO и т. д.). Структуры решеток двух наиболее характерных ионных кристаллов — NaCl (решетка представляет собой две одинаковые гранецентрированные кубические решетки, вложенные друг в друга; в узлах одной из этих решеток находятся ионы $Na^+$, в узлах другой — ионы Cl) и CsCl (кубическая объемно центрированная решетка — в центре каждой элементарной решетки находится ион) — показаны на рис. 103. Силы взаимодействия между ионами являются в основном электростатическими (кулоновскими). **Связь**, обусловленная кулоновскими силами притяжения между разноименно заряженными ионами, называется **ионной** (или **гетерополярной**). В ионной решетке нельзя выделить отдельные молекулы: кристалл представляет собой как бы одну гигантскую молекулу.

**Атомные кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располагаются нейтральные атомы, удерживающиеся в узлах решетки **гомеополярными, или ковалентными, связями** квантово-механического происхождения (у соседних атомов обобществлены валентные электроны, наименее связанные с атомом). Атомными кристаллами являются алмаз и графит (два различных состояния углерода), некоторые неорганические соединения (ZnS, BeO и т. д.), а также типичные полупроводники — германий Ge и кремний Si. Структура решетки алмаза приведена на рис. 104, где каждый атом углерода окружен четырьмя такими же атомами, которые располагаются на одинаковых расстояниях от него в вершинах тетраэдров.

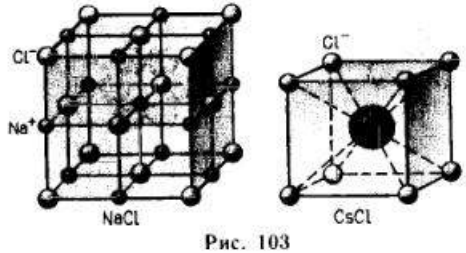
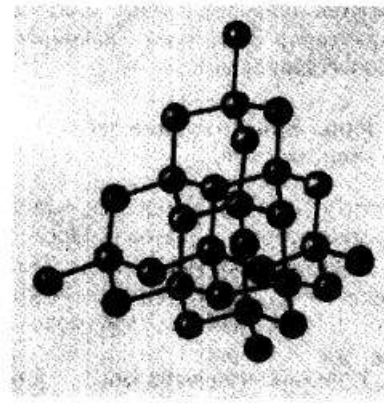


Рис. 103


Рис. 104

Валентные связи осуществляются парами электронов, движущихся по орбитам, охватывающим оба атома, и носят направленный характер: ковалентные силы направлены от центрального атома к вершинам тетраэдра. В отличие от графита решетка алмаза не содержит плоских слоев, что не позволяет сдвигать отдельные участки кристалла, поэтому алмаз является прочным соединением.

**Металлические кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располагаются положительные ионы металла. При образовании кристаллической решетки валентные электроны, сравнительно слабо связанные с атомами, отделяются от атомов и коллективизируются: они уже принадлежат не одному атому, как в случае ионной связи, и не паре соседних атомов, как в случае гомеополярной связи, а всему кристаллу в целом. Таким образом, в металлах между положительными ионами хаотически, подобно молекулам газа, движутся «свободные» электроны, наличие которых обеспечивает хорошую электропроводность металлов. Так как металличе-

ская связь не имеет направленного действия и положительные ионы решетки одинаковы по свойствам, то металлы должны иметь симметрию высокого порядка. Действительно, большинство металлов имеют кубическую объемно центрированную (Li, Na, K, Rb, Cs) и кубическую гранецентрированную (Cu, Ag, Pt, Au) решетки. Чаще всего металлы встречаются в виде поликристаллов.

**Молекулярные кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располагаются нейтральные молекулы вещества, силы взаимодействия между которыми обусловлены незначительным взаимным смещением электронов в электронных оболочках атомов. Эти силы называются ван-дер-ваальсовыми, так как они имеют ту же природу, что и силы притяжения между молекулами, приводящими к отклонению газов от идеальности. Молекулярными кристаллами являются, например, большинство органических соединений (парафин, спирт, резина и т. д.), инертные газы (Ne, Ar, Kr, Xe) и газы $CO_2$, $O_2$, $N_2$ в твердом состоянии, лед, а также кристаллы брома $Br_2$, иода $I_2$. Ван-дер-ваальсовы силы довольно слабые, поэтому молекулярные кристаллы легко деформируются.

В некоторых твердых телах одновременно может осуществляться несколько видов связи. Примером этому служит графит (гексагональная решетка). Решетка графита (рис. 105) состоит из ряда параллельных плоскостей, в которых атомы углерода расположены в вершинах правильных шестиугольников. Расстояние между плоскостями более чем в два раза превышает расстояние между атомами шестиугольника. Плоские слои связаны друг с другом ван-дер-ваальсовыми силами. В пределах слоя три валентных электрона каждого атома углерода образуют ковалентную связь с соседними атомами углерода, а четвертый электрон, оставаясь «свободным», коллективизируется, но не во всей решетке, как в случае металлов, а в пределах одного слоя. Таким образом, в данном случае осуществляется три вида связи: гомеополярная и металлическая — в пределах одного слоя; ван-дер-ваальсова — между слоями. Этим объясняется мягкость графита, так как его слои могут скользить друг относительно друга.

Различие в строении кристаллических решеток двух разновидностей углерода — графита и алмаза — объясняет различие в их физических свойствах: мягкость графита и твердость алмаза; графит — проводник электричества, алмаз — диэлектрик (нет свободных электронов) и т. д.

Расположение атомов в кристаллах характеризуется также **координационным числом** — числом ближайших однотипных с данным атомом соседних атомов в кристаллической решетке или молекул в молекулярных кристаллах. Для модельного изображения кристаллических структур из атомов и ионов пользуются системой плотной упаковки шаров. Рассматривая простейший случай плотной упаковки шаров одинакового радиуса на плоскости, приходим к двум способам их расположения (рис. 106, *а*, *б*). Правая упаковка является более плотной, так как при равном числе шаров площадь ромба со стороной, равной стороне квадрата, меньше площади квадрата. Как видно из рисунка,

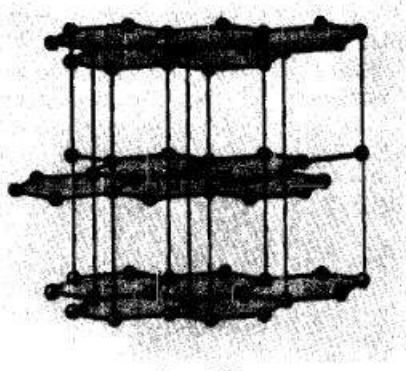
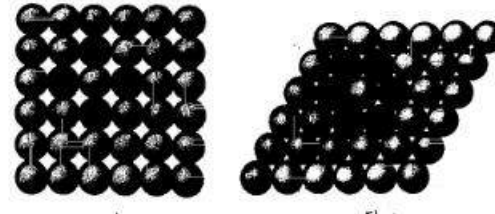


Рис. 105



*а)* *б)*

Рис. 106

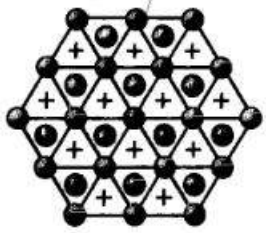


Рис. 107

различие в упаковках сводится к различию координационных чисел: в левой упаковке координационное число равно 4, в правой — 6. Т. е. чем плотнее упаковка, тем больше координационное число.

Рассмотрим, при каких условиях плотная упаковка шаров в пространстве может соответствовать той или иной кристаллической структуре, приводимой ранее. Начнем строить решетку со слоя шаров, представленных на рис. 106, *б*. Для упрощения дальнейших рассуждений спроецируем центры шаров на плоскость, на которой они лежат, обозначив их серыми кружками (рис. 107). На эту же плоскость спроецируем центры просветов между шарами, которые обозначены на рис. 107 соответственно зелеными кружками и крестиками. Любой плотноупакованный слой будем называть слоем *A*, если центры его шаров расположены над серыми кружками, слоем *B* — если над зелеными кружками, слоем *C* — если над крестиками. Над слоем *A* уложим второй плотноупакованный слой так, чтобы каждый шар этого слоя лежал на трех шарах первого слоя. Это можно сделать двояко: взять в качестве второго слоя либо *B*, либо *C*. Третий слой можно опять уложить двояко и т. д. Итак, плотную упаковку можно описать как последовательность *ABCBAC*..., в которой не могут стоять рядом слои, обозначенные одинаковыми буквами.

Из множества возможных комбинаций в кристаллографии реальное значение имеют два типа упаковки: 1) двухслойная упаковка *ABABAB*... — гексагональная плотноупакованная структура (рис. 108); 2) трехслойная упаковка *ABCABC*... — кубическая гранецентрированная структура (рис. 109). В обеих решетках координационное число равно 12 и плотность упаковки одинакова — атомы занимают 74 % общего объема кристалла. Координационное число, соответствующее кубической объемно центрированной решетке, равно 8, решетке алмаза (см. рис. 104) равно 4.

Кроме двух- и трехслойных упаковок можно построить многослойные с большим периодом повторяемости одинаковых слоев, например *ABCBACABCBAC*... — шестислойная упаковка. Существует модификация карбида SiC с периодом повторяемости 6, 15 и 243 слоя.

Если кристалл построен из атомов различных элементов, то его можно представить в виде плотной упаковки шаров разных размеров. На рис. 110 приведено мо-

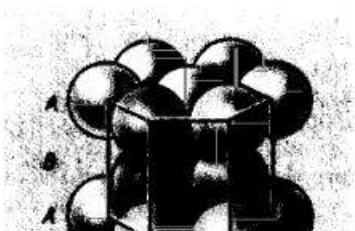



Рис. 108

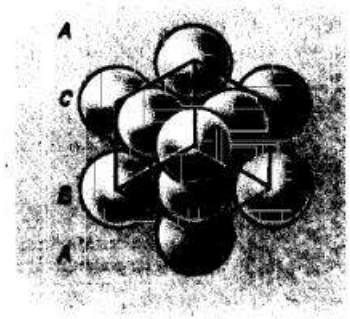



Рис. 109

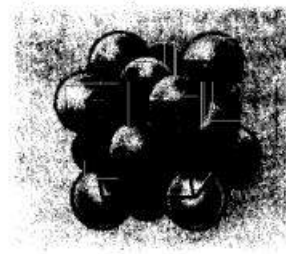


Рис. 110

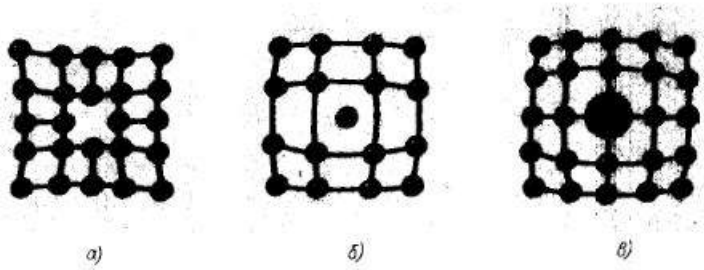


Рис. 111

дельное изображение кристалла поваренной соли. Крупные ионы хлора ($r = 181$ пм) образуют плотную трехслойную упаковку, у которой большие пустоты заполнены меньшими по размеру ионами натрия ($r = 98$ пм). Каждый ион Na окружен шестью ионами Cl, и, наоборот, каждый ион Cl — шестью ионами Na.

## § 72. Дефекты в кристаллах

Рассмотренные в § 71 идеальные кристаллические структуры существуют лишь в очень малых объемах реальных кристаллов, в которых всегда имеются отклонения от упорядоченного расположения частиц в узлах решетки, называемые **дефектами кристаллической решетки. Дефекты** делятся на **макроскопические**, возникающие в процессе образования и роста кристаллов (например, трещины, поры, инородные макроскопические включения), и **микроскопические**, обусловленные микроскопическими отклонениями от периодичности.

**Микродефекты** делятся на **точечные** и **линейные**. Точечные дефекты бывают трех типов: 1) **вакансия** — отсутствие атома в узле кристаллической решетки (рис. 111, *а*); 2) **междоузельный атом** — атом, внедрившийся в междоузельное пространство (рис. 111, *б*); 3) **примесный атом** — атом примеси, либо замещающий атом основного вещества в кристаллической решетке (**примесь замещения**, рис. 111, *в*), либо внедрившийся в междоузельное пространство (**примесь внедрения**, рис. 111, *б*; только в междоузлии вместо атома основного вещества располагается атом примеси). Точечные дефекты нарушают лишь ближний порядок в кристаллах, не затрагивая дальнего порядка,— в этом состоит их характерная особенность.

Линейные дефекты нарушают дальний порядок. Как следует из опытов, механические свойства кристаллов в значительной степени определяются дефектами особого вида — дислокациями. **Дислокации** — линейные дефекты, нарушающие правильное чередование атомных плоскостей.

Дислокации бывают **краевые** и **винтовые**. Если одна из атомных плоскостей обрывается внутри кристалла, то край этой плоскости образует краевую дислокацию (рис. 112, *а*). В случае винтовой дислокации (рис. 112, *б*) ни одна из атомных плоскостей внутри кристалла не обрывается, а сами плоскости лишь приблизительно параллельны и смыкаются друг с другом так, что фактически кристалл состоит из одной атомной плоскости, изогнутой по винтовой поверхности.

**Плотность дислокаций** (число дислокаций, приходящихся на единицу площади поверхности кристалла) для совершенных монокристаллов составляет $10^2 - 10^3$ см$^{-2}$, для деформированных кристаллов — $10^{10} - 10^{12}$ см$^{-2}$. Дислокации никогда не обрываются, они либо выходят на поверхность, либо разветвляются, поэтому в реальном кристалле образуются плоские или пространственные сетки дислокаций. Дислокации и их движение можно наблюдать с помощью электронного микроскопа, а также методом избирательного травления — в местах выхода дислокации на поверхность возникают ямки травления (ин-

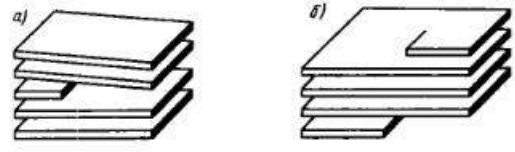


Рис. 112

тенсивное разрушение кристалла под действием реагента), «проявляющие» дислокации.

Наличие дефектов в кристаллической структуре влияет на свойства кристаллов, анализ которых проведем ниже.

## § 73. Теплоемкость твердых тел

В качестве модели твердого тела рассмотрим правильно построенную кристаллическую решетку, в узлах которой частицы (атомы, ионы, молекулы), принимаемые за материальные точки, колеблются около своих положений равновесия — узлов решетки — в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Таким образом, каждой составляющей кристаллическую решетку частице приписывается три колебательных степени свободы, каждая из которых, согласно закону равнораспределения энергии по степеням свободы (см. § 50), обладает энергией $kT$.

Внутренняя энергия моля твердого тела

$$U_m = 3N_A kT = 3RT,$$

где $N_A$ — постоянная Авогадро; $N_A k = R$ ($R$ — молярная газовая постоянная).

Молярная теплоемкость твердого тела

$$C_V = \frac{dU_m}{dT} = 3R \approx 25 \text{ Дж/(моль·К)}, \quad (73.1)$$

т. е. молярная (атомная) теплоемкость *химически простых тел* в кристаллическом состоянии одинакова (равна $3R$) и не зависит от температуры. Этот закон был эмпирически получен французскими учеными П. Дюлонгом (1785—1838) и Л. Пти (1791—1820) и носит название **закона Дюлонга и Пти.**

Если твердое тело является химическим соединением (например, NaCl), то число частиц в моле не равно постоянной Авогадро, а равно $nN_A$, где $n$ — число атомов в молекуле (для NaCl число частиц в моле равно $2N_A$, так, в одном моле NaCl содержится $N_A$ атомов Na и $N_A$ атомов Cl). Таким образом, молярная теплоемкость *твердых химических соединений*

$$C_V = 3nR \approx 25n \text{ Дж/(моль·К)},$$

Таблица 4

| Вещество | $C$, Дж/(моль·К) | |
|---|---|---|
| | Теоретическое значение | Экспериментальное значение |
| Алюминий Al | 25 | 25,5 |
| Алмаз C | 25 | 5,9 |
| Бериллий Be | 25 | 15,6 |
| Бор B | 25 | 13,5 |
| Железо Fe | 25 | 26,8 |
| Серебро Ag | 25 | 25,6 |
| NaCl | 50 | 50,6 |
| AgCl | 50 | 50,9 |
| $CaCl_2$ | 75 | 76,2 |

т. е. равна сумме атомных теплоемкостей элементов, составляющих это соединение.

Как показывают опытные данные (табл. 4), для многих веществ закон Дюлонга и Пти выполняется с довольно хорошим приближением, хотя некоторые вещества (C, Be, B) имеют значительные отклонения от вычисленных теплоемкостей. Кроме того, так же как и в случае газов (см. § 53), опыты по измерению теплоемкости твердых тел при низких температурах показали, что она зависит от температуры (рис. 113). Вблизи нуля Кельвина теплоемкость тел пропорциональна $T^3$, и только при достаточно высоких температурах, характерных для каждого вещества, выполняется условие (73.1). Алмаз, например, имеет теплоемкость, равную $3R$ при 1800 К! Однако для большинства твердых тел комнатная температура является уже достаточно высокой.

Расхождение опытных и теоретических значений теплоемкостей, вычисленных на

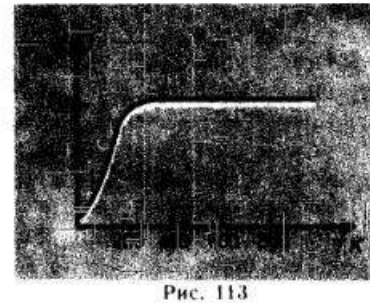


Рис. 113

основе классической теории, объяснили, исходя из квантовой теории теплоемкостей, А. Эйнштейн и П. Дебай (1884—1966).

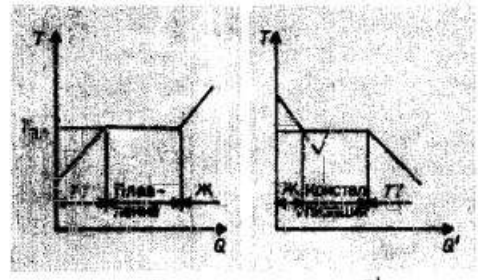
## § 74. Испарение, сублимация, плавление и кристаллизация. Аморфные тела

Как в жидкостях, так и в твердых телах всегда имеется некоторое число молекул, энергия которых достаточна для преодоления притяжения к другим молекулам и которые способны оторваться от поверхности жидкости или твердого тела и перейти в окружающее их пространство. Этот процесс для жидкости называется **испарением** (или **парообразованием**), для твердых тел — **сублимацией** (или **возгонкой**).

Испарение жидкостей идет при любой температуре, но его интенсивность с повышением температуры возрастает. Наряду с процессом испарения происходит компенсирующий его процесс **конденсации** пара в жидкость. Если число молекул, покидающих жидкость за единицу времени через единицу поверхности, равно числу молекул, переходящих из пара в жидкость, то наступает **динамическое равновесие** между процессами испарения и конденсации. **Пар**, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется **насыщенным** (см. также § 62).

Для большинства твердых тел процесс сублимации при обычных температурах незначителен и давление пара над поверхностью твердого тела мало; оно повышается с повышением температуры. Интенсивно сублимируют такие вещества, как нафталин, камфора, что обнаруживается по резкому, свойственному им запаху. Особенно интенсивно сублимация происходит в вакууме — этим пользуются для изготовления зеркал. Известный пример сублимации — превращение льда в пар — мокрое белье высыхает на морозе.

Если твердое тело нагревать, то его *внутренняя энергия* (складывается из энергии колебаний частиц в узлах решетки и энергии взаимодействия этих частиц) возрастает. При повышении температуры амплитуда колебаний частиц




а) б)

Рис. 114

увеличивается до тех пор, пока кристаллическая решетка не разрушится,— твердое тело плавится. На рис. 114, *а* изображена примерная зависимость $T(Q)$, где $Q$ — количество теплоты, полученное телом при плавлении. По мере сообщения твердому телу теплоты его температура повышается, а при температуре плавления $T_{пл}$ начинается переход тела из твердого состояния в жидкое. Температура $T_{пл}$ остается постоянной до тех пор, пока весь кристалл не расплавится, и только тогда температура жидкости вновь начнет повышаться.

Нагревание твердого тела до $T_{пл}$ еще не переводит его в жидкое состояние, поскольку энергия частиц вещества должна быть достаточной для разрушения кристаллической решетки. В процессе плавления теплота, сообщаемая веществу, идет на совершение работы по разрушению кристаллической решетки, а поэтому $T_{пл}=\text{const}$ до расплавления всего кристалла. Затем подводимая теплота пойдет опять-таки на увеличение энергии частиц жидкости и ее температура начнет повышаться. Количество теплоты, необходимое для расплавления 1 кг вещества, называется **удельной теплотой плавления**.

Если жидкость охлаждать, то процесс протекает в обратном направлении (рис. 114, *б*; $Q'$ — количество теплоты, отданное телом при кристаллизации): сначала температура жидкости понижается, затем при постоянной температуре, равной $T_{пл}$, начинается **кристаллизация**, после ее завершения температура кристалла начинает понижаться. Для кристаллизации вещества необходимо наличие так называе-

мых **центров кристаллизации** — кристаллических зародышей, которыми могут быть не только кристаллики образующегося вещества, но и примеси, а также пыль, сажа и т. д. Отсутствие центров кристаллизации в чистой жидкости затрудняет образование микроскопических кристалликов, и вещество, оставаясь в жидком состоянии, охлаждается до температуры, меньшей температуры кристаллизации, при этом образуется **переохлажденная жидкость** (на 114, *б* ей соответствует штриховая кривая). При сильном переохлаждении начинается спонтанное образование центров кристаллизации и вещество кристаллизуется довольно быстро.

Обычно переохлаждение расплава происходит от долей до десятков градусов, но для ряда веществ может достигать сотен градусов. Из-за большой вязкости сильно переохлажденные жидкости теряют текучесть, сохраняя, как и твердые тела, свою форму. Эти тела получили название **аморфных твердых тел**; к ним относятся смолы, воск, сургуч, стекло. Аморфные тела, являясь, таким образом, переохлажденными жидкостями, **изотропны**, т. е. их свойства во всех направлениях одинаковы; для них, как и для жидкостей, характерен *ближний порядок* в расположении частиц; в них в отличие от жидкостей подвижность частиц довольно мала. Особенностью аморфных тел является отсутствие у них определенной точки плавления, т. е. невозможно указать определенную температуру, выше которой можно было бы констатировать жидкое состояние, а ниже — твердое. Из опыта известно, что в аморфных телах со временем может наблюдаться процесс кристаллизации, например в стекле появляются кристаллики; оно, теряя прозрачность, начинает мутнеть и превращаться в поликристаллическое тело.

В последнее время широкое распространение в народном хозяйстве получили **полимеры** — органические аморфные тела, молекулы которых состоят из большого числа одинаковых длинных молекулярных цепочек, соединенных химическими (валентными) связями. К полимерам относятся как естественные (крахмал, белок, каучук, клетчатка и др.), так и искусственные (пластмасса, резина, полистирол, лавсан, капрон и др.) органические вещества. Полимерам присущи прочность и эластичность; некоторые полимеры выдерживают растяжение, в 5—10 раз превышающее их первоначальную длину. Это объясняется тем, что длинные молекулярные цепочки могут при деформации либо сворачиваться в плотные клубки, либо вытягиваться в прямые линии. Эластичность полимеров проявляется только в определенном интервале температур, ниже которого они становятся твердыми и хрупкими, а выше — пластичными. Хотя синтетических полимерных материалов создано очень много (искусственные волокна, заменители кожи, строительные материалы, заменители металлов и др.), но теория полимеров до настоящего времени полностью не разработана. Ее развитие определяется запросами современной техники, требующей синтеза полимеров с заранее заданными свойствами.

## § 75. Фазовые переходы I и II рода

**Фазой** называется термодинамически равновесное состояние вещества, отличающееся по физическим свойствам от других возможных равновесных состояний того же вещества. Если, например, в закрытом сосуде находится вода, то эта система является *двухфазной*: жидкая фаза — вода; газообразная фаза — смесь воздуха с водяными парами. Если в воду бросить кусочки льда, то эта система станет трехфазной, в которой лед является твердой фазой. Часто понятие «фаза» употребляется в смысле агрегатного состояния, однако надо учитывать, что оно шире, чем понятие «агрегатное состояние». В пределах одного агрегатного состояния вещество может находиться в нескольких фазах, отличающихся по своим свойствам, составу и строению (лед, например, встречается в пяти различных модификациях — фазах). Переход вещества из одной фазы в другую — **фазовый переход** — всегда связан с качественными изменениями свойств вещества. Примером фазового перехода могут служить изменения агрегат-

ного состояния вещества или переходы, связанные с изменениями в составе, строении и свойствах вещества (например, переход кристаллического вещества из одной модификации в другую).

Различают фазовые переходы двух родов. **Фазовый перед I рода** (например, плавление, кристаллизация и т. д.) сопровождается поглощением или выделением теплоты, называемой **теплотой фазового перехода**. Фазовые переходы I рода характеризуются постоянством температуры, изменениями энтропии и объема. Объяснение этому можно дать следующим образом. Например, при плавлении телу нужно сообщить некоторое количество теплоты, чтобы вызвать разрушение кристаллической решетки. Подводимая при плавлении теплота идет не на нагрев тела, а на разрыв межатомных связей, поэтому плавление протекает при постоянной температуре. В подобных переходах — из более упорядоченного кристаллического состояния в менее упорядоченное жидкое состояние — степень беспорядка увеличивается, т. е., согласно второму началу термодинамики, этот процесс связан с возрастанием энтропии системы. Если переход происходит в обратном направлении (кристаллизация), то система теплоту выделяет.

Фазовые переходы, не связанные с поглощением или выделением теплоты и изменением объема, называются **фазовыми переходами II рода**. Эти переходы характеризуются постоянством объема и энтропии, но скачкообразным изменением теплоемкости. Общая трактовка фазовых переходов II рода предложена советским ученым Л. Д. Ландау (1908—1968). Согласно этой трактовке, фазовые переходы II рода связаны с изменением симметрии: выше точки перехода система, как правило, обладает более высокой симметрией, чем ниже точки перехода. Примерами фазовых переходов II рода являются: переход ферромагнитных веществ (железа, никеля) при определенных давлении и температуре в парамагнитное состояние; переход металлов и некоторых сплавов при температуре, близкой к 0 К, в сверхпроводящее состояние, характеризуемое скачкообразным уменьшением электрического сопротивления до нуля; превращение обыкновенного жидкого гелия (гелия I) при $T=2{,}9$ К в другую жидкую модификацию (гелий II), обладающую свойствами сверхтекучести.

## § 76. Диаграмма состояния. Тройная точка

Если система является однокомпонентной, т. е. состоящей из химически однородного вещества или его соединения, то понятие фазы совпадает с понятием агрегатного состояния. Согласно § 60, одно и то же вещество в зависимости от соотношения между удвоенной средней энергией, приходящейся на одну степень свободы хаотического теплового движения молекул, и наименьшей потенциальной энергией взаимодействия молекул может находиться в одном из трех агрегатных состояний: твердом, жидком или газообразном. Это соотношение, в свою очередь, определяется внешними условиями — температурой и давлением. Следовательно, фазовые превращения также определяются изменениями температуры и давления.

Для наглядного изображения фазовых превращений используется **диаграмма состояния** (рис. 115), на которой в координатах $p$, $T$ задается зависимость между температурой фазового перехода и давлением в виде кривых испарения (КИ), плавления (КП) и сублимации (КС), разделяющих поле диаграммы на три области, соответствующие условиям существования твердой (ТТ), жидкой (Ж) и газообразной (Г) фаз. Кривые на диаграмме называются **кривыми фазового равновесия**, каждая точка на них соответ-

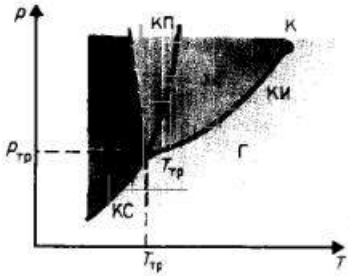



Рис. 115

ствует условиям равновесия двух сосуществующих фаз: КП — твердого тела и жидкости, КИ — жидкости и газа, КС — твердого тела и газа.

Точка, в которой пересекаются эти кривые и которая, следовательно, определяет условия (температуру $T_{тр}$ и соответствующее ей равновесное давление $p_{тр}$) одновременного равновесного сосуществования трех фаз вещества, называется **тройной точкой**. Каждое вещество имеет только одну тройную точку. Тройная точка воды характеризуется температурой 273,16 К (по шкале Цельсия ей соответствует температура 0,01 °С) и является основной реперной точкой для построения термодинамической температурной шкалы.

Термодинамика дает метод расчета кривой равновесия двух фаз одного и того же вещества. Согласно **уравнению Клапейрона — Клаузиуса**, производная от равновесного давления по температуре

$$\frac{dp}{dT}=\frac{L}{T(V_2-V_1)}, \qquad (76.1)$$

где $L$ — теплота фазового перехода, $(V_2-V_1)$ — изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую, $T$ — температура перехода (процесс изотермический).

Уравнение Клапейрона — Клаузиуса позволяет определить наклоны кривых равновесия. Поскольку $L$ и $T$ положительны, наклон задается знаком $V_2-V_1$. При испарении жидкостей и сублимации твердых тел объем вещества всегда возрастает, поэтому, согласно (76.1), $dp/dT>0$; следовательно, в этих процессах повышение температуры приводит к увеличению давления, и наоборот. При плавлении большинства веществ объем, как правило, возрастает, т. е. $dp/dT>0$; следовательно, увеличение давления приводит к повышению температуры плавления (сплошная КП на рис. 115). Для некоторых же веществ ($H_2O$, Ge, чугун и др.) объем жидкой фазы меньше объема твердой фазы, т. е. $dp/dT<0$; следовательно, увеличение давления сопровождается понижением температуры плавления (штриховая линия на рис. 115).

Диаграмма состояния, строящаяся на основе экспериментальных данных, позволяет судить, в каком состоянии находится данное вещество при определенных $p$ и $T$, а также какие фазовые переходы будут происходить при том или ином процессе. Например, при условиях, соответствующих точке *1* (рис. 116), вещество находится в твердом состоянии, точке *2* — в газообразном, а точке *3* — одновременно в жидком и газообразном состояниях. Допустим, что вещество в твердом состоянии, соответствующем точке *4*, подвергается изобарному нагреванию, изображенному на диаграмме состояния горизонтальной штриховой прямой *4—5—6*. Из рисунка видно, что при температуре, соответствующей точке *5*, вещество плавится, при более высокой температуре, соответствующей точке *6*,— начинает превращаться в газ. Если же вещество находится в твердом состоянии, соответствующем точке *7*, то при изобарном нагревании (штриховая прямая *7—8*) кристалл превращается в газ минуя жидкую фазу. Если вещество находится в состоянии, соответствующем точке *9*, то при изотермическом сжатии (штриховая прямая *9—10*) оно пройдет следующие три состояния: газ — жидкость — кристаллическое состояние.

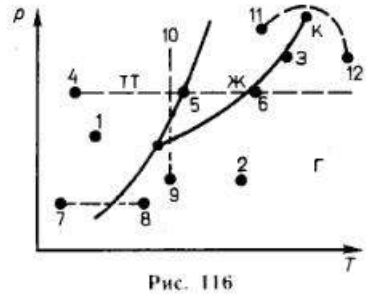


Рис. 116

На диаграмме состояний (см. рис. 115 и 116) видно, что кривая испарения заканчивается в критической точке $K$. Поэтому возможен *непрерывный* переход вещества из жидкого состояния в газообразное и обратно в обход критической точки, без пересечения кривой испарения (переход *11—12* на рис. 116), т. е. такой переход, который не сопровождается фазовыми превращениями. Это возможно благодаря тому, что различие между газом и жидкостью является чисто количествен-

ным (оба эти состояния, например, являются изотропными). Переход же кристаллического состояния (характеризуется анизотропией) в жидкое или газообразное может быть только скачкообразным (в результате фазового перехода), поэтому кривые плавления и сублимации не могут обрываться, как это имеет место для кривой испарения в критической точке. Кривая плавления уходит в бесконечность, а кривая сублимации идет в точку, где $p=0$ и $T=0$.

## Контрольные вопросы

- Чем отличаются реальные газы от идеальных?
- Каков смысл поправок при выводе уравнения Ван-дер-Ваальса?
- Почему перегретая жидкость и пересыщенный пар являются метастабильными состояниями?
- При адиабатическом расширении газа в вакуум его внутренняя энергия не меняется. Как изменится температура, если газ идеальный? реальный?
- Каковы суть и причины эффекта Джоуля — Томсона? Когда его называют положительным? отрицательным?
- Почему у всех веществ поверхностное натяжение уменьшается с температурой?
- Что представляют собой поверхностно-активные вещества?
- При каком условии жидкость смачивает твердое тело? не смачивает?
- От чего зависит высота поднятия смачивающей жидкости в капилляре?
- Чем отличаются монокристаллы от поликристаллов?
- Как можно классифицировать кристаллы?
- Как получить закон Дюлонга и Пти исходя из классической теории теплоемкости?
- Некоторое количество твердого вещества смешано с тем же веществом в жидком состоянии. Почему при некотором нагреве этой смеси ее температура не поднимается?
- Чем отличается фазовый переход I рода от фазового перехода II рода?
- Что можно «вычитать» из диаграммы состояния, используемой для изображения фазовых превращений?

## Задачи

**10.1.** Углекислый газ массой $m=1$ кг находится при температуре 290 К в сосуде вместимостью 20 л. Определить давление газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Объяснить различие в результатах. Поправки $a$ и $b$ принять равными соответственно 0,365 Н·м$^4$/моль$^2$ и $4{,}3\cdot10^{-5}$ м$^3$/моль. [1) 2,44 МПа; 2) 2,76 МПа]

**10.2.** Кислород, содержащий количество вещества $\nu=2$ моль, занимает объем $V_1=1$ л. Определить изменение $\Delta T$ температуры кислорода, если он адиабатически расширяется в вакуум до объема $V_2=10$ л. Поправку $a$ принять равной 0,136 Н·м$^4$/моль$^2$. [−11,8 К]

**10.3.** Показать, что эффект Джоуля — Томсона всегда отрицателен, если дросселируется газ, для которого силами притяжения молекул можно пренебречь.

**10.4.** Считая процесс образования мыльного пузыря изотермическим, определить работу $A$, которую надо совершить, чтобы увеличить его диаметр от $d_1=2$ см до $d_2=6$ см. Поверхностное натяжение $\sigma$ мыльного раствора принять равным 40 мН/м. [0,8 мДж]

**10.5.** Воздушный пузырек диаметром $d=0{,}02$ мм находится на глубине $h=20$ см под поверхностью воды. Определить давление воздуха в этом пузырьке. Атмосферное давление принять нормальным. Поверхностное натяжение воды $\sigma=73$ мН/м, а ее плотность $\rho=1$ г/см$^3$ [118 кПа]

**10.6.** Вертикальный открытый капилляр внутренним диаметром $d=3$ мм опущен в сосуд с ртутью. Определить радиус кривизны ртутного мениска в капилляре, если разность уровней ртути в сосуде и в капилляре $\Delta h=3{,}7$ мм. Плотность ртути $\rho=13{,}6$ г/см$^3$, а поверхностное натяжение $\sigma=0{,}5$ Н/м. [2 мм]

**10.7.** Для нагревания металлического шарика массой 25 г от 10 до 30 °С затратили количество теплоты, равное 117 Дж. Определить теплоемкость шарика из закона Дюлонга и Пти и материал шарика. [$M\approx107$ кг/моль; серебро]

# 3 Электричество и электромагнетизм

## Глава 11
## Электростатика

### § 77. Закон сохранения электрического заряда

Еще в глубокой древности было известно, что янтарь, потертый о шерсть, притягивает легкие предметы. Английский врач Джильберт (конец XVI в.) назвал тела, способные после натирания притягивать легкие предметы, наэлектризованными. Сейчас мы говорим, что тела при этом приобретают электрические заряды. Несмотря на огромное разнообразие веществ в природе, существует только *два типа электрических зарядов*: заряды, подобные возникающим на стекле, потертом о кожу (их назвали *положительными*), и заряды, подобные возникающим на эбоните, потертом о мех (их назвали *отрицательными*); одноименные заряды друг от друга отталкиваются, разноименные — притягиваются.

Опытным путем (1910—1914) американский физик Р. Милликен (1868—1953) показал, что электрический заряд **дискретен**, т. е. заряд любого тела составляет целое кратное от **элементарного электрического заряда** $e$ ($e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл). **Электрон** ($m_e=9{,}11\cdot10^{-31}$ кг) и **протон** ($m_p=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг) являются соответственно носителями элементарных отрицательного и положительного зарядов.

Все тела в природе способны электризоваться, т. е. приобретать электрический заряд. Электризация тел может осуществляться различными способами: соприкосновением (трением), электростатической индукцией (см. § 92) и т. д. Всякий процесс заряжения сводится к разделению зарядов, при котором на одном из тел (или части тела) появляется избыток положительного заряда, а на другом (или другой части тела) — избыток отрицательного заряда. Общее количество зарядов обоих знаков, содержащихся в телах, не изменяется: эти заряды только перераспределяются между телами.

Из обобщения опытных данных был установлен *фундаментальный закон природы*, экспериментально подтвержденный в 1843 г. английским физиком М. Фарадеем (1791—1867),— **закон сохранения заряда**: алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы (системы, не обменивающейся зарядами с внешними телами) остается неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри этой системы.

Электрический заряд — величина релятивистски инвариантная, т. е. не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется этот заряд или покоится.

В зависимости от концентрации свободных зарядов тела делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники. **Проводники** — тела, в которых электрический заряд может перемещаться по всему его объему. Проводники делятся на две группы: 1) **проводники первого рода** (металлы) — перенесение в них зарядов (свободных электронов) не сопровождается химическими превращениями; 2) **проводники**

**второго рода** (например, расплавленные соли, растворы кислот) — перенесение в них зарядов (положительных и отрицательных ионов) ведет к химическим изменениям. **Диэлектрики** (например, стекло, пластмассы) — тела, в которых практически отсутствуют свободные заряды. **Полупроводники** (например, германий, кремний) занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками. Указанное деление тел является весьма условным, однако большое различие в них концентраций свободных зарядов обусловливает огромные качественные различия в их поведении и оправдывает поэтому деление тел на проводники, диэлектрики и полупроводники.

Единица электрического заряда (производная единица, так как определяется через единицу силы тока) — **кулон** (Кл) — электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за время 1 с.

## § 78. Закон Кулона

Закон взаимодействия *неподвижных точечных* электрических зарядов установлен в 1785 г. Ш. Кулоном с помощью крутильных весов, подобных тем, которые (см. § 22) использовались Г. Кавендишем для определения гравитационной постоянной (ранее этот закон был открыт Г. Кавендишем, однако его работа оставалась неизвестной более 100 лет). **Точечным** называется заряд, сосредоточенный на теле, линейные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которыми он взаимодействует. Понятие точечного заряда, как и материальной точки, является *физической абстракцией*.

**Закон Кулона:** сила взаимодействия $F$ между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися *в вакууме*, пропорциональна зарядам $Q_1$ и $Q_2$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния $r$ между ними:

$$F = k\frac{|Q_1 Q_2|}{r^2},$$

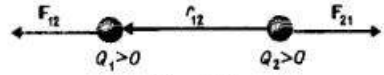


Рис. 117

где $k$ — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Сила $\mathbf{F}$ направлена по прямой, соединяющей взаимодействующие заряды, т. е. является центральной, и соответствует притяжению ($F<0$) в случае разноименных зарядов и отталкиванию ($F>0$) в случае одноименных зарядов. Эта сила называется **кулоновской силой.**

В векторной форме закон Кулона имеет вид

$$\mathbf{F}_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r}, \qquad (78.1)$$

где $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая на заряд $Q_1$ со стороны заряда $Q_2$, $\mathbf{r}_{12}$ — радиус-вектор, соединяющий заряд $Q_2$ с зарядом $Q_1$, $r=|\mathbf{r}_{12}|$ (рис. 117). На заряд $Q_2$ со стороны заряда $Q_1$ действует сила $\mathbf{F}_{21}=-\mathbf{F}_{12}$, т. е. взаимодействие электрических точечных зарядов удовлетворяет третьему закону Ньютона.

В СИ коэффициент пропорциональности равен

$$k = 1/(4\pi\varepsilon_0).$$

Тогда закон Кулона запишется в окончательном виде:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \qquad (78.2)$$

Величина $\varepsilon_0$ называется **электрической постоянной**; она относится к числу *фундаментальных физических постоянных* и равна

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2),$$

или

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}, \qquad (78.3)$$

где **фарад** (Ф) — единица электрической емкости (см. § 93). Тогда

$$1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\cdot 10^9\ \text{м/Ф}.$$

## § 79. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля

Если в пространство, окружающее электрический заряд, внести другой заряд, то на него будет действовать кулоновская сила; значит, в пространстве, окружающем электрические заряды, существует **силовое поле**. Согласно представлениям современной физики, поле реально существует и наряду с веществом является одной из форм существования материи, посредством которого осуществляются определенные взаимодействия между макроскопическими телами или частицами, входящими в состав вещества. В данном случае говорят об электрическом поле — поле, посредством которого взаимодействуют электрические заряды. Мы будем рассматривать электрические поля, которые создаются неподвижными электрическими зарядами и называются **электростатическими.**

Для обнаружения и опытного исследования электростатического поля используется *пробный точечный положительный заряд* — такой заряд, который не искажает исследуемое поле (не вызывает перераспределения зарядов, создающих поле). Если в поле, создаваемое зарядом $Q$, поместить пробный заряд $Q_0$, то на него действует сила $\mathbf{F}$, различная в разных точках поля, которая, согласно закону Кулона (78.2), пропорциональна пробному заряду $Q_0$. Поэтому отношение $\mathbf{F}/Q_0$ не зависит от $Q_0$ и характеризует электрическое поле в той точке, где пробный заряд находится. Эта величина называется напряженностью и является *силовой характеристикой электростатического поля.*

**Напряженность электростатического поля** в данной точке есть физическая величина, определяемая силой, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в эту точку поля:

$$\mathbf{E}=\mathbf{F}/Q_0. \qquad (79.1)$$

Как следует из формул (79.1) и (78.1), напряженность поля точечного заряда




Рис. 118

в вакууме

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

или в скалярной форме

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}. \qquad (79.2)$$

Направление вектора $\mathbf{E}$ совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд. Если поле создается положительным зарядом, то вектор $\mathbf{E}$ направлен вдоль радиуса-вектора от заряда во внешнее пространство (отталкивание пробного положительного заряда); если поле создается отрицательным зарядом, то вектор $\mathbf{E}$ направлен к заряду (рис. 118).

Из формулы (79.1) следует, что единица напряженности электростатического поля — ньютон на кулон (Н/Кл): 1 Н/Кл — напряженность такого поля, которое на точечный заряд 1 Кл действует с силой в 1 Н; 1 Н/Кл = 1 В/м, где В (вольт) — единица потенциала электростатического поля (см. § 84).

Графически электростатическое поле изображают с помощью **линий напряженности** — линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\mathbf{E}$ (рис. 119). Линиям напряженности приписывается направление, совпадающее с направлением вектора напряженности. Так как в каждой данной точке пространства вектор напряженности имеет лишь одно направление, то линии напряженности никогда не пересекаются. Для **однородного поля** (когда вектор напряженности в любой точке постоянен по

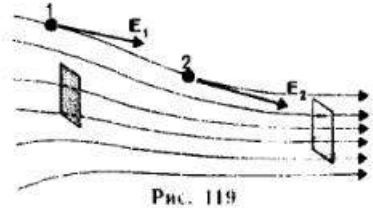
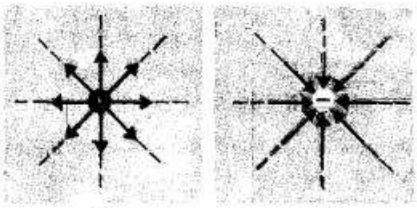



Рис. 119



а) б)

Рис. 120

величине и направлению) линии напряженности параллельны вектору напряженности. Если поле создается точечным зарядом, то линии напряженности — радиальные прямые, выходящие из заряда, если он положителен (рис. 120, *а*), и входящие в него, если заряд отрицателен (рис. 120, *б*). Вследствие большой наглядности графический способ представления электрического поля широко применяется в электротехнике.

Чтобы с помощью линий напряженности можно было характеризовать не только направление, но и значение напряженности электростатического поля, условились проводить их с определенной густотой (см. рис. 119): число линий напряженности, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть равно модулю вектора **E**. Тогда число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку $dS$, нормаль **n** которой образует угол $\alpha$ с вектором **E**, равно $E\,dS\cos\alpha = E_n\,dS$, где $E_n$ — проекция вектора **E** на нормаль **n** к площадке $dS$ (рис. 121). Величина

$$d\Phi_E = E_n\,dS = \mathbf{E}\,d\mathbf{S}$$

называется **потоком вектора напряженности** через площадку $dS$. Здесь $d\mathbf{S} = dS\,\mathbf{n}$ — вектор, модуль которого равен $dS$, а направление совпадает с направлением нормали **n** к площадке. Выбор направления вектора **n** (а следовательно, и $d\mathbf{S}$) условен, так как его можно направить в любую сторону.

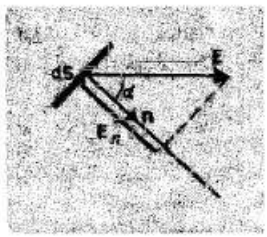



Рис. 121

Единица потока вектора напряженности электростатического поля — 1 В·м.

Для произвольной замкнутой поверхности $S$ поток вектора **E** через эту поверхность

$$\Phi_E = \oint_S E_n\,dS = \oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S}, \qquad (79.3)$$

где интеграл берется по замкнутой поверхности $S$. Поток вектора **E** является *алгебраической величиной*: зависит не только от конфигурации поля **E**, но и от выбора направления **n**. Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимается *внешняя нормаль*, т. е. нормаль, направленная наружу области, охватываемой поверхностью.

В истории развития физики имела место борьба двух теорий: дальнодействия и близкодействия. В теории **дальнодействия** принимается, что электрические явления определяются мгновенным взаимодействием зарядов на любых расстояниях. Согласно теории **близкодействия**, все электрические явления определяются изменениями полей зарядов, причем эти изменения распространяются в пространстве от точки к точке с конечной скоростью. Применительно к электростатическим полям обе теории дают одинаковые результаты, хорошо согласующиеся с опытом. Переход же к явлениям, обусловленным движением электрических зарядов, приводит к несостоятельности теории дальнодействия, поэтому современной теорией взаимодействия заряженных частиц является *теория близкодействия*.

## § 80. Принцип суперпозиции электростатических полей. Поле диполя

Рассмотрим метод определения значения и направления вектора напряженности **E** в каждой точке электростатического поля, создаваемого системой неподвижных зарядов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$.

Опыт показывает, что к кулоновским силам применим рассмотренный в механике принцип независимости действия сил (см. § 6), т. е. результирующая сила $\mathbf{F}$, действующая со стороны поля на пробный заряд $Q_0$, равна векторной сумме сил $\mathbf{F}_i$, приложенных к нему со стороны каждого из зарядов $Q_i$:

$$\mathbf{F}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i. \qquad (80.1)$$

Согласно (79.1), $\mathbf{F}=Q_0\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}_i=Q_0\mathbf{E}_i$, где $\mathbf{E}$ — напряженность результирующего поля, а $\mathbf{E}_i$ — напряженность поля, создаваемого зарядом $Q_i$. Подставляя последние выражения в (80.1), получим

$$\mathbf{E}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_i. \qquad (80.2)$$

Формула (80.2) выражает **принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей**, согласно которому напряженность $\mathbf{E}$ результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна *геометрической сумме* напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать электростатические поля любой системы неподвижных зарядов, поскольку если заряды не точечные, то их можно всегда свести к совокупности точечных зарядов.

Принцип суперпозиции применим для расчета электростатического поля электрического диполя. **Электрический диполь** — система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов $(+Q, -Q)$, расстояние $l$ между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля. Вектор, направленный по оси диполя (прямой, проходящей через оба заряда) от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними, называется **плечом диполя l**. Вектор

$$\mathbf{p}=|Q|\,\mathbf{l}, \qquad (80.3)$$

совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению заряда

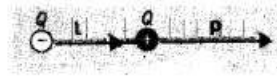



Рис. 122

$|Q|$ на плечо $\mathbf{l}$, называется **электрическим моментом диполя p** или **дипольным моментом** (рис. 122).

Согласно принципу суперпозиции (80.2), напряженность $\mathbf{E}$ поля диполя в произвольной точке

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_+ +\mathbf{E}_-,$$

где $\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{E}_-$ — напряженности полей, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами. Воспользовавшись этой формулой, рассчитаем напряженность поля на продолжении оси диполя и на перпендикуляре к середине его оси.

**1. Напряженность поля на продолжении оси диполя** в точке $A$ (рис. 123). Как видно из рисунка, напряженность поля диполя в точке $A$ направлена по оси диполя и по модулю равна

$$E_A=E_+-E_-.$$

Обозначив расстояние от точки $A$ до середины оси диполя через $r$, на основании формулы (79.2) для вакуума можно записать

$$E_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{(r-l/2)^2}-\frac{Q}{(r+l/2)^2}\right]=$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(r+l/2)^2-(r-l/2)^2}{(r-l/2)^2\,(r+l/2)^2}.$$

Согласно определению диполя, $l/2\ll r$, поэтому

$$E_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2Q\,l}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2p}{r^3}.$$

**2. Напряженность поля на перпендикуляре, восставленном к оси из его середины,** в точке $B$ (рис. 123). Точка $B$ равноудалена от зарядов, поэтому

$$E_+=E_-=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{(r')^2+l^2/4}\approx$$

$$\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{(r')^2}, \qquad (80.4)$$

где $r'$ — расстояние от точки $B$ до середины плеча диполя. Из подобия равнобед-

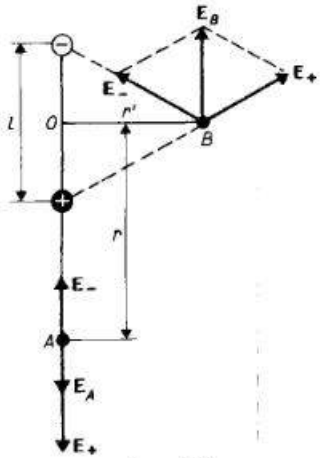



Рис. 123

ренных треугольников, опирающихся на плечо диполя и вектор $\mathbf{E}_B$, получим

$$\frac{E_B}{E_+}=\frac{l}{\sqrt{(r')^2+(l/2)^2}}\approx\frac{l}{r'},$$

откуда

$$E_B=E_+ l/r'. \qquad (80.5)$$

Подставив в выражение (80.5) значение (80.4), получим

$$E_B=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,l}{(r')^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{(r')^3}.$$

Вектор $\mathbf{E}_B$ имеет направление, противоположное электрическому моменту диполя (вектор $\mathbf{p}$ направлен от отрицательного заряда к положительному).

## § 81. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Вычисление напряженности поля системы электрических зарядов с помощью принципа суперпозиции электростатических полей можно значительно упростить, используя выведенную немецким ученым К. Гауссом (1777—1855) теорему, определяющую поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность.

В соответствии с формулой (79.3) поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса $r$, охватывающую точечный заряд $Q$, находящийся в ее центре (рис. 124),

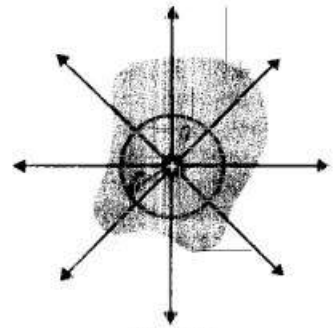


Рис. 124

$$\Phi_E=\oint_S E_n\,dS=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Этот результат справедлив для замкнутой поверхности любой формы. Действительно, если окружить сферу (рис. 124) произвольной замкнутой поверхностью, то каждая линия напряженности, пронизывающая сферу, пройдет и сквозь эту поверхность.

Если замкнутая поверхность произвольной формы охватывает заряд (рис. 125), то при пересечении любой выбранной линии напряженности с поверхностью она то входит в нее, то выходит из нее. Нечетное число пересечений при вычислении потока в конечном счете сводится к одному пересечению, так как поток считается положительным, если линии напряженности выходят из поверхности, и отрицательным для линий, входящих




Рис. 125

в поверхность. Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то поток сквозь нее равен нулю, так как число линий напряженности, входящих в поверхность, равно числу линий напряженности, выходящих из нее.

Таким образом, для поверхности любой формы, если она замкнута и заключает в себя точечный заряд $Q$, поток вектора $\mathbf{E}$ будет равен $Q/\varepsilon_0$, т. е.

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = Q/\varepsilon_0. \quad (81.1)$$

Знак потока совпадает со знаком заряда $Q$.

Рассмотрим общий случай произвольной поверхности, окружающей $n$ зарядов. В соответствии с принципом суперпозиции (80.2) напряженность $\mathbf{E}$ поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей $\mathbf{E}_i$, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$. Поэтому

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S} = \oint_S \left(\sum_i \mathbf{E}_i\right) d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i d\mathbf{S}.$$

Согласно (81.1), каждый из интегралов, стоящий под знаком суммы, равен $Q_i/\varepsilon_0$. Следовательно,

$$\oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i. \quad (81.2)$$

Формула (81.2) выражает **теорему Гаусса для электростатического поля в вакууме**: поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на $\varepsilon_0$. Эта теорема выведена математически для векторного поля любой природы русским математиком М. В. Остроградским (1801—1862), а затем независимо от него применительно к электростатическому полю — К. Гауссом.

В общем случае электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой объемной плотностью $\rho = \frac{dQ}{dV}$, различной в разных местах пространства. Тогда суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности $S$, охватывающей некоторый объем $V$,

$$\sum_i Q_i = \int_V \rho\,dV. \quad (81.3)$$

Используя формулу (81.3), теорему Гаусса (81.2) можно записать так:

$$\oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dV.$$

## § 82. Применение теоремы Гаусса к расчету некоторых электростатических полей в вакууме

**1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.** Бесконечная плоскость (рис. 126) заряжена с постоянной **поверхностной плотностью** $+\sigma$ ($\sigma = \frac{dQ}{dS}$ — заряд, приходящийся на единицу поверхности). Линии напряженности перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от нее в обе стороны. В качестве замкнутой поверхности мысленно построим цилиндр, основания которого параллельны заряженной плоскости, а ось перпендикулярна ей. Так как образующие цилиндра параллельны линиям напряженности ($\cos\alpha = 0$), то поток вектора напряженности сквозь боковую поверхность цилиндра равен нулю, а полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания (площади оснований равны и для основания $E_n$ совпадает с $E$), т. е. равен $2ES$. Заряд, заключенный внутри построенной цилиндрической поверхности, равен $\sigma S$. Согласно теореме Гаусса (81.2), $2ES = \sigma S/\varepsilon_0$, откуда

$$E = \sigma/(2\varepsilon_0). \quad (82.1)$$

Из формулы (82.1) вытекает, что $E$ не зависит от длины цилиндра, т. е. напряженность поля на любых расстояниях одинакова по модулю, иные

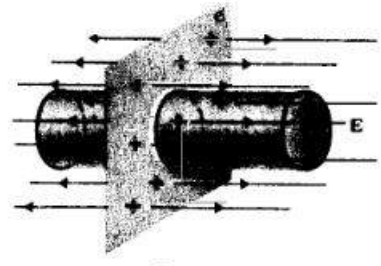



Рис. 126

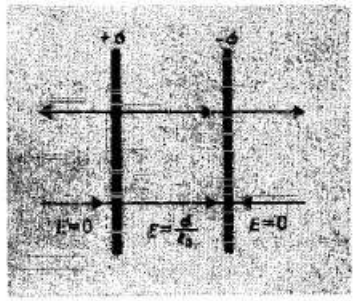



Рис. 127

ми словами, поле равномерно заряженной плоскости *однородно*.

**2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей** (рис. 127). Пусть плоскости заряжены равномерно разноименными зарядами с поверхностными плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$. Поле таких плоскостей найдем как суперпозицию полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности. На рисунке верхние стрелки соответствуют полю от положительно заряженной плоскости, нижние — от отрицательной плоскости. Слева и справа от плоскостей поля вычитаются (линии напряженности направлены навстречу друг другу), поэтому здесь напряженность поля $E=0$. В области между плоскостями $E=E_+ + E_-$ ($E_+$ и $E_-$ определяются по формуле (82.1)), поэтому результирующая напряженность

$$E=\sigma/\varepsilon_0. \qquad (82.2)$$

Таким образом, результирующая напряженность поля в области между плоскостями описывается формулой (82.2), а вне объема, ограниченного плоскостями, равна нулю.

**3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности.** Сферическая поверхность радиуса $R$ с общим зарядом $Q$ заряжена равномерно с **поверхностной плотностью** $+\sigma$. Благодаря равномерному распределению заряда по поверхности поле, создаваемое им, обладает сферической симметрией. Поэтому линии напряженности направлены радиально (рис. 128). Построим мысленно сферу радиуса $r$, имеющую общий центр с заряженной сферой. Если $r>R$, то внутрь поверхности попадает весь заряд $Q$, создающий рассматриваемое поле, и, по теореме Гаусса (81.2), $4\pi r^2 E=Q/\varepsilon_0$, откуда

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad (r\geqslant R). \qquad (82.3)$$

При $r>R$ поле убывает с расстоянием $r$ по такому же закону, как у точечного заряда. График зависимости $E$ от $r$ приведен на рис. 129. Если $r'<R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует ($E=0$).

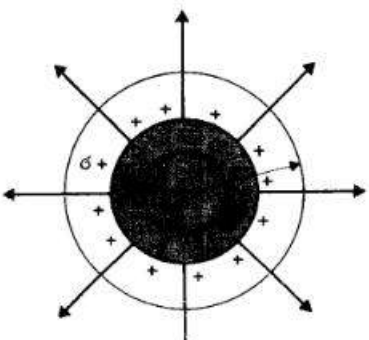



Рис. 128

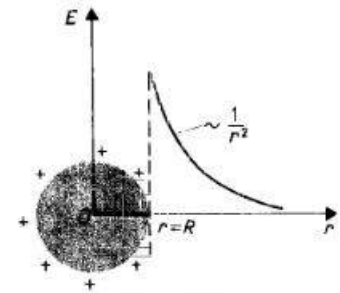



Рис. 129

**4. Поле объемно заряженного шара.** Шар радиуса $R$ с общим зарядом $Q$ заряжен равномерно с **объемной плотностью** $\rho$ ($\rho=\frac{dQ}{dV}$ — заряд, приходящийся на единицу объема). Учитывая соображения симметрии (см. п. 3), можно показать, что для напряженности поля вне шара получится тот же результат, что и в предыдущем случае (см. (82.3)). Внутри же шара напряженность поля будет другая. Сфера радиуса $r'<R$ охватывает заряд $Q'=\frac{4}{3}\pi r'^3\rho$. Поэтому, согласно теореме Гаусса (81.2), $4\pi r'^2 E=Q'/\varepsilon_0=\frac{4}{3}\pi r'^3\rho/\varepsilon_0$. Учитывая, что $\rho=Q/(\frac{4}{3}\pi R^3)$, получим

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r' \quad (r'\leqslant R). \qquad (82.4)$$

Таким образом, напряженность поля вне равномерно заряженного шара описывается формулой (82.3), а внутри его изменяется линейно с расстоянием $r'$ согласно выражению (82.4). График зависимости $E$ от $r$ приведен на рис. 130.

**5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити).** Бесконечный цилиндр

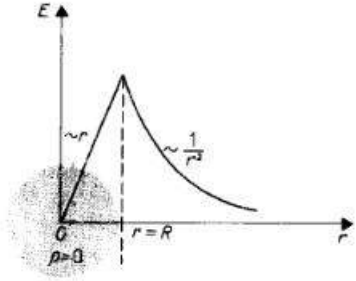



Рис. 130

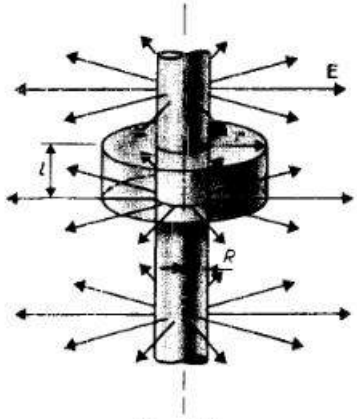



Рис. 131

радиуса $R$ (рис. 131) заряжен равномерно с **линейной плотностью** $\tau$ ($\tau=\frac{dQ}{dl}$ — заряд, приходящийся на единицу длины). Из соображений симметрии следует, что линии напряженности будут направлены по радиусам круговых сечений цилиндра с одинаковой густотой во все стороны относительно оси цилиндра. В качестве замкнутой поверхности мысленно построим коаксиальный с заряженным цилиндр радиуса $r$ и высотой $l$. Поток вектора $\mathbf{E}$ сквозь торцы коаксиального цилиндра равен нулю (торцы параллельны линиям напряженности), а сквозь боковую поверхность $-2\pi rlE$. По теореме Гаусса (81.2), при $r>R$ $2\pi rlE=\tau l/\varepsilon_0$, откуда

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}\quad (r\geqslant R). \qquad (82.5)$$

Если $r<R$, то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области $E=0$. Таким образом, напряженность поля вне равномерно заряженного бесконечного цилиндра определяется выражением (82.5), внутри же его поле отсутствует.

## § 83. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

Если в электростатическом поле точечного заряда $Q$ из точки *1* в точку *2* вдоль произвольной траектории (рис. 132) перемещается другой точечный заряд $Q_0$, то сила, приложенная к заряду, совершает работу. Работа силы $\mathbf{F}$ на элементарном перемещении $d\mathbf{l}$ равна

$$dA=\mathbf{F}\,d\mathbf{l}=$$

$$=F\,dl\cos\alpha=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r^2}\,Dl\cdot\cos\alpha.$$

Так как $dl\cos\alpha=dr$, то

$$dA=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r^2}\,dr.$$

Работа при перемещении заряда $Q_0$ из точки *1* в точку *2*

$$A_{12}=\int_{r_1}^{r_2}dA=\frac{QQ_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{QQ_0}{r_1}-\frac{QQ_0}{r_2}\right) \qquad (83.1)$$

не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной *1* и конечной *2* точек. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является **потенциальным**, а электростатические силы — **консервативными** (см. § 12).

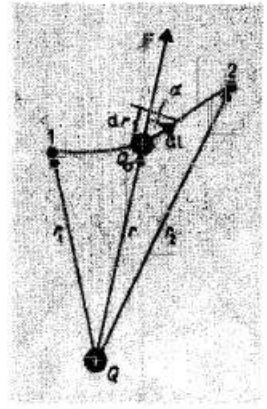



Рис. 132

Из формулы (83.1) следует, что работа, совершаемая при перемещении электрического заряда во внешнем электростатическом поле по любому замкнутому пути $L$, равна нулю, т. е.

$$\oint_L dA = 0. \qquad (83.2)$$

Если в качестве заряда, переносимого в электростатическом поле, взять единичный точечный положительный заряд, то элементарная работа сил поля на пути $d\mathbf{l}$ равна $\mathbf{E}\,d\mathbf{l} = E_l\,dl$, где $E_l = E\cos\alpha$ — проекция вектора $\mathbf{E}$ на направление элементарного перемещения. Тогда формулу (83.2) можно записать в виде

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \oint_L E_l\,dl = 0. \qquad (83.3)$$

Интеграл $\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \oint_L E_l\,dl$ называется **циркуляцией вектора напряженности.** Следовательно, циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Силовое поле, обладающее свойством (83.3), называется **потенциальным.** Из обращения в нуль циркуляции вектора $\mathbf{E}$ следует, что линии напряженности электростатического поля не могут быть замкнутыми, они начинаются и кончаются на зарядах (соответственно на положительных или отрицательных) или же уходят в бесконечность.

Формула (83.3) справедлива только для электростатического поля. В дальнейшем будет показано, что для поля движущихся зарядов условие (83.3) не выполняется (для него циркуляция вектора напряженности отлична от нуля).

## § 84. Потенциал электростатического поля

Тело, находящееся в потенциальном поле сил (а электростатическое поле является потенциальным), обладает потенциальной энергией, за счет которой силами поля совершается работа (см. § 12). Как известно (см. (12.2)), работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии. Поэтому работу (83.1) сил электростатического поля можно представить как разность потенциальных энергий, которыми обладает точечный заряд $Q_0$ в начальной и конечной точках поля заряда $Q$:

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r_2} = U_1 - U_2, \qquad (84.1)$$

откуда следует, что потенциальная энергия заряда $Q_0$ в поле заряда $Q$ равна

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r} + C.$$

Она, как и в механике, определяется неоднозначно, а с точностью до произвольной постоянной $C$. Если считать, что при удалении заряда в бесконечность ($r \to \infty$) потенциальная энергия обращается в нуль ($U = 0$), то $C = 0$ и потенциальная энергия заряда $Q_0$, находящегося в поле заряда $Q$ на расстоянии $r$ от него, равна

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r}. \qquad (84.2)$$

Для одноименных зарядов $Q_0 Q > 0$ и потенциальная энергия их взаимодействия (отталкивания) положительна, для разноименных зарядов $Q_0 Q < 0$ и потенциальная энергия их взаимодействия (притяжения) отрицательна.

Если поле создается системой $n$ точечных зарядов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, то работа электростатических сил, совершаемая над зарядом $Q_0$, равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности. Поэтому потенциальная энергия $U$ заряда $Q_0$, находящегося в этом поле, равна сумме его потенциальных энергий $U_i$, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = Q_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}. \qquad (84.3)$$

Из формул (84.2) и (84.3) вытекает, что отношение $U/Q_0$ не зависит от $Q_0$ и является поэтому *энергетической характеристикой электростатического поля*, называемой потенциалом:

$$\varphi = U/Q_0. \qquad (84.4)$$

**Потенциал** $\varphi$ в какой-либо точке электростатического поля есть физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.

Из формул (84.4) и (84.2) следует, что потенциал поля, создаваемого точечным зарядом $Q$, равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}. \qquad (84.5)$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда $Q_0$ из точки *1* в точку *2* (см. (84.1), (84.4), (84.5)), может быть представлена как

$$A_{12} = U_1 - U_2 = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (84.6)$$

т. е. равна произведению перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках. **Разность потенциалов** двух точек *1* и *2* в электростатическом поле определяется работой, совершаемой силами поля, при перемещении единичного положительного заряда из точки *1* в точку *2*.

Работа сил поля при перемещении заряда $Q_0$ из точки *1* в точку *2* может быть записана также в виде

$$A_{12} = \int_1^2 Q_0 \mathbf{E}\, d\mathbf{l}. \qquad (84.7)$$

Приравняв (84.6) и (84.7), придем к выражению для разности потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = \int_1^2 E_l\, dl, \qquad (84.8)$$

где интегрирование можно производить вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения.

Если перемещать заряд $Q_0$ из произвольной точки за пределы поля, т. е. в бесконечность, где по условию потенциал равен нулю, то работа сил электростатического поля, согласно (84.6),

$$A_\infty = Q_0\varphi,$$

откуда

$$\varphi = A_\infty / Q_0. \qquad (84.9)$$

Таким образом, **потенциал** — физическая величина, определяемая работой по перемещению единичного положительного заряда при удалении его из данной точки в бесконечность. Эта работа численно равна работе, совершаемой внешними силами (против сил электростатического поля) по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля.

Из выражения (84.4) следует, что единица потенциала — **вольт** (В): 1 В есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж (1 В = 1 Дж/Кл). Учитывая размерность вольта, можно показать, что введенная в § 79 единица напряженности электростатического поля действительно равна 1 В/м: 1 Н/Кл = = 1 Н · м/(Кл · м) = 1 Дж/(Кл · м) = = 1 В/м.

Из формул (84.3) и (84.4) вытекает, что если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен *алгебраической* сумме потенциалов полей всех этих зарядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i}.$$

## § 85. Напряженность как градиент потенциала. Эквипотенциальные поверхности

Найдем взаимосвязь между напряженностью электростатического поля, являющейся его *силовой характеристикой*, и потенциалом — *энергетической характеристикой поля*.

Работа по перемещению *единичного* точечного положительного заряда из одной точки в другую вдоль оси $x$ при условии, что точки расположены бесконечно близко друг к другу и $x_2 - x_1 = dx$, равна $E_x dx$. Та же работа равна $\varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi$. Приравняв оба выражения, можем записать

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad (85.1)$$

где символ частной производной подчеркивает, что дифференцирование производит-

ся только по $x$. Повторив аналогичные рассуждения для осей $y$ и $z$, можем найти вектор $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right),$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы координатных осей $x$, $y$, $z$.

Из определения градиента (12.4) и (12.6) следует, что

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \text{ или } \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (85.2)$$

т. е. напряженность $\mathbf{E}$ поля равна градиенту потенциала со знаком минус. Знак минус определяется тем, что вектор напряженности $\mathbf{E}$ поля направлен в *сторону убывания* потенциала.

Для графического изображения распределения потенциала электростатического поля, как и в случае поля тяготения (см. § 25), пользуются **эквипотенциальными поверхностями** — поверхностями, во всех точках которых потенциал $\varphi$ имеет одно и то же значение.

Если поле создается точечным зарядом, то его потенциал, согласно (84.5), $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$. Таким образом, эквипотенциальные поверхности в данном случае — концентрические сферы. С другой стороны, линии напряженности в случае точечного заряда — радиальные прямые. Следовательно, линии напряженности в случае точечного заряда *перпендикулярны* эквипотенциальным поверхностям.

Линии напряженности *всегда нормальны* к эквипотенциальным поверхностям. Действительно, все точки эквипотенциальной поверхности имеют одинаковый потенциал, поэтому работа по перемещению заряда вдоль этой поверхности равна нулю, т. е. электростатические силы, действующие на заряд, *всегда* направлены по нормалям к эквипотенциальным поверхностям. Следовательно, вектор $\mathbf{E}$ *всегда нормален к эквипотенциальным поверхностям*, а поэтому линии вектора $\mathbf{E}$ ортогональны этим поверхностям.

Эквипотенциальных поверхностей вокруг каждого заряда и каждой системы

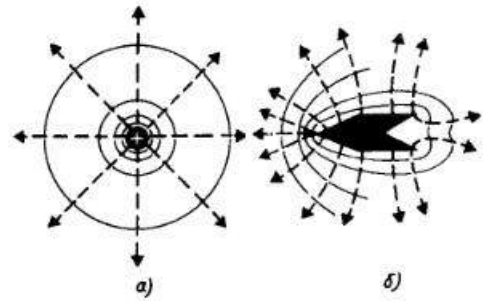



Рис. 133

зарядов можно провести бесчисленное множество. Однако их обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между любыми двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряженность поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряженность поля больше.

Итак, зная расположение линий напряженности электростатического поля, можно построить эквипотенциальные поверхности и, наоборот, по известному расположению эквипотенциальных поверхностей можно определить в каждой точке поля величину и направление напряженности поля. На рис. 133 для примера показан вид линий напряженности (штриховые линии) и эквипотенциальных поверхностей (сплошные линии) полей положительного точечного заряда (*а*) и заряженного металлического цилиндра, имеющего на одном конце выступ, а на другом — впадину (*б*).

## § 86. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля

Установленная в § 85 связь между напряженностью поля и потенциалом позволяет по известной напряженности поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками этого поля.

**1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости** определяется формулой (82.1): $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$, где $\sigma$ — поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях $x_1$ и $x_2$ от плоскости

(используем формулу (85.1)), равна

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{x_1}^{x_2} E\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,dx=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2-x_1).$$

**2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей** определяется формулой (82.2): $E=\sigma/\varepsilon_0$, где $\sigma$ — поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов между плоскостями, расстояние между которыми равно $d$ (см. формулу (85.1)), равна

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_0^d E\,dx=\int_0^d\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dx=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d. \quad (86.1)$$

**3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности** радиуса $R$ с общим зарядом $Q$ *вне* сферы ($r>R$) вычисляется по (82.3): $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$. Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях $r_1$ и $r_2$ от центра сферы ($r_1>R$, $r_2>R$), равна

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{r_1}^{r_2} E\,dr=\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr=$$
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right). \quad (86.2)$$

Если принять $r_1=r$ и $r_2=\infty$, то потенциал поля вне сферической поверхности, согласно формуле (86.2), задается выражением

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

(ср. с формулой (84.5)). Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

График зависимости $\varphi$ от $r$ приведен на рис. 134.

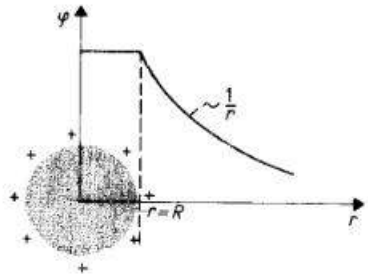



Рис. 134

**4. Поле объемно заряженного шара** радиуса $R$ с общим зарядом $Q$ *вне* шара ($r>R$) вычисляется по формуле (82.3), поэтому разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях $r_1$ и $r_2$ от центра шара ($r_1>R$, $r_2>R$), определяется формулой (86.2). В любой точке, лежащей *внутри* шара на расстоянии $r'$ от его центра ($r'<R$), напряженность определяется выражением (82.4): $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r'$. Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях $r_1'$ и $r_2'$ от центра шара ($r_1'<R$, $r_2'<R$), равна

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{r_1'}^{r_2'} E\,dr=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(r_2'^2-r_1'^2\right).$$

**5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра** радиуса $R$, заряженного с линейной плотностью $\tau$, *вне* цилиндра ($r>R$) определяется формулой (82.5): $E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}$. Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях $r_1$ и $r_2$ от оси заряженного цилиндра ($r_1>R$, $r_2>R$), равна

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{r_1}^{r_2} E\,dr=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}=$$
$$=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}. \quad (86.3)$$

## § 87. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков

Диэлектрик (как и всякое вещество) состоит из атомов и молекул. Так как положительный заряд всех ядер молекулы равен суммарному заряду электронов, то молекула в целом электрически нейтральна. Если заменить положительные заряды ядер молекул суммарным зарядом $+Q$, находящемся в центре «тяжести» положительных зарядов, а заряд всех электронов — суммарным отрицательным зарядом $-Q$, находящемся в центре «тяжести» отрицательных зарядов, то молекулу можно рассматривать как электрический диполь с электрическим моментом, определенным формулой (80.3).

Первую группу диэлектриков ($N_2$, $H_2$, $O_2$, $CO_2$, $CH_4$, ...) составляют вещества,

молекулы которых имеют симметричное строение, т. е. центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля совпадают и, следовательно, дипольный момент молекулы **p** равен нулю. **Молекулы** таких диэлектриков называются **неполярными**. Под действием внешнего электрического поля заряды неполярных молекул смещаются в противоположные стороны (положительные по полю, отрицательные против поля) и молекула приобретает дипольный момент.

Вторую группу диэлектриков ($H_2O$, $NH_3$, $SO_2$, CO, ...) составляют вещества, молекулы которых имеют асимметричное строение, т. е. центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Таким образом, эти молекулы в отсутствие внешнего электрического поля обладают дипольным моментом. **Молекулы** таких диэлектриков называются **полярными**. При отсутствии внешнего поля, однако, дипольные моменты полярных молекул вследствие теплового движения ориентированы в пространстве хаотично и их результирующий момент равен нулю. Если такой диэлектрик поместить во внешнее поле, то силы этого поля будут стремиться повернуть диполи вдоль поля и возникает отличный от нуля результирующий момент.

Третью группу диэлектриков (NaCl, KCl, KBr,...) составляют вещества, молекулы которых имеют ионное строение. Ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чередованием ионов разных знаков. В этих кристаллах нельзя выделить отдельные молекулы, а рассматривать их можно как систему двух вдвинутых одна в другую ионных подрешеток. При наложении на ионный кристалл электрического поля происходит некоторая деформация кристаллической решетки или относительное смещение подрешеток, приводящее к возникновению дипольных моментов.

Таким образом, внесение всех трех групп диэлектриков во внешнее электрическое поле приводит к возникновению отличного от нуля результирующего электрического момента диэлектрика, или, иными словами, к поляризации диэлектрика. **Поляризацией** диэлектрика называется процесс ориентации диполей или появления под воздействием электрического поля ориентированных по полю диполей.

Соответственно трем группам диэлектриков различают три вида поляризации:

**электронная, или деформационная, поляризация** диэлектрика с неполярными молекулами, заключающаяся в возникновении у атомов индуцированного дипольного момента за счет деформации электронных орбит;

**ориентационная, или дипольная, поляризация** диэлектрика с полярными молекулами, заключающаяся в ориентации имеющихся дипольных моментов молекул по полю. Естественно, что тепловое движение препятствует полной ориентации молекул, но в результате совместного действия обоих факторов (электрическое поле и тепловое движение) возникает преимущественная ориентация дипольных моментов молекул по полю. Эта ориентация тем сильнее, чем больше напряженность электрического поля и ниже температура;

**ионная поляризация** диэлектриков с ионными кристаллическими решетками, заключающаяся в смещении подрешетки положительных ионов вдоль поля, а отрицательных — против поля, приводящем к возникновению дипольных моментов.

## § 88. Поляризованность. Напряженность поля в диэлектрике

При помещении диэлектрика во внешнее электростатическое поле он поляризуется, т. е. приобретает отличный от нуля дипольный момент $\mathbf{p}_V = \sum_i \mathbf{p}_i$, где $\mathbf{p}_i$ — дипольный момент одной молекулы. Для количественного описания поляризации диэлектрика пользуются векторной величиной — **поляризованностью**, определяемой как дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_V / V = \sum_i \mathbf{p}_i / V. \qquad (88.1)$$

Из опыта следует, что для большого класса диэлектриков (за исключением сег-

нетоэлектриков, см. § 91) поляризованность **P** линейно зависит от напряженности поля **E**. Если диэлектрик изотропный и **E** не слишком велико, то

$$\mathbf{P}=\varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}, \qquad (88.2)$$

где $\varkappa$ — **диэлектрическая восприимчивость вещества**, характеризующая свойства диэлектрика; $\varkappa$ — величина безразмерная; притом всегда $\varkappa>0$ и для большинства диэлектриков (твердых и жидких) составляет несколько единиц (хотя, например, для спирта $\varkappa\approx 25$, для воды $\varkappa=80$).

Для установления количественных закономерностей поля в диэлектрике внесем в однородное внешнее электростатическое поле $\mathbf{E}_0$ (создается двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями) пластинку из однородного диэлектрика, расположив ее так, как показано на рис. 135. Под действием поля диэлектрик поляризуется, т. е. происходит смещение зарядов: положительные смещаются по полю, отрицательные — против поля. В результате этого на правой грани диэлектрика, обращенного к отрицательной плоскости, будет избыток положительного заряда с поверхностной плотностью $+\sigma'$, на левой — отрицательного заряда с поверхностной плотностью $-\sigma'$. Эти нескомпенсированные заряды, появляющиеся в результате поляризации диэлектрика, называются **связанными.** Так как их поверхностная плотность $\sigma'$ меньше плотности $\sigma$ свободных зарядов плоскостей, то не все поле **E** компенсируется полем зарядов диэлектрика: часть линий напряженности пройдет сквозь диэлектрик, другая же часть — обрывается на связанных зарядах. Следовательно, поляризация диэлектрика вызывает уменьшение в нем поля по сравнению с первоначальным внешним полем. Вне диэлектрика $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0$.

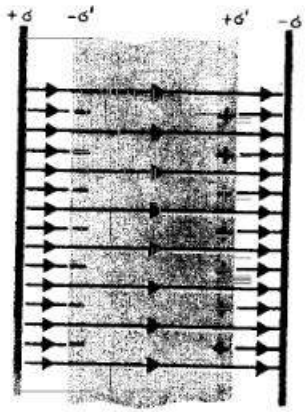


Рис. 135

Таким образом, появление связанных зарядов приводит к возникновению дополнительного электрического поля $\mathbf{E}'$ (поля, создаваемого *связанными* зарядами), которое направлено против внешнего поля $\mathbf{E}_0$ (поля, создаваемого *свободными* зарядами) и ослабляет его. Результирующее поле внутри диэлектрика

$$E=E_0-E'.$$

Поле $E'=\sigma'/\varepsilon_0$ (поле, созданное двумя бесконечными заряженными плоскостями; см. формулу (82.2)), поэтому

$$E=E_0-\sigma'/\varepsilon_0. \qquad (88.3)$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma'$. По (88.1), полный дипольный момент пластинки диэлектрика $p_V=PV=PSd$, где $S$ — площадь грани пластинки, $d$ — ее толщина. С другой стороны, полный дипольный момент, согласно (80.3), равен произведению связанного заряда каждой грани $Q'=\sigma'S$ на расстояние $d$ между ними, т. е. $p_V=\sigma'Sd$. Таким образом,

$$PSd=\sigma'Sd,$$

или

$$\sigma'=P, \qquad (88.4)$$

т. е. поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma'$ равна поляризованности $P$.

Подставив в (88.3) выражения (88.4) и (88.2), получим

$$E=E_0-\varkappa E,$$

откуда напряженность результирующего поля внутри диэлектрика равна

$$E=E_0/(1+\varkappa)=E_0/\varepsilon. \qquad (88.5)$$

Безразмерная величина

$$\varepsilon=1+\varkappa \qquad (88.6)$$

называется **диэлектрической проницаемостью среды.** Сравнивая (88.5) и (88.6), видим, что $\varepsilon$ показывает, во сколько раз поле ослабляется диэлектриком, характеризуя количественно свойство диэлектрика поляризоваться в электрическом поле.

## § 89. Электрическое смещение. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

Напряженность электростатического поля, согласно (88.5), зависит от свойств среды: в однородной изотропной среде напряженность поля $E$ обратно пропорциональна $\varepsilon$. Вектор напряженности $\mathbf{E}$, переходя через границу диэлектриков, претерпевает скачкообразное изменение, создавая тем самым неудобства при расчете электростатических полей. Поэтому оказалось необходимым помимо вектора напряженности характеризовать поле еще **вектором электрического смещения,** который для электрически изотропной среды по определению равен

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}. \qquad (89.1)$$

Используя формулы (88.6) и (88.2), вектор электрического смещения можно выразить как

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}. \qquad (89.2)$$

Единица электрического смещения — кулон на метр в квадрате (Кл/м$^2$).

Рассмотрим, с чем можно связать вектор электрического смещения. Связанные заряды появляются в диэлектрике при наличии внешнего электростатического поля, создаваемого системой свободных электрических зарядов, т. е. в диэлектрике на электростатическое поле свободных зарядов накладывается дополнительное поле связанных зарядов. *Результирующее поле* в диэлектрике описывается вектором напряженности $\mathbf{E}$, и потому он зависит от свойств диэлектрика. Вектором $\mathbf{D}$ описывается электростатическое поле, создаваемое *свободными зарядами.* Связанные заряды, возникающие в диэлектрике, могут вызвать, однако, перераспределение свободных зарядов, создающих поле. Поэтому вектор $\mathbf{D}$ характеризует электростатическое поле, создаваемое *свободными зарядами* (т. е. в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется *при наличии диэлектрика.*

Аналогично, как и поле $\mathbf{E}$, поле $\mathbf{D}$ изображается с помощью **линий электрического смещения,** направление и густота которых определяются точно так же, как и для линий напряженности (см. § 79).

*Линии вектора* $\mathbf{E}$ *могут начинаться и заканчиваться на любых зарядах — свободных и связанных, в то время как линии вектора* $\mathbf{D}$ *— только на свободных зарядах.* Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора $\mathbf{D}$ проходят не прерываясь.

Для произвольной *замкнутой* поверхности $S$ поток вектора $\mathbf{D}$ сквозь эту поверхность

$$\Phi_D=\oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S}=\oint_S D_n\,dS.$$

**Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике:**

$$\oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S}=\oint_S D_n\,dS=\sum_{i=1}^{n} Q_i, \qquad (89.3)$$

т. е. поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности *свободных* электрических зарядов. В такой форме теорема Гаусса справедлива для электростатического поля как для однородной и изотропной, так и для неоднородной и анизотропной сред.

Для вакуума $D_n=\varepsilon_0E_n$ ($\varepsilon=1$), тогда поток вектора напряженности $\mathbf{E}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность (ср. с (81.2)) равен

$$\oint_S \varepsilon_0E_n\,dS=\sum_{i=1}^{n} Q_i.$$

Так как источниками поля $\mathbf{E}$ в среде являются как свободные, так и связанные заряды, то теорему Гаусса (81.2) для поля $\mathbf{E}$ в самом общем виде можно запи-

сать как

$$\oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \oint_S \varepsilon_0 E_n\, dS = \sum_{i=1}^{n} Q_i + \sum_{i=1}^{k} Q_{i\,св},$$

где $\sum_{i=1}^{n} Q_i$ и $\sum_{i=1}^{k} Q_{i\,св}$ — соответственно алгебраические суммы свободных и связанных зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью $S$. Однако эта формула неприемлема для описания поля $\mathbf{E}$ в диэлектрике, так как она выражает свойства неизвестного поля $\mathbf{E}$ через связанные заряды, которые, в свою очередь, определяются им же. Это еще раз доказывает целесообразность введения вектора электрического смещения.

## § 90. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред

Рассмотрим связь между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков (диэлектрические проницаемости которых $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$) *при отсутствии на границе свободных зарядов*. Построим вблизи границы раздела диэлектриков *1* и *2* небольшой замкнутый прямоугольный контур *ABCDA* длины $l$, ориентировав его так, как показано на рис. 136. Согласно теореме (83.3) о циркуляции вектора $\mathbf{E}$,

$$\oint_{ABCDA} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0,$$

откуда

$$E_{2\tau} l - E_{1\tau} l = 0$$

(знаки интегралов по *AB* и *CD* разные, так как пути интегрирования противоположны, а интегралы по участкам *BC* и *DA* ничтожно малы). Поэтому

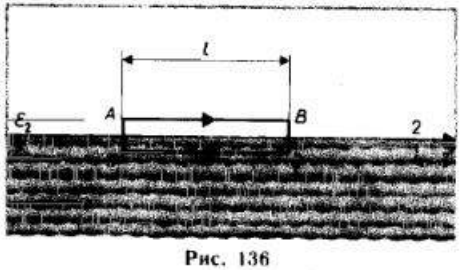


Рис. 136

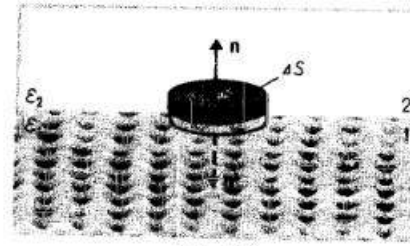


Рис. 137

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \qquad (90.1)$$

Заменив, согласно (89.1), проекции вектора $\mathbf{E}$ проекциями вектора $\mathbf{D}$, деленными на $\varepsilon_0\varepsilon$, получим

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \qquad (90.2)$$

На границе раздела двух диэлектриков (рис. 137) построим прямой цилиндр ничтожной высоты, одно основание которого находится в первом диэлектрике, другое — во втором. Основания $\Delta S$ настолько малы, что в пределах каждого из них вектор $\mathbf{D}$ одинаков. Согласно теореме Гаусса (89.3),

$$D_{2n}\Delta S - D_{1n}\Delta S = 0$$

(нормали $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ к основаниям цилиндра направлены противоположно). Поэтому

$$D_{1n} = D_{2n}. \qquad (90.3)$$

Заменив, согласно (89.1), проекции вектора $\mathbf{D}$ проекциями вектора $\mathbf{E}$, умноженными на $\varepsilon_0\varepsilon$, получим

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \qquad (90.4)$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух диэлектрических сред тангенциальная составляющая вектора $\mathbf{E}$ ($E_\tau$) и нормальная составляющая вектора $\mathbf{D}$ ($D_n$) изменяются непрерывно (не претерпевают скачка), а нормальная составляющая вектора $\mathbf{E}$ ($E_n$) и тангенциальная составляющая вектора $\mathbf{D}$ ($D_\tau$) претерпевают скачок.

Из условий (90.1) — (90.4) для составляющих векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ следует, что линии этих векторов испытывают излом (преломляются). Найдем связь между уг-

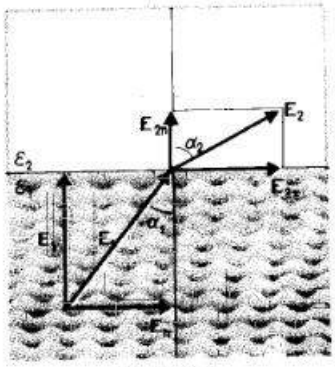



Рис. 138

лами $\alpha_1$ и $\alpha_2$ (на рис. 138 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$). Согласно (90.1) и (90.4), $E_{2\tau} = E_{1\tau}$ и $\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}$. Разложим векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ у границы раздела на тангенциальные и нормальные составляющие. Из рис. 138 следует, что

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{E_{2\tau}/E_{2n}}{E_{1\tau}/E_{1n}}.$$

Учитывая записанные выше условия, получим закон преломления линий напряженности $\mathbf{E}$ (а значит, и линий смещения $\mathbf{D}$)

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Эта формула показывает, что, входя в диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью, линии $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ удаляются от нормали.

## § 91. Сегнетоэлектрики

**Сегнетоэлектрики** — диэлектрики, обладающие в определенном интервале температур спонтанной (самопроизвольной) поляризованностью, т. е. поляризованностью в отсутствие внешнего электрического поля. К сегнетоэлектрикам относятся, например, детально изученные советскими физиками И. В. Курчатовым (1903—1960) и П. П. Кобеко (1897—1954) сегнетова соль $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ (от нее и получили свое название сегнетоэлектрики) и титанат бария $BaTiO_3$.

При отсутствии внешнего электрического поля сегнетоэлектрик представляет собой как бы мозаику из **доменов** — областей с различными направлениями поляризованности. Это схематически показано на примере титаната бария (рис. 139), где стрелки и знаки ⊙, ⊕ указывают направление вектора $\mathbf{P}$. Так как в смежных доменах эти направления различны, то в целом дипольный момент диэлектрика равен нулю. При внесении сегнетоэлектрика во внешнее поле происходит переориентация дипольных моментов доменов по полю, а возникшее при этом суммарное электрическое поле доменов будет поддерживать их некоторую ориентацию и после прекращения действия внешнего поля. Поэтому сегнетоэлектрики имеют аномально большие значения диэлектрической проницаемости (для сегнетовой соли, например, $\varepsilon_{max} \approx 10^4$).

Сегнетоэлектрические свойства сильно зависят от температуры. Для каждого сегнетоэлектрика имеется определенная температура, выше которой его необычные свойства исчезают и он становится обычным диэлектриком. Эта температура называется **точкой Кюри** (в честь французского физика Пьера Кюри (1859—1906)). Как правило, сегнетоэлектрики имеют только одну точку Кюри; исключение составляют лишь сегнетова соль (−18 и +24 °С) и изоморфные с нею соединения. В сегнетоэлектриках вблизи точки Кюри наблюдается также резкое возрастание теплоемкости вещества. Превращение сегнетоэлектриков в обычный диэлектрик, происходящее в точке Кюри, сопровождается фазовым переходом II рода (см. § 75).

Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon$ (а следовательно, и диэлектрическая восприимчивость $\varkappa$) сегнетоэлектриков зависит от напряженности $\mathbf{E}$ поля в веществе, а для других диэлектриков эти величины являются характеристиками вещества.



Рис. 139

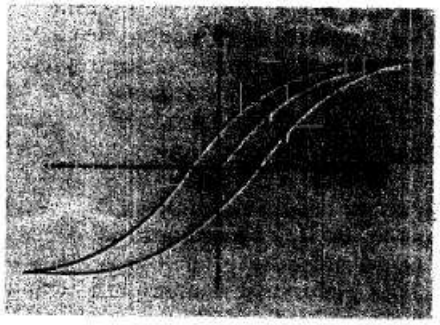


Рис. 140

Для сегнетоэлектриков формула (88.2) не соблюдается; для них связь между векторами поляризованности **(P)** и напряженности **(E)** *нелинейная* и зависит от значений **E** в предшествующие моменты времени. В сегнетоэлектриках наблюдается **явление диэлектрического гистерезиса** («запаздывания»). Как видно из рис. 140, с увеличением напряженности $E$ внешнего электрического поля поляризованность $P$ растет, достигая насыщения (кривая *1*). Уменьшение $P$ с уменьшением $E$ происходит по кривой *2*, и при $E=0$ сегнетоэлектрик сохраняет **остаточную поляризованность** $P_0$, т. е. сегнетоэлектрик остается поляризованным в отсутствие внешнего электрического поля. Чтобы уничтожить остаточную поляризованность, надо приложить электрическое поле обратного направления ($-E_c$). Величина $E_c$ называется **коэрцитивной силой** (от лат. coercitio — удерживание). Если далее $E$ изменять, то $P$ изменяется по кривой *3* **петли гистерезиса**.

Интенсивному изучению сегнетоэлектриков послужило открытие советским физиком Б. М. Вулом (1903—1985) аномальных диэлектрических свойств титаната бария. Титанат бария из-за его химической устойчивости и высокой механической прочности, а также из-за сохранения сегнетоэлектрических свойств в широком температурном интервале нашел большое научно-техническое применение (например, в качестве генератора и приемника ультразвуковых волн). В настоящее время известно более сотни сегнетоэлектриков, не считая их твердых растворов. Сегнетоэлектрики широко применяются также в качестве материалов с большими значениями $\varepsilon$ (например, в конденсаторах).

Следует упомянуть еще о **пьезоэлектриках** — кристаллических веществах, в которых при сжатии или растяжении в определенных направлениях возникает электрическая поляризация даже в отсутствие внешнего электрического поля **(прямой пьезоэффект)**. Следствием прямого пьезоэффекта является **обратный пьезоэффект** — появление механической деформации под действием электрического поля. У некоторых пьезоэлектриков решетка положительных ионов в состоянии термодинамического равновесия смещена относительно решетки отрицательных ионов, в результате чего они оказываются электрически поляризованными даже без внешнего электрического поля. Такие кристаллы называются **пироэлектриками**. Еще существуют **электреты** — диэлектрики, длительно сохраняющие поляризованное состояние после снятия внешнего электрического поля (электрические аналоги постоянных магнитов). Эти группы веществ находят широкое применение в технике и бытовых устройствах.

## § 92. Проводники в электростатическом поле

Если поместить проводник во внешнее электростатическое поле или его зарядить, то на заряды проводника будет действовать электростатическое поле, в результате чего они начнут перемещаться. Перемещение зарядов (ток) продолжается до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль. Это происходит в течение очень короткого времени. В самом деле, если бы поле не было равно нулю, то в проводнике возникло бы упорядоченное движение зарядов без затраты энергии от внешнего источника, что противоречит закону сохранения энергии. Итак, напряженность поля во всех точках внутри проводника равна нулю:

$$\mathbf{E}=0.$$

Отсутствие поля внутри проводника означает, согласно (85.2), что потенциал во всех точках внутри проводника постоянен ($\varphi=\text{const}$), т. е. поверхность проводника в электростатическом поле является *эквипотенциальной* (см. § 85). Отсюда же

следует, что вектор напряженности поля на внешней поверхности проводника направлен по нормали к каждой точке его поверхности. Если бы это было не так, то под действием касательной составляющей **E** заряды начали бы по поверхности проводника перемещаться, что, в свою очередь, противоречило бы равновесному распределению зарядов.

Если проводнику сообщить некоторый заряд $Q$, то нескомпенсированные заряды располагаются *только на поверхности* проводника. Это следует непосредственно из теоремы Гаусса (89.3), согласно которой заряд $Q$, находящийся внутри проводника в некотором объеме, ограниченном произвольной замкнутой поверхностью, равен

$$Q=\oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S}=\oint_S D_n\,dS=0,$$

так как во всех точках внутри поверхности $D=0$.

Найдем взаимосвязь между напряженностью $E$ поля вблизи поверхности заряженного проводника и поверхностной плотностью $\sigma$ зарядов на его поверхности. Для этого применим теорему Гаусса к бесконечно малому цилиндру с основаниями $\Delta S$, пересекающему границу проводник — диэлектрик. Ось цилиндра ориентирована вдоль вектора **E** (рис. 141). Поток вектора электрического смещения через внутреннюю часть цилиндрической поверхности равен нулю, так как внутри проводника $\mathbf{E}_1$ (а следовательно, и $\mathbf{D}_1$) равен нулю, поэтому поток вектора **D** сквозь замкнутую цилиндрическую поверхность определяется только потоком сквозь наружное основание цилиндра. Согласно теореме Гаусса (89.3), этот поток ($D\Delta S$) равен сумме зарядов ($Q=\sigma\Delta S$), охватываемых поверхностью: $D\Delta S=\sigma\Delta S$, т. е.

$$D=\sigma \qquad (92.1)$$

или

$$E=\sigma/(\varepsilon_0\varepsilon), \qquad (92.2)$$

где $\varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник.

Таким образом, напряженность электростатического поля у поверхности проводника определяется поверхностной плотностью зарядов. Можно показать, что соотношение (92.2) задает напряженность электростатического поля вблизи поверхности проводника *любой формы*.

Если во внешнее электростатическое поле внести нейтральный проводник, то свободные заряды (электроны, ионы) будут перемещаться: положительные — по полю, отрицательные — против поля (рис. 142, *а*). На одном конце проводника будет скапливаться избыток положительного заряда, на другом — избыток отрицательного. Эти заряды называются **индуцированными.** Процесс будет происходить до тех пор, пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника — перпендикулярными его поверхности (рис. 142, *б*). Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электростатическое поле, разрывает часть линий напряженности; они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных. Индуцированные заряды распределяются на внешней поверхности проводника. Явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике во внешнем электростатическом поле называется **электростатической индукцией.**

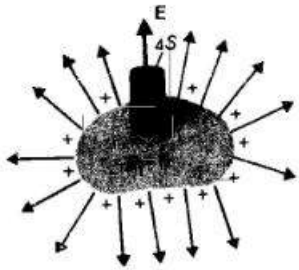


Рис. 141

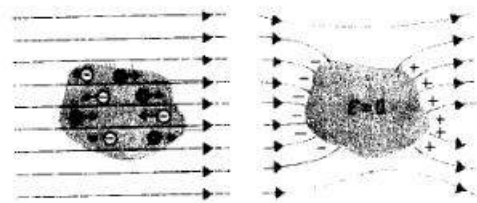


Рис. 142

Из рис. 142, *б* следует, что индуцированные заряды появляются на проводнике вследствие *смещения* их под действием поля, т. е. $\sigma$ является поверхностной плотностью смещенных зарядов. По (92.1), электрическое смещение $D$ вблизи проводника численно равно поверхностной плотности смещенных зарядов. Поэтому вектор **D** получил название вектора электрического смещения.

Так как в состоянии равновесия внутри проводника заряды отсутствуют, то создание внутри него полости не повлияет на конфигурацию расположения зарядов и тем самым на электростатическое поле. Следовательно, внутри полости поле будет отсутствовать. Если теперь этот проводник с полостью заземлить, то потенциал во всех точках полости будет нулевым, т. е. полость полностью изолирована от влияния внешних электростатических полей. На этом основана **электростатическая защита** — экранирование тел, например измерительных приборов, от влияния внешних электростатических полей. Вместо сплошного проводника для защиты может быть использована густая металлическая сетка, которая, кстати, является эффективной при наличии не только постоянных, но и переменных электрических полей.

Свойство зарядов располагаться на внешней поверхности проводника используется для устройства **электростатических генераторов,** предназначенных для накопления больших зарядов и достижения разности потенциалов в несколько миллионов вольт. Электростатический генератор, впервые изобретенный американским физиком Р. Ван-де-Граафом (1901—1967), состоит из шарообразного полого проводника *1* (рис. 143), укрепленного на изоляторах *2*. Движущаяся замкнутая лента *3* из прорезиненной ткани заряжается от источника напряжения с помощью системы остриев *4*, соединенных с одним из полюсов источника, второй полюс которого заземлен. Заземленная пластина *5* усиливает стекание зарядов с остриев на ленту. Другая система остриев *6* снимает заряды с ленты и передает их полому шару, и они переходят на его внешнюю

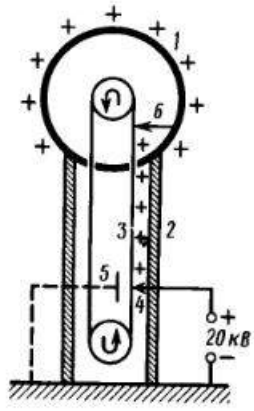



Рис. 143

поверхность. Таким образом, сфере передается постепенно большой заряд и удается достичь разности потенциалов в несколько миллионов вольт. Электростатические генераторы применяются в высоковольтных ускорителях заряженных частиц, а также в слаботочной высоковольтной технике.

## § 93. Электрическая емкость уединенного проводника

Рассмотрим **уединенный проводник,** т. е. проводник, который удален от других проводников, тел и зарядов. Его потенциал, согласно (84.5), прямо пропорционален заряду проводника. Из опыта следует, что разные проводники, будучи одинаково заряженными, принимают различные потенциалы. Поэтому для уединенного проводника можно записать

$$Q = C\varphi.$$

Величину

$$C = Q/\varphi \qquad (93.1)$$

называют **электроемкостью** (или просто **емкостью**) уединенного проводника. Емкость уединенного проводника определяется зарядом, сообщение которого проводнику изменяет его потенциал на единицу.

Емкость проводника зависит от его размеров и формы, но не зависит от материала, агрегатного состояния, формы и размеров полостей внутри проводника. Это связано с тем, что избыточные заряды

распределяются на внешней поверхности проводника. Емкость не зависит также ни от заряда проводника, ни от его потенциала. Сказанное не противоречит формуле (93.1), так как она лишь показывает, что емкость уединенного проводника прямо пропорциональна его заряду и обратно пропорциональна потенциалу.

Единица электроемкости — **фарад** (Ф): 1 Ф — емкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл.

Согласно (84.5), потенциал уединенного шара радиуса $R$, находящегося в однородной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$, равен

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon R}.$$

Используя формулу (93.1), получим, что емкость шара

$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon R. \qquad (93.2)$$

Отсюда следует, что емкостью в 1 Ф обладал бы уединенный шар, находящийся в вакууме и имеющий радиус $R=C/(4\pi\varepsilon_0)\approx 9\cdot 10^6$ км, что примерно в 1400 раз больше радиуса Земли (электроемкость Земли $C\approx 0{,}7$ мФ). Следовательно, фарад — очень большая величина, поэтому на практике используются дольные единицы — миллифарад (мФ), микрофарад (мкФ), нанофарад (нФ), пикофарад (пФ). Из формулы (93.2) вытекает также, что единица электрической постоянной $\varepsilon_0$ фарад на метр (Ф/м) (см. (78.3)).

## § 94. Конденсаторы

Как видно из § 93, для того чтобы проводник обладал большой емкостью, он должен иметь очень большие размеры. На практике, однако, необходимы устройства, обладающие способностью при малых размерах и небольших относительно окружающих тел потенциалах накапливать значительные по величине заряды, иными словами, обладать большой емкостью. Эти устройства получили название **конденсаторов.**

Если к заряженному проводнику приближать другие тела, то на них возникают индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды, причем ближайшими к наводящему заряду $Q$ будут заряды противоположного знака. Эти заряды, естественно, ослабляют поле, создаваемое зарядом $Q$, т. е. понижают потенциал проводника, что приводит (см. (93.1)) к повышению его электроемкости.

Конденсатор состоит из двух проводников (обкладок), разделенных диэлектриком. На емкость конденсатора не должны оказывать влияния окружающие тела, поэтому проводникам придают такую форму, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми зарядами, было сосредоточено в узком зазоре между обкладками конденсатора. Этому условию удовлетворяют (см. § 82): 1) две плоские пластины; 2) два коаксиальных цилиндра; 3) две концентрические сферы. Поэтому в зависимости от формы обкладок конденсаторы делятся на **плоские, цилиндрические** и **сферические.**

Так как поле сосредоточено внутри конденсатора, то линии напряженности начинаются на одной обкладке и кончаются на другой, поэтому свободные заряды, возникающие на разных обкладках, являются равными по модулю разноименными зарядами. Под **емкостью конденсатора** понимается физическая величина, равная отношению заряда $Q$, накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов $(\varphi_1-\varphi_2)$ между его обкладками:

$$C=Q/(\varphi_1-\varphi_2). \qquad (94.1)$$

Рассчитаем емкость плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных металлических пластин площадью $S$ каждая, расположенных на расстоянии $d$ друг от друга и имеющих заряды $+Q$ и $-Q$. Если расстояние между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами, то краевыми эффектами можно пренебречь и поле между обкладками считать однородным. Его можно рассчитать используя формулы (86.1) и (94.1). При наличии диэлектрика между обкладками разность потенциалов между ними, со-

гласно (86.1),

$$\varphi_1-\varphi_2=\sigma d/(\varepsilon_0\varepsilon), \qquad (94.2)$$

где $\varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость. Тогда из формулы (94.1), заменяя $Q=\sigma S$, с учетом (94.2) получим выражение для емкости плоского конденсатора:

$$C=\varepsilon_0\varepsilon S/d. \qquad (94.3)$$

Для определения емкости цилиндрического конденсатора, состоящего из двух полых коаксиальных цилиндров с радиусами $r_1$ и $r_2$ ($r_2>r_1$), вставленных один в другой, опять пренебрегая краевыми эффектами, считаем поле радиально-симметричным и сосредоточенным между цилиндрическими обкладками. Разность потенциалов между обкладками вычислим по формуле (86.3) для поля равномерно заряженного бесконечного цилиндра с линейной плотностью $\tau=Q/l$ ($l$ — длина обкладок). С учетом наличия диэлектрика между обкладками

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (94.4)$$

Подставив (94.4) в (94.1), получим выражение для емкости цилиндрического конденсатора:

$$C=2\pi\varepsilon_0\varepsilon l/\ln(r_2/r_1). \qquad (94.5)$$

Для определения емкости сферического конденсатора, состоящего из двух концентрических обкладок, разделенных сферическим слоем диэлектрика, используем формулу (86.2) для разности потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях $r_1$ и $r_2$ ($r_2>r_1$) от центра заряженной сферической поверхности. С учетом наличия диэлектрика между обкладками

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right). \qquad (94.6)$$

Подставив (94.6) в (94.1), получим

$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{r_1r_2}{r_2-r_1}. \qquad (94.7)$$

Если $d=r_2-r_1\ll r_1$, то $r_2\approx r_1\approx r$ и $C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2/d$. Так как $4\pi r^2$ — площадь сферической обкладки, то получаем формулу (94.3). Таким образом, при малой величине зазора по сравнению с радиусом сферы выражения для емкости сферического и плоского конденсаторов совпадают. Этот вывод справедлив и для цилиндрического конденсатора: при малом зазоре между цилиндрами по сравнению с их радиусами в формуле (94.5) $\ln(r_2/r_1)$ можно разложить в ряд, ограничиваясь только членом первого порядка. В результате опять приходим к формуле (94.3).

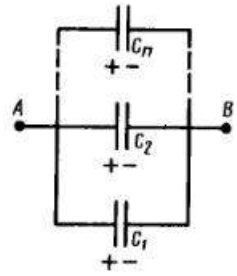



Рис. 144

Из формул (94.3), (94.5) и (94.7) вытекает, что емкость конденсаторов любой формы прямо пропорциональна диэлектрической проницаемости диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками. Поэтому применение в качестве прослойки сегнетоэлектриков значительно увеличивает емкость конденсаторов.

Конденсаторы характеризуются **пробивным напряжением** — разностью потенциалов между обкладками конденсатора, при которой происходит **пробой** — электрический разряд через слой диэлектрика в конденсаторе. Пробивное напряжение зависит от формы обкладок, свойств диэлектрика и его толщины.

Для увеличения емкости и варьирования ее возможных значений конденсаторы соединяют в батареи, при этом используется их параллельное и последовательное соединение.

**1. Параллельное соединение конденсаторов** (рис. 144). У параллельно соединенных конденсаторов разность потенциалов на обкладках конденсаторов одинакова и равна $\varphi_A-\varphi_B$. Если емкости отдельных конденсаторов $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$, то, согласно (94.1), их заряды равны

$$Q_1=C_1(\varphi_A-\varphi_B),$$
$$Q_2=C_2(\varphi_A-\varphi_B),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$Q_n=C_n(\varphi_A-\varphi_B),$$

а заряд батареи конденсаторов

$$Q=\sum_{i=1}^{n}Q_i=(C_1+C_2+\ldots+C_n)(\varphi_A-\varphi_B).$$

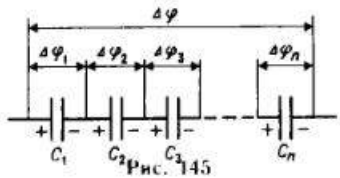


Рис. 145

Полная емкость батареи

$$C = Q/(\varphi_A - \varphi_B) =$$

$$= C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i,$$

т. е. при параллельном соединении конденсаторов она равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

**2. Последовательное соединение конденсаторов** (рис. 145). У последовательно соединенных конденсаторов заряды всех обкладок равны по модулю, а разность потенциалов на зажимах батареи

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{n} \Delta\varphi_i,$$

где для любого из рассматриваемых конденсаторов

$$\Delta\varphi_i = Q/C_i.$$

С другой стороны,

$$\Delta\varphi = Q/C = Q \sum_{i=1}^{n} (1/C_i),$$

откуда

$$1/C = \sum_{i=1}^{n} (1/C_i),$$

т. е. при последовательном соединении конденсаторов суммируются величины, обратные емкостям. Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов результирующая емкость $C$ всегда меньше наименьшей емкости, используемой в батарее.

## § 95. Энергия системы зарядов, уединенного проводника и конденсатора. Энергия электростатического поля

**1. Энергия системы неподвижных точечных зарядов.** Электростатические силы взаимодействия консервативны (см. § 83); следовательно, система зарядов обладает потенциальной энергией. Найдем потенциальную энергию системы двух неподвижных точечных зарядов $Q_1$ и $Q_2$, находящихся на расстоянии $r$ друг от друга. Каждый из этих зарядов в поле другого обладает потенциальной энергией (см. (84.2) и (84.5)):

$$W_1 = Q_1\varphi_{12}, \quad W_2 = Q_2\varphi_{21},$$

где $\varphi_{12}$ и $\varphi_{21}$ — соответственно потенциалы, создаваемые зарядом $Q_2$ в точке нахождения заряда $Q_1$ и зарядом $Q_1$ в точке нахождения заряда $Q_2$. Согласно (84.5),

$$\varphi_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r} \text{ и } \varphi_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r},$$

поэтому

$$W_1 = W_2 = W$$

и

$$W = Q_1\varphi_{12} = Q_2\varphi_{21} = {}^1/_2\,(Q_1\varphi_{12} + Q_2\varphi_{21}).$$

Добавляя к системе из двух зарядов последовательно заряды $Q_3$, $Q_4$, ..., можно убедиться в том, что в случае $n$ неподвижных зарядов энергия взаимодействия системы точечных зарядов равна

$$W = {}^1/_2 \sum_{i=1}^{n} Q_i\varphi_i, \qquad (95.1)$$

где $\varphi_i$ — потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд $Q_i$, всеми зарядами, кроме $i$-го.

**2. Энергия заряженного уединенного проводника.** Пусть имеется уединенный проводник, заряд, емкость и потенциал которого соответственно равны $Q$, $C$, $\varphi$. Увеличим заряд этого проводника на $dQ$. Для этого необходимо перенести заряд $dQ$ из бесконечности на уединенный проводник, затратив на это работу, равную

$$dA = \varphi\, dQ = C\varphi\, d\varphi.$$

Чтобы зарядить тело от нулевого потенциала до $\varphi$, необходимо совершить работу

$$A = \int_0^{\varphi} C\varphi\, d\varphi = C\varphi^2/2. \qquad (95.2)$$

Энергия заряженного проводника равна той работе, которую необходимо со-

вершить, чтобы зарядить этот проводник:

$$W = C\varphi^2/2 = Q\varphi/2 = Q^2/(2C). \quad (95.3)$$

Формулу (95.3) можно получить и из того, что потенциал проводника во всех его точках одинаков, так как поверхность проводника является эквипотенциальной. Полагая потенциал проводника равным $\varphi$, из (95.1) найдем

$$W = {}^1/_2\varphi \sum_i Q_i = Q\varphi/2,$$

где $Q = \sum_i Q_i$ — заряд проводника.

**3. Энергия заряженного конденсатора.** Как всякий заряженный проводник, конденсатор обладает энергией, которая в соответствии с формулой (95.3) равна

$$W = C(\Delta\varphi)^2/2 = Q\Delta\varphi/2 = Q^2/(2C), \quad (95.4)$$

где $Q$ — заряд конденсатора, $C$ — его емкость, $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между обкладками.

Используя выражение (95.4), можно найти **механическую (пондеромоторную) силу**, с которой пластины конденсатора притягивают друг друга. Для этого предположим, что расстояние $x$ между пластинами меняется, например, на величину $dx$. Тогда действующая сила совершает работу

$$dA = F\,dx$$

вследствие уменьшения потенциальной энергии системы

$$F\,dx = -dW,$$

откуда

$$F = -\frac{dW}{dx}. \quad (95.5)$$

Подставив в (95.4) выражение (94.3), получим

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}x. \quad (95.6)$$

Производя дифференцирование при конкретном значении энергии (см. (95.5) и (95.6)), найдем искомую силу:

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S},$$

где знак минус указывает, что сила $F$ является силой притяжения.

**4. Энергия электростатического поля.** Преобразуем формулу (95.4), выражающую энергию плоского конденсатора посредством зарядов и потенциалов, воспользовавшись выражением для емкости плоского конденсатора ($C = \varepsilon_0\varepsilon S/d$) и разности потенциалов между его обкладками ($\Delta\varphi = Ed$). Тогда получим

$$W = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}Sd = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}V, \quad (95.7)$$

где $V = Sd$ — объем конденсатора. Формула (95.7) показывает, что энергия конденсатора выражается через величину, характеризующую электростатическое поле,— *напряженность* $E$.

**Объемная плотность** энергии электростатического поля (энергия единицы объема)

$$w = W/V = \varepsilon_0\varepsilon E^2/2 = ED/2. \quad (95.8)$$

Выражение (95.8) справедливо только для **изотропного диэлектрика**, для которого выполняется соотношение (88.2): $\mathbf{P} = \varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}$.

Формулы (95.4) и (95.7) соответственно связывают энергию конденсатора *с зарядом* на его обкладках и *с напряженностью поля*. Возникает, естественно, вопрос о локализации электростатической энергии и что является ее носителем — заряды или поле? Ответ на этот вопрос может дать только опыт. Электростатика изучает постоянные во времени поля неподвижных зарядов, т. е. в ней поля и обусловившие их заряды неотделимы друг от друга. Поэтому электростатика ответить на поставленные вопросы не может. Дальнейшее развитие теории и эксперимента показало, что переменные во времени электрические и магнитные поля могут существовать обособленно, независимо от возбудивших их зарядов, и распространяются в пространстве в виде электромагнитных волн, *способных* переносить энергию. Это убедительно подтверждает основное положение *теории близкодействия о локализации энергии в поле* и что *носителем* энергии является *поле*.

## Контрольные вопросы

- В чем заключается закон сохранения заряда? Приведите примеры проявления этого закона.
- Запишите, сформулируйте и объясните закон Кулона.
- Какие поля называются электростатическими?
- Что такое напряженность **E** электростатического поля? Каково направление вектора напряженности **E**? Единица напряженности в СИ.
- Что такое электрический диполь? Как направлено плечо диполя?
- Пользуясь принципом суперпозиции, найдите в поле двух точечных зарядов $+Q$ и $+2Q$, находящихся на расстоянии $l$ друг от друга, точку, где напряженность поля равна нулю.
- Чему равно отношение напряженностей электрических полей в точке $A$, лежащей на продолжении оси диполя, и в точке $B$, лежащей на перпендикуляре, проходящем через середину $O$ оси этого диполя, если $OA = OB$?
- В чем заключается физический смысл теоремы Гаусса для электростатического поля в вакууме?
- Что такое линейная, поверхностная, объемная плотности зарядов?
- Электрический диполь помещен внутрь замкнутой поверхности. Каков поток $\Phi_E$ сквозь эту поверхность? Почему?
- Как доказать, что электростатическое поле является потенциальным?
- Что называется циркуляцией вектора напряженности?
- Дайте определения потенциала данной точки поля и разности потенциалов двух точек поля. Каковы их единицы?
- Приведите графики зависимостей $E(r)$ и $\varphi(r)$ для равномерно заряженной сферической поверхности. Дайте их объяснение и обоснование.
- Какова связь между напряженностью и потенциалом? Выведите ее и объясните. Каков физический смысл этих понятий?
- Чему равна работа по перемещению заряда вдоль эквипотенциальной поверхности?
- В чем различие поляризации диэлектриков с полярными и неполярными молекулами?
- Определите, чему равна диэлектрическая проницаемость при построении рис. 135.
- Как определяется вектор электрического смещения? Что он характеризует?
- Сформулируйте теорему Гаусса для электростатического поля в диэлектрике.
- Выведите и прокомментируйте условия для векторов **E** и **D** на границе раздела двух диэлектрических сред.
- Каковы напряженность и потенциал поля, а также распределение зарядов внутри и на поверхности заряженного проводника?
- На чем основана электростатическая защита?
- Три одинаковых конденсатора один раз соединены последовательно, другой — параллельно. Во сколько раз и когда емкость батареи будет больше?
- Выведите формулы для энергии заряженного конденсатора, выражаемые через заряд на обкладках конденсатора и через напряженность поля.
- Может ли электростатика ответить на вопрос: где локализована энергия и что является ее носителем — заряды или поле? Почему?

## Задачи

**11.1.** Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускаются в керосин плотностью 0,8 г/см$^3$. Какова должна быть плотность материала шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и керосине был один и тот же? Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$. [1,6 г/см$^3$]

**11.2.** На некотором расстоянии от бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = 1{,}5$ нКл/см$^2$ расположена круглая пластинка. Плоскость пластинки составляет с линиями напряженности угол $\alpha = 45°$. Определить поток вектора напряженности через эту пластинку, если ее радиус $r = 10$ см. [1,88 кВ·м]

**11.3.** Кольцо радиусом $r=10$ см из тонкой проволоки равномерно заряжено с линейной плотностью $\tau=10$ нКл/м. Определить напряженность поля на оси, проходящей через центр кольца в точке $A$, удаленной на расстояние $a=20$ см от центра кольца. [1 кВ/м]

**11.4.** Шар радиусом $R=10$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho=5$ нКл/м$^3$. Определить напряженность электростатического поля: 1) на расстоянии $r_1=2$ см от центра шара; 2) на расстоянии $r_2=12$ см от центра шара. Построить зависимость $E(r)$. [1) 3,77 В/м; 13,1 В/м]

**11.5.** Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью с постоянной линейной плотностью $\tau=1$ нКл/см. Какую скорость приобретет электрон, приблизившись под действием поля к нити вдоль линии напряженности с расстояния $r_1=2{,}5$ см до $r_2=1{,}5$ см? [18 Мм/с]

**11.6.** Электростатическое поле создается сферой радиусом $R=4$ см, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma=1$ нКл/м$^2$. Определить разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях $r_1=6$ см и $r_2=10$ см. [1,2 В]

**11.7.** Определить линейную плотность бесконечно длинной заряженной нити, если работа сил поля по перемещению заряда $Q=1$ нКл с расстояния $r_1=10$ см до $r_2=5$ см в направлении, перпендикулярном нити, равна 0,1 мДж. [8 мкКл/м]

**11.8.** Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено парафином ($\varepsilon=2$). Расстояние между пластинами $d=8{,}85$ мм. Какую разность потенциалов необходимо подать на пластины, чтобы поверхностная плотность связанных зарядов на парафине составляла 0,05 нКл/см$^2$? [500 В]

**11.9.** Свободные заряды равномерно распределены с объемной плотностью $\rho=10$ нКл/м$^3$ по шару радиусом $R=5$ см из однородного изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=6$. Определить напряженность электростатического поля на расстояниях $r_1=2$ см и $r_2=10$ см от центра шара. [$E_1=1{,}25$ В/м; $E_2=23{,}5$ В/м]

**11.10.** Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом ($\varepsilon=7$). Расстояние между пластинами $d=5$ мм, разность потенциалов $U=500$ В. Определить энергию поляризованной стеклянной пластины, если ее площадь $S=50$ см$^2$. [6,64 мкДж]

**11.11.** Плоский воздушный конденсатор емкостью $C=10$ пФ заряжен до разности потенциалов $U=1$ кВ. После отключения конденсатора от источника напряжения расстояние между пластинами конденсатора было увеличено в два раза. Определить: 1) разность потенциалов на обкладках конденсатора после их раздвижения; 2) работу внешних сил по раздвижению пластин. [1) 2 кВ; 2) 5 мкДж]

**11.12.** Разность потенциалов между пластинами конденсатора $U=200$ В. Площадь каждой пластины $S=100$ см$^2$, расстояние между пластинами $d=1$ мм, пространство между ними заполнено парафином ($\varepsilon=2$). Определить силу притяжения пластин друг к другу. [3,54 мН]

## Глава 12
## Постоянный электрический ток

### § 96. Электрический ток, сила и плотность тока

В **электродинамике** — разделе учения об электричестве, в котором рассматриваются явления и процессы, обусловленные движением электрических зарядов или макроскопических заряженных тел,—важнейшим понятием является понятие электрического тока. **Электрическим током** называется любое упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов. В проводнике под действием приложенного электрического поля $\mathbf{E}$ свободные электрические заряды перемещаются: положительные — по полю, отрицательные — против поля (рис. 146, *а*), т. е. в проводнике возникает электрический ток, называемый **током проводимости.** Если же упорядоченное движение электрических зарядов осуществляется перемещением в пространстве заряженного макроскопи-

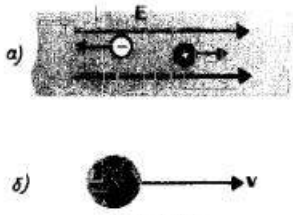



Рис. 146

ческого тела (рис. 146, *б*), то возникает так называемый **конвекционный ток.**

Для возникновения и существования электрического тока необходимо, с одной стороны, наличие свободных **носителей тока** — заряженных частиц, способных перемещаться упорядоченно, а с другой — наличие электрического поля, энергия которого, каким-то образом восполняясь, расходовалась бы на их упорядоченное движение. За направление тока *условно* принимают направление движения *положительных зарядов*.

Количественной мерой электрического тока служит **сила тока** $I$ — скалярная физическая величина, определяемая электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I=\frac{dQ}{dt}.$$

Ток, сила и направление которого не изменяются со временем, называется **постоянным**. Для постоянного тока

$$I=Q/t,$$

где $Q$ — электрический заряд, проходящий за время $t$ через поперечное сечение проводника.

Единица силы тока — **ампер** (А) (определение см. на с. 5).

Физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока, называется **плотностью тока:**

$$j=\frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

Выразим силу и плотность тока через скорость $\langle \mathbf{v} \rangle$ упорядоченного движения зарядов в проводнике. Если концентрация носителей тока равна $n$ и каждый носитель имеет элементарный заряд $e$ (что не обязательно для ионов), то за время $dt$ через поперечное сечение $S$ проводника переносится заряд $dQ=ne\langle v \rangle S\,dt$. Сила тока

$$I=\frac{dQ}{dt}=ne\langle v \rangle S,$$

а плотность тока

$$\mathbf{j}=ne\langle \mathbf{v} \rangle. \qquad (96.1)$$

Плотность тока — *вектор*, ориентированный по направлению тока, т. е. направление вектора $\mathbf{j}$ совпадает с направлением упорядоченного движения положительных зарядов. Единица плотности тока — ампер на метр в квадрате ($А/м^2$).

Сила тока сквозь произвольную поверхность $S$ определяется как поток вектора $\mathbf{j}$, т. е.

$$I=\int_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S}, \qquad (96.2)$$

где $d\mathbf{S}=\mathbf{n}\,dS$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к площадке $dS$, составляющей с вектором $\mathbf{j}$ угол $\alpha$).

## § 97. Сторонние силы. Электродвижущая сила и напряжение

Если в цепи на носители тока действуют только силы электростатического поля, то происходит перемещение носителей (они предполагаются положительными) от точек с бóльшим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом. Это приведет к выравниванию потенциалов во всех точках цепи и к исчезновению электрического поля. Поэтому для существования постоянного тока необходимо наличие в цепи устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов за счет работы сил неэлектростатического происхождения. Такие устройства называются **источниками тока.** Силы *неэлектростатического происхождения*, действующие на заряды со стороны источников тока, называются **сторонними.**

Природа сторонних сил может быть различной. Например, в гальванических элементах они возникают за счет энергии

химических реакций между электродами и электролитами; в генераторе — за счет механической энергии вращения ротора генератора и т. п. Роль источника тока в электрической цепи, образно говоря, такая же, как роль насоса, который необходим для перекачивания жидкости в гидравлической системе. Под действием создаваемого поля сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока против сил электростатического поля, благодаря чему на концах цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течет постоянный электрический ток.

Сторонние силы совершают работу по перемещению электрических зарядов. Физическая величина, определяемая работой, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется **электродвижущей силой (э. д. с.)** $\mathscr{E}$, действующей в цепи:

$$\mathscr{E} = A/Q_0. \qquad (97.1)$$

Эта работа производится за счет энергии, затрачиваемой в источнике тока, поэтому величину $\mathscr{E}$ можно также называть электродвижущей силой источника тока, включенного в цепь. Часто, вместо того чтобы сказать: «в цепи действуют сторонние силы», говорят: «в цепи действует э. д. с.», т. е. термин «электродвижущая сила» употребляется как характеристика сторонних сил. Э. д. с., как и потенциал, выражается в вольтах (ср. (84.9) и (97.1)).

Сторонняя сила $\mathbf{F}_{ст}$, действующая на заряд $Q_0$, может быть выражена как

$$\mathbf{F}_{ст} = \mathbf{E}_{ст} Q_0,$$

где $\mathbf{E}_{ст}$ — напряженность поля сторонних сил. Работа же сторонних сил по перемещению заряда $Q_0$ на замкнутом участке цепи равна

$$A = \oint \mathbf{F}_{ст} d\mathbf{l} = Q_0 \oint \mathbf{E}_{ст} d\mathbf{l}. \qquad (97.2)$$

Разделив (97.2) на $Q_0$, получим выражение для э.д.с., действующей в цепи:

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}_{ст} d\mathbf{l},$$

т. е. э.д.с., действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил. Э.д.с., действующая на участке *1—2*, равна

$$\mathscr{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_{ст} d\mathbf{l}. \qquad (97.3)$$

На заряд $Q_0$ помимо сторонних сил действуют также силы электростатического поля $\mathbf{F}_e = Q_0\mathbf{E}$. Таким образом, результирующая сила, действующая в цепи на заряд $Q_0$, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ст} + \mathbf{F}_e = Q_0(\mathbf{E}_{ст} + \mathbf{E}).$$

Работа, совершаемая результирующей силой над зарядом $Q_0$ на участке *1—2*, равна

$$A_{12} = Q_0 \int_1^2 \mathbf{E}_{ст} d\mathbf{l} + Q_0 \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Используя выражения (97.3) и (84.8), можем записать

$$A_{12} = Q_0 \mathscr{E}_{12} + Q_0(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (97.4)$$

Для замкнутой цепи работа электростатических сил равна нулю (см. § 83), поэтому в данном случае $A_{12} = Q_0 \mathscr{E}_{12}$.

**Напряжением** $U$ на участке *1—2* называется физическая величина, определяемая работой, совершаемой суммарным полем электростатических (кулоновских) и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи. Таким образом, согласно (97.4),

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}.$$

Понятие напряжения является обобщением понятия разности потенциалов: напряжение на концах участка цепи равно разности потенциалов в том случае, если на этом участке не действует э.д.с., т. е. сторонние силы отсутствуют.

## § 98. Закон Ома. Сопротивление проводников

Немецкий физик Г. Ом (1787—1854) экспериментально установил, что сила тока $I$, текущего по однородному металлическому проводнику (т. е. проводнику, в котором не действуют сторонние силы), пропорциональна напряжению $U$ на кон-

цах проводника:

$$I = U/R, \qquad (98.1)$$

где $R$ — электрическое сопротивление проводника. Уравнение (98.1) выражает **закон Ома для участка цепи** (не содержащего источника э.д.с.): сила тока в проводнике прямо пропорциональна приложенному напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению проводника. Формула (98.1) позволяет установить единицу сопротивления — **ом** (Ом): 1 Ом — сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет постоянный ток 1 А.

Величина

$$G = 1/R$$

называется **электрической проводимостью** проводника. Единица проводимости — **сименс** (См): 1 См — проводимость участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом.

Сопротивление проводников зависит от его размеров и формы, а также от материала, из которого проводник изготовлен. Для однородного линейного проводника сопротивление $R$ прямо пропорционально его длине $l$ и обратно пропорционально площади его поперечного сечения $S$:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \qquad (98.2)$$

где $\rho$ — коэффициент пропорциональности, характеризующий материал проводника. Он называется **удельным электрическим сопротивлением.** Единица удельного электрического сопротивления — ом·метр (Ом·м). Наименьшим удельным сопротивлением обладают серебро ($1{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) и медь ($1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м). На практике наряду с медными применяются алюминиевые провода. Хотя алюминий и имеет большее, чем медь, удельное сопротивление ($2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м), но зато обладает меньшей плотностью по сравнению с медью.

Закон Ома можно представить в дифференциальной форме. Подставив выражение для сопротивления (98.2) в закон Ома (98.1), получим

$$\frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}, \qquad (98.3)$$

где величина

$$\gamma = 1/\rho,$$

обратная удельному сопротивлению, называется **удельной электрической проводимостью** вещества проводника. Ее единица — сименс на метр (См/м). Учитывая, что $U/l = E$ — напряженность электрического поля в проводнике, $I/S = j$ — плотность тока, формулу (98.3) можно записать в виде

$$j = \gamma E. \qquad (98.4)$$

Так как в изотропном проводнике носители тока в каждой точке движутся в направлении вектора $\mathbf{E}$, то направления $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ совпадают. Поэтому формулу (98.4) можно записать в виде

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \qquad (98.5)$$

Выражение (98.5) — **закон Ома в дифференциальной форме,** связывающий плотность тока в любой точке внутри проводника с напряженностью электрического поля в этой же точке. Это соотношение справедливо и для переменных полей.

Опыт показывает, что в первом приближении изменение удельного сопротивления, а следовательно, и сопротивления, с температурой описывается линейным законом:

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \\ R = R_0 (1 + \alpha t), \end{cases}$$

где $\rho$ и $\rho_0$, $R$ и $R_0$ — соответственно удельные сопротивления и сопротивления проводника при $t$ и 0 °С, $\alpha$ — **температурный коэффициент сопротивления,** для чистых металлов (при не очень низких температурах) близкий к $1/273$ $K^{-1}$. Значит, температурная зависимость сопротивления может быть представлена в виде

$$R = \alpha R_0 T,$$

где $T$ — термодинамическая температура.

Качественная температурная зависимость сопротивления металла представлена на рис. 147 (кривая *1*). Впоследствии было обнаружено, что сопротивление многих металлов (например, Al, Pb, Zn и др.) и их сплавов при очень низких температурах $T_к$ (0,14 — 20 К), называемых **критическими,** характерных для каждого ве-

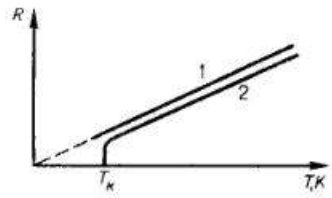



Рис. 147

щества, скачкообразно уменьшается до нуля (кривая 2), т. е. металл становится абсолютным проводником. Впервые это явление, называемое **сверхпроводимостью,** обнаружено в 1911 г. Г. Камерлинг-Оннесом для ртути. Явление сверхпроводимости объясняется на основе квантовой теории. Практическое использование сверхпроводящих материалов (в обмотках сверхпроводящих магнитов, в системах памяти ЭВМ и др.) затруднено из-за низких их критических температур. Правда, в настоящее время обнаружены и активно исследуются керамические материалы, обладающие сверхпроводимостью при температуре выше 100 К.

На зависимости электрического сопротивления металлов от температуры основано действие **термометров сопротивления,** которые позволяют по градуированной взаимосвязи сопротивления от температуры измерять температуру с точностью до 0,003 К. Применение же в качестве рабочего вещества термометра сопротивления полупроводников, приготовленных по специальной технологии,— **термисторов** — позволяет отмечать изменение температуры в миллионные доли кельвин и использовать термисторы для измерения температур в случае малых габаритов полупроводников.

## § 99. Работа и мощность тока. Закон Джоуля — Ленца

Рассмотрим однородный проводник, к концам которого приложено напряжение $U$. За время $dt$ через сечение проводника переносится заряд $dq = I\,dt$. Так как ток представляет собой перемещение заряда $dq$ под действием электрического поля, то, по формуле (84.6), работа тока

$$dA = U\,dq = IU\,dt. \qquad (99.1)$$

Если сопротивление проводника $R$, то, используя закон Ома (98.1), получим

$$dA = I^2R\,dt = \frac{U^2}{R}\,dt. \qquad (99.2)$$

Из (99.1) и (99.2) следует, что мощность тока

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2R = U^2/R. \qquad (99.3)$$

Если сила тока выражается в амперах, напряжение — в вольтах, сопротивление — в омах, то работа тока выражается в джоулях, а мощность — в ваттах. На практике применяются также внесистемные единицы работы тока: ватт-час (Вт·ч) и киловатт-час (кВт·ч). 1 Вт·ч — работа тока мощностью в 1 Вт в течение 1 ч: 1 Вт·ч = 3600 Вт·с = $3{,}6\cdot10^3$ Дж; 1 кВт·ч = $10^3$ Вт·ч = $3{,}6\cdot10^6$ Дж.

Если ток проходит по *неподвижному* металлическому проводнику, то вся работа тока идет на его нагревание и, по закону сохранения энергии,

$$dQ = dA. \qquad (99.4)$$

Таким образом, используя выражения (99.4), (99.1) и (99.2), получим

$$dQ = IU\,dt = I^2R\,dt = \frac{U^2}{R}\,dt. \qquad (99.5)$$

Выражение (99.5) представляет собой **закон Джоуля — Ленца,** экспериментально установленный независимо друг от друга Дж. Джоулем и Э. Х. Ленцем *.

Выделим в проводнике элементарный цилиндрический объем $dV = dS\,dl$ (ось цилиндра совпадает с направлением тока), сопротивление которого $R = \rho\frac{dl}{dS}$. По закону Джоуля — Ленца, за время $dt$ в этом объеме выделится теплота

$$dQ = I^2R\,dt = \frac{\rho\,dl}{dS}(j\,dS)^2\,dt = \rho j^2\,dV\,dt.$$

Количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема, называется **удельной тепловой мощностью**

* Э. Х. Ленц (1804—1865) — русский физик.

**тока.** Она равна

$$w=\rho j^2. \qquad (99.6)$$

Используя дифференциальную форму закона Ома ($j=\gamma E$) и соотношение $\rho=1/\gamma$, получим

$$w=jE=\gamma E^2. \qquad (99.7)$$

Формулы (99.6) и (99.7) являются обобщенным выражением **закона Джоуля — Ленца в дифференциальной форме,** пригодным для любого проводника.

Тепловое действие тока находит широкое применение в технике, которое началось с открытия в 1873 г. русским инженером А. Н. Лодыгиным (1847—1923) лампы накаливания. На нагревании проводников электрическим током основано действие электрических муфельных печей, электрической дуги (открыта русским инженером В. В. Петровым (1761—1834)), контактной электросварки, бытовых электронагревательных приборов и т. д.

## § 100. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Мы рассматривали закон Ома (см. (98.1)) для однородного участка цепи, т. е. такого, в котором не действует э.д.с. (не действуют сторонние силы). Теперь рассмотрим **неоднородный участок цепи,** где действующую э.д.с. на участке *1—2* обозначим через $\mathscr{E}_{12}$, а приложенную на концах участка разность потенциалов — через $\varphi_1-\varphi_2$.

Если ток проходит по *неподвижным* проводникам, образующим участок *1—2*, то работа $A_{12}$ всех сил (сторонних и электростатических), совершаемая над носителями тока, по закону сохранения и превращения энергии равна теплоте, выделяющейся на участке. Работа сил, совершаемая при перемещении заряда $Q_0$ на участке *1—2*, согласно (97.4),

$$A_{12}=Q_0\mathscr{E}_{12}+Q_0(\varphi_1-\varphi_2). \qquad (100.1)$$

Э.д.с. $\mathscr{E}_{12}$, как и сила тока $I$, — величина скалярная. Ее необходимо брать либо с положительным, либо с отрицательным знаком в зависимости от знака работы, совершаемой сторонними силами. Если э.д.с. способствует движению положительных зарядов в выбранном направлении (в направлении *1—2*), то $\mathscr{E}_{12}>0$. Если э.д.с. препятствует движению положительных зарядов в данном направлении, то $\mathscr{E}_{12}<0$.

За время $t$ в проводнике выделяется теплота (см. (99.5))

$$Q=I^2Rt=IR(It)=IRQ_0. \qquad (100.2)$$

Из формул (100.1) и (100.2) получим

$$IR=(\varphi_1-\varphi_2)+\mathscr{E}_{12}, \qquad (100.3)$$

откуда

$$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2+\mathscr{E}_{12}}{R}. \qquad (100.4)$$

Выражение (100.3) или (100.4) представляет собой **закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме,** который является **обобщенным законом Ома.**

Если на данном участке цепи *источник тока отсутствует* ($\mathscr{E}_{12}=0$), то из (100.4) приходим к *закону Ома для однородного участка цепи* (98.1):

$$I=(\varphi_1-\varphi_2)/R=U/R$$

(при отсутствии сторонних сил напряжение на концах участка равно разности потенциалов (см. § 97)). Если же электрическая цепь *замкнута,* то выбранные точки *1* и *2* совпадают, $\varphi_1=\varphi_2$; тогда из (100.4) получаем *закон Ома для замкнутой цепи:*

$$I=\mathscr{E}/R,$$

где $\mathscr{E}$ — э.д.с., действующая в цепи, $R$ — суммарное сопротивление всей цепи. В общем случае $R=r+R_1$, где $r$ — внутреннее сопротивление источника э.д.с., $R_1$ — сопротивление внешней цепи. Поэтому закон Ома для замкнутой цепи будет иметь вид

$$I=\mathscr{E}/(r+R_1).$$

Если цепь *разомкнута* и, следовательно, в ней ток отсутствует ($I=0$), то из закона Ома (100.4) получим, что $\mathscr{E}_{12}=\varphi_2-\varphi_1$, т. е. э.д.с., действующая в разомкнутой цепи, равна разности потенциалов на ее концах. Следовательно, для того чтобы найти э.д.с. источника тока, надо измерить разность потенциалов на его клеммах при разомкнутой цепи.

## § 101. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Обобщенный закон Ома (см. (100.3)) позволяет рассчитать практически любую сложную цепь. Однако непосредственный расчет разветвленных цепей, содержащих несколько замкнутых контуров (контуры могут иметь общие участки, каждый из контуров может иметь несколько источников э.д.с. и т. д.), довольно сложен. Эта задача решается более просто с помощью **двух правил Кирхгофа** *.

Любая точка разветвления цепи, в которой сходится не менее трех проводников с током, называется **узлом.** При этом ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла,— отрицательным.

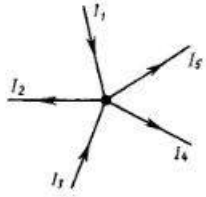



Рис. 148

**Первое правило Кирхгофа:** алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_k I_k = 0.$$

Например, для рис. 148 первое правило Кирхгофа запишется так:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

Первое правило Кирхгофа вытекает из закона сохранения электрического заряда. Действительно, в случае установившегося постоянного тока ни в одной точке проводника и ни на одном его участке не должны накапливаться электрические заряды. В противном случае токи не могли бы оставаться постоянными.

Второе правило Кирхгофа получается из обобщенного закона Ома для разветвленных цепей. Рассмотрим контур, состоящий

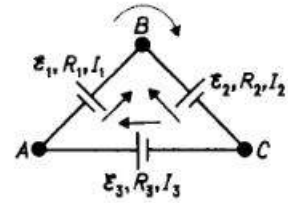



Рис. 149

из трех участков (рис. 149). Направление обхода по часовой стрелке примем за положительное, отметив, что выбор этого направления совершенно произволен. Все токи, совпадающие по направлению с направлением обхода контура, считаются положительными, не совпадающие с направлением обхода — отрицательными. Источники э.д.с. считаются положительными, если они создают ток, направленный в сторону обхода контура. Применяя к участкам закон Ома (100.3), можно записать:

$$\begin{cases} I_1 R_1 = \varphi_A - \varphi_B + \mathscr{E}_1, \\ -I_2 R_2 = \varphi_B - \varphi_C - \mathscr{E}_2, \\ I_3 R_3 = \varphi_C - \varphi_A + \mathscr{E}_3. \end{cases}$$

Складывая почленно эти уравнения, получим

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3. \quad (101.1)$$

Уравнение (101.1) выражает **второе правило Кирхгофа:** в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов $I_i$ на сопротивления $R_i$ соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме э.д.с. $\mathscr{E}_k$, встречающихся в этом контуре:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathscr{E}_k. \quad (101.2)$$

При расчете сложных цепей постоянного тока с применением правил Кирхгофа необходимо:

1. Выбрать *произвольное* направление токов на всех участках цепи; действительное направление токов определяется при решении задачи: если искомый ток получится положительным, то его направление было выбрано правильно, отрицательным — его истинное направление противоположно выбранному.

* Г. Кирхгоф (1824—1887) — немецкий физик.

2. Выбрать направление обхода контура и строго его придерживаться; произведение $IR$ положительно, если ток на данном участке совпадает с направлением обхода, и наоборот, э.д.с., действующие по выбранному направлению обхода, считаются положительными, против — отрицательными.

3. Составить столько уравнений, чтобы их число было равно числу искомых величин (в систему уравнений должны входить все сопротивления и э.д.с. рассматриваемой цепи); каждый рассматриваемый контур должен содержать хотя бы один элемент, не содержащийся в предыдущих контурах, иначе получатся уравнения, являющиеся простой комбинацией уже составленных.

В качестве примера использования правил Кирхгофа рассмотрим схему (рис. 150) измерительного **моста Уитстона** *. Сопротивления $R_1$, $R_2$, $R_3$ и $R_4$ образуют его плечи. Между точками $A$ и $B$ моста включена батерея с э.д.с. $\mathscr{E}$ и сопротивлением $r$, между точками $C$ и $D$ включен гальванометр с сопротивлением $R_G$. Для узлов $A$, $B$ и $C$, применяя первое правило Кирхгофа, получим

$$\begin{cases} I_r - I_1 - I_4 = 0, \\ I_2 + I_3 - I_r = 0, \\ I_1 - I_2 - I_G = 0. \end{cases} \qquad (101.3)$$

Для контуров $ACB\mathscr{E}A$, $ACDA$ и $CBDC$, согласно второму правилу Кирхгофа, можно записать:

$$\begin{cases} I_r r + I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathscr{E}, \\ I_1 R_1 + I_G R_G - I_4 R_4 = 0, \\ I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_G R_G = 0. \end{cases} \qquad (101.4)$$

Если известны все сопротивления и э.д.с., то, решая полученные шесть уравнений, можно найти неизвестные токи. Изменяя известные сопротивления $R_2$, $R_3$ и $R_4$, можно добиться того, чтобы ток через гальванометр был равен нулю ($I_G = 0$). Тогда из (101.3) найдем

$$I_1 = I_2, \qquad I_3 = I_4, \qquad (101.5)$$

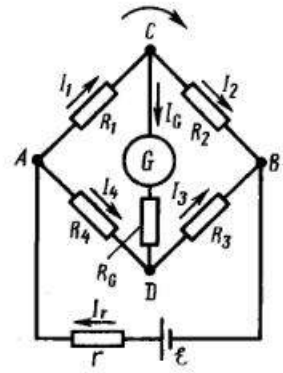



Рис. 150

а из (101.4) получим

$$I_1 R_1 = I_4 R_4, \qquad I_2 R_2 = I_3 R_3. \qquad (101.6)$$

Из (101.5) и (101.6) вытекает, что

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}, \quad \text{или} \quad R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3}. \qquad (101.7)$$

Таким образом, в случае равновесного моста ($I_G = 0$) при определении искомого сопротивления $R_1$ э.д.с. батареи, сопротивления батареи и гальванометра роли не играют.

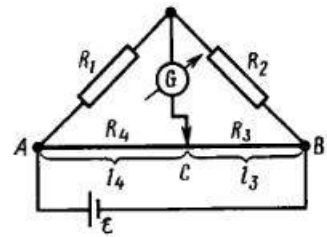



Рис. 151

На практике обычно используется **реохордный мост Уитстона** (рис. 151), где сопротивления $R_3$ и $R_4$ представляют собой длинную однородную проволоку (реохорд) с большим удельным сопротивлением, так что отношение $R_3/R_4$ можно заменить отношением $l_3/l_4$. Тогда, используя выражение (101.7), можно записать

$$R_1 = R_2 \frac{l_4}{l_3}. \qquad (101.8)$$

Длины $l_3$ и $l_4$ легко измеряются по шкале, а $R_2$ всегда известно. Поэтому уравнение (101.8) позволяет определить неизвестное сопротивление $R_1$.

* Ч. Уитстон (1802—1875) — английский физик.

## Контрольные вопросы

- Что называется силой тока? плотностью тока? Каковы их единицы? (Дать определения.)
- Назовите условия возникновения и существования электрического тока.
- Что такое сторонние силы? Какова их природа?
- В чем заключается физический смысл электродвижущей силы, действующей в цепи? напряжения? разности потенциалов?
- Почему напряжение является обобщенным понятием разности потенциалов?
- Какова связь между сопротивлением и проводимостью, удельным сопротивлением и удельной проводимостью? Каковы их единицы? (Дать определения.)
- В чем заключается явление сверхпроводимости? Каковы его перспективы?
- На чем основано действие термометров сопротивления?
- Выведите законы Ома и Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.
- В чем заключается физический смысл удельной тепловой мощности тока?
- Проанализируйте обобщенный закон Ома. Какие частные законы можно из него получить?
- Как формулируются правила Кирхгофа? На чем они основаны?
- Как составляются уравнения, выражающие правила Кирхгофа? Как избежать лишних уравнений?

## Задачи

**12.1.** По медному проводнику сечением 1 мм$^2$ течет ток; сила тока 1 А. Определить среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Плотность меди 8,9 г/см$^3$. [74 мкм/с]

**12.2.** Определить, во сколько раз возрастет сила тока, проходящего через платиновую печь, если при постоянном напряжении на зажимах ее температура повышается от $t_1 = 20$ °С до $t_2 = 1200$ °С. Температурный коэффициент сопротивления платины принять равным $3{,}65 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$. [В 5 раз]

**12.3.** По медному проводу сечением 0,3 мм$^2$ течет ток 0,3 А. Определить силу, действующую на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля. Удельное сопротивление меди 17 нОм·м. [$2{,}72 \cdot 10^{-21}$ Н]

**12.4.** Сила тока в проводнике сопротивлением 10 Ом равномерно убывает от $I_0 = 3$ А до $I = 0$ за 30 с. Определить выделившееся за это время в проводнике количество теплоты. [900 Дж]

**12.5.** Плотность электрического тока в алюминиевом проводе равна 5 А/см$^2$. Определить удельную тепловую мощность тока, если удельное сопротивление алюминия 26 нОм·м. [65 Дж/(м$^3$·с)]

**12.6.** Определить внутреннее сопротивление $r$ источника тока, если во внешней цепи при силе тока $I_1 = 5$ А выделяется мощность $P_1 = 10$ Вт, а при силе тока $I_2 = 8$ А — мощность $P_2 = 12$ Вт. [0,17 Ом]

**12.7.** Три источника тока с э.д.с. $\mathscr{E}_1 = 1{,}8$ В, $\mathscr{E}_2 = 1{,}4$ В и $\mathscr{E}_3 = 1{,}1$ В соединены накоротко одноименными полюсами. Внутреннее сопротивление первого источника $r_1 = 0{,}4$ Ом, второго — $r_2 = 0{,}6$ Ом. Определить внутреннее сопротивление третьего источника, если через первый источник идет ток $I_1 = 1{,}13$ А. [0,2 Ом]

# Глава 13
# Электрические токи в металлах, вакууме и газах

## § 102. Элементарная классическая теория электропроводности металлов

Носителями тока в металлах являются свободные электроны, т. е. электроны, слабо связанные с ионами кристаллической решетки металла. Это представление о природе носителей тока в металлах основывается на электронной теории проводимости металлов, созданной немецким физиком П. Друде (1863—1906) и разработанной впоследствии нидерландским физиком Х. Лоренцем, а также на ряде классических опытов, подтверждающих положения электронной теории.

Первый из таких опытов — **опыт Рикке*** (1901), в котором в течение года электрический ток пропускался через три последовательно соединенных с тщательно отшлифованными торцами металлических цилиндров (Cu, Al, Cu) одинакового радиуса. Несмотря на то что общий заряд, прошедший через эти цилиндры, достигал огромного значения ($\approx 3{,}5 \cdot 10^6$ Кл), никаких, даже микроскопических, следов переноса вещества не обнаружилось. Это явилось экспериментальным доказательством того, что ионы в металлах не участвуют в переносе электричества, а перенос заряда в металлах осуществляется частицами, которые являются общими для всех металлов. Такими частицами могли быть открытые в 1897 г. английским физиком Д. Томсоном (1856—1940) электроны.

Для доказательства этого предположения необходимо было определить знак и величину удельного заряда носителей (отношение заряда носителя к его массе). Идея подобных опытов заключалась в следующем: если в металле имеются подвижные, слабо связанные с решеткой носители тока, то при резком торможении проводника эти частицы должны по инерции смещаться вперед, как смещаются вперед пассажиры, стоящие в вагоне при его торможении. Результатом смещения зарядов должен быть импульс тока; по направлению тока можно определить знак носителей тока, а зная размеры и сопротивление проводника, можно вычислить удельный заряд носителей. Идея этих опытов (1913) и их качественное воплощение принадлежат советским физикам С. Л. Мандельштаму (1879—1944) и Н. Д. Папалекси (1880—1947). Эти опыты в 1916 г. были усовершенствованы и проведены американским физиком Р. Толменом (1881—1948) и ранее шотландским физиком Б. Стюартом (1828—1887). Ими экспериментально доказано, что носители тока в металлах заряжены отрицательно, а их удельный заряд приблизительно одинаков для всех исследованных металлов. По значению удельного заряда носителей электрического тока и по определенному ранее Р. Милликеном элементарному электрическому заряду была определена их масса. Оказалось, что значения удельного заряда и массы носителей тока и электронов, движущихся в вакууме, совпадали. Таким образом, было окончательно доказано, что носителями электрического тока в металлах являются *свободные электроны*.

Существование свободных электронов в металлах можно объяснить следующим образом: при образовании кристаллической решетки металла (в результате сближения изолированных атомов) валентные электроны, сравнительно слабо связанные с атомными ядрами, отрываются от атомов металла, становятся «свободными» и могут перемещаться по всему объему. Таким образом, в узлах кристаллической решетки располагаются ионы металла, а между ними хаотически движутся свободные электроны, образуя своеобразный электронный газ, обладающий, согласно электронной теории металлов, свойствами идеального газа.

Электроны проводимости при своем движении сталкиваются с ионами решетки, в результате чего устанавливается тер-

* К. Рикке (1845—1915) — немецкий физик.

модинамическое равновесие между электронным газом и решеткой. По теории Друде — Лоренца, электроны обладают такой же энергией теплового движения, как и молекулы одноатомного газа. Поэтому, применяя выводы молекулярно-кинетической теории (см. (44.3)), можно найти среднюю скорость теплового движения электронов

$$\langle u\rangle=\sqrt{8kT/(\pi m_e)},$$

которая для $T=300$ К равна $1{,}1\cdot10^5$ м/с. Тепловое движение электронов, являясь хаотическим, не может привести к возникновению тока.

При наложении внешнего электрического поля на металлический проводник кроме теплового движения электронов возникает их упорядоченное движение, т. е. возникает электрический ток. Среднюю скорость $\langle v\rangle$ упорядоченного движения электронов можно оценить согласно формуле (96.1) для плотности тока: $j=ne\langle v\rangle$. Выбрав допустимую плотность тока, например для медных проводов $10^7$ А/м$^2$, получим, что при концентрации носителей тока $n=8\cdot10^{28}$ м$^{-3}$ средняя скорость $\langle v\rangle$ упорядоченного движения электронов равна $7{,}8\cdot10^{-4}$ м/с. Следовательно, $\langle v\rangle\ll\langle u\rangle$, т. е. даже при очень больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного движения электронов, обусловливающего электрический ток, значительно меньше их скорости теплового движения. Поэтому при вычислениях результирующую скорость $(\langle v\rangle+\langle u\rangle)$ можно заменять скоростью теплового движения $\langle u\rangle$.

Казалось бы, полученный результат противоречит факту практически мгновенной передачи электрических сигналов на большие расстояния. Дело в том, что замыкание электрической цепи влечет за собой распространение электрического поля со скоростью $c$ ($c=3\cdot10^8$ м/с). Через время $t=l/c$ ($l$ — длина цепи) вдоль цепи установится стационарное электрическое поле и в ней начнется упорядоченное движение электронов. Поэтому электрический ток возникает в цепи практически одновременно с ее замыканием.

## § 103. Вывод основных законов электрического тока в классической теории электропроводности металлов

**1. Закон Ома.** Пусть в металлическом проводнике существует электрическое поле напряженностью $E=\text{const}$. Со стороны поля заряд $e$ испытывает действие силы $F=eE$ и приобретает ускорение $a=F/m=eE/m$. Таким образом, во время свободного пробега электроны движутся равноускоренно, приобретая к концу свободного пробега скорость

$$v_{max}=eE\langle t\rangle/m,$$

где $\langle t\rangle$ — среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки.

Согласно теории Друде, в конце свободного пробега электрон, сталкиваясь с ионами решетки, отдает им накопленную в поле энергию, поэтому скорость его упорядоченного движения становится равной нулю. Следовательно, средняя скорость направленного движения электрона

$$\langle v\rangle=(v_{max}+0)/2=eE\langle t\rangle/(2m). \quad (103.1)$$

Классическая теория металлов не учитывает распределения электронов по скоростям, поэтому среднее время $\langle t\rangle$ свободного пробега определяется средней длиной свободного пробега $\langle l\rangle$ и средней скоростью движения электронов относительно кристаллической решетки проводника, равной $\langle u\rangle+\langle v\rangle$ ($\langle u\rangle$ — средняя скорость теплового движения электронов). В § 102 было показано, что $\langle v\rangle\ll\langle u\rangle$, поэтому

$$\langle t\rangle=\langle l\rangle/\langle u\rangle.$$

Подставив значение $\langle t\rangle$ в формулу (103.1), получим

$$\langle v\rangle=eE\langle l\rangle/(2m\langle u\rangle).$$

Плотность тока в металлическом проводнике, по (96.1),

$$j=ne\langle v\rangle=\frac{ne^2\langle l\rangle}{2m\langle u\rangle}E,$$

откуда видно, что плотность тока пропорциональна напряженности поля,

т. е. получили закон Ома в дифференциальной форме (ср. с (98.4)). Коэффициент пропорциональности между $j$ и $E$ есть не что иное, как удельная проводимость материала

$$\gamma=\frac{ne^2\langle l\rangle}{2m\langle u\rangle}, \qquad (103.2)$$

которая тем больше, чем больше концентрация свободных электронов и средняя длина их свободного пробега.

**2. Закон Джоуля — Ленца.** К концу свободного пробега электрон под действием поля приобретает дополнительную кинетическую энергию

$$\langle E_к\rangle=\frac{mv_{max}^2}{2}=\frac{e^2\langle l\rangle^2}{2m\langle u\rangle^2}E^2. \qquad (103.3)$$

При соударении электрона с ионом эта энергия полностью передается решетке и идет на увеличение внутренней энергии металла, т. е. на его нагревание.

За единицу времени электрон испытывает с узлами решетки в среднем $\langle z\rangle$ столкновений:

$$\langle z\rangle=\langle u\rangle/\langle l\rangle. \qquad (103.4)$$

Если $n$ — концентрация электронов, то в единицу времени происходит $n\langle z\rangle$ столкновений и решетке передается энергия

$$w=n\langle z\rangle\langle E_к\rangle, \qquad (103.5)$$

которая идет на нагревание проводника. Подставив (103.3) и (103.4) в (103.5), получим таким образом энергию, передаваемую решетке в единице объема проводника за единицу времени,

$$w=\frac{ne^2\langle l\rangle}{2m\langle u\rangle}E^2. \qquad (103.6)$$

Величина $w$ называется удельной тепловой мощностью тока (см. § 99). Коэффициент пропорциональности между $w$ и $E^2$ по (103.2) есть удельная проводимость $\gamma$; следовательно, выражение (103.6) — закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме (ср. с (99.7)).

**3. Закон Видемана — Франца.** Металлы обладают как большой электропроводностью, так и высокой теплопроводностью. Это объясняется тем, что носителями тока и теплоты в металлах являются одни и те же частицы — свободные электроны, которые, перемещаясь в металле, переносят не только электрический заряд, но и присущую им энергию хаотического теплового движения, т. е. осуществляют перенос теплоты.

Видеманом и Францем в 1853 г. экспериментально установлен закон, согласно которому отношение теплопроводности ($\lambda$) к удельной проводимости ($\gamma$) для всех металлов при одной и той же температуре одинаково и увеличивается пропорционально термодинамической температуре:

$$\lambda/\gamma=\beta T,$$

где $\beta$ — постоянная, не зависящая от рода металла.

Элементарная классическая теория электропроводности металлов позволила найти значение $\beta$: $\beta=3(k/e)^2$, где $k$ — постоянная Больцмана. Это значение хорошо согласуется с опытными данными. Однако, как оказалось впоследствии, это согласие теоретического значения с опытным случайно. Лоренц, применив к электронному газу статистику Максвелла — Больцмана, учтя тем самым распределение электронов по скоростям, получил $\beta=2(k/e)^2$, что привело к резкому расхождению теории с опытом.

Таким образом, классическая теория электропроводности металлов объяснила законы Ома и Джоуля — Ленца, а также дала качественное объяснение закона Видемана — Франца. Однако она помимо рассмотренных противоречий в законе Видемана — Франца столкнулась еще с рядом трудностей при объяснении различных опытных данных. Рассмотрим некоторые из них.

**Температурная зависимость сопротивления.** Из формулы удельной проводимости (103.2) следует, что сопротивление металлов, т. е. величина, обратно пропорциональная $\gamma$, должна возрастать пропорционально $\sqrt{T}$ (в (103.2) $n$ и $\langle l\rangle$ от температуры не зависят, а $\langle u\rangle\sim\sqrt{T}$). Этот вывод электронной теории противоречит опытным данным, согласно которым $R\sim T$ (см. § 98).

**Оценка средней длины свободного пробега электронов в металлах.** Чтобы по формуле (103.2) получить $\gamma$, совпадающие с опытными значениями, надо принимать $\langle l \rangle$ значительно больше истинных, иными словами, предполагать, что электрон проходит без соударений с ионами решетки сотни междоузельных расстояний, что не согласуется с теорией Друде — Лоренца.

**Теплоемкость металлов.** Теплоемкость металла складывается из теплоемкости его кристаллической решетки и теплоемкости электронного газа. Поэтому атомная (т. е. рассчитанная на 1 моль) теплоемкость металла должна быть значительно большей, чем атомная теплоемкость диэлектриков, у которых нет свободных электронов. Согласно закону Дюлонга и Пти (см. § 73), теплоемкость одноатомного кристалла равна $3R$. Учтем, что теплоемкость одноатомного электронного газа равна $^3/_2R$. Тогда атомная теплоемкость металлов должна быть близка к $4{,}5R$. Однако опыт доказывает, что она равна $3R$, т. е. для металлов, так же как и для диэлектриков, хорошо выполняется закон Дюлонга и Пти. Следовательно, наличие электронов проводимости практически не сказывается на значении теплоемкости, что не объясняется классической электронной теорией.

Указанные расхождения теории с опытом можно объяснить тем, что движение электронов в металлах подчиняется не законам классической механики, а законам квантовой механики и, следовательно, поведение электронов проводимости надо описывать не статистикой Максвелла — Больцмана, а квантовой статистикой. Поэтому объяснить затруднения элементарной классической теории электропроводности металлов можно лишь квантовой теорией, которая будет рассмотрена в дальнейшем. Надо, однако, отметить, что классическая электронная теория не утратила своего значения и до настоящего времени, так как во многих случаях (например, при малой концентрации электронов проводимости и высокой температуре) она дает правильные качественные результаты и является по сравнению с квантовой теорией простой и наглядной.

## § 104. Работа выхода электронов из металла

Как показывает опыт, свободные электроны при обычных температурах практически не покидают металл. Следовательно, в поверхностном слое металла должно быть задерживающее электрическое поле, препятствующее выходу электронов из металла в окружающий вакуум. Работа, которую нужно затратить для удаления электрона из металла в вакуум, называется **работой выхода.** Укажем две вероятные причины появления работы выхода:

1. Если электрон по какой-то причине удаляется из металла, то в том месте, которое электрон покинул, возникает избыточный положительный заряд и электрон притягивается к индуцированному им самим положительному заряду.

2. Отдельные электроны, покидая металл, удаляются от него на расстояния порядка атомных и создают тем самым над поверхностью металла «электронное облако», плотность которого быстро убывает с расстоянием. Это облако вместе с наружным слоем положительных ионов решетки образует *двойной электрический слой*, поле которого подобно полю плоского конденсатора. Толщина этого слоя равна нескольким межатомным расстояниям ($10^{-10} — 10^{-9}$ м). Он не создает электрического поля во внешнем пространстве, но препятствует выходу свободных электронов из металла.

Таким образом, электрон при вылете из металла должен преодолеть задерживающее его электрическое поле двойного слоя. Разность потенциалов $\Delta\varphi$ в этом слое, называемая **поверхностным скачком потенциала,** определяется работой выхода ($A$) электрона из металла:

$$\Delta\varphi = A/e,$$

где $e$ — заряд электрона. Так как вне двойного слоя электрическое поле отсутствует, то потенциал среды равен нулю, а внутри металла потенциал положителен и равен $\Delta\varphi$. Потенциальная энергия свободного электрона внутри металла равна $-e\Delta\varphi$ и является относительно вакуума отрицательной. Исходя из этого можно

считать, что весь объем металла для электронов проводимости представляет потенциальную яму с плоским дном, глубина которой равна работе выхода $A$.

Работа выхода выражается в **электрон-вольтах** (эВ): 1 эВ равен работе, совершаемой силами поля при перемещении элементарного электрического заряда (заряда, равного заряду электрона) при прохождении им разности потенциалов в 1 В. Так как заряд электрона равен $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, то 1 эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Работа выхода зависит от химической природы металлов и от чистоты их поверхности и колеблется в пределах нескольких электрон-вольт (например, у калия $A = 2{,}2$ эВ, у платины $A = 6{,}3$ эВ). Подобрав определенным образом покрытие поверхности, можно значительно уменьшить работу выхода. Например, если нанести на поверхность вольфрама ($A = 4{,}5$ эВ) слой оксида щелочно-земельного металла (Ca, Sr, Ba), то работа выхода снижается до 2 эВ.

## § 105. Эмиссионные явления и их применение

Если сообщить электронам в металлах энергию, необходимую для преодоления работы выхода, то часть электронов может покинуть металл, в результате чего наблюдается явление испускания электронов, или **электронной эмиссии**. В зависимости от способа сообщения электронам энергии различают термоэлектронную, фотоэлектронную, вторичную электронную и автоэлектронную эмиссии.

**1. Термоэлектронная эмиссия** — это испускание электронов нагретыми металлами. Концентрация свободных электронов в металлах достаточно высока, поэтому даже при средних температурах вследствие распределения электронов по скоростям (по энергии) некоторые электроны обладают энергией, достаточной для преодоления потенциального барьера на границе металла. С повышением температуры число электронов, кинетическая энергия теплового движения которых больше работы выхода, растет и явление термоэлектронной эмиссии становится заметным.

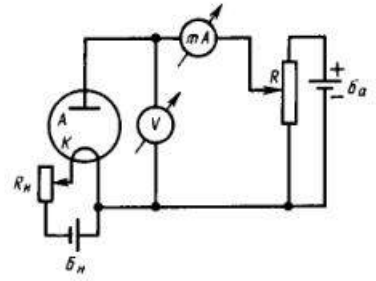



Рис. 152

Исследование закономерностей термоэлектронной эмиссии можно провести с помощью простейшей двухэлектродной лампы — **вакуумного диода**, представляющего собой откачанный баллон, содержащий два электрода: катод $K$ и анод $A$. В простейшем случае катодом служит нить из тугоплавкого металла (например, вольфрама), накаливаемая электрическим током. Анод чаще всего имеет форму металлического цилиндра, окружающего катод. Если диод включить в цепь, как это показано на рис. 152, то при накаливании катода и подаче на анод положительного напряжения (относительно катода) в анодной цепи диода возникает ток. Если поменять полярность батареи $Б_а$, то ток прекращается, как бы сильно катод ни накаливали. Следовательно, катод испускает отрицательные частицы — электроны.

Если поддерживать температуру накаленного катода постоянной и снять зависимость анодного тока $I_а$ от анодного напряжения $U_а$ — **вольт-амперную характеристику** (рис. 153), то оказывается, что она не является линейной, т. е. для вакуумного диода закон Ома не выполняется. Зависимость термоэлектронного тока $I$ от анодного напряжения в области малых

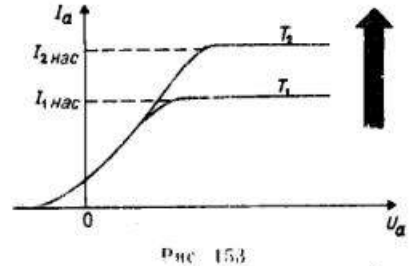



Рис. 153

положительных значений $U$ описывается **законом трех вторых** (установлен русским физиком С. А. Богуславским (1883—1923) и американским физиком И. Ленгмюром (1881—1957)):

$$I = BU^{3/2},$$

где $B$ — коэффициент, зависящий от формы и размеров электродов, а также их взаимного расположения.

При увеличении анодного напряжения ток возрастает до некоторого максимального значения $I_{нас}$, называемого **током насыщения.** Это означает, что почти все электроны, покидающие катод, достигают анода, поэтому дальнейшее увеличение напряженности поля не может привести к увеличению термоэлектронного тока. Следовательно, плотность тока насыщения характеризует эмиссионную способность материала катода.

Плотность тока насыщения определяется **формулой Ричардсона — Дешмана,** выведенной теоретически на основе квантовой статистики:

$$j_{нас} = CT^2 e^{-A/(kT)},$$

где $A$ — работа выхода электронов из катода, $T$ — термодинамическая температура, $C$ — постоянная, теоретически одинаковая для всех металлов (это не подтверждается экспериментом, что, по-видимому, объясняется поверхностными эффектами). Уменьшение работы выхода приводит к резкому увеличению плотности тока насыщения. Поэтому применяются оксидные катоды (например, никель, покрытый оксидом щелочно-земельного металла), работа выхода которых равна 1—1,5 эВ.

На рис. 153 представлены вольт-амперные характеристики для двух температур катода: $T_1$ и $T_2$, причем $T_2 > T_1$. С повышением температуры катода испускание электронов с катода интенсивнее, при этом увеличивается и ток насыщения. При $U_a = 0$ наблюдается анодный ток, т. е. некоторые электроны, эмиттируемые катодом, обладают энергией, достаточной для преодоления работы выхода и достижения анода без приложения электрического поля.

Явление термоэлектронной эмиссии используется в приборах, в которых необходимо получить поток электронов в вакууме, например в электронных лампах, рентгеновских трубках, электронных микроскопах и т. д. Электронные лампы широко применяются в электро- и радиотехнике, автоматике и телемеханике для выпрямления переменных токов, усиления электрических сигналов и переменных токов, генерирования электромагнитных колебаний и т. д. В зависимости от назначения в лампах используются дополнительные управляющие электроды.

**2. Фотоэлектронная эмиссия** — это эмиссия электронов из металла под действием света, а также коротковолнового электромагнитного излучения (например, рентгеновского). Основные закономерности этого явления будут разобраны при рассмотрении фотоэлектрического эффекта.

**3. Вторичная электронная эмиссия** — это испускание электронов поверхностью металлов, полупроводников или диэлектриков при бомбардировке их пучком электронов. Вторичный электронный поток состоит из электронов, отраженных поверхностью (упруго и неупруго отраженные электроны), и «истинно» вторичных электронов — электронов, выбитых из металла, полупроводника или диэлектрика первичными электронами.

Отношение числа вторичных электронов $n_2$ к числу первичных $n_1$, вызвавших эмиссию, называется **коэффициентом вторичной электронной эмиссии:**

$$\delta = n_2/n_1.$$

Коэффициент $\delta$ зависит от природы материала поверхности, энергии бомбардирующих частиц и их угла падения на поверхность. У полупроводников и диэлектриков $\delta$ больше, чем у металлов. Это объясняется тем, что в металлах, где концентрация электронов проводимости велика, вторичные электроны, часто сталкиваясь с ними, теряют свою энергию и не могут выйти из металла. В полупроводниках и диэлектриках же из-за малой концентрации электронов проводимости столкновения вторичных электронов с ними происходят го-

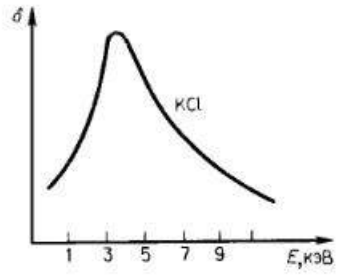



Рис. 154

раздо реже и вероятность выхода вторичных электронов из эмиттера возрастает в несколько раз.

Для примера на рис. 154 приведена качественная зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии $\delta$ от энергии $E$ падающих электронов для KCl. С увеличением энергии электронов $\delta$ возрастает, так как первичные электроны все глубже проникают в кристаллическую решетку и, следовательно, выбивают больше вторичных электронов. Однако при некоторой энергии первичных электронов $\delta$ начинает уменьшаться. Это связано с тем, что с увеличением глубины проникновения первичных электронов вторичным все труднее вырваться на поверхность. Значение $\delta_{max}$ для KCl достигает $\approx 12$ (для чистых металлов оно не превышает 2).

Явление вторичной электронной эмиссии используется в **фотоэлектронных умножителях** (ФЭУ), применяемых для усиления слабых электрических токов. ФЭУ представляет собой вакуумную трубку с фотокатодом К и анодом А, между которыми расположено несколько электродов — **эмиттеров** (рис. 155). Электроны, вырванные с фотокатода под действием света, попадают на эмиттер $Э_1$, пройдя ускоряющую разность потенциалов между К и $Э_1$. Из эмиттера $Э_1$ выбивается $\delta$ электронов. Усиленный таким образом электронный поток направляется на эмиттер $Э_2$, и процесс умножения повторяется на всех последующих эмиттерах. Если ФЭУ содержит $n$ эмиттеров, то на аноде А, называемом **коллектором**, получается усиленный в $\delta^n$ раз фотоэлектронный ток.

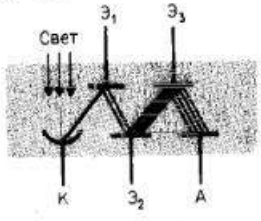



Рис. 155

**4. Автоэлектронная эмиссия** — это эмиссия электронов с поверхности металлов под действием сильного внешнего электрического поля. Эти явления можно наблюдать в откачанной трубке, конфигурация электродов которой (катод — острие, анод — внутренняя поверхность трубки) позволяет при напряжениях примерно $10^3$ В получать электрические поля напряженностью примерно $10^7$ В/м. При постепенном повышении напряжения уже при напряженности поля у поверхности катода примерно $10^5 \div 10^6$ В/м возникает слабый ток, обусловленный электронами, испускаемыми катодом. Сила этого тока увеличивается с повышением напряжения на трубке. Токи возникают при холодном катоде, поэтому описанное явление называется также **холодной эмиссией.** Объяснение механизма этого явления возможно лишь на основе квантовой теории.

## § 106. Ионизация газов. Несамостоятельный газовый разряд

Газы при не слишком высоких температурах и при давлениях, близких к атмосферному, являются хорошими изоляторами. Если поместить в сухой атмосферный воздух заряженный электрометр с хорошей изоляцией, то его заряд долго остается неизменным. Это объясняется тем, что газы при обычных условиях состоят из нейтральных атомов и молекул и не содержат свободных зарядов (электронов и ионов). Газ становится проводником электричества, когда некоторая часть его молекул *ионизуется*, т. е. произойдет расщепление нейтральных атомов и молекул на ионы и свободные электроны. Для этого газ надо подвергнуть действию какого-либо **ионизатора** (например, поднеся к заряженному электрометру пламя свечи, наблюдаем спад его заряда; здесь электропроводность газа вызвана нагреванием).

При ионизации газов, таким образом, под действием какого-либо ионизатора происходит вырывание из электронной оболочки атома или молекулы одного или нескольких электронов, что приводит к образованию свободных электронов и положительных ионов. Электроны могут присоединяться к нейтральным молекулам и атомам, превращая их в отрицательные ионы. Следовательно, в ионизованном газе имеются положительные и отрицательные ионы и свободные электроны. Прохождение электрического тока через газы называется **газовым разрядом.**

Ионизация газов может происходить под действием различных ионизаторов: сильный нагрев (столкновения быстрых молекул становятся настолько сильными, что они разбиваются на ионы), короткое электромагнитное излучение (ультрафиолетовое, рентгеновское и $\gamma$-излучения), корпускулярное излучение (потоки электронов, протонов, $\alpha$-частиц) и т. д. Для того чтобы выбить из молекулы (атома) один электрон, необходимо затратить определенную энергию, называемую **энергией ионизации,** значения которой для атомов различных веществ лежат в пределах $4 \div 25$ эВ.

Одновременно с процессом ионизации газа всегда идет и обратный процесс — **процесс рекомбинации:** положительные и отрицательные ионы, положительные ионы и электроны, встречаясь, воссоединяются между собой с образованием нейтральных атомов и молекул. Чем больше ионов возникает под действием ионизатора, тем интенсивнее идет и процесс рекомбинации.

Строго говоря, электропроводность газа нулю не равна никогда, так как в нем всегда имеются свободные заряды, образующиеся в результате действия на газы излучения радиоактивных веществ, имеющихся на поверхности Земли, а также космического излучения. Эта незначительная электропроводность воздуха (интенсивность ионизации под действием указанных факторов невелика) служит причиной утечки зарядов наэлектризованных тел даже при хорошей их изоляции.

Характер газового разряда определяется составом газа, его температурой и давлением, размерами, конфигурацией и материалом электродов, приложенным напряжением, плотностью тока.

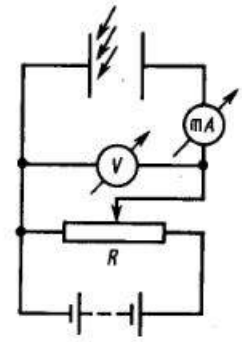
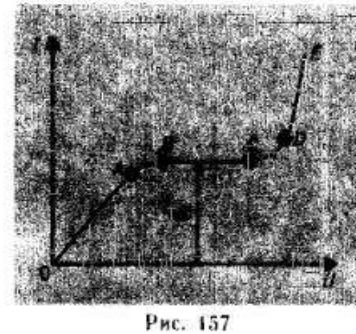


Рис. 156

Рассмотрим цепь, содержащую газовый промежуток (рис. 156), подвергающийся непрерывному, постоянному по интенсивности воздействию ионизатора. В результате действия ионизатора газ приобретает некоторую электропроводность и в цепи потечет ток, зависимость которого от приложенного напряжения дана на рис. 157.

На участке кривой $OA$ сила тока возрастает пропорционально напряжению, т. е. выполняется закон Ома. При дальнейшем увеличении напряжения закон Ома нарушается: рост силы тока замедляется (участок $AB$) и наконец прекращается совсем (участок $BC$). Это достигается в том случае, когда ионы и электроны, создаваемые внешним ионизатором за единицу времени, за это же время достигают электродов. В результате получаем ток насыщения ($I_{нас}$), значение которого определяется мощностью ионизатора.


Рис. 157

Ток насыщения, таким образом, является мерой ионизирующего действия ионизатора. Если в режиме *OC* прекратить действие ионизатора, то прекращается и разряд. **Разряды**, существующие только под действием внешних ионизаторов, называются **несамостоятельными.** При дальнейшем увеличении напряжения между электродами сила тока вначале медленно (участок *CD*), а затем резко (участок *DE*) возрастает. Механизм этого явления будет рассмотрен в следующем параграфе.

## § 107. Самостоятельный газовый разряд и его типы

**Разряд** в газе, сохраняющийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называется **самостоятельным**.

Рассмотрим условия возникновения самостоятельного разряда. Как уже указывалось в § 106, при больших напряжениях между электродами газового промежутка (см. рис. 156) ток сильно возрастает (участки *CD* и *DE* на рис. 157). При больших напряжениях возникающие под действием внешнего ионизатора электроны, сильно ускоренные электрическим полем, сталкиваясь с нейтральными молекулами газа, ионизируют их, в результате чего образуются вторичные электроны и положительные ионы (процесс *1* на рис. 158). Положительные ионы движутся к катоду, а электроны — к аноду. Вторичные электроны вновь ионизируют молекулы газа, и, следовательно, общее количество электронов и ионов будет возрастать по мере продвижения электронов к аноду лавинообразно. Это является причиной увеличения электрического тока на участке *CD* (см. рис. 157). Описанный процесс называется **ударной ионизацией.**

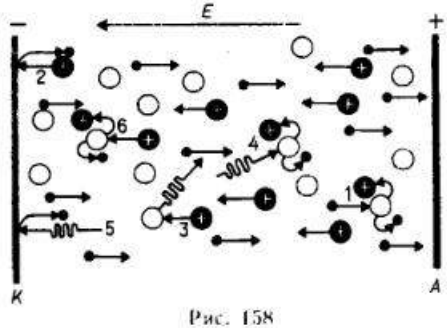


Рис. 158

Однако ударная ионизация под действием электронов недостаточна для поддержания разряда при удалении внешнего ионизатора. Для этого необходимо, чтобы электронные лавины «воспроизводились», т. е. чтобы в газе под действием каких-то процессов возникали новые электроны. Такие процессы схематически показаны на рис. 158: 1) ускоренные полем положительные ионы, ударяясь о катод, выбивают из него электроны (процесс *2*); 2) положительные ионы, сталкиваясь с молекулами газа, переводят их в возбужденное состояние; переход таких молекул в нормальное состояние сопровождается испусканием фотона (процесс *3*); 3) фотон, поглощенный нейтральной молекулой, ионизирует ее, происходит так называемый процесс фотонной ионизации молекул (процесс *4*); 4) выбивание электронов из катода под действием фотонов (процесс *5*).

Наконец, при значительных напряжениях между электродами газового промежутка наступает момент, когда положительные ионы, обладающие меньшей длиной свободного пробега, чем электроны, приобретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа (процесс *6*), и к отрицательной пластине устремляются ионные лавины. Когда возникают кроме электронных лавин еще и ионные, сила тока растет уже практически без увеличения напряжения (участок *DE* на рис. 157).

В результате описанных процессов (*1*—*6*) число ионов и электронов в объеме газа лавинообразно возрастает и разряд становится самостоятельным, т. е. сохраняется после прекращения действия внешнего ионизатора. Напряжение, при котором возникает самостоятельный разряд, называется **напряжением пробоя.**

В зависимости от давления газа, конфигурации электродов, параметров внешней цепи можно говорить о четырех типах самостоятельного разряда: тлеющем, искровом, дуговом и коронном.

**1. Тлеющий разряд** возникает при низких давлениях. Если к электродам, впа-

янным в стеклянную трубку длиной 30—50 см, приложить постоянное напряжение в несколько сотен вольт, постепенно откачивая из трубки воздух, то при давлении $\approx 5{,}3 \div 6{,}7$ кПа возникает разряд в виде светящегося извилистого шнура красноватого цвета, идущего от катода к аноду. При дальнейшем понижении давления шнур утолщается, и при давлении $\approx 13$ Па разряд имеет вид, схематически изображенный на рис. 159.




Рис. 159

Непосредственно к катоду прилегает тонкий светящийся слой *1* — **первое катодное свечение,** или **катодная пленка,** затем следует темный слой *2* — **катодное темное пространство,** переходящее в дальнейшем в светящийся слой *3* — **тлеющее свечение,** имеющее резкую границу со стороны катода, постепенно исчезающую со стороны анода. Оно возникает из-за рекомбинации электронов с положительными ионами. С тлеющим свечением граничит темный промежуток *4* — **фарадеево темное пространство,** за которым следует столб ионизированного светящегося газа *5* — **положительный столб.** Положительный столб существенной роли в поддержании разряда не имеет. Например, при уменьшении расстояния между электродами трубки его длина сокращается, в то время как катодные части разряда по форме и величине остаются неизменными. В тлеющем разряде особое значение для его поддержания имеют только две его части: катодное темное пространство и тлеющее свечение. В катодном темном пространстве происходит сильное ускорение электронов и положительных ионов, выбивающих электроны с катода (вторичная эмиссия). В области тлеющего свечения же происходит ударная ионизация электронами молекул газа. Образующиеся при этом положительные ионы устремляются к катоду и выбивают из него новые электроны, которые, в свою очередь, опять ионизируют газ и т. д. Таким образом непрерывно поддерживается тлеющий разряд.

При дальнейшем откачивании трубки при давлении $\approx 1{,}3$ Па свечение газа ослабевает и начинают светиться стенки трубки. Электроны, выбиваемые из катода положительными ионами, при таких разрежениях редко сталкиваются с молекулами газа и поэтому, ускоренные полем, ударяясь о стекло, вызывают его свечение, так называемую **катодолюминесценцию.** Поток этих электронов исторически получил название **катодных лучей.** Если в катоде просверлить малые отверстия, то положительные ионы, бомбардирующие катод, пройдя через отверстия, проникают в пространство за катодом и образуют резко ограниченный пучок, получивший название **каналовых** (или **положительных**) **лучей,** названных по знаку заряда, который они несут.

Тлеющий разряд широко используется в технике. Так как свечение положительного столба имеет характерный для каждого газа цвет, то его используют в газосветных трубках для светящихся надписей и реклам (например, неоновые газоразрядные трубки дают красное свечение, аргоновые — синевато-зеленое). В лампах дневного света, более экономичных, чем лампы накаливания, излучение тлеющего разряда, происходящее в парах ртути, поглощается нанесенным на внутреннюю поверхность трубки флуоресцирующим веществом (люминофором), начинающим под воздействием поглощенного излучения светиться. Спектр свечения при соответствующем подборе люминофоров близок к спектру солнечного излучения. Тлеющий разряд используется для **катодного напыления** металлов. Вещество катода в тлеющем разряде вследствие бомбардировки положительными ионами, сильно нагреваясь, переходит в парообразное состояние. Помещая вблизи катода различные предметы, их можно покрыть равномерным слоем металла.

**2. Искровой разряд** возникает при больших напряженностях электрического поля ($\approx 3 \cdot 10^6$ В/м) в газе, находящемся под давлением порядка атмосферного. Искра имеет вид ярко светящегося тонко-

го канала, сложным образом изогнутого и разветвленного.

Объяснение искрового разряда дается на основе **стримерной теории,** согласно которой возникновению ярко светящегося канала искры предшествует появление слабосветящихся скоплений ионизованного газа — **стримеров.** Стримеры возникают не только в результате образования электронных лавин посредством ударной ионизации, но и в результате фотонной ионизации газа. Лавины, догоняя друг друга, образуют проводящие мостики из стримеров, по которым в следующие моменты времени и устремляются мощные потоки электронов, образующие каналы искрового разряда. Из-за выделения при рассмотренных процессах большого количества энергии газ в искровом промежутке нагревается до очень высокой температуры (примерно $10^4$ К), что приводит к его свечению. Быстрый нагрев газа ведет к повышению давления и возникновению ударных волн, объясняющих звуковые эффекты при искровом разряде — характерное потрескивание в слабых разрядах и мощные раскаты грома в случае молнии, являющейся примером мощного искрового разряда между грозовым облаком и Землей или между двумя грозовыми облаками.

Искровой разряд используется для воспламенения горючей смеси в двигателях внутреннего сгорания и предохранения электрических линий передачи от перенапряжений (искровые разрядники). При малой длине разрядного промежутка искровой разряд вызывает разрушение (эрозию) поверхности металла, поэтому он применяется для электроискровой точной обработки металлов (резание, сверление). Его используют в спектральном анализе для регистрации заряженных частиц (искровые счетчики).

**3. Дуговой разряд.** Если после зажигания искрового разряда от мощного источника постепенно уменьшать расстояние между электродами, то разряд становится непрерывным — возникает дуговой разряд. При этом сила тока резко возрастает, достигая сотен ампер, а напряжение на разрядном промежутке падает до нескольких десятков вольт. Дуговой разряд можно получить от источника низкого напряжения минуя стадию искры. Для этого электроды (например, угольные) сближают до соприкосновения, они сильно раскаляются электрическим током, потом их разводят и получают электрическую дугу (именно так она была открыта В. В. Петровым). При атмосферном давлении температура катода приблизительно равна 3900 К. По мере горения дуги угольный катод заостряется, а на аноде образуется углубление — кратер, являющийся наиболее горячим местом дуги.

По современным представлениям, дуговой разряд поддерживается за счет высокой температуры катода из-за интенсивной термоэлектронной эмиссии, а также термической ионизации молекул, обусловленной высокой температурой газа.

Дуговой разряд находит широкое применение в народном хозяйстве для сварки и резки металлов, получения высококачественных сталей (дуговая печь) и освещения (прожекторы, проекционная аппаратура). Широко применяются также дуговые лампы с ртутными электродами в кварцевых баллонах, где дуговой разряд возникает в ртутном паре при откачанном воздухе. Дуга, возникающая в ртутном паре, является мощным источником ультрафиолетового излучения и используется в медицине (например, кварцевые лампы). Дуговой разряд при низких давлениях в парах ртути используется в ртутных выпрямителях для выпрямления переменного тока.

**4. Коронный разряд** — высоковольтный электрический разряд при высоком (например, атмосферном) давлении в резконеоднородном поле вблизи электродов с большой кривизной поверхности (например, острия). Когда напряженность поля вблизи острия достигает 30 кВ/см, то вокруг него возникает свечение, имеющее вид короны, чем и вызвано название этого вида разряда.

В зависимости от знака коронирующего электрода различают отрицательную или положительную корону. В случае отрицательной короны рождение электронов, вызывающих ударную ионизацию молекул газа, происходит за счет эмиссии их из

катода под действием положительных ионов, в случае положительной — вследствие ионизации газа вблизи анода. В естественных условиях корона возникает под влиянием атмосферного электричества у вершин мачт (на этом основано действие молниеотводов), деревьев *. Вредное действие короны вокруг проводов высоковольтных линий передачи проявляется в возникновении вредных токов утечки. Для их снижения провода высоковольтных линий делаются толстыми. Коронный разряд, являясь прерывистым, становится также источником радиопомех.

Используется коронный разряд в электрофильтрах, применяемых для очистки промышленных газов от примесей. Газ, подвергаемый очистке, движется снизу вверх в вертикальном цилиндре, по оси которого расположена коронирующая проволока. Ионы, имеющиеся в большом количестве во внешней части короны, оседают на частицах примеси и увлекаются полем к внешнему некоронирующему электроду и на нем оседают. Коронный разряд применяется также при нанесении порошковых и лакокрасочных покрытий.

## § 108. Плазма и ее свойства

**Плазмой** называется сильно ионизованный газ, в котором концентрации положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы. Различают **высокотемпературную плазму,** возникающую при сверхвысоких температурах, и **газоразрядную плазму,** возникающую при газовом разряде. Плазма характеризуется **степенью ионизации** $\alpha$ — отношением числа ионизованных частиц к полному их числу в единице объема плазмы. В зависимости от величины $\alpha$ говорят о **слабо** ($\alpha$ составляет доли процента), **умеренно** ($\alpha$ — несколько процентов) и **полностью** ($\alpha$ близко к 100 %) **ионизованной плазме.**

Заряженные частицы (электроны, ионы) газоразрядной плазмы, находясь в ускоряющем электрическом поле, обладают различной средней кинетической энергией. Это означает, что температура $T_e$ электронного газа одна, а ионного $T_и$ — другая, причем $T_e > T_и$. Несоответствие этих температур указывает на то, что газоразрядная плазма является **неравновесной,** поэтому она называется также **неизотермической.** Убыль числа заряженных частиц в процессе рекомбинации в газоразрядной плазме восполняется ударной ионизацией электронами, ускоренными электрическим полем. Прекращение действия электрического поля приводит к исчезновению газоразрядной плазмы.

Высокотемпературная плазма является **равновесной,** или **изотермической,** т. е. при определенной температуре убыль числа заряженных частиц восполняется в результате термической ионизации. В такой плазме соблюдается равенство средних кинетических энергий составляющих плазму различных частиц. В состоянии подобной плазмы находятся звезды, звездные атмосферы, Солнце. Их температура достигает десятков миллионов градусов.

Условием существования плазмы является некоторая минимальная плотность заряженных частиц, начиная с которой можно говорить о плазме как таковой. Эта плотность определяется в физике плазмы из неравенства $L \gg D$, где $L$ — линейный размер системы заряженных частиц, $D$ — так называемый **дебаевский радиус экранирования,** представляющий собой то расстояние, на котором происходит экранирование кулоновского поля любого заряда плазмы.

Плазма обладает следующими основными свойствами: высокой степенью ионизации газа, в пределе — полной ионизацией; равенством нулю результирующего пространственного заряда (концентрация положительных и отрицательных частиц в плазме практически одинакова); большой электропроводностью, причем ток в плазме создается в основном электронами, как наиболее подвижными частицами; свечением; сильным взаимодействием с электрическим и магнитным полями; колебаниями электронов в плазме с большой частотой ($\approx 10^8$ Гц), вызывающими общее вибрационное состояние плазмы; «коллективным» — одновременным взаи-

* Это явление получило в древности название огней святого Эльма.

модействием громадного числа частиц (в обычных газах частицы взаимодействуют друг с другом попарно). Эти свойства определяют качественное своеобразие плазмы, позволяющее считать ее *особым, четвертым, состоянием вещества.*

Изучение физических свойств плазмы позволяет, с одной стороны, решать многие проблемы астрофизики, поскольку в космическом пространстве плазма — наиболее распространенное состояние вещества, а с другой — открывает принципиальные возможности осуществления управляемого термоядерного синтеза. Основным объектом исследований по управляемому термоядерному синтезу является высокотемпературная плазма ($\approx 10^8$ К) из дейтерия и трития (см. § 268).

Низкотемпературная плазма ($< 10^5$ К) применяется в газовых лазерах, в термоэлектронных преобразователях и магнитогидродинамических генераторах (МГД-генераторах) — установках для непосредственного преобразования тепловой энергии в электрическую, в плазменных ракетных двигателях, весьма перспективных для длительных космических полетов.

Низкотемпературная плазма, получаемая в плазмотронах, используется для резки и сварки металлов, для получения некоторых химических соединений (например, галогенидов инертных газов), которые не удается получить другими способами, и т. д.

## Контрольные вопросы

- Какие опыты были поставлены для выяснения природы носителей электрического тока в металлах?
- Каковы основные идеи теории Друде — Лоренца?
- Сравните порядок средних скоростей теплового и упорядоченного движения электронов в металлах (при условиях, близких к нормальным и приемлемых в электротехнике).
- Почему тепловое движение электронов не может привести к возникновению электрического тока?
- Выведите на основе классической теории электропроводности металлов дифференциальную форму законов Ома и Джоуля — Ленца.
- Как классическая теория электропроводности металлов объясняет зависимость сопротивления металлов от температуры?
- В чем заключаются трудности элементарной классической теории электропроводности металлов? Каковы границы ее применения?
- Что называется работой выхода электрона и чем она обусловлена? От чего она зависит?
- Какие существуют разновидности эмиссионных явлений? Дайте их определения.
- Объясните вольт-амперную характеристику для вакуумного диода.
- Можно ли изменять силу тока насыщения вакуумного диода? Если да, то как?
- Каким образом можно вырвать электроны из холодного катода? Как называется это явление?
- Дайте объяснение качественной зависимости коэффициента вторичной электронной эмиссии диэлектрика от энергии падающих электронов.
- Охарактеризуйте процесс ионизации; рекомбинации.
- В чем отличие самостоятельного газового разряда от несамостоятельного? Каковы условия, необходимые для его существования?
- Может ли возникнуть ток насыщения при самостоятельном газовом разряде?
- Охарактеризуйте типы самостоятельного газового разряда. В чем их особенности?
- К какому типу газового разряда относится молния?
- В чем отличие равновесной плазмы от неравновесной?
- Приведите основные свойства плазмы. Каковы возможности ее применения?

## Задачи

**13.1.** Концентрация электронов проводимости в металле равна $2{,}5 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$. Определить среднюю скорость их упорядоченного движения при плотности тока 1 А/мм$^2$. [0,25 мм/с]

**13.2.** Работа выхода электрона из вольфрама составляет 4,5 эВ. Определить, во сколько раз увеличится плотность тока насыщения при повышении температуры от 2000 до 2500 К. [В 290 раз]

**13.3.** Работа выхода электрона из металла равна 2,5 эВ. Определить скорость вылетающего из металла электрона, если он обладает энергией $10^{-18}$ Дж. [1,15 Мм/с]

**13.4.** Воздух между пластинами плоского конденсатора ионизируется рентгеновским излучением. Сила тока, текущего между пластинами, 10 мкА. Площадь каждой пластины конденсатора равна 200 см$^2$, расстояние между ними 1 см, разность потенциалов 100 В. Подвижность положительных ионов $b_+ = 1{,}4$ см$^2$/(В·с) и отрицательных $b_- = 1{,}9$ см$^2$/(В·с); заряд каждого иона равен элементарному заряду. Определить концентрацию пар ионов между пластинами, если ток далек от насыщения. [$9{,}5 \cdot 10^{14}$ м$^{-3}$]

**13.5.** Ток насыщения при несамостоятельном разряде равен 9,6 пА. Определить число пар ионов, создаваемых в 1 с внешним ионизатором. [$3 \cdot 10^7$]

# Глава 14
# Магнитное поле

## § 109. Магнитное поле и его характеристики

Опыт показывает, что, подобно тому, как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электростатическое поле, так в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты, возникает силовое поле, называемое **магнитным.** Наличие магнитного поля обнаруживается по силовому действию на внесенные в него проводники с током или постоянные магниты. Название «магнитное поле» связывают с ориентацией магнитной стрелки под действием поля, создаваемого током (это явление впервые обнаружено датским физиком Х. Эрстедом (1777—1851)).

Электрическое поле действует как на неподвижные, так и на движущиеся в нем электрические заряды. Важнейшая особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует *только на движущиеся* в этом поле электрические заряды. Опыт показывает, что характер воздействия магнитного поля на ток различен в зависимости от формы проводника, по которому течет ток, от расположения проводника и от направления тока. Следовательно, чтобы охарактеризовать магнитное поле, надо рассмотреть его действие на определенный ток.

Подобно тому, как при исследовании электростатического поля использовались точечные заряды, при исследовании магнитного поля используется *замкнутый плоский контур с током (рамка с током),* размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле. Ориентация контура в пространстве характеризуется направлением нормали к контуру. В качестве положительного направления нормали принимается направление, связанное с током *правилом правого винта,* т. е. за положительное направление нормали принимается направление поступательного движения винта, головка которого вращается в на-

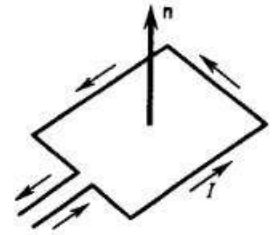



Рис. 160

правлении тока, текущего в рамке (рис. 160).

Опыты показывают, что магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие, поворачивая ее определенным образом. Этот результат связывается с определенным направлением магнитного поля. За направление магнитного поля в данной точке принимается направление, вдоль которого располагается положительная нормаль к рамке (рис. 161). За направление магнитного поля может быть также принято направление, совпадающее с направлением силы, которая действует




Рис. 161

на северный полюс магнитной стрелки, помещенной в данную точку. Так как оба полюса магнитной стрелки лежат в близких точках поля, то силы, действующие на оба полюса, равны друг другу. Следовательно, на магнитную стрелку действует пара сил, поворачивающая ее так, чтобы ось стрелки, соединяющая южный полюс с северным, совпадала с направлением поля.

Рамкой с током можно воспользоваться также и для количественного описания магнитного поля. Так как рамка с током испытывает ориентирующее действие поля, то на нее в магнитном поле действует пара сил. Вращающий момент сил зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств рамки:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}], \qquad (109.1)$$

где **B — вектор магнитной индукции,** являющейся количественной характеристикой магнитного поля, $\mathbf{p}_m$ — **вектор магнитного момента рамки** с током. Для плоского контура с током $I$

$$\mathbf{p}_m = I S \mathbf{n}, \qquad (109.2)$$

где $S$ — площадь поверхности контура (рамки), $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности рамки. Направление $\mathbf{p}_m$ совпадает, таким образом, с направлением положительной нормали.

Если в данную точку магнитного поля помещать рамки с различными магнитными моментами, то на них действуют различные вращающие моменты, однако отношение $M_{max}/p_m$ ($M_{max}$ — максимальный вращающий момент) для всех контуров одно и то же и поэтому может служить характеристикой магнитного поля, называемой магнитной индукцией:

$$B = M_{max}/p_m.$$

**Магнитная индукция** в данной точке *однородного* магнитного поля определяется максимальным вращающим моментом, действующим на рамку с магнитным моментом, равным единице, когда нормаль к рамке перпендикулярна направлению поля. Следует отметить, что вектор **B** может быть выведен также из закона Ампера (см. § 111) и из выражения для силы Лоренца (см. § 114).

Так как магнитное поле является *силовым*, то его, по аналогии с электрическим, изображают с помощью **линий магнитной индукции** — линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора **B**. Их направление задается правилом правого винта: головка винта, ввинчиваемого по направлению тока, вращается в направлении линий магнитной индукции.

Линии магнитной индукции можно «проявить» с помощью железных опилок, намагничивающихся в исследуемом поле и ведущих себя подобно маленьким магнитным стрелкам. На рис. 162, *а* показаны линии магнитной индукции поля кругового тока, на рис. 162, *б* — линии магнитной индукции поля соленоида (соленоид — равномерно намотанная на цилиндричес-

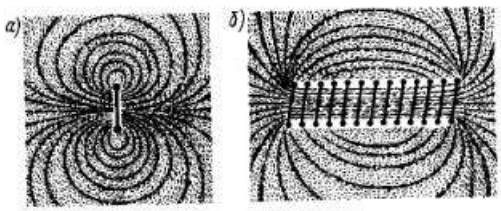



Рис. 162

кую поверхность проволочная спираль, по которой течет электрический ток).

Линии магнитной индукции всегда *замкнуты* и охватывают проводники с током. Этим они отличаются от линий напряженности электростатического поля, которые являются *разомкнутыми* (начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных (см. § 79)).

На рис. 163 изображены линии магнитной индукции полосового магнита; они выходят из северного полюса и входят в южный. Вначале казалось, что здесь наблюдается полная аналогия с линиями напряженности электростатического поля и полюсы магнитов играют роль магнитных «зарядов» (магнитных монополей). Опыты показали, что, разрезая магнит на части, его полюсы разделить нельзя, т. е. в отличие от электрических зарядов свободные магнитные «заряды» не существуют, поэтому линии магнитной индукции не могут обрываться на полюсах. В дальнейшем было установлено, что внутри полосовых магнитов имеется магнитное поле, аналогичное полю внутри соленоида, и линии магнитной индукции этого магнитного поля являются продолжением линий магнитной индукции вне магнита. Таким образом, линии магнитной индукции магнитного поля постоянных магнитов являются также замкнутыми.

До сих пор мы рассматривали макроскопические токи, текущие в проводниках. Однако, согласно предположению французского физика А. Ампера (1775—1836), в любом теле существуют микроскопические токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах. Эти микроскопические молекулярные токи создают свое магнитное поле и могут поворачиваться в магнитных полях макротоков. Например, если вблизи какого-то тела поместить проводник с током (макроток), то под действием его магнитного поля микротоки во всех атомах определенным образом ориентируются, создавая в теле дополнительное магнитное поле. Вектор магнитной индукции **B** характеризует *результирующее* магнитное поле, создаваемое всеми *макро-* и *микротоками*, т. е. при одном и том же токе и прочих равных условиях вектор **B** в *различных* средах будет иметь *разные* значения.

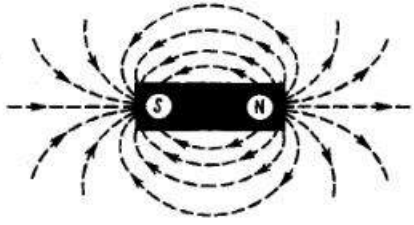


Рис. 163

Магнитное поле *макротоков* описывается **вектором напряженности H**. Для однородной изотропной среды вектор магнитной индукции связан с вектором напряженности следующим соотношением:

$$\mathbf{B}=\mu_0\mu\mathbf{H}, \qquad (109.3)$$

где $\mu_0$ — магнитная постоянная, $\mu$ — безразмерная величина — **магнитная проницаемость среды,** показывающая, во сколько раз магнитное поле макротоков $H$ усиливается за счет поля микротоков среды.

Сравнивая векторные характеристики электростатического (**E** и **D**) и магнитного (**B** и **H**) полей, укажем, что аналогом вектора напряженности электростатического поля **E** является вектор магнитной индукции **B**, так как векторы **E** и **B** определяют силовые действия этих полей и зависят от свойств среды. Аналогом вектора электрического смещения **D** является вектор напряженности **H** магнитного поля.

## § 110. Закон Био — Савара — Лапласа и его применение к расчету магнитного поля

Магнитное поле постоянных токов различной формы изучалось французскими учеными Ж. Био (1774—1862) и Ф. Саваром (1791—1841). Результаты этих опытов были обобщены выдающимся французским математиком и физиком П. Лапласом.

**Закон Био — Савара — Лапласа** для проводника с током $I$, элемент которого $d\mathbf{l}$ создает в некоторой точке $A$ (рис. 164) индукцию поля $d\mathbf{B}$, записывается в виде

$$d\mathbf{B}=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I[d\mathbf{l},\mathbf{r}]}{r^3}, \qquad (110.1)$$

где $d\mathbf{l}$ — вектор, по модулю равный длине $dl$ элемента проводника и совпадающий по направлению с током, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор,

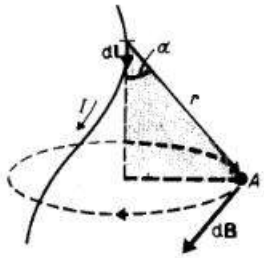



Рис. 164

проведенный из элемента $d\mathbf{l}$ проводника в точку $A$ поля, $r$ — модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Направление $d\mathbf{B}$ перпендикулярно $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$, т. е. перпендикулярно плоскости, в которой они лежат, и совпадает с касательной к линии магнитной индукции. Это направление может быть найдено по правилу нахождения линий магнитной индукции (правилу правого винта): направление вращения головки винта дает направление $d\mathbf{B}$, если поступательное движение винта соответствует направлению тока в элементе.

Модуль вектора $d\mathbf{B}$ определяется выражением

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I\, dl \sin\alpha}{r^2}, \qquad (110.2)$$

где $\alpha$ — угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$.

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив **принцип суперпозиции:** магнитная индукция результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций складываемых полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом в отдельности:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i. \qquad (110.3)$$

Расчет характеристик магнитного поля ($\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$) по приведенным формулам в общем случае довольно сложен. Однако если распределение тока имеет определенную симметрию, то применение закона Био — Савара — Лапласа совместно с принципом суперпозиции позволяет довольно просто рассчитать конкретные поля. Рассмотрим два примера.

**1. Магнитное поле прямого тока** — тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины (рис. 165). В произвольной точке $A$, удаленной от оси проводника на расстояние $R$, векторы $d\mathbf{B}$ от всех элементов тока имеют одинаковое направление, перпендикулярное плоскости чертежа («к нам»). Поэтому сложение векторов $d\mathbf{B}$ можно заменить сложением их модулей. В качестве постоянной интегрирования выберем угол $\alpha$ (угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$), выразив через него все остальные величины. Из рис. 165 следует, что

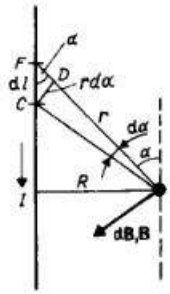



Рис. 165

$$r = \frac{R}{\sin\alpha}, \quad dl = \frac{r\, d\alpha}{\sin\alpha}$$

(радиус дуги $CD$ вследствие малости $dl$ равен $r$, и угол $FDC$ по этой же причине можно считать прямым). Подставив эти выражения в (110.2), получим, что магнитная индукция, создаваемая одним элементом проводника, равна

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} \sin\alpha\, d\alpha. \qquad (110.4)$$

Так как угол $\alpha$ для всех элементов прямого тока изменяется в пределах от 0 до $\pi$, то, согласно (110.3) и (110.4),

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R} \int_0^{\pi} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R}.$$

Следовательно, магнитная индукция поля прямого тока

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R}. \qquad (110.5)$$

**2. Магнитное поле в центре кругового проводника с током** (рис. 166). Как следует из рисунка, все элементы кругового проводника с током создают в центре маг-

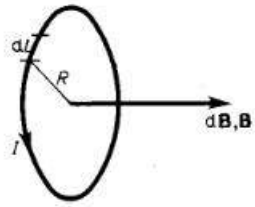



Рис. 166

нитное поле одинакового направления — вдоль нормали от витка. Поэтому сложение векторов $d\mathbf{B}$ можно заменить сложением их модулей. Так как все элементы проводника перпендикулярны радиусу-вектору ($\sin\alpha=1$) и расстояние всех элементов проводника до центра кругового тока одинаково и равно $R$, то, согласно (110.2),

$$dB=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{R^2}dl.$$

Тогда

$$B=\int dB=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int dl=$$

$$=\frac{\mu_0\mu I}{4\pi R^2}2\pi R=\mu_0\mu\frac{I}{2R}.$$

Следовательно, магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током

$$B=\mu_0\mu\frac{I}{2R}.$$

## § 111. Закон Ампера. Взаимодействие параллельных токов

Магнитное поле (см. § 109) оказывает на рамку с током ориентирующее действие. Следовательно, вращающий момент, испытываемый рамкой, есть результат действия сил на отдельные ее элементы. Обобщая результаты исследования действия магнитного поля на различные проводники с током, Ампер установил, что сила $d\mathbf{F}$, с которой магнитное поле действует на элемент проводника $dl$ с током, находящегося в магнитном поле, прямо пропорциональна силе тока $I$ в проводнике и векторному произведению элемента длины $d\mathbf{l}$ проводника на магнитную индукцию $\mathbf{B}$:

$$d\mathbf{F}=I[d\mathbf{l},\mathbf{B}]. \qquad (111.1)$$

Направление вектора $d\mathbf{F}$ может быть найдено, согласно (111.1), по общим правилам векторного произведения, откуда следует **правило левой руки:** если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор $\mathbf{B}$, а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на ток.

Модуль силы Ампера (см. (111.1)) вычисляется по формуле

$$dF=IBdl\sin\alpha, \qquad (111.2)$$

где $\alpha$ — угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$.

Закон Ампера применяется для определения силы взаимодействия двух токов. Рассмотрим два бесконечных прямолинейных параллельных тока $I_1$ и $I_2$ (направления токов указаны на рис. 167), расстояние между которыми равно $R$. Каждый из проводников создает магнитное поле, которое действует по закону Ампера на другой проводник с током. Рассмотрим, с какой силой действует магнитное поле тока $I_1$ на элемент $dl$ второго проводника с током $I_2$. Ток $I_1$ создает вокруг себя магнитное поле, линии магнитной индукции которого представляют собой концентрические окружности. Направление вектора $\mathbf{B}_1$ задается правилом правого винта, его модуль по формуле (110.5) равен

$$B_1=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_1}{R}.$$

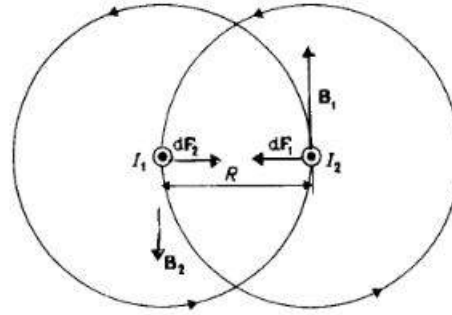



Рис. 167

Направление силы $d\mathbf{F}_1$, с которой поле $\mathbf{B}_1$ действует на участок $dl$ второго тока, определяется по правилу левой руки и указано на рисунке. Модуль силы, согласно (111.2), с учетом того, что угол $\alpha$ между элементами тока $I_2$ и вектором $\mathbf{B}_1$ прямой, равен

$$dF_1 = I_2 B_1 \, dl,$$

или, подставляя значение для $B_1$, получим

$$dF_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \qquad (111.3)$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что сила $d\mathbf{F}_2$, с которой магнитное поле тока $I_2$ действует на элемент $dl$ первого проводника с током $I_1$, направлена в противоположную сторону и по модулю равна

$$dF_2 = I_1 B_2 \, dl = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \qquad (111.4)$$

Сравнение выражений (111.3) и (111.4) показывает, что

$$dF_1 = dF_2,$$

т. е. *два параллельных тока одинакового направления притягиваются друг к другу* с силой

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \qquad (111.5)$$

Если *токи имеют противоположные направления*, то, используя правило левой руки, можно показать, что между ними действует *сила отталкивания*, определяемая формулой (111.5).

## § 112. Магнитная постоянная. Единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля

Если два параллельных проводника с током находятся в вакууме ($\mu = 1$), то сила взаимодействия на единицу длины проводника, согласно (111.5), равна

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R}. \qquad (112.1)$$

Для нахождения числового значения $\mu_0$ воспользуемся определением ампера, согласно которому при $I_1 = I_2 = 1$ А и $R = 1$ м $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7}$ Н/м. Подставив это значение в формулу (112.1), получим

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м},$$

где **генри** (Гн) — единица индуктивности (см. § 126).

Закон Ампера позволяет определить единицу магнитной индукции $B$. Предположим, что элемент проводника $dl$ с током $I$ перпендикулярен направлению магнитного поля. Тогда закон Ампера (см. (111.2)) запишется в виде

$$dF = IB dl,$$

откуда

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF}{dl}.$$

Единица магнитной индукции — **тесла** (Тл): 1 Тл — магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой в 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток в 1 А:

$$1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н/(А} \cdot \text{м)}.$$

Так как $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7}$ Н/А$^2$, а в случае вакуума ($\mu = 1$), согласно (109.3), $B = \mu_0 H$, то для данного случая

$$H = B/\mu_0.$$

Единица напряженности магнитного поля — ампер на метр (А/м): 1 А/м — напряженность такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл.

## § 113. Магнитное поле движущегося заряда

Каждый проводник с током создает в окружающем пространстве магнитное поле. Электрический же ток представляет собой упорядоченное движение электрических зарядов. Поэтому можно сказать, что любой движущийся в вакууме или среде заряд создает вокруг себя магнитное поле. В результате обобщения опытных данных

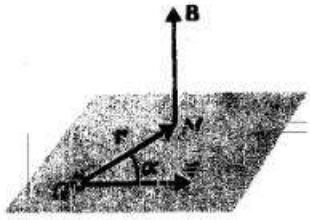



Рис. 168

был установлен закон, определяющий поле **B** точечного заряда $Q$, свободно движущегося с нерелятивистской скоростью **v**. *Под свободным движением заряда* понимается его движение с постоянной скоростью. Этот закон выражается формулой

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{Q[\mathbf{vr}]}{r^3}, \qquad (113.1)$$

где $r$ — радиус-вектор, проведенный от заряда $Q$ к точке наблюдения $M$ (рис. 168). Согласно выражению (113.1), вектор **B** направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы **v** и **r**, а именно: его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от **v** к **r**.

Модуль магнитной индукции (113.1) вычисляется по формуле

$$B=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{Qv}{r^2}\sin\alpha, \qquad (113.2)$$

где $\alpha$ — угол между векторами **v** и **r**.

Сравнивая выражения (110.1) и (113.1), видим, что движущийся заряд по своим магнитным свойствам эквивалентен элементу тока:

$$I\,d\mathbf{l}=Q\mathbf{v}.$$

Приведенные закономерности (113.1) и (113.2) справедливы лишь при малых скоростях ($v\ll c$) движущихся зарядов, когда электрическое поле свободно движущегося заряда можно считать электростатическим, т. е. создаваемым неподвижным зарядом, находящимся в той точке, где в данный момент времени находится движущийся заряд.

Формула (113.1) определяет магнитную индукцию положительного заряда, движущегося со скоростью **v**. Если движется отрицательный заряд, то $Q$ надо заменить на $-Q$. Скорость **v** — относительная скорость, т. е. скорость относительно наблюдателя. Вектор **B** в рассматриваемой системе отсчета зависит как от времени, так и от положения точки $M$ наблюдения. Поэтому следует подчеркнуть относительный характер магнитного поля движущегося заряда.

Впервые поле движущегося заряда удалось обнаружить американскому физику Г. Роуланду (1848—1901). Окончательно этот факт был установлен профессором Московского университета А. А. Эйхенвальдом (1863—1944), изучившим магнитное поле конвекционного тока, а также магнитное поле связанных зарядов поляризованного диэлектрика. Магнитное поле свободно движущихся зарядов было измерено академиком А. Ф. Иоффе, доказавшим эквивалентность, в смысле возбуждения магнитного поля, электронного пучка и тока проводимости.

## § 114. Действие магнитного поля на движущийся заряд

Опыт показывает, что магнитное поле действует не только на проводники с током (см. § 111), но и на отдельные заряды, движущиеся в магнитном поле. Сила, действующая на электрический заряд $Q$, движущийся в магнитном поле со скоростью **v**, называется **силой Лоренца** и выражается формулой

$$\mathbf{F}=Q[\mathbf{vB}], \qquad (114.1)$$

где **B** — индукция магнитного поля, в котором заряд движется.

Направление силы Лоренца определяется с помощью **правила левой руки:** если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор **B**, а четыре вытянутых пальца направить вдоль вектора **v** (для $Q>0$ направления $I$ и **v** совпадают, для $Q<0$ — противоположны), то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на *положительный заряд*. На рис. 169 показана взаимная ориентация векторов **v**, **B** (поле направлено к нам, на рисунке показано точками) и **F** для положительного заряда. На отрицательный заряд сила действует в противоположном направлении.

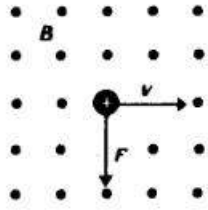



Рис. 169

Модуль силы Лоренца (см. (114.1)) равен

$$F = QvB \sin \alpha,$$

где $\alpha$ — угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$.

Отметим еще раз (см. § 109), что магнитное поле *не действует на покоящийся электрический заряд*. В этом существенное отличие магнитного поля от электрического. *Магнитное поле действует только на движущиеся в нем заряды.*

Так как по действию силы Лоренца можно определить модуль и направление вектора $\mathbf{B}$, то выражение для силы Лоренца может быть использовано (наравне с другими, см. § 109) для определения вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$.

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы, поэтому она изменяет только направление этой скорости, не изменяя ее модуля. Следовательно, сила Лоренца работы не совершает. Иными словами, постоянное магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей и кинетическая энергия этой частицы при движении в магнитном поле не изменяется.

Если на движущийся электрический заряд помимо магнитного поля с индукцией $\mathbf{B}$ действует и электрическое поле с напряженностью $\mathbf{E}$, то результирующая сила $\mathbf{F}$, приложенная к заряду, равна векторной сумме сил — силы, действующей со стороны электрического поля, и силы Лоренца:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q[\mathbf{vB}].$$

Это выражение называется **формулой Лоренца**. Скорость $\mathbf{v}$ в этой формуле есть скорость заряда относительно магнитного поля.

## § 115. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Выражение для силы Лоренца (114.1) позволяет найти ряд закономерностей движения заряженных частиц в магнитном поле. Направление силы Лоренца и направление вызываемого ею отклонения заряженной частицы в магнитном поле зависят от знака заряда $Q$ частицы. На этом основано определение знака заряда частиц, движущихся в магнитных полях.

Для вывода общих закономерностей будем считать, что магнитное поле *однородно* и на частицы электрические поля не действуют. Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью $\mathbf{v}$ вдоль линий магнитной индукции, то угол $\alpha$ между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ равен 0 или $\pi$. Тогда по формуле (114.1) сила Лоренца равна нулю, т. е. магнитное поле на частицу не действует и она движется равномерно и прямолинейно.

Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью $\mathbf{v}$, перпендикулярной вектору $\mathbf{B}$, то сила Лоренца $\mathbf{F} = Q[\mathbf{vB}]$ постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы. Согласно второму закону Ньютона, эта сила создает центростремительное ускорение. Отсюда следует, что частица будет двигаться по окружности, радиус $r$ которой определяется из условия

$$QvB = mv^2/r,$$

откуда

$$r = \frac{m}{Q}\frac{v}{B}. \qquad (115.1)$$

*Период вращения частицы*, т. е. время $T$, затрачиваемое ею на один полный оборот,

$$T = 2\pi r/v.$$

Подставив сюда выражение (115.1), получим

$$T = \frac{2\pi}{B}\frac{m}{Q}, \qquad (115.2)$$

т. е. период вращения частицы в однородном магнитном поле определяется только величиной, обратной удельному заряду

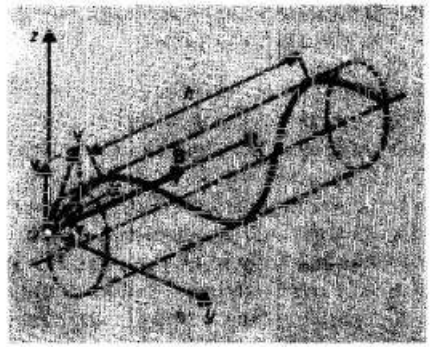


Рис. 170

$(Q/m)$ частицы, и магнитной индукцией поля, но не зависит от ее скорости (при $v \ll c$)). На этом основано действие циклических ускорителей заряженных частиц (см. § 116).

Если скорость **v** заряженной частицы направлена под углом $\alpha$ к вектору **B** (рис. 170), то ее движение можно представить в виде суперпозиции: 1) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью $v_{\parallel} = v \cos \alpha$; 2) равномерного движения со скоростью $v_{\perp} = v \sin \alpha$ по окружности в плоскости, перпендикулярной полю. Радиус окружности определяется формулой (115.1) (в данном случае надо заменить $v$ на $v_{\perp} = v \sin \alpha$). В результате сложения обоих движений возникает движение по спирали, ось которой параллельна магнитному полю (рис. 170). Шаг винтовой линии

$$h = v_{\parallel} T = vT \cos \alpha.$$

Подставив в последнее выражение (115.2), получим

$$h = 2\pi mv \cos \alpha / (BQ).$$

Направление, в котором закручивается спираль, зависит от знака заряда частицы.

Если скорость **v** заряженной частицы составляет угол $\alpha$ с направлением вектора **B** *неоднородного* магнитного поля, индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то $r$ и $h$ уменьшаются с ростом $B$. На этом основана фокусировка заряженных частиц в магнитном поле.

## § 116. Ускорители заряженных частиц

**Ускорителями** заряженных частиц называются устройства, в которых под действием электрических и магнитных полей создаются и управляются пучки высокоэнергетичных заряженных частиц (электронов, протонов, мезонов и т. д.).

Любой ускоритель характеризуется типом ускоряемых частиц, энергией, сообщаемой частицам, разбросом частиц по энергиям и интенсивностью пучка. **Ускорители** делятся на **непрерывные** (из них выходит равномерный по времени пучок) и **импульсные** (из них частицы вылетают порциями — импульсами). Последние характеризуются длительностью импульса. По форме траектории и механизму ускорения частиц ускорители делятся на **линейные, циклические** и **индукционные.** В линейных ускорителях траектории движения частиц близки к прямым линиям, в циклических и индукционных — траекториями частиц являются окружности или спирали.

Рассмотрим некоторые типы ускорителей заряженных частиц.

**1. Линейный ускоритель.** Ускорение частиц осуществляется электростатическим полем, создаваемым, например, высоковольтным генератором Ван-де-Граафа (см. § 92). Заряженная частица проходит поле однократно: заряд $Q$, проходя разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, приобретает энергию $W = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$. Таким способом частицы ускоряются до $\approx 10$ МэВ. Их дальнейшее ускорение с помощью источников постоянного напряжения невозможно из-за утечки зарядов, пробоев и т. д.

**2. Линейный резонансный ускоритель.** Ускорение заряженных частиц осуществляется переменным электрическим полем сверхвысокой частоты, *синхронно* изменяющимся с движением частиц. Таким способом протоны ускоряются до энергий порядка десятков мегаэлектрон-вольт, электроны — до десятков гигаэлектрон-вольт.

**3. Циклотрон** — циклический резонансный ускоритель тяжелых частиц (протонов, ионов). Его принципиальная схема приведена на рис. 171. Между полюсами

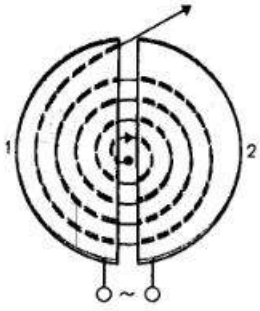



Рис. 171

сильного электромагнита помещается вакуумная камера, в которой находятся два электрода (*1* и *2*) в виде полых металлических полуцилиндров, или дуантов. К дуантам приложено переменное электрическое поле. Магнитное поле, создаваемое электромагнитом, однородно и перпендикулярно плоскости дуантов.

Если заряженную частицу ввести в центр зазора между дуантами, то она, ускоряемая электрическим и отклоняемая магнитным полями, войдя в дуант *1*, опишет полуокружность, радиус которой пропорционален скорости частицы (см. (115.1)). К моменту ее выхода из дуанта *1* полярность напряжения изменяется (при соответствующем подборе изменения напряжения между дуантами), поэтому частица вновь ускоряется и, переходя в дуант *2*, описывает там уже полуокружность большего радиуса и т. д.

Для непрерывного ускорения частицы в циклотроне необходимо выполнить *условие синхронизма* (условие «резонанса») — периоды вращения частицы в магнитном поле и колебаний электрического поля должны быть равны. При выполнении этого условия частица будет двигаться по раскручивающейся спирали, получая при каждом прохождении через зазор дополнительную энергию. На последнем витке, когда энергия частиц и радиус орбиты доведены до максимально допустимых значений, пучок частиц посредством отклоняющего электрического поля выводится из циклотрона.

Циклотроны позволяют ускорять протоны до энергий примерно 20 МэВ. Дальнейшее их ускорение в циклотроне ограничивается релятивистским возрастанием массы со скоростью (см. (39.1)), что приводит к увеличению периода обращения (по (115.2) он пропорционален массе), и синхронизм нарушается. Поэтому циклотрон совершенно неприменим для ускорения электронов (при $E=0{,}5$ МэВ $m=2m_0$, при $E=10$ МэВ $m=28m_0$!).

Ускорение релятивистских частиц в циклических ускорителях можно, однако, осуществить, если применять предложенный в 1944 г. советским физиком В. И. Векслером (1907—1966) и в 1945 г. американским физиком Э. Мак-Милланом (р. 1907) **принцип автофазировки.** Его идея заключается в том, что для компенсации увеличения периода вращения частиц, ведущего к нарушению синхронизма, изменяют либо частоту ускоряющего электрического, либо индукцию магнитного полей, либо то и другое. Принцип автофазировки используется в фазотроне, синхротроне и синхрофазотроне.

**4. Фазотрон** (синхроциклотрон) — циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (например, протонов, ионов, $\alpha$-частиц), в котором управляющее магнитное поле постоянно, а частота ускоряющего электрического поля медленно изменяется с периодом. Движение частиц в фазотроне, как и в циклотроне, происходит по раскручивающейся спирали. Частицы в фазотроне ускоряются до энергий, примерно равных 1 ГэВ (ограничения здесь определяются размерами фазотрона, так как с ростом скорости частиц растет радиус их орбиты).

**5. Синхротрон** — циклический резонансный ускоритель ультрарелятивистских электронов, в котором управляющее магнитное поле изменяется во времени, а частота ускоряющего электрического поля постоянна. Электроны в синхротроне ускоряются до энергий 5—10 ГэВ.

**6. Синхрофазотрон** — циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов), в котором объединяются свойства фазотрона и синхротрона, т. е. управляющее магнитное поле и частота ускоряющего электрического поля одновременно изменяются во времени так, чтобы радиус равновесной орбиты частиц оставался постоянным. Прото-

ны ускоряются в синхрофазотроне до энергий 500 ГэВ.

**7. Бетатрон** — циклический индукционный ускоритель электронов, в котором ускорение осуществляется вихревым электрическим полем (см. § 137), индуцируемым переменным магнитным полем, удерживающим электроны на круговой орбите. В бетатроне в отличие от рассмотренных выше ускорителей не существует проблемы синхронизации. Электроны в бетатроне ускоряются до энергий 100 МэВ. При $W > 100$ МэВ режим ускорения в бетатроне нарушается электромагнитным излучением электронов. Особенно распространены бетатроны на энергии 20—50 МэВ (выпускаются серийно).

## § 117. Эффект Холла

**Эффект Холла** * (1879) — это возникновение в металле (или полупроводнике) с током плотностью **j**, помещенном в магнитное поле **B**, электрического поля в направлении, перпендикулярном **B** и **j**.

Поместим металлическую пластинку с током плотностью **j** в магнитное поле **B**, перпендикулярное **j** (рис. 172). При данном направлении **j** скорость носителей тока в металле — электронов — направлена справа налево. Электроны испытывают действие силы Лоренца (см. § 114), которая в данном случае направлена вверх. Таким образом, у верхнего края пластинки возникнет повышенная концентрация электронов (он зарядится отрицательно), а у нижнего — их недостаток (зарядится положительно). В результате этого между краями пластинки возникнет дополнительное поперечное электрическое поле, направленное снизу вверх. Когда напряженность $E_B$ этого поперечного поля достигнет такой величины, что его действие на заряды будет уравновешивать силу Лоренца, то установится стационарное распределение зарядов в поперечном направлении. Тогда

$$eE_B = e\,\Delta\varphi/a = evB, \text{ или } \Delta\varphi = vBa,$$

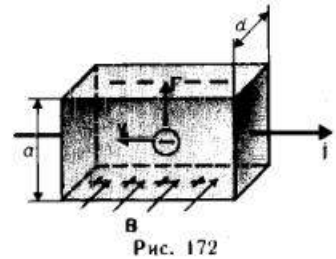


Рис. 172

где $a$ — ширина пластинки, $\Delta\varphi$ — *поперечная (холловская) разность потенциалов.*

Учитывая, что сила тока $I = jS = nevS$ ($S$ — площадь поперечного сечения пластинки толщиной $d$, $n$ — концентрация электронов, $v$ — средняя скорость упорядоченного движения электронов), получим

$$\Delta\varphi = \frac{I}{nead}Ba = \frac{1}{en}\frac{IB}{d} = R\frac{IB}{d}, \qquad (117.1)$$

т. е. холловская поперечная разность потенциалов прямо пропорциональна магнитной индукции $B$, силе тока $I$ и обратно пропорциональна толщине пластинки $d$. В формуле (117.1) $R = 1/(en)$ — **постоянная Холла,** зависящая от вещества. По измеренному значению постоянной Холла можно: 1) определить концентрацию носителей тока в проводнике (при известных характере проводимости и заряде носителей); 2) судить о природе проводимости полупроводников (см. § 242, 243), так как знак постоянной Холла совпадает со знаком заряда $e$ носителей тока. Эффект Холла поэтому наиболее эффективный метод изучения энергетического спектра носителей тока в металлах и полупроводниках. Он применяется также для умножения постоянных токов в аналоговых вычислительных машинах, в измерительной технике (датчики Холла) и т. д.

## § 118. Циркуляция вектора B для магнитного поля в вакууме

Аналогично циркуляции вектора напряженности электростатического поля (см. § 83) введем циркуляцию вектора магнитной индукции. **Циркуляцией вектора B** по заданному замкнутому контуру

* Э. Холл (1855—1938) — американский физик.

называется интеграл

$$\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{l}=\oint_L B_l\,dl,$$

где $d\mathbf{l}$ — вектор элементарной длины контура, направленной вдоль обхода контура, $B_l=B\cos\alpha$ — составляющая вектора **B** в направлении касательной к контуру (с учетом выбранного направления обхода), $\alpha$ — угол между векторами **B** и $d\mathbf{l}$.

**Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора B):** циркуляция вектора **B** по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной $\mu_0$ на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{l}=\oint_L B_l\,dl=\mu_0\sum_{k=1}^{n} I_k, \quad (118.1)$$

где $n$ — число проводников с токами, охватываемых контуром $L$ произвольной формы. Каждый ток учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта; ток противоположного направления считается отрицательным. Например, для системы токов, изображенных на рис. 173,

$$\sum_{k=1}^{n} I_k=I_1+2I_2-0\cdot I_3-I_4.$$

Выражение (118.1) справедливо только *для поля в вакууме*, поскольку, как будет показано ниже, для поля в веществе необходимо учитывать молекулярные токи.

Продемонстрируем справедливость теоремы о циркуляции вектора **B** на примере магнитного поля прямого тока $I$, перпендикулярного плоскости чертежа и направленного к нам (рис. 174). Представим себе замкнутый контур в виде окружности радиуса $r$. В каждой точке этого контура вектор **B** одинаков по модулю и направлен по касательной к окружности (она является и линией магнитной индукции). Следовательно, циркуляция вектора **B** равна

$$\oint_L B_l\,dl=\oint_L B\,dl=B\oint_L dl=B\cdot 2\pi r.$$

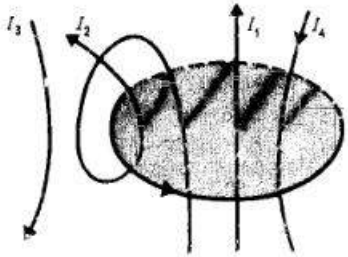


Рис. 173

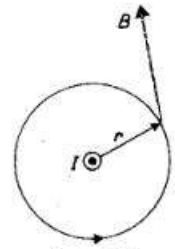


Рис. 174

Согласно выражению (118.1), получим $B\cdot 2\pi r=\mu_0 I$ (в вакууме), откуда

$$B=\mu_0 I/(2\pi r).$$

Таким образом, исходя из теоремы о циркуляции вектора **B** получили выражение для магнитной индукции поля прямого тока, выведенное выше (см. (110.5)).

Сравнивая выражения (83.3) и (118.1) для циркуляции векторов **E** и **B**, видим, что между ними существует *принципиальное различие*. Циркуляция вектора **E** электростатического поля всегда равна нулю, т. е. электростатическое поле является *потенциальным*. Циркуляция вектора **B** магнитного поля не равна нулю. Такое поле называется *вихревым*.

Теорема о циркуляции вектора **B** имеет в учении о магнитном поле такое же значение, как теорема Гаусса в электростатике, так как позволяет находить магнитную индукцию поля без применения закона Био — Савара — Лапласа.

## § 119. Магнитное поле соленоида и тороида

Рассчитаем, применяя теорему о циркуляции, индукцию магнитного поля внутри **соленоида.** Рассмотрим соленоид длиной $l$,

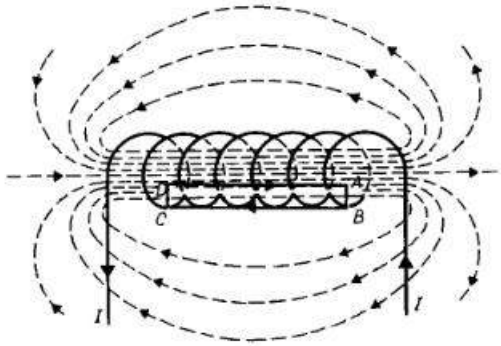



Рис. 175

имеющий $N$ витков, по которому течет ток (рис. 175). Длину соленоида считаем во много раз больше, чем диаметр его витков, т. е. рассматриваемый соленоид бесконечно длинный. Экспериментальное изучение магнитного поля соленоида (см. рис. 162, *б*) показывает, что внутри соленоида поле является однородным, вне соленоида — неоднородным и очень слабым.

На рис. 175 представлены линии магнитной индукции внутри и вне соленоида. Чем соленоид длиннее, тем меньше магнитная индукция вне его. Поэтому приближенно можно считать, что поле бесконечно длинного соленоида сосредоточено целиком внутри него, а полем вне соленоида можно пренебречь.

Для нахождения магнитной индукции $B$ выберем замкнутый прямоугольный контур $ABCDA$, как показано на рис. 175. Циркуляция вектора **B** по замкнутому контуру $ABCDA$, охватывающему все $N$ витков, согласно (118.1), равна

$$\oint_{ABCDA} B_l \, dl = \mu_0 NI.$$

Интеграл по $ABCDA$ можно представить в виде четырех интегралов: по $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$. На участках $AB$ и $CD$ контур перпендикулярен линиям магнитной индукции и $B_l = 0$. На участке вне соленоида $B = 0$. На участке $DA$ циркуляция вектора **B** равна $Bl$ (контур совпадает с линией магнитной индукции); следовательно,

$$\int_{DA} B_l \, dl = Bl = \mu_0 NI. \qquad (119.1)$$

Из (119.1) приходим к выражению для магнитной индукции поля внутри соленоида (в вакууме):

$$B = \mu_0 NI/l. \qquad (119.2)$$

Получили, что поле внутри соленоида *однородно* (краевыми эффектами в областях, прилегающих к торцам соленоида, при расчетах пренебрегают). Однако отметим, что вывод этой формулы не совсем корректен (линии магнитной индукции замкнуты, и интеграл по внешнему участку магнитного поля строго нулю не равен). Корректно рассчитать поле внутри соленоида можно применяя закон Био — Савара — Лапласа; в результате получается та же формула (119.2).

Важное значение для практики имеет также магнитное поле **тороида** — кольцевой катушки, витки которой намотаны на сердечник, имеющий форму тора (рис. 176). Магнитное поле, как показывает опыт, сосредоточено внутри тороида, вне его поле отсутствует.

Линии магнитной индукции в данном случае, как следует из соображений симметрии, есть окружности, центры которых расположены по оси тороида. В качестве контура выберем одну такую окружность радиуса $r$. Тогда, по теореме о циркуляции (118.1),

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI,$$

откуда следует, что магнитная индукция внутри тороида (в вакууме)

$$B = \mu_0 NI/(2\pi r),$$

где $N$ — число витков тороида.

Если контур проходит вне тороида, то токов он не охватывает и $B \cdot 2\pi r = 0$. Это означает, что поле вне тороида отсутствует (что показывает и опыт).

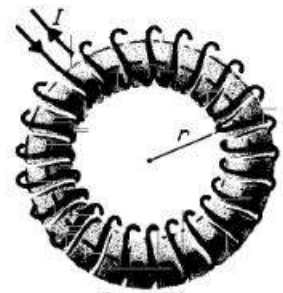



Рис. 176

## § 120. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для поля B

**Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком)** через площадку $dS$ называется *скалярная* физическая величина, равная

$$d\Phi_B = \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = B_n\, dS, \qquad (120.1)$$

где $B_n = B\cos\alpha$ — проекция вектора **B** на направление нормали к площадке $dS$ ($\alpha$ — угол между векторами **n** и **B**), $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$ — вектор, модуль которого равен $dS$, а направление совпадает с направлением нормали **n** к площадке. Поток вектора **B** может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака $\cos\alpha$ (определяется выбором положительного направления нормали **n**). Обычно поток вектора **B** связывают с определенным контуром, по которому течет ток. В таком случае положительное направление нормали к контуру нами уже определено (см. § 109): оно связывается с током правилом правого винта. Таким образом, магнитный поток, создаваемый контуром через поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен.

Поток вектора магнитной индукции $\Phi_B$ через произвольную поверхность $S$ равен

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = \int_S B_n\, dS. \qquad (120.2)$$

Для однородного поля и плоской поверхности, расположенной перпендикулярно вектору **B**, $B_n = B = \text{const}$ и

$$\Phi_B = BS.$$

Из этой формулы определяется единица магнитного потока **вебер** (Вб): 1 Вб — магнитный поток, проходящий через плоскую поверхность площадью 1 м$^2$, расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл (1 Вб = 1 Тл · м$^2$).

**Теорема Гаусса для поля B:** поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = \oint_S B_n\, dS = 0. \qquad (120.3)$$

Эта теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми.

Итак, для потоков векторов **B** и **E** сквозь замкнутую поверхность в вихревом и потенциальном полях получаются различные выражения (см. (120.3), (81.2)).

В качестве примера рассчитаем поток вектора **B** через соленоид. Магнитная индукция однородного поля внутри соленоида с сердечником с магнитной проницаемостью $\mu$, согласно (119.2), равна

$$B = \mu_0 \mu N I / l.$$

Магнитный поток через один виток соленоида площадью $S$ равен

$$\Phi_1 = BS,$$

а полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида и называемый **потокосцеплением,**

$$\Psi = \Phi_1 N = NBS = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S. \qquad (120.4)$$

## § 121. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

На проводник с током в магнитном поле действуют силы, определяемые законом Ампера (см. § 111). Если проводник не закреплен (например, одна из сторон контура изготовлена в виде подвижной перемычки, рис. 177), то под действием силы Ампера он будет в магнитном поле перемещаться. Следовательно, магнитное поле совершает работу по перемещению проводника с током.

Для определения этой работы рас-

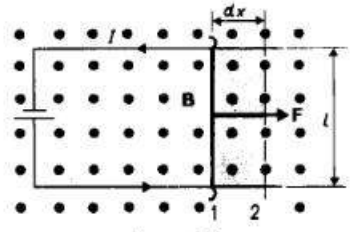



Рис. 177

смотрим проводник длиной $l$ с током $I$ (он может свободно перемещаться), помещенный в однородное внешнее магнитное поле, перпендикулярное плоскости контура. При указанных на рис. 177 направлениях тока и поля сила, направление которой определяется по правилу левой руки, а значение — по закону Ампера (см. (111.2)), равна

$$F = IBl.$$

Под действием этой силы проводник переместится параллельно самому себе на отрезок $dx$ из положения *1* в положение *2*. Работа, совершаемая магнитным полем, равна

$$dA = F\,dx = IBl\,dx = IB\,dS = I\,d\Phi,$$

так как $l\,dx = dS$ — площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле, $B\,dS = d\Phi$ — поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь. Таким образом,

$$dA = I\,d\Phi, \qquad (121.1)$$

т. е. работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на магнитный поток, *пересеченный движущимся проводником*. Полученная формула справедлива и для произвольного направления вектора **B**.

Вычислим работу по перемещению замкнутого контура с постоянным током $I$ в магнитном поле. Предположим, что контур $M$ перемещается в плоскости чертежа и в результате бесконечно малого перемещения займет положение $M'$, изображенное на рис. 178 штриховой линией. Направление тока в контуре (по часовой стрелке) и магнитного поля (перпендикулярно плоскости чертежа — за чертеж) указано на рисунке. Контур $M$ мысленно разобьем на два соединенных своими концами проводника: $ABC$ и $CDA$.

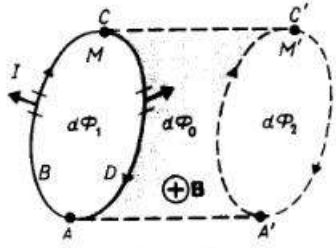


Рис. 178

Работа $dA$, совершаемая силами Ампера при рассматриваемом перемещении контура в магнитном поле, равна алгебраической сумме работ по перемещению проводников $ABC$ ($dA_1$) и $CDA$ ($dA_2$), т. е.

$$dA = dA_1 + dA_2. \qquad (121.2)$$

Силы, приложенные к участку $CDA$ контура, образуют с направлением перемещения острые углы, поэтому совершаемая ими работа $dA_2 > 0$. Согласно (121.1), эта работа равна произведению силы тока $I$ в контуре на пересеченный проводником $CDA$ магнитный поток. Проводник $CDA$ пересекает при своем движении поток $d\Phi_0$ сквозь поверхность, выполненную в цвете, и поток $d\Phi_2$, пронизывающий контур в его конечном положении. Следовательно,

$$dA_2 = I\,(d\Phi_0 + d\Phi_2). \qquad (121.3)$$

Силы, действующие на участок $ABC$ контура, образуют с направлением перемещения тупые углы, поэтому совершаемая ими работа $dA_1 < 0$. Проводник $ABC$ пересекает при своем движении поток $d\Phi_0$ сквозь поверхность, выполненную в цвете, и поток $d\Phi_1$, пронизывающий контур в начальном положении. Следовательно,

$$dA_1 = -I\,(d\Phi_0 + d\Phi_1). \qquad (121.4)$$

Подставляя (121.3) и (121.4) в (121.2), получим выражение для элементарной работы:

$$dA = I\,(d\Phi_2 - d\Phi_1),$$

где $d\Phi_2 - d\Phi_1 = d\Phi'$ — *изменение* магнитного потока через площадь, ограниченную контуром с током. Таким образом,

$$dA = I\,d\Phi'. \qquad (121.5)$$

Проинтегрировав выражение (121.5), определим работу, совершаемую силами Ампера, при конечном произвольном перемещении контура в магнитном поле:

$$A = I\,\Delta\Phi, \qquad (121.6)$$

т. е. работа по перемещению замкнутого

контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на *изменение магнитного потока, сцепленного с контуром*. Формула (121.6) остается справедливой для контура любой формы в произвольном магнитном поле.

## Контрольные вопросы

- Как, пользуясь магнитной стрелкой, можно определить знаки полюсов источников постоянного тока?
- Чему равен и как направлен магнитный момент рамки с током?
- Что называют индукцией магнитного поля? Как определяют направление вектора магнитной индукции **B**?
- Нарисуйте и покажите, как ориентированы линии магнитной индукции поля прямого тока.
- Что такое линии магнитной индукции? Как определяется их направление? Чем они отличаются от линий напряженности электростатического поля?
- Почему магнитное поле является вихревым?
- Записав закон Био—Савара—Лапласа, объясните его физический смысл.
- Рассчитайте, применяя закон Био—Савара—Лапласа, магнитное поле: 1) прямого тока; 2) в центре кругового проводника с током.
- Найдите выражение для силы взаимодействия двух бесконечных прямолинейных одинаковых токов противоположного направления. Начертите рисунок с указанием сил.
- Назовите единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля. Дайте их определения.
- Определите числовое значение магнитной постоянной.
- Почему движущийся заряд по своим магнитным свойствам эквивалентен элементу тока?
- Чему равна и как направлена сила, действующая на отрицательный электрический заряд, движущийся в магнитном поле?
- Чему равна работа силы Лоренца при движении протона в магнитном поле? Ответ обосновать.
- Когда заряженная частица движется в магнитном поле по спирали? От чего зависит шаг спирали? (Ответы подтвердите выводами формул.)
- Что такое ускорители заряженных частиц? Какие они бывают и чем характеризуются?
- Почему циклотроны не применяются для ускорения электронов?
- В чем заключается принцип автофазировки? Где он используется?
- В чем заключается эффект Холла? Выведите формулу для холловской разности потенциалов.
- В чем заключается теорема о циркуляции вектора магнитной индукции **B**? Применив ее, рассчитайте магнитное поле прямого тока.
- Какой вывод можно сделать, сравнивая циркуляцию векторов **E** и **B**?
- Используя теорему о циркуляции вектора магнитной индукции **B**, рассчитайте магнитное поле тороида.
- Какая теорема доказывает вихревой характер магнитного поля? Как она формулируется?
- Что называют потоком вектора магнитной индукции? Запишите теорему Гаусса для магнитного поля, объяснив ее физический смысл.
- Какая физическая величина выражается в веберах? Дайте определение вебера.
- Чему равна работа по перемещению проводника с током в магнитном поле? замкнутого контура с током? Выведите эти формулы; чем они принципиально отличаются?

## Задачи

**14.1.** Тонкое кольцо массой 15 г и радиусом 12 см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью 10 нКл/м. Кольцо равномерно вращается с частотой 8 $с^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через ее центр. Определить отношение магнитного момента кругового тока, создаваемого кольцом, к его моменту импульса. [251 нКл/кг]

**14.2.** По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной, равной 60 см, течет постоянный ток 3 А. Определить индукцию магнитного поля в центре квадрата. [1,41 мкТл]

**14.3.** По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расстояние между которыми равно 25 см, текут токи 20 и 30 А в противоположных направлениях. Определить магнитную индукцию $B$ в точке, удаленной на $r_1 = 30$ см от первого и $r_2 = 40$ см от второго проводника. [9,5 мкТл]

**14.4.** Определить магнитную индукцию на оси тонкого проволочного кольца радиусом 10 см, по которому течет ток 10 А, в точке, расположенной на расстоянии 15 см от центра кольца. [10,7 мкТл]

**14.5.** Два бесконечных прямолинейных параллельных проводника с одинаковыми токами, текущими в одном направлении, находятся друг от друга на расстоянии $R$. Чтобы их раздвинуть до расстояния $3R$, на каждый сантиметр длины проводника затрачивается работа $A = 220$ нДж. Определить силу тока в проводниках. [10 А]

**14.6.** Определить напряженность поля, создаваемого прямолинейно равномерно движущимся со скоростью 500 км/с электроном в точке, находящейся от него на расстоянии 20 нм и лежащей на перпендикуляре к скорости, проходящем через мгновенное положение электрона. [15,9 А/м]

**14.7.** Протон, ускоренный разностью потенциалов 0,5 кВ, влетая в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл, движется по окружности. Определить радиус этой окружности. [3,23 см]

**14.8.** Определить, при какой скорости пучок заряженных частиц, проходя перпендикулярно область, в которой созданы однородные поперечные электрическое и магнитное поля с $E = 10$ кВ/м и $B = 0{,}2$ Тл, не отклоняется. [50 км/с]

**14.9.** Циклотрон ускоряет протоны до энергии 10 МэВ. Определить радиус дуантов циклотрона при индукции магнитного поля 1 Тл. [>47 см]

**14.10.** Через сечение медной пластинки толщиной 0,1 мм пропускается ток 5 А. Пластинка помещается в однородное магнитное поле с индукцией 0,5 Тл, перпендикулярное ребру пластинки и направлению тока. Считая концентрацию электронов проводимости равной концентрации атомов, определить возникающую в пластине поперечную (холловскую) разность потенциалов. Плотность меди 8,93 г/см$^3$. [2,6 мкВ]

**14.11.** По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток 15 А. Определить, пользуясь теоремой о циркуляции вектора **B**, магнитную индукцию $B$ в точке, расположенной на расстоянии 15 см от проводника. [20 мкТл]

**14.12.** Определить, пользуясь теоремой о циркуляции вектора **B**, индукцию и напряженность магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей 300 витков, протекает ток 1 А. Внешний диаметр тороида равен 60 см, внутренний — 40 см. [0,24 мТл; 191 А/м]

**14.13.** Поток магнитной индукции через площадь поперечного сечения соленоида (без сердечника) $\Phi = 5$ мкВб. Длина соленоида $l = 25$ см. Определить магнитный момент $p_m$ этого соленоида. [1 А·м$^2$]

**14.14.** Круглая рамка с током площадью 20 см$^2$ закреплена параллельно магнитному полю ($B = 0{,}2$ Тл), и на нее действует вращающий момент 0,6 мН·м. Рамку освободили, после поворота на 90° ее угловая скорость стала 20 с$^{-1}$. Определить: 1) силу тока, текущего в рамке; 2) момент инерции рамки относительно ее диаметра. [1) 1,5 А; 2) $3 \cdot 10^{-6}$ кг·м$^2$]

# Глава 15
# Электромагнитная индукция

## § 122. Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея)

В гл. 14 было показано, что электрические токи создают вокруг себя магнитное поле. Связь магнитного поля с током привела к многочисленным попыткам возбудить ток в контуре с помощью магнитного поля. Эта фундаментальная задача была блестяще решена в 1831 г. английским физиком М. Фарадеем, открывшим **явление электромагнитной индукции,** заключающееся в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток, получивший название **индукционного.**

Рассмотрим классические опыты Фарадея, с помощью которых было обнаружено явление электромагнитной индукции.

**Опыт I** (рис. 179, *а*). Если в замкнутый на гальванометр соленоид вдвигать или выдвигать постоянный магнит, то в моменты его вдвигания или выдвигания наблюдается отклонение стрелки гальванометра (возникает индукционный ток); направления отклонений стрелки при вдвигании и выдвигании магнита противоположны. Отклонение стрелки гальванометра тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно катушки. При изменении полюсов магнита направление отклонения стрелки изменится. Для получения индукционного тока магнит можно оставлять неподвижным, тогда нужно относительно магнита передвигать соленоид.

**Опыт II.** Концы одной из катушек, вставленных одна в другую, присоединяются к гальванометру, а через другую катушку пропускается ток. Отклонение стрелки гальванометра наблюдается в моменты включения или выключения тока, в моменты его увеличения или уменьшения или при перемещении катушек друг относительно друга (рис. 179, *б*). Направления отклонений стрелки гальванометра также противоположны при включении и выключении тока, его увеличении и уменьшении, сближении и удалении катушек.

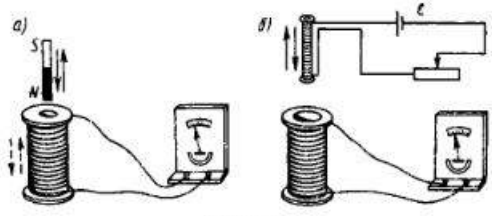



Рис. 179

Обобщая результаты своих многочисленных опытов, Фарадей пришел к выводу, что индукционный ток возникает всегда, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции. Например, при повороте в однородном магнитном поле замкнутого проводящего контура в нем также возникает индукционный ток. В данном случае индукция магнитного поля вблизи проводника остается постоянной, а меняется только поток магнитной индукции через площадь контура.

Опытным путем было также установлено, что значение индукционного тока совершенно не зависит *от способа изменения потока магнитной индукции*, а определяется лишь *скоростью* его изменения (в опытах Фарадея также доказывается, что отклонение стрелки гальванометра (сила тока) тем больше, чем больше скорость движения магнита, или скорость изменения силы тока, или скорость движения катушек).

Открытие явления электромагнитной индукции имело большое значение, так как была доказана возможность получения электрического тока с помощью магнитного поля. Этим была установлена взаимосвязь между электрическими и магнитными явлениями, что послужило в дальнейшем толчком для разработки теории электромагнитного поля.

## § 123. Закон Фарадея и его вывод из закона сохранения энергии

Обобщая результаты своих многочисленных опытов, Фарадей пришел к количественному закону электромагнитной индукции. Он показал, что всякий раз, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции, в кон-

туре возникает индукционный ток; возникновение индукционного тока указывает на наличие в цепи электродвижущей силы, называемой **электродвижущей силой электромагнитной индукции.** Значение индукционного тока, а следовательно, и э. д. с. электромагнитной индукции $\mathscr{E}_i$ определяются только скоростью изменения магнитного потока, т. е.

$$\mathscr{E}_i \sim \frac{d\Phi}{dt}. \qquad (123.1)$$

Теперь необходимо выяснить знак $\mathscr{E}_i$. В § 120 было показано, что знак магнитного потока зависит от выбора положительной нормали к контуру. В свою очередь, положительное направление нормали связано с током правилом правого винта (см. § 109). Следовательно, выбирая определенное положительное направление нормали, мы определяем как знак потока магнитной индукции, так и направление тока и э. д. с. в контуре. Пользуясь этими представлениями и выводами, можно соответственно прийти к формулировке **закона электромагнитной индукции Фарадея:** какова бы ни была причина изменения потока магнитной индукции, охватываемого замкнутым проводящим контуром, возникающая в контуре э. д. с.

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (123.2)$$

Знак минус показывает, что увеличение потока $\left(\frac{d\Phi}{dt} > 0\right)$ вызывает э. д. с. $\mathscr{E}_i < 0$, т. е. поле индукционного тока направлено навстречу потоку; уменьшение потока $\left(\frac{d\Phi}{dt} < 0\right)$ вызывает $\mathscr{E}_i > 0$, т. е. направления потока и поля индукционного тока совпадают. Знак минус в формуле (123.2) является математическим выражением правила Ленца — общего правила для нахождения направления индукционного тока, выведенного в 1833 г.

**Правило Ленца:** индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток.

Закон Фарадея (см. (123.2)) может быть непосредственно получен из закона сохранения энергии, как это впервые сделал Г. Гельмгольц. Рассмотрим проводник с током $I$, который помещен в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости контура, и может свободно перемещаться (см. рис. 177). Под действием силы Ампера **F**, направление которой показано на рисунке, проводник перемещается на отрезок $dx$. Таким образом, сила Ампера производит работу (см. (121.1)) $dA = I\,d\Phi$, где $d\Phi$ — пересеченный проводником магнитный поток.

Если полное сопротивление контура равно $R$, то, согласно закону сохранения энергии, работа источника тока за время $dt$ ($\mathscr{E} I\,dt$) будет складываться из работы на джоулеву теплоту ($I^2R\,dt$) и работы по перемещению проводника в магнитном поле ($I\,d\Phi$):

$$\mathscr{E} I\,dt = I^2R\,dt + I\,d\Phi,$$

откуда

$$I = \left(\mathscr{E} - \frac{d\Phi}{dt}\right)/R,$$

где $-\frac{d\Phi}{dt} = \mathscr{E}_i$ есть не что иное, как закон Фарадея (см. (123.2)).

**Закон Фарадея** можно сформулировать еще таким образом: э. д. с. $\mathscr{E}_i$ электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром. Этот закон является *универсальным:* э. д. с. $\mathscr{E}_i$ не зависит от способа изменения магнитного потока.

Э. д. с. электромагнитной индукции выражается в вольтах. Действительно, учитывая, что единицей магнитного потока является **вебер** (Вб), получим

$$\left[\frac{d\Phi}{dt}\right] = \frac{\text{Вб}}{\text{с}} = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}} =$$

$$= \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \text{В}.$$

Какова природа э. д. с. электромагнитной индукции? Если проводник (подвижная перемычка контура на рис. 177) дви-

жется в постоянном магнитном поле, то сила Лоренца, действующая на заряды внутри проводника, движущиеся вместе с проводником, будет направлена противоположно току, т. е. она будет создавать в проводнике индукционный ток противоположного направления (за направление электрического тока принимается движение положительных зарядов). Таким образом, возбуждение э. д. с. индукции при движении контура в постоянном магнитном поле объясняется действием силы Лоренца, возникающей при движении проводника.

Согласно закону Фарадея, возникновение э. д. с. электромагнитной индукции возможно и в случае неподвижного контура, находящегося в *переменном* магнитном поле. Однако сила Лоренца на неподвижные заряды не действует, поэтому в данном случае ею нельзя объяснить возникновение э. д. с. индукции. Максвелл для объяснения э. д. с. индукции в *неподвижных* проводниках предположил, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике. Циркуляция вектора $\mathbf{E}_B$ этого поля по любому неподвижному контуру $L$ проводника представляет собой э. д. с. электромагнитной индукции:

$$\mathscr{E}_i = \oint_L \mathbf{E}_B \, d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (123.3)$$

## § 124. Вращение рамки в магнитном поле

Явление электромагнитной индукции применяется для преобразования механической энергии в энергию электрического тока. Для этой цели используются **генераторы,** принцип действия которых можно рассмотреть на примере плоской рамки, вращающейся в однородном магнитном поле (рис. 180).

Предположим, что рамка вращается в однородном магнитном поле ($B = \text{const}$) равномерно с угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Магнитный поток, сцепленный с рамкой площадью $S$, в любой момент

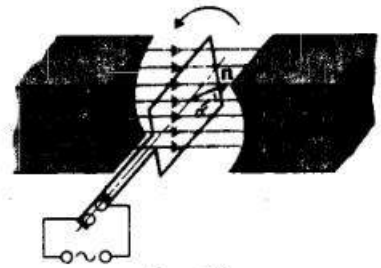


Рис. 180

времени $t$, согласно (120.1), равен

$$\Phi = B_n S = BS \cos\alpha = BS \cos\omega t,$$

где $\alpha = \omega t$ — угол поворота рамки в момент времени $t$ (начало отсчета выбрано так, чтобы при $t = 0$ $\alpha = 0$).

При вращении рамки в ней будет возникать переменная э. д. с. индукции (см. (123.2))

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin\omega t, \qquad (124.1)$$

изменяющаяся со временем по гармоническому закону. При $\sin\omega t = 1$ $\mathscr{E}_i$ максимальна, т. е.

$$\mathscr{E}_{max} = BS\omega \qquad (124.2)$$

определяет максимальные значения, достигаемые колеблющейся э. д. с. Учитывая (124.2), выражение (124.1) можно записать в виде

$$\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_{max} \sin\omega t.$$

Таким образом, если в однородном магнитном поле равномерно вращается рамка, то в ней возникает переменная э. д. с., изменяющаяся по гармоническому закону.

Из формулы (124.2) вытекает, что $\mathscr{E}_{max}$ (следовательно, и э. д. с. индукции) находится в прямой зависимости от величин $\omega$, $B$ и $S$. В СССР принята стандартная частота тока $\nu = \omega/(2\pi) = 50$ Гц, поэтому возможно лишь увеличение двух остальных величин. Для увеличения $B$ применяют мощные постоянные магниты или в электромагнитах пропускают значительный ток, а также внутрь электромагнита помещают сердечники из материалов с большой магнитной проницаемостью $\mu$. Если вращать не один, а ряд витков, соединенных последовательно, то тем са-

мым увеличивается $S$. Переменное напряжение снимается с вращающегося витка с помощью щеток, схематически изображенных на рис. 180.

Процесс превращения механической энергии в электрическую обратим. Если через рамку, помещенную в магнитное поле, пропускать электрический ток, то в соответствии с (109.1) на нее будет действовать вращающий момент и рамка начнет вращаться. На этом принципе основана работа **электродвигателей**, предназначенных для превращения электрической энергии в механическую.

## § 125. Вихревые токи (токи Фуко)

Индукционный ток возникает не только в линейных проводниках, но и в массивных сплошных проводниках, помещенных в переменное магнитное поле. Эти **токи** оказываются замкнутыми в толще проводника и поэтому называются **вихревыми**. Их также называют **токами Фуко** — по имени первого исследователя.

Токи Фуко, как и индукционные токи в линейных проводниках, подчиняются правилу Ленца: их магнитное поле направлено так, чтобы противодействовать изменению магнитного потока, индуцирующего вихревые токи. Например, если между полюсами невключенного электромагнита массивный медный маятник совершает практически незатухающие колебания (рис. 181), то при включении тока он испытывает сильное торможение и очень быстро останавливается. Это объясняется тем, что возникшие токи Фуко имеют такое направление, что действующие на них со стороны магнитного поля силы тормозят движение маятника. Этот факт используется для успокоения (демпфирования) подвижных частей различных приборов. Если в описанном маятнике сделать радиальные вырезы, то вихревые токи ослабляются и торможение почти отсутствует.

Вихревые токи помимо торможения (как правило, нежелательного эффекта) вызывают нагревание проводников. Поэтому для уменьшения потерь на нагревание якорей генераторов и сердечники трансформаторов делают не сплошными, а изготовляют из тонких пластин, отделенных одна от другой слоями изолятора, и устанавливают их так, чтобы вихревые токи были направлены поперек пластин. Джоулева теплота, выделяемая токами Фуко, используется в индукционных металлургических печах. Индукционная печь представляет собой тигель, помещаемый внутрь катушки, в которой пропускается ток высокой частоты. В металле возникают интенсивные вихревые токи, способные разогреть его до плавления. Такой способ позволяет плавить металлы в вакууме, в результате чего получаются сверхчистые материалы.

Вихревые токи возникают и в проводах, по которым течет переменный ток. Направление этих токов можно определить по правилу Ленца. На рис. 182, *а* показано направление вихревых токов при возрастании первичного тока в проводнике, а на

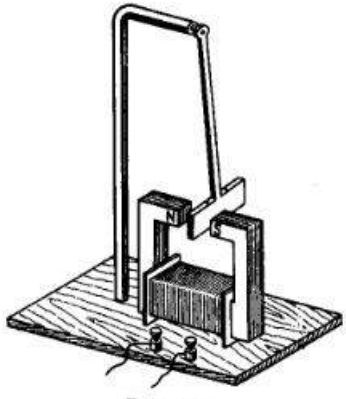


Рис. 181

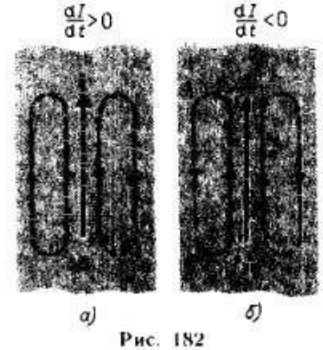



Рис. 182

рис. 182, *б* — при его убывании. В обоих случаях направление вихревых токов таково, что они противодействуют изменению первичного тока внутри проводника и способствуют его изменению вблизи поверхности. Таким образом, вследствие возникновения вихревых токов быстропеременный ток оказывается распределенным по сечению провода неравномерно — он как бы вытесняется на поверхность проводника. Это явление получило название **скин-эффекта** (от англ. skin — кожа) или **поверхностного эффекта.** Так как токи высокой частоты практически текут в тонком поверхностном слое, то провода для них делаются полыми.

Если сплошные проводники нагревать токами высокой частоты, то в результате скин-эффекта происходит нагревание только их поверхностного слоя. На этом основан метод поверхностной закалки металлов. Меняя частоту поля, он позволяет производить закалку на любой требуемой глубине.

## § 126. Индуктивность контура. Самоиндукция

Электрический ток, текущий в замкнутом контуре, создает вокруг себя магнитое поле, индукция которого, по закону Био — Савара — Лапласа (см. (110.2)), пропорциональна току. Сцепленный с контуром магнитный поток $\Phi$ поэтому пропорционален току $I$ в контуре:

$$\Phi = LI, \qquad (126.1)$$

где коэффициент пропорциональности $L$ называется **индуктивностью контура.**

При изменении силы тока в контуре будет изменяться также и сцепленный с ним магнитный поток; следовательно, в контуре будет индуцироваться э. д. с. Возникновение э. д. с. индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется **самоиндукцией.**

Из выражения (126.1) определяется единица индуктивности **генри** (Гн): 1 Гн — индуктивность такого контура, магнитный поток самоиндукции которого при токе в 1 А равен 1 Вб:

$$1\ \text{Гн} = 1\ \text{Вб/А} = 1\ \text{В}\cdot\text{с/А}.$$

Рассчитаем индуктивность бесконечно длинного соленоида. Согласно (120.4), полный магнитный поток через соленоид (потокосцепление) равен $\mu_0\mu \frac{N^2 I}{l} S$. Подставив это выражение в формулу (126.1), получим

$$L = \mu_0\mu \frac{N^2 S}{l}, \qquad (126.2)$$

т. е. индуктивность соленоида зависит от числа витков соленоида $N$, его длины $l$, площади $S$ и магнитной проницаемости $\mu$ вещества, из которого изготовлен сердечник соленоида.

Можно показать, что индуктивность контура в общем случае зависит только от геометрической формы контура, его размеров и магнитной проницаемости той среды, в которой он находится. В этом смысле индуктивность контура — аналог электрической емкости уединенного проводника, которая также зависит только от формы проводника, его размеров и диэлектрической проницаемости среды (см. § 93).

Применяя к явлению самоиндукции закон Фарадея (см. (123.2)), получим, что э. д. с. самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) =$$

$$= -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right).$$

Если контур не деформируется и магнитная проницаемость среды не изменяется (в дальнейшем будет показано, что последнее условие выполняется не всегда), то $L = \text{const}$ и

$$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}, \qquad (126.3)$$

где знак минус, обусловленный правилом Ленца, показывает, что наличие индуктивности в контуре приводит к *замедлению изменения* тока в нем.

Если ток со временем возрастает, то $\frac{dI}{dt} > 0$ и $\mathcal{E}_s < 0$, т. е. ток самоиндукции направлен навстречу току, обусловленному внешним источником, и тормозит его возрастание. Если ток со временем убыва-

ет, то $\frac{dI}{dt}<0$ и $\mathscr{E}_s>0$, т. е. индукционный ток имеет такое же направление, как и убывающий ток в контуре, и замедляет его убывание. Таким образом, контур, обладая определенной индуктивностью, приобретает электрическую инертность, заключающуюся в том, что любое изменение тока тормозится тем сильнее, чем больше индуктивность контура.

## § 127. Токи при размыкании и замыкании цепи

При всяком изменении силы тока в проводящем контуре возникает э. д. с. самоиндукции, в результате чего в контуре появляются дополнительные токи, называемые **экстратоками самоиндукции.** Экстратоки самоиндукции, согласно правилу Ленца, всегда направлены так, чтобы препятствовать изменениям тока в цепи, т. е. направлены противоположно току, создаваемому источником. При выключении источника тока экстратоки имеют такое же направление, что и ослабевающий ток. Следовательно, наличие индуктивности в цепи приводит к замедлению исчезновения или установления тока в цепи.

Рассмотрим процесс выключения тока в цепи, содержащей источник тока с э. д. с. $\mathscr{E}$, резистор сопротивлением $R$ и катушку индуктивностью $L$. Под действием внешней э. д. с. в цепи течет постоянный ток

$$I_0=\mathscr{E}/R$$

(внутренним сопротивлением источника тока пренебрегаем).

В момент времени $t=0$ отключим источник тока. Ток через катушку индуктивности $L$ начнет уменьшаться, что приведет к возникновению э. д. с. самоиндукции $\mathscr{E}_s=-L\frac{dI}{dt}$, препятствующей, согласно правилу Ленца, уменьшению тока. В каждый момент времени ток в цепи определяется законом Ома $I=\mathscr{E}_s/R$, или

$$IR=-L\frac{dI}{dt}. \qquad (127.1)$$

Разделив в выражении (127.1) переменные, получим $\frac{dI}{I}=-\frac{R}{L}dt$. Интегрируя это уравнение по $I$ (от $I_0$ до $I$) и $t$ (от 0 до $t$), находим $\ln(I/I_0)=-Rt/L$, или

$$I=I_0e^{-t/\tau}, \qquad (127.2)$$

где $\tau=L/R$ — постоянная, называемая **временем релаксации.** Из (127.2) следует, что $\tau$ есть время, в течение которого сила тока уменьшается в $e$ раз.

Таким образом, в процессе отключения источника э. д. с. сила тока убывает по экспоненциальному закону (127.2) и определяется кривой 1 на рис. 183. Чем больше индуктивность цепи и меньше ее сопротивление, тем больше $\tau$ и, следовательно, тем медленнее уменьшается ток в цепи при ее размыкании.

При замыкании цепи помимо внешней э. д. с. $\mathscr{E}$ возникает э. д. с. самоиндукции $\mathscr{E}_s=-L\frac{dI}{dt}$, препятствующая, согласно правилу Ленца, возрастанию тока. По закону Ома, $IR=\mathscr{E}+\mathscr{E}_s$, или

$$IR=\mathscr{E}-L\frac{dI}{dt}.$$

Введя новую переменную $u=IR-\mathscr{E}$, преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{du}{u}=-\frac{dt}{\tau},$$

где $\tau$ — время релаксации.

В момент замыкания ($t=0$) сила тока $I=0$ и $u=-\mathscr{E}$. Следовательно, интегрируя по $u$ (от $-\mathscr{E}$ до $IR-\mathscr{E}$) и $t$ (от 0 до $t$), находим $\ln\frac{IR-\mathscr{E}}{-\mathscr{E}}=-t/\tau$, или

$$I=I_0(1-e^{-t/\tau}), \qquad (127.3)$$

где $I_0=\mathscr{E}/R$ — установившийся ток (при $t\to\infty$)

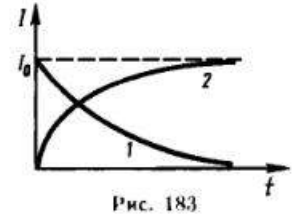



Рис. 183

Таким образом, в процессе включения источника э. д. с. нарастание силы тока в цепи задается функцией (127.3) и определяется кривой 2 на рис. 183. Сила тока возрастает от начального значения $I=0$ и асимптотически стремится к установившемуся значению $I_0=\mathscr{E}/R$. Скорость нарастания тока определяется тем же временем релаксации $\tau=L/R$, что и убывание тока. Установление тока происходит тем быстрее, чем меньше индуктивность цепи и больше ее сопротивление.

Оценим значение э. д. с. самоиндукции $\mathscr{E}_s$, возникающей при мгновенном увеличении сопротивления цепи постоянного тока от $R_0$ до $R$. Предположим, что мы размыкаем контур, когда в нем течет установившийся ток $I_0=\mathscr{E}/R_0$. При размыкании цепи ток изменяется по формуле (127.2). Подставив в нее выражение для $I_0$ и $\tau$, получим

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R_0}e^{-Rt/L}.$$

Э. д. с. самоиндукции

$$\mathscr{E}_s=-L\frac{dI}{dt}=\frac{R}{R_0}\mathscr{E}e^{-Rt/L},$$

т. е. при значительном увеличении сопротивления цепи ($R/R_0\gg 1$) обладающей большой индуктивностью, э. д. с. самоиндукции может во много раз превышать э. д. с. источника тока, включенного в цепь. Таким образом, необходимо учитывать, что контур, содержащий индуктивность, нельзя резко размыкать, так как это (возникновение значительных э. д. с. самоиндукции) может привести к пробою изоляции и выводу из строя измерительных приборов. Если в контур сопротивление вводить постепенно, то э. д. с. самоиндукции не достигнет больших значений.

## § 128. Взаимная индукция

Рассмотрим два неподвижных контура (*1* и *2*), расположенных достаточно близко друг от друга (рис. 184). Если в контуре *1* течет ток $I_1$, то магнитный поток, создаваемый этим током (поле, создающее этот поток, на рисунке изображено сплошными линиями), пропорционален $I_1$. Обозначим через $\Phi_{21}$ ту часть потока, которая пронизывает контур *2*. Тогда

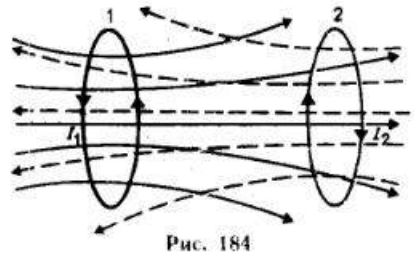


Рис. 184

$$\Phi_{21}=L_{21}I_1, \qquad (128.1)$$

где $L_{21}$ — коэффициент пропорциональности.

Если ток $I_1$ изменяется, то в контуре *2* индуцируется э. д. с. $\mathscr{E}_{i2}$, которая по закону Фарадея (см. (123.2)) равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока $\Phi_{21}$, созданного током в первом контуре и пронизывающего второй:

$$\mathscr{E}_{i2}=-\frac{d\Phi_{21}}{dt}=-L_{21}\frac{dI_1}{dt}.$$

Аналогично, при протекании в контуре *2* тока $I_2$ магнитный поток (его поле изображено на рис. 184 штриховой линией) пронизывает первый контур. Если $\Phi_{12}$ — часть этого потока, пронизывающего контур *1*, то

$$\Phi_{12}=L_{12}I_2.$$

Если ток $I_2$ изменяется, то в контуре *1* индуцируется э. д. с. $\mathscr{E}_{i1}$, которая равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока $\Phi_{12}$, созданного током во втором контуре и пронизывающего первый:

$$\mathscr{E}_{i1}=-\frac{d\Phi_{12}}{dt}=-L_{12}\frac{dI_2}{dt}.$$

Явление возникновения э. д. с. в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется **взаимной индукцией.** Коэффициенты пропорциональности $L_{21}$ и $L_{12}$ называются **взаимной индуктивностью контуров.** Расчеты, подтверждаемые опытом, показывают, что $L_{21}$ и $L_{12}$ равны друг другу, т. е.

$$L_{12}=L_{21}. \qquad (128.2)$$

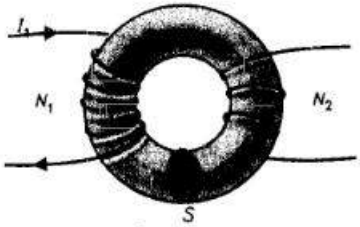


Рис. 185

Коэффициенты $L_{12}$ и $L_{21}$ зависят от геометрической формы, размеров, взаимного расположения контуров и от магнитной проницаемости окружающей контуры среды. Единица взаимной индуктивности та же, что и для индуктивности,— генри (Гн).

Рассчитаем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник. Этот случай имеет большое практическое значение (рис. 185). Магнитная индукция поля, создаваемого первой катушкой с числом витков $N_1$, током $I_1$ и магнитной проницаемостью $\mu$ сердечника, согласно (119.2), $B=\mu_0\mu\frac{N_1 I_1}{l}$, где $l$ — длина сердечника по средней линии. Магнитный поток через один виток второй катушки $\Phi_2=BS=\mu_0\mu\frac{N_1 I_1}{l}S$.

Тогда полный магнитный поток (потокосцепление) сквозь вторичную обмотку, содержащую $N_2$ витков,

$$\Psi=\Phi_2 N_2=\mu_0\mu\frac{N_1 N_2}{l}SI_1.$$

Поток $\Psi$ создается током $I_1$, поэтому, согласно (128.1), получаем

$$L_{21}=\frac{\Psi}{I_1}=\mu_0\mu\frac{N_1 N_2}{l}S. \qquad (128.3)$$

Если вычислить магнитный поток, создаваемый катушкой *2* сквозь катушку *1*, то для $L_{12}$ получим выражение в соответствии с формулой (128.3). Таким образом, взаимная индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник,

$$L_{12}=L_{21}=\mu_0\mu\frac{N_1 N_2}{l}S.$$

## § 129. Трансформаторы

Принцип действия трансформаторов, применяемых для повышения или понижения напряжения переменного тока, основан на явлении взаимной индукции. Впервые трансформаторы были сконструированы и введены в практику русским электротехником П. Н. Яблочковым (1847—1894) и русским физиком И. Ф. Усагиным (1855—1919). Принципиальная схема

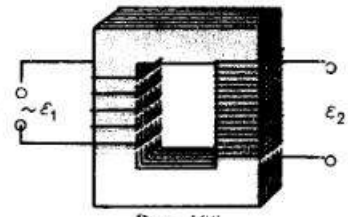


Рис. 186

трансформатора показана на рис. 186. Первичная и вторичная катушки (обмотки), имеющие соответственно $N_1$ и $N_2$ витков, укреплены на замкнутом железном сердечнике. Так как концы первичной обмотки присоединены к источнику переменного напряжения с э.д.с. $\mathscr{E}_1$, то в ней возникает переменный ток $I_1$, создающий в сердечнике трансформатора переменный магнитный поток $\Phi$, который практически полностью локализован в железном сердечнике и, следовательно, почти целиком пронизывает витки вторичной обмотки. Изменение этого потока вызывает во вторичной обмотке появление э.д.с. взаимной индукции, а в первичной — э.д.с. самоиндукции.

Ток $I_1$ первичной обмотки определяется согласно закону Ома:

$$\mathscr{E}_1-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(N_1\Phi)=I_1R_1,$$

где $R_1$ — сопротивление первичной обмотки. Падение напряжения $I_1R_1$ на сопротивлении $R_1$ при быстропеременных полях мало́ по сравнению с каждой из двух э. д. с., поэтому

$$\mathscr{E}_1\approx N_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \qquad (129.1)$$

Э. д. с. взаимной индукции, возникающая во вторичной обмотке,

$$\mathscr{E}_2 = -\frac{\mathrm{d}(N_2\Phi)}{\mathrm{d}t} = -N_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \quad (129.2)$$

Сравнивая выражения (129.1) и (129.2), получим, что э. д. с., возникающая во вторичной обмотке,

$$\mathscr{E}_2 = -\frac{N_2}{N_1}\mathscr{E}_1, \quad (129.3)$$

где знак минус показывает, что э. д. с. в первичной и вторичной обмотках противоположны по фазе.

Отношение числа витков $N_2/N_1$, показывающее, во сколько раз э. д. с. во вторичной обмотке трансформатора больше (или меньше), чем в первичной, называется **коэффициентом трансформации.**

Пренебрегая потерями энергии, которые в современных трансформаторах не превышают 2 % и связаны в основном с выделением в обмотках джоулевой теплоты и появлением вихревых токов, и применяя закон сохранения энергии, можем записать, что мощности тока в обеих обмотках трансформатора практически одинаковы:

$$\mathscr{E}_2 I_2 \approx \mathscr{E}_1 I_1,$$

откуда, учитывая соотношение (129.3), найдем

$$\mathscr{E}_2/\mathscr{E}_1 = I_1/I_2 = N_2/N_1,$$

т. е. токи в обмотках обратно пропорциональны числу витков в этих обмотках.

Если $N_2/N_1 > 1$, то имеем дело с **повышающим трансформатором,** увеличивающим переменную э. д. с. и понижающим ток (применяются, например, для передачи электроэнергии на большие расстояния, так как в данном случае потери на джоулеву теплоту, пропорциональные квадрату силы тока, снижаются); если $N_2/N_1 < 1$, то имеем дело с **понижающим трансформатором,** уменьшающим э. д. с. и повышающим ток (применяются, например, при электросварке, так как для нее требуется большой ток при низком напряжении).

Мы рассматривали трансформаторы, имеющие только две обмотки. Однако трансформаторы, используемые в радиоустройствах, имеют 4—5 обмоток, обладающих разными рабочими напряжениями. Трансформатор, состоящий из одной обмотки, называется **автотрансформатором.** В случае повышающего автотрансформатора э.д.с. подводится к части обмотки, а вторичная э.д.с. снимается со всей обмотки. В понижающем автотрансформаторе напряжение сети подается на всю обмотку, а вторичная э.д.с. снимается с части обмотки.

## § 130. Энергия магнитного поля

Проводник, по которому протекает электрический ток, всегда окружен магнитным полем, причем магнитное поле появляется и исчезает вместе с появлением и исчезновением тока. Магнитное поле, подобно электрическому, является носителем энергии. Естественно предположить, что энергия магнитного поля равна работе, которая затрачивается током на создание этого поля.

Рассмотрим контур индуктивностью $L$, по которому течет ток $I$. С данным контуром сцеплен магнитный поток (см. (126.1)) $\Phi = LI$, причем при изменении тока на $\mathrm{d}I$ магнитный поток изменяется на $\mathrm{d}\Phi = L\,\mathrm{d}I$. Однако для изменения магнитного потока на величину $\mathrm{d}\Phi$ (см. § 121) необходимо совершить работу $\mathrm{d}A = I\,\mathrm{d}\Phi = LI\,\mathrm{d}I$. Тогда работа по созданию магнитного потока $\Phi$ будет равна

$$A = \int_0^I LI\,\mathrm{d}I = LI^2/2.$$

Следовательно, энергия магнитного поля, связанного с контуром,

$$W = LI^2/2. \quad (130.1)$$

Исследование свойств переменных магнитных полей, в частности распространения электромагнитных волн, явилось доказательством того, что энергия магнитного поля локализована в пространстве. Это соответствует представлениям теории поля.

Энергию магнитного поля можно пред-

ставить как функцию величин, характеризующих это поле в окружающем пространстве. Для этого рассмотрим частный случай — однородное магнитное поле внутри длинного соленоида. Подставив в формулу (130.1) выражение (126.2), получим

$$W=\frac{1}{2}\mu_0\mu\frac{N^2I^2}{l}S.$$

Так как $I=Bl/(\mu_0\mu N)$ (см. (119.2)) и $B=\mu_0\mu H$ (см. (109.3)), то

$$W=\frac{B^2}{2\mu_0\mu}V=\frac{BH}{2}V, \qquad (130.2)$$

где $Sl=V$ — объем соленоида.

Магнитное поле соленоида однородно и сосредоточено внутри него, поэтому энергия (см. (130.2)) заключена в объеме соленоида и распределена в нем с постоянной **объемной плотностью**

$$w=\frac{W}{V}=\frac{B^2}{2\mu_0\mu}=\frac{\mu_0\mu H^2}{2}=\frac{BH}{2}. \qquad (130.3)$$

Выражение (130.3) для объемной плотности энергии магнитного поля имеет вид, аналогичный формуле (95.8) для объемной плотности энергии электростатического поля, с той разницей, что электрические величины заменены в нем магнитными. Формула (130.3) выведена для однородного поля, но она справедлива и для неоднородных полей. Выражение (130.3) справедливо только для сред, для которых зависимость $B$ от $H$ *линейная*, т. е. оно относится только к пара- и диамагнетикам (см. § 132).

## Контрольные вопросы

- В чем заключается явление электромагнитной индукции? Проанализируйте опыты Фарадея.
- Что является причиной возникновения э.д.с. индукции в замкнутом проводящем контуре? От чего и как зависит э.д.с. индукции, возникающая в контуре?
- Почему для обнаружения индукционного тока лучше использовать замкнутый проводник в виде катушки, а не в виде одного витка провода?
- Сформулируйте правило Ленца, проиллюстрировав его примерами.
- Всегда ли при изменении потока магнитной индукции в проводящем контуре в нем возникает э.д.с. индукции? индукционный ток?
- Возникает ли индукционный ток в проводящей рамке, поступательно движущейся в однородном магнитном поле?
- Покажите, что закон Фарадея есть следствие закона сохранения энергии.
- Какова природа э.д.с. электромагнитной индукции?
- Выведите выражение для э.д.с. индукции в плоской рамке, равномерно вращающейся в однородном магнитном поле. За счет чего ее можно увеличить?
- Что такое вихревые токи? Вредны они или полезны?
- Почему сердечники трансформаторов не делают сплошными?
- В чем заключаются явления самоиндукции и взаимной индукции? Вычислите э.д.с. индукции для обоих случаев.
- В чем заключается физический смысл времени релаксации $\tau=L/R$? Докажите, что оно имеет размерность времени.
- Приведите соотношение между токами в первичной и вторичной обмотках повышающего трансформатора.
- Когда э.д.с. самоиндукции больше — при замыкании или размыкании цепи постоянного тока?
- Какая физическая величина выражается в генри? Дайте определение генри.
- В чем заключается физический смысл индуктивности контура? взаимной индуктивности двух контуров? От чего они зависят?
- Запишите и проанализируйте выражения для объемной плотности энергии электростатического и магнитного полей. Чему равна объемная плотность энергии электромагнитного поля?
- Напряженность магнитного поля возросла в два раза. Как изменилась объемная плотность энергии магнитного поля?

## Задачи

**15.1.** Кольцо из алюминиевого провода ($\rho = 26$ нОм·м) помещено в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Диаметр кольца 20 см, диаметр провода 1 мм. Определить скорость изменения магнитного поля, если сила тока в кольце 0,5 А. [0,33 Тл/с]

**15.2.** В однородном магнитном поле, индукция которого 0,5 Тл, равномерно с частотой 300 мин$^{-1}$ вращается катушка, содержащая 200 витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь поперечного сечения катушки 100 см$^2$. Ось вращения перпендикулярна оси катушки и направлению магнитного поля. Определить максимальную э.д.с., индуцируемую в катушке. [31,4 В].

**15.3.** Определить, сколько витков проволоки, вплотную прилегающих друг к другу, диаметром 0,3 мм с изоляцией ничтожной толщины надо намотать на картонный цилиндр диаметром 1 см, чтобы получить однослойную катушку с индуктивностью 1 мГн. [304]

**15.4.** Определить, через сколько времени сила тока замыкания достигнет 0,98 предельного значения, если источник тока замыкают на катушку сопротивлением 10 Ом и индуктивностью 0,4 Гн. [0,16 с]

**15.5.** Два соленоида (индуктивность одного $L_1 = 0{,}36$ Гн, второго $L_2 = 0{,}64$ Гн) одинаковой длины и практически равного сечения вставлены один в другой. Определить взаимную индуктивность соленоидов. [0,48 Гн]

**15.6.** Автотрансформатор, понижающий напряжение с $U_1 = 5{,}5$ кВ до $U_2 = 220$ В, содержит в первичной обмотке $N_1 = 1500$ витков. Сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 2$ Ом. Сопротивление внешней цепи (в сети пониженного напряжения) $R = 13$ Ом. Пренебрегая сопротивлением первичной обмотки, определить число витков во вторичной обмотке трансформатора. [68]

# Глава 16
# Магнитные свойства вещества

## § 131. Магнитные моменты электронов и атомов

Рассматривая действие магнитного поля на проводники с током и на движущиеся заряды, мы не интересовались процессами, происходящими в веществе. Свойства среды учитывались формально с помощью магнитной проницаемости $\mu$. Для того чтобы разобраться в магнитных свойствах сред и их влиянии на магнитную индукцию, необходимо рассмотреть действие магнитного поля на атомы и молекулы вещества.

Опыт показывает, что все вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются. Рассмотрим причину этого явления с точки зрения строения атомов и молекул, положив в основу гипотезу Ампера (см. § 109), согласно которой в любом теле существуют микроскопические токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах.

Для качественного объяснения магнитных явлений с достаточным приближением можно считать, что электрон движется в атоме по круговым орбитам. Электрон, движущийся по одной из таких орбит, эквивалентен круговому току, поэтому он обладает **орбитальным магнитным моментом** (см. (109.2)) $\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}$, модуль которого

$$p_m = IS = e\nu S, \qquad (131.1)$$

где $I = e\nu$ — сила тока, $\nu$ — частота вращения электрона по орбите, $S$ — площадь орбиты. Если электрон движется по часовой стрелке (рис. 187), то ток направлен против часовой стрелки и вектор $\mathbf{p}_m$ в соответствии с правилом правого винта направлен перпендикулярно плоскости орбиты электрона.

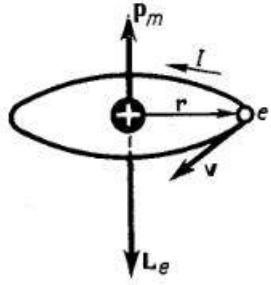



Рис. 187

С другой стороны, движущийся по орбите электрон обладает механическим моментом импульса $\mathbf{L}_e$, модуль которого, согласно (19.1),

$$L_e = mvr = 2mvS, \qquad (131.2)$$

где $v = 2\pi\nu r$, $\pi r^2 = S$. Вектор $\mathbf{L}_e$ (его направление также подчиняется правилу правого винта), называется **орбитальным механическим моментом электрона**.

Из рис. 187 следует, что направления $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{L}_e$ противоположны, поэтому, учитывая выражения (131.1) и (131.2), получим

$$\mathbf{p}_m = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}_e = g\mathbf{L}_e, \qquad (131.3)$$

где величина

$$g = -\frac{e}{2m} \qquad (131.4)$$

называется **гиромагнитным отношением орбитальных моментов** (общепринято писать со знаком «—», указывающим на то, что направления моментов противоположны). Это отношение, определяемое универсальными постоянными, одинаково для любой орбиты, хотя для разных орбит значения $v$ и $r$ различны. Формула (131.4) выведена для круговой орбиты, но она справедлива и для эллиптических орбит.

Экспериментальное определение гиромагнитного отношения проведено в опытах Эйнштейна и де Гааза* (1915), которые наблюдали поворот свободно подвешенного на тончайшей кварцевой нити железного стержня при его намагничении во внешнем магнитном поле (по обмотке соленоида пропускался переменный ток с частотой, равной частоте крутильных колебаний стержня). При исследовании вынужденных крутильных колебаний стержня определялось гиромагнитное отношение, которое оказалось равным $-(e/m)$. Таким образом, знак носителей, обусловливающих молекулярные токи, совпадал со знаком заряда электрона, а гиромагнитное отношение оказалось в два раза бóльшим, чем введенная ранее величина $g$ (см. (131.4)). Для объяснения этого результата, имевшего большое значение для дальнейшего развития физики, было предположено, а впоследствии доказано, что кроме орбитальных моментов (см. (131.1) и (131.2)) электрон обладает **собственным механическим моментом импульса** $\mathbf{L}_{es}$, называемым **спином**. Считалось, что спин обусловлен вращением электрона вокруг своей оси, что привело к целому ряду противоречий. В настоящее время установлено, что спин является неотъемлемым свойством электрона, подобно его заряду и массе. Спину электрона $\mathbf{L}_{es}$ соответствует **собственный (спиновый) магнитный момент** $\mathbf{p}_{ms}$, пропорциональный $\mathbf{L}_{es}$ и направленный в противоположную сторону:

$$\mathbf{p}_{ms} = g_s\mathbf{L}_{es}. \qquad (131.5)$$

Величина $g_s$ называется **гиромагнитным отношением спиновых моментов**.

Проекция собственного магнитного момента на направление вектора $\mathbf{B}$ может принимать только одно из следующих двух значений:

$$p_{ms\,B} = \pm\frac{eh}{2m} = \pm\mu_B,$$

где $h = h/(2\pi)$ ($h$ — постоянная Планка), $\mu_B$ — **магнетон Бора**, являющийся единицей магнитного момента электрона.

В общем случае магнитный момент электрона складывается из орбитального и спинового магнитных моментов. Магнитный момент атома, следовательно, складывается из магнитных моментов входящих в его состав электронов и магнитного момента ядра (обусловлен магнитными моментами входящих в ядро протонов и нейтронов). Однако магнитные моменты ядер в тысячи раз меньше магнитных моментов электронов, поэтому ими пренебрегают.

* В. И. де Гааз (1878—1960) — нидерландский физик.

Таким образом, общий магнитный момент атома (молекулы) $\mathbf{p}_a$ равен векторной сумме магнитных моментов (орбитальных и спиновых) входящих в атом (молекулу) электронов:

$$\mathbf{p}_a = \sum \mathbf{p}_m + \sum \mathbf{p}_{ms}. \qquad (131.6)$$

Еще раз обратим внимание на то, что при рассмотрении магнитных моментов электронов и атомов мы пользовались классической теорией, не учитывая ограничений, накладываемых на движение электронов законами квантовой механики. Однако это не противоречит полученным результатам, так как для дальнейшего объяснения намагничивания веществ существенно лишь то, что атомы обладают магнитными моментами.

## § 132 Диа- и парамагнетизм

Всякое вещество является **магнетиком**, т. е. оно способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться). Для понимания механизма этого явления необходимо рассмотреть действие магнитного поля на движущиеся в атоме электроны.

Ради простоты предположим, что электрон в атоме движется по круговой орбите. Если орбита электрона ориентирована относительно вектора **B** произвольным образом, составляя с ним угол $\alpha$ (рис. 188), то можно доказать, что она приходит в такое движение вокруг **B**, при котором вектор магнитного момента $\mathbf{p}_m$, сохраняя постоянным угол $\alpha$, вращается вокруг направления **B** с некоторой угловой скоростью. Такое движение в механике называется **прецессией**. Прецессию вокруг вертикальной оси, проходящей через точку опоры, совершает, например, диск волчка при замедлении движения.

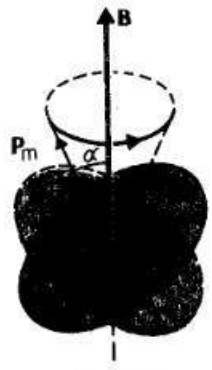


Рис. 188

Таким образом, электронные орбиты атома под действием внешнего магнитного поля совершают прецессионное движение, которое эквивалентно круговому току. Так как этот микроток индуцирован внешним магнитным полем, то, согласно правилу Ленца, у атома появляется составляющая магнитного поля, направленная противоположно внешнему полю. Наведенные составляющие магнитных полей атомов (молекул) складываются и образуют собственное магнитное поле вещества, ослабляющее внешнее магнитное поле. Этот эффект получил название **диамагнитного эффекта**, а вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле против направления поля, называются **диамагнетиками**.

В отсутствие внешнего магнитного поля диамагнетик немагнитен, поскольку в данном случае магнитные моменты электронов взаимно компенсируются, и суммарный магнитный момент атома (он равен векторной сумме магнитных моментов (орбитальных и спиновых) составляющих атом электронов) равен нулю. К диамагнетикам относятся многие металлы (например, Bi, Ag, Au, Cu), большинство органических соединений, смолы, углерод и т. д.

Так как диамагнитный эффект обусловлен действием внешнего магнитного поля на электроны атомов вещества, то диамагнетизм свойствен всем веществам. Однако наряду с диамагнитными веществами существуют и **парамагнитные** — вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле по направлению поля.

У парамагнитных веществ при отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты электронов не компенсируют друг друга, и атомы (молекулы) парамагнетиков всегда обладают магнитным моментом. Однако вследствие теплового движения молекул их магнитные моменты ориентированы беспорядочно, поэтому пара-

магнитные вещества магнитными свойствами не обладают. При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается *преимущественная* ориентация магнитных моментов атомов *по полю* (полной ориентации препятствует тепловое движение атомов). Таким образом, парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, совпадающее по направлению с внешним полем и усиливающее его. Этот **эффект** называется **парамагнитным.** При ослаблении внешнего магнитного поля до нуля ориентация магнитных моментов вследствие теплового движения нарушается и парамагнетик размагничивается. К парамагнетикам относятся редкоземельные элементы, Pt, Al и т. д. Диамагнитный эффект наблюдается и в парамагнетиках, но он значительно слабее парамагнитного и поэтому остается незаметным.

Из рассмотрения явления парамагнетизма следует, что его объяснение совпадает с объяснением ориентационной (дипольной) поляризации диэлектриков с полярными молекулами (см. § 87), только электрический момент атомов в случае поляризации надо заменить магнитным моментом атомов в случае намагничения.

Подводя итог качественному рассмотрению диа- и парамагнетизма, еще раз отметим, что атомы всех веществ являются носителями диамагнитных свойств. Если магнитный момент атомов велик, то парамагнитные свойства преобладают над диамагнитными и вещество является парамагнетиком; если магнитный момент атомов мал, то преобладают диамагнитные свойства и вещество является диамагнетиком.

## § 133. Намагниченность. Магнитное поле в веществе

Подобно тому, как для количественного описания поляризации диэлектриков вводилась поляризованность (см. § 88), для количественного описания намагничения магнетиков вводят векторную величину — **намагниченность**, определяемую магнитным моментом единицы объема магнетика:

$$\mathbf{J}=\mathbf{P}_m/V=\sum \mathbf{p}_a/V,$$

где $\mathbf{P}_m=\sum \mathbf{p}_a$ — магнитный момент магнетика, представляющий собой векторную сумму магнитных моментов отдельных молекул (см. (131.6)).

Рассматривая характеристики магнитного поля (см. § 109), мы вводили вектор магнитной индукции **B**, характеризующий результирующее магнитное поле, создаваемое всеми макро- и микротоками, и вектор напряженности **H**, характеризующий магнитное поле макротоков. Следовательно, магнитное поле в веществе складывается их двух полей: внешнего поля, создаваемого током, и поля, создаваемого намагниченным веществом. Тогда вектор магнитной индукции результирующего магнитного поля в магнетике равен векторной сумме магнитных индукций внешнего поля $\mathbf{B}_0$ (поля, создаваемого намагничивающим током в вакууме) и поля микротоков $\mathbf{B}'$ (поля, создаваемого молекулярными токами):

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathbf{B}', \qquad (133.1)$$

где $\mathbf{B}_0=\mu_0\mathbf{H}$ (см. (109.3)).

Для описания поля, создаваемого молекулярными токами, рассмотрим магнетик в виде кругового цилиндра сечения $S$ и длины $l$, внесенного в однородное внешнее магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}_0$. Возникающее в магнетике магнитное поле молекулярных токов будет направлено противоположно внешнему полю для диамагнетиков и совпадать с ним по направлению для парамагнетиков. Плоскости всех молекулярных токов расположатся перпендикулярно вектору $\mathbf{B}_0$, так как векторы их магнитных моментов $\mathbf{p}_m$ антипараллельны вектору $\mathbf{B}_0$ (для диамагнетиков) и параллельны $\mathbf{B}_0$ (для парамагнетиков). Если рассмотреть любое сечение цилиндра, перпендикулярное его оси, то во внутренних участках сечения магнетика молекулярные токи соседних атомов направлены навстречу друг другу и взаимно компенсируются (рис. 189). Нескомпенсированными будут лишь молекулярные токи, выходящие на боковую поверхность цилиндра.

Ток, текущий по боковой поверхности цилиндра, подобен току в соленоиде и создает внутри него поле, магнитную индук-

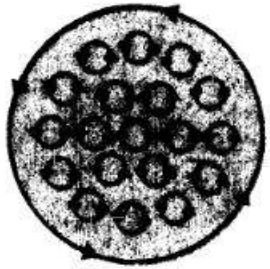


Рис. 189

цию $B'$ которого можно вычислить, учитывая формулу (119.2) для $N=1$ (соленоид из одного витка):

$$B'=\mu_0 I'/l, \qquad (133.2)$$

где $I'$ — сила молекулярного тока, $l$ — длина рассматриваемого цилиндра, а магнитная проницаемость $\mu$ принята равной единице.

С другой стороны, $I'/l$ — ток, приходящийся на единицу длины цилиндра, или его линейная плотность, поэтому магнитный момент этого тока $p=I'lS/l=I'V/l$, где $V$ — объем магнетика. Если $P$ — магнитный момент магнетика объемом $V$, то $P/V$ — намагниченность магнетика $J$. Таким образом,

$$J=I'/l. \qquad (133.3)$$

Сопоставляя (133.2) и (133.3), получим, что

$$B'=\mu_0 J,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{B}'=\mu_0\mathbf{J}.$$

Подставив выражения для $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}'$ в (133.1), получим

$$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}+\mu_0\mathbf{J}, \qquad (133.4)$$

или

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}=\mathbf{H}+\mathbf{J}. \qquad (133.5)$$

Как показывает опыт, в несильных полях намагниченность прямо пропорциональна напряженности поля, вызывающего намагничение, т. е.

$$\mathbf{J}=\chi\mathbf{H}, \qquad (133.6)$$

где $\chi$ — безразмерная величина, называемая **магнитной восприимчивостью вещества**. Для диамагнетиков $\chi$ отрицательна (поле молекулярных токов противоположно внешнему), для парамагнетиков — положительна (поле молекулярных токов совпадает с внешним).

Используя формулу (133.6), выражение (133.4) можно записать в виде

$$\mathbf{B}=\mu_0(1+\chi)\mathbf{H}, \qquad (133.7)$$

откуда

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1+\chi)}.$$

Безразмерная величина

$$\mu=1+\chi \qquad (133.8)$$

представляет собой магнитную проницаемость вещества. Подставив (133.8) в (133.7), придем к соотношению (109.3) $\mathbf{B}=\mu_0\mu\mathbf{H}$, которое ранее постулировалось.

Так как абсолютное значение магнитной восприимчивости для диа- и парамагнетиков очень мало (порядка $10^{-4}$—$10^{-6}$), то для них $\mu$ незначительно отличается от единицы. Это просто понять, так как магнитное поле молекулярных токов значительно слабее намагничивающего поля. Таким образом, для диамагнетиков $\chi<0$ и $\mu<1$, для парамагнетиков $\chi>0$ и $\mu>1$.

**Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора B)** является обобщением закона (118.1):

$$\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{l}=\oint_L B_l\,dl=\mu_0(I+I'),$$

где $I$ и $I'$ — соответственно алгебраические суммы макротоков (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых произвольным замкнутым контуром $L$. Таким образом, циркуляция вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости и молекулярных токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную. Вектор $\mathbf{B}$, таким образом, характеризует результирующее поле, созданное как макроскопическими токами в проводниках (токами проводимости),

так и микроскопическими токами в магнетиках, поэтому линии вектора магнитной индукции **B** не имеют источников и являются замкнутыми.

Можно доказать, что циркуляция намагниченности **J** по произвольному замкнутому контуру $L$ равна алгебраической сумме *молекулярных токов*, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \mathbf{J}\,d\mathbf{l} = I'.$$

Тогда закон полного тока для магнитного поля в веществе можно записать также в виде

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}\right) d\mathbf{l} = I, \qquad (133.9)$$

где $I$, подчеркнем это еще раз, есть алгебраическая сумма токов проводимости.

Выражение, стоящее в скобках в (133.9), согласно (133.5), есть не что иное, как введенный ранее вектор **H** напряженности магнитного поля. Итак, циркуляция вектора **H** по произвольному замкнутому контуру $L$ равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = I. \qquad (133.10)$$

Выражение (133.10) представляет собой **теорему о циркуляции вектора H**.

## § 134. Условия на границе раздела двух магнетиков

Рассмотрим условия для векторов **B** и **H** на границе раздела двух однородных магнетиков (магнитные проницаемости $\mu_1$ и $\mu_2$) *при отсутствии на границе тока проводимости*.

Построим вблизи границы раздела магнетиков *1* и *2* прямой цилиндр ничтожно малой высоты, одно основание которого находится в первом магнетике, другое — во втором (рис. 190). Основания $\Delta S$ настолько малы, что в пределах каждого из них вектор **B** одинаков. Согласно теореме

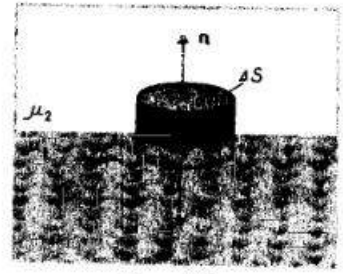



Рис. 190

Гаусса (120.3),

$$B_{2n}\Delta S - B_{1n}\Delta S = 0$$

(нормали **n** и **n′** к основаниям цилиндра направлены противоположно). Поэтому

$$B_{1n} = B_{2n}. \qquad (134.1)$$

Заменив, согласно $\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}$, проекции вектора **B** проекциями вектора **H**, умноженными на $\mu_0\mu$, получим

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \qquad (134.2)$$

Вблизи границы раздела двух магнетиков *1* и *2* построим небольшой замкнутый прямоугольный контур $ABCDA$ длиной $l$, ориентировав его так, как показано на рис. 191. Согласно теореме (133.10) о циркуляции вектора **H**,

$$\oint_{ABCDA} \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = 0$$

(токов проводимости на границе раздела нет), откуда

$$H_{2\tau}l - H_{1\tau}l = 0$$

(знаки интегралов по $AB$ и $CD$ разные, так как пути интегрирования противоположны, а интегралы по участкам $BC$ и $DA$ ни-

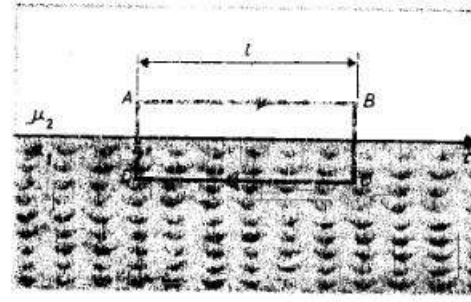



Рис. 191

чтожно малы). Поэтому

$$H_{1\tau}=H_{2\tau}. \qquad (134.3)$$

Заменив, согласно $\mathbf{B}=\mu_0\mu\mathbf{H}$, проекции вектора **H** проекциями вектора **B**, деленными на $\mu_0\mu$, получим

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}}=\frac{\mu_1}{\mu_2}. \qquad (134.4)$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора **B** ($B_n$) и тангенциальная составляющая вектора **H** ($H_\tau$) изменяются непрерывно (не претерпевают скачка), а тангенциальная составляющая вектора **B** ($B_\tau$) и нормальная составляющая вектора **H** ($H_n$) претерпевают скачок.

Из полученных условий (134.1)—(134.4) для составляющих векторов **B** и **H** следует, что линии этих векторов испытывают излом (преломляются). Как и в случае диэлектриков (см. § 90), можно найти закон преломления линий **B** (а значит, и линий **H**):

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1}=\frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

(предоставим это сделать по аналогии (см. § 90) читателю). Из этой формулы следует, что, входя в магнетик с большей магнитной проницаемостью, линии **B** и **H** удаляются от нормали.

## § 135. Ферромагнетики и их свойства

Помимо рассмотренных двух классов веществ — диа- и парамагнетиков, называемых **слабомагнитными веществами**, существуют еще **сильномагнитные вещества — ферромагнетики** — вещества, обладающие спонтанной намагниченностью, т. е. они намагничены даже при отсутствии внешнего магнитного поля. К ферромагнетикам кроме основного их представителя — железа (от него и идет название «ферромагнетизм») — относятся, например, кобальт, никель, гадолиний, их сплавы и соединения.

Ферромагнетики помимо способности сильно намагничиваться обладают еще и другими свойствами, существенно отличающими их от диа- и парамагнетиков.

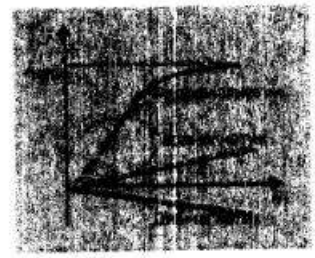


Рис. 192

Если для слабомагнитных веществ зависимость **J** от **H** линейна (см. (133.6) и рис. 192), то для ферромагнетиков эта зависимость, впервые изученная в 1878 г. методом баллистического гальванометра для железа русским физиком А. Г. Столетовым (1839—1896), является довольно сложной. По мере возрастания $H$ намагниченность $J$ сначала растет быстро, затем медленнее и, наконец, достигается так называемое **магнитное насыщение** $J_{\text{нас}}$, уже не зависящее от напряженности поля. Подобный характер зависимости $J$ от $H$ можно объяснить тем, что по мере увеличения намагничивающего поля увеличивается степень ориентации молекулярных магнитных моментов по полю, однако этот процесс начнет замедляться, когда остается все меньше и меньше неориентированных моментов, и, наконец, когда все моменты будут ориентированы по полю, дальнейшее увеличение $J$ прекращается и наступает магнитное насыщение.

Магнитная индукция $B=\mu_0(H+J)$ (см. (133.4)) в слабых полях растет быстро с ростом $H$ вследствие увеличения $J$, а в сильных полях, поскольку второе слагаемое постоянно ($J=J_{\text{нас}}$), $B$ растет с увеличением $H$ по линейному закону (рис. 193).

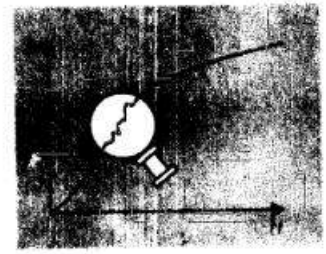


Рис. 193

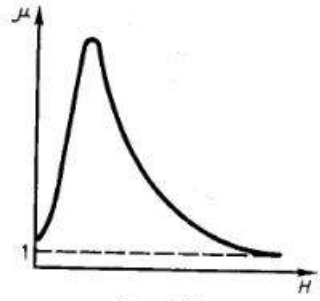



Рис. 194

Существенная особенность ферромагнетиков — не только большие значения μ (например, для железа — 5000, для сплава супермаллоя — 800 000!), но и зависимость μ от $H$ (рис. 194). Вначале μ растет с увеличением $H$, затем, достигая максимума, начинает уменьшаться, стремясь в случае сильных полей к 1 ($\mu = B/(\mu_0 H) = 1 + J/H$, поэтому при $J = J_{нас} = \text{const}$ с ростом $H$ отношение $J/H \to 0$, а $\mu \to 1$).

Характерная особенность ферромагнетиков состоит также в том, что для них зависимость $J$ от $H$ (а следовательно, и $B$ от $H$) определяется предысторией намагничения ферромагнетика. Это явление получило название **магнитного гистерезиса**. Если намагнитить ферромагнетик до насыщения (точка *1*, рис. 195), а затем начать уменьшать напряженность $H$ намагничивающего поля, то, как показывает опыт, уменьшение $J$ описывается кривой *1—2*, лежащей выше кривой *1—0*. При $H = 0$ $J$ отличается от нуля, т. е. в ферромагнетике наблюдается **остаточное намагничение** $J_{ос}$. С наличием остаточного намагничения связано существование **постоянных магнитов**. Намагничение обращается в нуль под действием поля $H_C$, имеющего направление, противоположное полю, вызвавшему намагничение. Напряженность $H_C$ называется **коэрцитивной силой**.

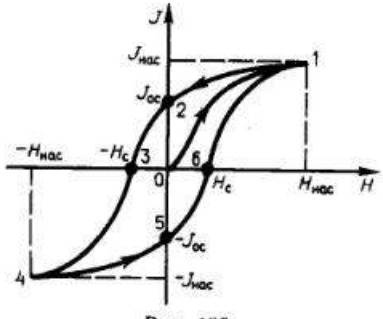



Рис. 195

При дальнейшем увеличении противоположного поля ферромагнетик перемагничивается (кривая *3—4*), и при $H = -H_{нас}$ достигается насыщение (точка *4*). Затем ферромагнетик можно опять размагнитить (кривая *4—5—6*) и вновь перемагнитить до насыщения (кривая *6—1*).

Таким образом, при действии на ферромагнетик переменного магнитного поля намагниченность $J$ изменяется в соответствии с кривой *1—2—3—4—5—6—1*, которая называется **петлей гистерезиса** (от греч. «запаздывание»). Гистерезис приводит к тому, что намагничение ферромагнетика не является однозначной функцией $H$, т. е. одному и тому же значению $H$ соответствует несколько значений $J$.

Различные ферромагнетики дают разные гистерезисные петли. **Ферромагнетики** с малой (в пределах от нескольких тысячных до 1—2 А/см) коэрцитивной силой $H_C$ (с узкой петлей гистерезиса) называются **мягкими**, с большой (от нескольких десятков до нескольких тысяч ампер на сантиметр) коэрцитивной силой (с широкой петлей гистерезиса) — **жесткими**. Величины $H_C$, $J_{ос}$ и $\mu_{max}$ определяют применимость ферромагнетиков для тех или иных практических целей. Так, жесткие ферромагнетики (например, углеродистые и вольфрамовые стали) применяются для изготовления постоянных магнитов, а мягкие (например, мягкое железо, сплав железа с никелем) — для изготовления сердечников трансформаторов.

Ферромагнетики обладают еще одной существенной особенностью: для каждого ферромагнетика имеется определенная температура, называемая **точкой Кюри**, при которой он теряет свои магнитные свойства. При нагревании образца выше точки Кюри ферромагнетик превращается в обычный парамагнетик. Переход вещества из ферромагнитного состояния в парамагнитное, происходящий в точке Кюри, не сопровождается поглощением или вы-

делением теплоты, т. е. в точке Кюри происходит фазовый переход II рода (см. § 75).

Наконец, процесс намагничения ферромагнетиков сопровождается изменением его линейных размеров и объема. Это явление получило название **магнитострикции**. Величина и знак эффекта зависят от напряженности $H$ намагничивающего поля, от природы ферромагнетика и ориентации кристаллографических осей по отношению к полю.

## § 136. Природа ферромагнетизма

Рассматривая магнитные свойства ферромагнетиков, мы не вскрывали физическую природу этого явления. Описательная теория ферромагнетизма была разработана французским физиком П. Вейссом (1865—1940). Последовательная количественная теория на основе квантовой механики развита советским физиком Я. И. Френкелем и немецким физиком В. Гейзенбергом (1901—1976).

Согласно представлениям Вейсса, ферромагнетики при температурах ниже точки Кюри обладают спонтанной намагниченностью независимо от наличия внешнего намагничивающего поля. Спонтанное намагничение, однако, находится в кажущемся противоречии с тем, что многие ферромагнитные материалы даже при температурах ниже точки Кюри не намагничены. Для устранения этого противоречия Вейсс ввел гипотезу, согласно которой ферромагнетик ниже точки Кюри разбивается на большое число малых макроскопических областей — **доменов**, самопроизвольно намагниченных до насыщения.

При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты отдельных доменов ориентированы хаотически и компенсируют друг друга, поэтому результирующий магнитный момент ферромагнетика равен нулю и ферромагнетик не намагничен. Внешнее магнитное поле ориентирует по полю магнитные моменты не отдельных атомов, как это имеет место в случае парамагнетиков, а целых областей спонтанной намагниченности. Поэтому с ростом $H$ намагниченность $J$ (см. рис. 192) и магнитная индукция $B$ (см. рис. 193) уже в довольно слабых полях растут очень быстро. Этим объясняется также увеличение $\mu$ ферромагнетиков до максимального значения в слабых полях (см. рис. 194). Эксперименты показали, что зависимость $B$ от $H$ не является такой плавной, как показано на рис. 193, а имеет ступенчатый вид. Это свидетельствует о том, что внутри ферромагнетика домены поворачиваются по полю скачком.

При ослаблении внешнего магнитного поля до нуля ферромагнетики сохраняют остаточное намагничение, так как тепловое движение не в состоянии быстро дезориентировать магнитные моменты столь крупных образований, какими являются домены. Поэтому и наблюдается явление магнитного гистерезиса (рис. 195). Для того чтобы ферромагнетик размагнитить, необходимо приложить коэрцитивную силу; размагничиванию способствуют также встряхивание и нагревание ферромагнетика. Точка Кюри оказывается той температурой, выше которой происходит разрушение доменной структуры.

Существование доменов в ферромагнетиках доказано экспериментально. Прямым экспериментальным методом их наблюдения является **метод порошковых фигур**. На тщательно отполированную поверхность ферромагнетика наносится водная суспензия мелкого ферромагнитного порошка (например, магнетита). Частицы оседают преимущественно в местах максимальной неоднородности магнитного поля, т. е. на границах между доменами. Поэтому осевший порошок очерчивает границы доменов и подобную картину можно сфотографировать под микроскопом. Линейные размеры доменов оказались равными $10^{-4}$—$10^{-2}$ см.

Дальнейшее развитие теории ферромагнетизма Френкелем и Гейзенбергом, а также ряд экспериментальных фактов позволили выяснить природу элементарных носителей ферромагнетизма. В настоящее время установлено, что магнитные свойства ферромагнетиков определяются *спиновыми магнитными моментами электронов* (прямым экспериментальным указанием этого служит опыт Эйнштейна и де

Гааза, см. § 131). Установлено также, что ферромагнитными свойствами могут обладать только кристаллические вещества, в атомах которых имеются недостроенные внутренние электронные оболочки с нескомпенсированными спинами. В подобных кристаллах могут возникать силы, которые вынуждают спиновые магнитные моменты электронов ориентироваться *параллельно друг другу*, что и приводит к возникновению областей спонтанного намагничения. Эти силы, называемые **обменными силами**, имеют квантовую природу — они обусловлены волновыми свойствами электронов.

Так как ферромагнетизм наблюдается только в кристаллах, а они обладают анизотропией (см. § 70), то в монокристаллах ферромагнетиков должна иметь место анизотропия магнитных свойств (их зависимость от направления в кристалле). Действительно, опыт показывает, что при одних направлениях в кристалле его намагниченность при данном значении напряженности магнитного поля наибольшая (направление легчайшего намагничения), в других — наименьшая (направление трудного намагничения). Из рассмотрения магнитных свойств ферромагнетиков следует, что они похожи на сегнетоэлектрики (см. § 91).

Существуют вещества, в которых обменные силы вызывают *антипараллельную* ориентацию спиновых магнитных моментов электронов. Такие тела называются **антиферромагнетиками**. Их существование теоретически было предсказано Л. Д. Ландау. Антиферромагнетиками являются некоторые соединения марганца ($MnO$, $MnF_2$), железа ($FeO$, $FeCl_2$) и многих других элементов. Для них также существует **антиферромагнитная точка Кюри (точка Нееля *)**, при которой магнитное упорядочение спиновых магнитных моментов нарушается и антиферромагнетик превращается в парамагнетик, претерпевая фазовый переход II рода (см. § 75).

В последнее время большое значение приобрели полупроводниковые ферромагнетики — **ферриты**, химические соединения типа $MeO \cdot Fe_2O_3$, где Me — ион двухвалентного металла (Mn, Co, Ni, Cu, Mg, Zn, Cd, Fe). Они отличаются заметными ферромагнитными свойствами и большим удельным электрическим сопротивлением (в миллиарды раз бóльшим, чем у металлов). Ферриты применяются для изготовления постоянных магнитов, ферритовых антенн, сердечников радиочастотных контуров, элементов оперативной памяти в вычислительной технике, для покрытия пленок в магнитофонах и видеомагнитофонах и т. д.

* Л. Неель (род. 1904) — французский физик.

## Контрольные вопросы

- Почему орбитальные магнитный и механический моменты электрона в атоме противоположно направлены?
- Что называют гиромагнитным отношением?
- Из каких магнитных моментов складывается магнитный момент атома?
- Что такое диамагнетики? парамагнетики? В чем различие их магнитных свойств?
- Что такое намагниченность? Какая величина может служить ее аналогом в электростатике?
- Запишите и объясните соотношения между магнитными проницаемостью и восприимчивостью для парамагнетика; для диамагнетика.
- Выведите связь между векторами магнитной индукции, напряженности магнитного поля и намагниченности.
- Объясните физический смысл циркуляции по произвольному замкнутому контуру векторов: 1) **B**; 2) **H**; 3) **J**.
- Выведите и прокомментируйте условия для векторов **B** и **H** на границе раздела двух магнетиков.
- Объясните петлю гистерезиса ферромагнетика. Что такое магнитострикция?

- Какие ферромагнетики являются магнитомягкими? магнитожесткими? Где их применяют?
- Каков механизм намагничения ферромагнетиков?
- Какую температуру для ферромагнетика называют точкой Кюри?

## Задачи

**16.1.** Напряженность однородного магнитного поля в меди равна 10 А/м. Определить магнитную индукцию поля, создаваемого молекулярными токами, если диамагнитная восприимчивость меди $|\chi|=8{,}8\cdot10^{-6}$. [1,11 пТл]

**16.2.** По круговому контуру радиусом 50 см, погруженному в жидкий кислород, течет ток 1,5 А. Определить намагниченность в центре этого контура, если магнитная восприимчивость жидкого кислорода $3{,}4\cdot10^{-3}$. [5,1 мА/м]

**16.3.** По обмотке соленоида индуктивностью 1 мГн, находящегося в диамагнитной среде, течет ток 2 А. Соленоид имеет длину 20 см, площадь поперечного сечения 10 см$^2$ и 400 витков. Определить внутри соленоида: 1) магнитную индукцию; 2) намагниченность. [1) 5 мТл; 2) 20 А/м]

**16.4.** Алюминиевый шарик радиусом 0,5 см помещен в однородное магнитное поле ($B_0=0{,}1$ Тл). Определить магнитный момент, приобретенный шариком, если магнитная восприимчивость алюминия $2{,}1\cdot10^{-5}$. [8,75 мкА·м$^2$]

# Глава 17
# Основы теории Максвелла для электромагнитного поля

## § 137. Вихревое электрическое поле

Из закона Фарадея (см. (123.2)) $\mathcal{E}_i=-\dfrac{d\Phi}{dt}$ следует, что *любое* изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции приводит к возникновению электродвижущей силы индукции и вследствие этого появляется индукционный ток. Следовательно, возникновение э.д.с. электромагнитной индукции возможно и в неподвижном контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Однако э.д.с. в любой цепи возникает только тогда, когда в ней на носители тока действуют сторонние силы — силы неэлектростатического происхождения (см. § 97). Поэтому возникает вопрос о природе сторонних сил в данном случае.

Опыт показывает, что эти сторонние силы не связаны ни с тепловыми, ни с химическими процессами в контуре; их возникновение также нельзя объяснить силами Лоренца, так как они на неподвижные заряды не действуют. Максвелл высказал гипотезу, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в контуре. Согласно представлениям Максвелла, контур, в котором появляется э.д.с., играет второстепенную роль, являясь своего рода лишь «прибором», обнаруживающим это поле.

Итак, по Максвеллу, изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое поле $\mathbf{E}_B$, циркуляция которого, по (123.3),

$$\oint_L \mathbf{E}_B\,d\mathbf{l}=\oint_L E_{Bl}\,dl=-\frac{d\Phi}{dt}, \tag{137.1}$$

где $\mathbf{E}_{Bl}$ — проекция вектора $\mathbf{E}_B$ на направление $d\mathbf{l}$.

Подставив в формулу (137.1) выражение $\Phi=\int_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S}$ (см. (120.2)), получим

$$\oint_L \mathbf{E}_B\,d\mathbf{l}=-\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S}.$$

Если поверхность и контур неподвижны, то операции дифференцирования и интегрирования можно поменять местами. Следовательно,

$$\oint_L \mathbf{E}_B\,d\mathbf{l}=-\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S}, \tag{137.2}$$

где символ частной производной подчеркивает тот факт, что интеграл $\int_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S}$ является функцией только от времени.

Согласно (83.3), циркуляция вектора напряженности электростатического поля (обозначим его $\mathbf{E}_Q$) вдоль любого замкнутого контура равна нулю:

$$\oint_L \mathbf{E}_Q\,d\mathbf{l}=\oint_L E_{Ql}\,dl=0. \quad (137.3)$$

Сравнивая выражения (137.1) и (137.3), видим, что между рассматриваемыми полями ($\mathbf{E}_B$ и $\mathbf{E}_Q$) имеется принципиальное различие: циркуляция вектора $\mathbf{E}_B$ в отличие от циркуляции вектора $\mathbf{E}_Q$ не равна нулю. Следовательно, электрическое поле $\mathbf{E}_B$, возбуждаемое магнитным полем, как и само магнитное поле (см. § 118), является *вихревым*.

## § 138. Ток смещения

Согласно Максвеллу, если всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, то должно существовать и обратное явление: всякое изменение электрического поля должно вызывать появление в окружающем пространстве вихревого магнитного поля. Для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем Максвелл ввел в рассмотрение так называемый **ток смещения.**

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую конденсатор (рис. 196). Между обкладками заряжающегося и разряжающегося конденсатора имеется переменное электрическое поле, поэтому, согласно Максвеллу, через конденсатор

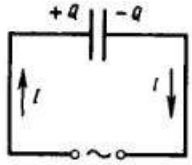


Рис. 196

«протекают» токи смещения, причем в тех участках, где отсутствуют проводники.

Найдем количественную связь между изменяющимся электрическим и вызываемым им магнитным полями. По Максвеллу, переменное электрическое поле в конденсаторе в каждый момент времени создает такое магнитное поле, как если бы между обкладками конденсатора существовал ток проводимости, равный току в подводящих проводах. Тогда можно утверждать, что токи проводимости ($I$) и смещения ($I_{см}$) равны: $I_{см}=I$. Ток проводимости вблизи обкладок конденсатора

$$I=\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}\int_S \sigma\,dS=$$

$$=\int_S \frac{\partial \sigma}{\partial t}\,dS=\int_S \frac{\partial D}{\partial t}\,dS, \quad (138.1)$$

(поверхностная плотность заряда $\sigma$ на обкладках равна электрическому смещению $D$ в конденсаторе (см. (92.1)). Подынтегральное выражение в (138.1) можно рассматривать как частный случай скалярного произведения $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,d\mathbf{S}$, когда $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ и $d\mathbf{S}$ взаимно параллельны. Поэтому для общего случая можно записать

$$I=\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,d\mathbf{S}.$$

Сравнивая это выражение с $I=I_{см}=\int_S \mathbf{j}_{см}\,d\mathbf{S}$ (см. (96.2)), имеем

$$\mathbf{j}_{см}=\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (138.2)$$

Выражение (138.2) и было названо Максвеллом **плотностью тока смещения.**

Рассмотрим, каково же направление векторов плотностей токов проводимости и смещения $\mathbf{j}$ и $\mathbf{j}_{см}$. При зарядке конденсатора (рис. 197, *а*) через проводник, соединяющий обкладки, ток течет от правой обкладки к левой; поле в конденсаторе усиливается, вектор $\mathbf{D}$ растет со временем; следовательно, $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}>0$, т. е. вектор $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

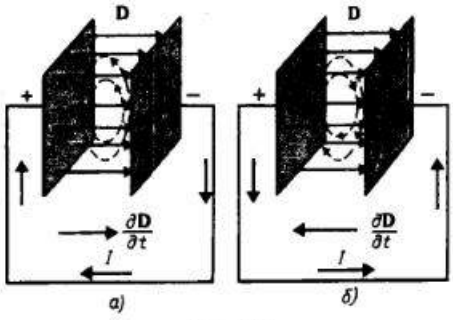



Рис. 197

направлен в ту же сторону, что и **D**. Из рисунка видно, что направления векторов $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ и **j** совпадают. При разрядке конденсатора (рис. 197, *б*) через проводник, соединяющий обкладки, ток течет от левой обкладки к правой; поле в конденсаторе ослабляется, вектор **D** убывает со временем; следовательно, $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} < 0$, т. е. вектор $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ направлен противоположно вектору **D**. Однако вектор $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ направлен опять так же, как и вектор **j**. Из разобранных примеров следует, что направление вектора **j**, а следовательно, и вектора $\mathbf{j}_{см}$ совпадает с направлением вектора $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, как это и следует из формулы (138.2).

Подчеркнем, что из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения лишь одно — способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле. Таким образом, ток смещения (в вакууме или веществе) создает в окружающем пространстве магнитное поле (линии индукции магнитных полей токов смещения при зарядке и разрядке конденсатора показаны на рис. 197 штриховой линией).

В диэлектриках ток смещения состоит из двух слагаемых. Так как, согласно (89.2), $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, где **E** — напряженность электростатического поля, а **P** — поляризованность (см. § 88), то плотность тока смещения

$$\mathbf{j}_{см} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \qquad (138.3)$$

где $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ — **плотность тока смещения в вакууме**, $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ — **плотность тока поляризации** — тока, обусловленного упорядоченным движением электрических зарядов в диэлектрике (смещение зарядов в неполярных молекулах или поворот диполей в полярных молекулах). Возбуждение магнитного поля токами поляризации правомерно, так как токи поляризации по своей природе не отличаются от токов проводимости. Однако то, что и другая часть плотности тока смещения $\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$, не связанная с движением зарядов, а обусловленная *только* изменением электрического поля во времени, также возбуждает магнитное поле, является *принципиально новым утверждением* Максвелла. Даже в вакууме всякое изменение во времени электрического поля приводит к возникновению в окружающем пространстве магнитного поля.

Следует отметить, что название «ток смещения» является условным, а точнее — исторически сложившимся, так как ток смещения по своей сути — это изменяющееся со временем электрическое поле. Ток смещения поэтому существует не только в вакууме или диэлектриках, но и внутри проводников, по которым течет переменный ток. Однако в данном случае он пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости. Наличие токов смещения подтверждено экспериментально советским физиком А. А. Эйхенвальдом, изучавшим магнитное поле тока поляризации, который, как следует из (138.3), является частью тока смещения.

Максвелл ввел понятие **полного тока**, равного сумме токов проводимости (а также конвекционных токов) и смещения. **Плотность полного тока**

$$\mathbf{j}_{полн} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Введя понятия тока смещения и полного тока, Максвелл по-новому подошел к рассмотрению замкнутости цепей переменного тока. Полный ток в них всегда замкнут,

т. е. на концах проводника обрывается лишь ток проводимости, а в диэлектрике (вакууме) между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости.

Максвелл обобщил теорему о циркуляции вектора **H** (см. (133.10)), введя в ее правую часть полный ток $I_{\text{полн}}=\int_S \mathbf{j}_{\text{полн}}\,d\mathbf{S}$ сквозь поверхность $S$, натянутую на замкнутый контур $L$. Тогда **обобщенная теорема о циркуляции вектора H** запишется в виде

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l}=\int_S\left(\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)d\mathbf{S}. \quad (138.4)$$

Выражение (138.4) справедливо всегда, свидетельством чего является полное соответствие теории и опыта.

## § 139. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

Введение Максвеллом понятия тока смещения привело его к завершению созданной им единой макроскопической теории электромагнитного поля, позволившей с единой точки зрения не только объяснить электрические и магнитные явления, но и предсказать новые, существование которых было впоследствии подтверждено.

В основе теории Максвелла лежат рассмотренные выше четыре уравнения:

1. Электрическое поле (см. § 137) может быть как потенциальным ($\mathbf{E}_Q$), так и вихревым ($\mathbf{E}_B$), поэтому напряженность суммарного поля $\mathbf{E}=\mathbf{E}_Q+\mathbf{E}_B$. Так как циркуляция вектора $\mathbf{E}_Q$ равна нулю (см. (137.3)), а циркуляция вектора $\mathbf{E}_B$ определяется выражением (137.2), то циркуляция вектора напряженности суммарного поля

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l}=-\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S}.$$

Это уравнение показывает, что источниками электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и меняющиеся во времени магнитные поля.

2. Обобщенная теорема о циркуляции вектора **H** (см. (138.4)):

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l}=\int_S\left(\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)d\mathbf{S}.$$

Это уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

3. Теорема Гаусса для поля **D** (см. (89.3)):

$$\oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S}=Q. \quad (139.1)$$

Если заряд распределен внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью $\rho$, то формула (139.1) запишется в виде

$$\oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S}=\int_V \rho\,dV.$$

4. Теорема Гаусса для поля **B** (см. (120.3)):

$$\oint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S}=0.$$

**Итак, полная система уравнений Максвелла в интегральной форме:**

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l}=-\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S};\quad \oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S}=\int_V \rho\,dV;$$

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l}=\int_S\left(\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)d\mathbf{S};\quad \oint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S}=0.$$

Величины, входящие в уравнения Максвелла, не являются независимыми и между ними существует следующая связь (изотропные не сегнетоэлектрические и не ферромагнитные среды):

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E},$$

$$\mathbf{B}=\mu_0\mu\mathbf{H},$$

$$\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E},$$

где $\varepsilon_0$ и $\mu_0$ — соответственно электрическая и магнитная постоянные, $\varepsilon$ и $\mu$ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости, $\gamma$ — удельная проводимость вещества.

Из уравнений Максвелла вытекает, что источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля, а магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

*Для стационарных полей* ($E=\text{const}$ и $B=\text{const}$) *уравнения Максвелла* примут вид

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l}=0; \quad \oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S}=Q;$$

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l}=I; \quad \oint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S}=0,$$

т. е. источниками электрического поля в данном случае являются только электрические заряды, источниками магнитного — только токи проводимости. В данном случае электрические и магнитные поля независимы друг от друга, что и позволяет изучать отдельно *постоянные* электрическое и магнитное поля.

Воспользовавшись известными из векторного анализа теоремами Стокса и Гаусса

$$\oint_L \mathbf{A}\,d\mathbf{l}=\int_S \operatorname{rot}\mathbf{A}\,d\mathbf{S};$$

$$\oint_S \mathbf{A}\,d\mathbf{S}=\int_V \operatorname{div}\mathbf{A}\,dV,$$

можно представить **полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме** (характеризующих поле в каждой точке пространства):

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\mathbf{D}=\rho;$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0.$$

Если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнений Максвелла — интегральная и дифференциальная — эквивалентны. Однако когда имеются **поверхности разрыва** — поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, то интегральная форма уравнений является более общей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и времени изменяются непрерывно. Чтобы достичь математической эквивалентности обеих форм уравнений Максвелла, дифференциальную форму дополняют *граничными условиями*, которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред. Интегральная форма уравнений Максвелла содержит эти условия. Они были рассмотрены раньше (см. § 90, 134):

$$D_{1n}=D_{2n}, \quad E_{1\tau}=E_{2\tau}, \quad B_{1n}=B_{2n}, \quad H_{1\tau}=H_{2\tau}$$

(первое и последнее уравнения отвечают случаям, когда на границе раздела нет ни свободных зарядов, ни токов проводимости).

Уравнения Максвелла — наиболее общие уравнения для электрических и магнитных полей в *покоящихся средах*. Они играют в учении об электромагнетизме такую же роль, как законы Ньютона в механике. Из уравнений Максвелла следует, что переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т. е. электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом — они образуют единое **электромагнитное поле.**

Теория Максвелла, являясь обобщением основных законов электрических и магнитных явлений, смогла объяснить не только уже известные экспериментальные факты, что также является важным ее следствием, но и предсказала новые явления. Одним из важных выводов этой теории явилось существование магнитного поля токов смещения (см. § 138), что позволило Максвеллу предсказать существование **электромагнитных волн** — переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью. В дальнейшем было доказано,

что скорость распространения свободного электромагнитного поля (не связанного с зарядами и токами) в вакууме равна скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Этот вывод и теоретическое исследование свойств электромагнитных волн привели Максвелла к созданию электромагнитной теории света, согласно которой свет представляет собой также электромагнитные волны. Электромагнитные волны на опыте были получены немецким физиком Г. Герцем (1857—1894), доказавшим, что законы их возбуждения и распространения полностью описываются уравнениями Максвелла. Таким образом, теория Максвелла была экспериментально подтверждена.

К электромагнитному полю применим только принцип относительности Эйнштейна, так как факт распространения электромагнитных волн в вакууме во всех системах отсчета с одинаковой скоростью $c$ не совместим с принципом относительности Галилея.

Согласно **принципу относительности Эйнштейна**, механические, оптические и электромагнитные явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково, т. е. описываются одинаковыми уравнениями. Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца: их вид не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, хотя величины **E, B, D, H** в них преобразуются по определенным правилам.

Из принципа относительности вытекает, что отдельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет относительный смысл. Так, если электрическое поле создается системой неподвижных зарядов, то эти заряды, являясь неподвижными относительно одной инерциальной системы отсчета, движутся относительно другой и, следовательно, будут порождать не только электрическое, но и магнитное поле. Аналогично, неподвижный относительно одной инерциальной системы отсчета проводник с постоянным током, возбуждая в каждой точке пространства постоянное магнитное поле, движется относительно других инерциальных систем, и создаваемое им переменное магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле.

Таким образом, теория Максвелла, ее экспериментальное подтверждение, а также принцип относительности Эйнштейна приводят к единой теории электрических, магнитных и оптических явлений, базирующейся на представлении об электромагнитном поле.

## Контрольные вопросы

- Что является причиной возникновения вихревого электрического поля? Чем оно отличается от электростатического поля?
- Чему равна циркуляция вихревого электрического поля?
- Почему вводится понятие тока смещения? Что он собой по существу представляет?
- Выведите и объясните выражение для плотности тока смещения.
- В каком смысле можно сравнивать ток смещения и ток проводимости?
- Запишите, объяснив физический смысл, обобщенную теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля.
- Запишите полную систему уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах и объясните их физический смысл.
- Почему постоянные электрические и магнитные поля можно рассматривать обособленно друг от друга? Запишите для них уравнение Максвелла в обеих формах.
- Почему уравнения Максвелла в интегральной форме являются более общими?
- Какие основные выводы можно сделать на основе теории Максвелла?

# 4 Колебания и волны

## Глава 18
## Механические и электромагнитные колебания

### § 140. Гармонические колебания и их характеристики

**Колебаниями** называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени. Колебательные процессы широко распространены в природе и технике, например качание маятника часов, переменный электрический ток и т. д. При колебательном движении маятника изменяется координата его центра масс, в случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи. Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания механические, электромагнитные и др. Однако различные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями. Отсюда следует целесообразность *единого подхода* к изучению колебаний *различной физической природы*. Например, единый подход к изучению механических и электромагнитных колебаний применялся английским физиком Д. У. Рэлеем (1842—1919), А. Г. Столетовым, русским инженером-экспериментатором П. Н. Лебедевым (1866—1912). Большой вклад в развитие теории колебаний внесли советский физик Л. И. Мандельштам (1879—1944) и его ученики.

**Колебания** называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему (систему, совершающую колебания). Простейшим типом колебаний являются **гармонические колебания** — колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса). Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам: 1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому; 2) различные **периодические процессы** (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний. Гармонические колебания величины $s$ описываются уравнением типа

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (140.1)$$

где $A$ — максимальное значение колеблющейся величины, называемое **амплитудой колебаний**, $\omega_0$ — **круговая (циклическая) частота**, $\varphi$ — **начальная фаза колебаний** в момент времени $t=0$, $(\omega_0 t+\varphi)$ — **фаза колебаний** в момент времени $t$. Так как косинус изменяется в пределах от $+1$ до $-1$, то $s$ может принимать значения от $+A$ до $-A$.

Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени $T$, называемый **периодом колебания**, за который фаза колебания получает приращение $2\pi$, т. е.

$$\omega_0(t+T)+\varphi=(\omega_0 t+\varphi)+2\pi,$$

откуда

$$T = 2\pi/\omega_0. \qquad (140.2)$$

Величина, обратная периоду колебаний,

$$\nu = 1/T, \qquad (140.3)$$

т. е. число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется **частотой колебаний.** Сравнивая (140.2) и (140.3), получим

$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$

Единица частоты — **герц** (Гц): 1 Гц — частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса.

Запишем первую и вторую производные по времени от гармонически колеблющейся величины $s$ (соответственно скорость и ускорение):

$$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right); \qquad (140.4)$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \qquad (140.5)$$

т. е. имеем гармонические колебания с той же циклической частотой. Амплитуды величин (140.4) и (140.5) соответственно равны $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$. Фаза скорости (140.4) отличается от фазы величины (140.1) на $\pi/2$, а фаза ускорения (140.5) отличается от фазы величины (140.1) на $\pi$. Следовательно, в моменты времени, когда $s = 0$, $\frac{ds}{dt}$ приобретает наибольшие значения; когда же $s$ достигает максимального отрицательного значения, то $\frac{d^2 s}{dt^2}$ приобретает наибольшее положительное значение (рис. 198).

Из выражения (140.5) следует **дифференциальное уравнение гармонических колебаний**

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 \qquad (140.6)$$

(где учтено, что $s = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$). Решением этого уравнения является выражение (140.1).

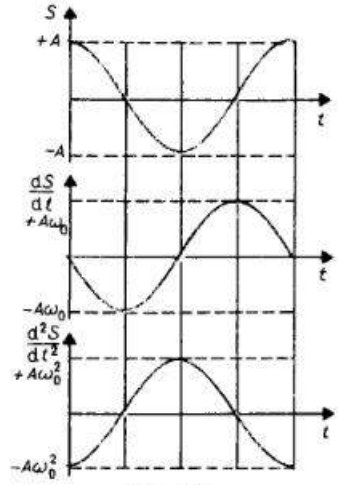



Рис. 198

Гармонические колебания изображаются графически **методом вращающегося вектора амплитуды, или методом векторных диаграмм.** Для этого из произвольной точки $O$, выбранной на оси $x$, под углом $\varphi$, равным начальной фазе колебания, откладывается вектор **A**, модуль которого равен амплитуде $A$ рассматриваемого колебания (рис. 199). Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью $\omega_0$, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси $x$ и принимать значения от $-A$ до $+A$, а колеблющаяся величина будет изменяться со временем по закону $s = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Таким образом, гармоническое колебание можно представить проекцией на некоторую *произвольно* выбранную ось вектора амплитуды **A**, отложенного из произвольной точки оси под углом $\varphi$, равным начальной фазе, и вращающегося с угловой скоростью $\omega_0$ вокруг этой точки.

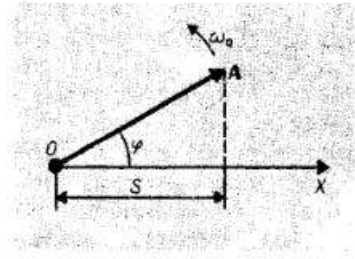



Рис. 199

В физике часто применяется другой метод, который отличается от метода вращающегося вектора амплитуды лишь по форме. В этом методе колеблющуюся величину представляют **комплексным числом.** Согласно формуле Эйлера, для комплексных чисел

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha, \qquad (140.7)$$

где $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица. Поэтому уравнение гармонического колебания (140.1) можно записать в экспоненциальной форме:

$$\tilde{s}=Ae^{i(\omega_0 t+\varphi)}. \qquad (140.8)$$

Вещественная часть выражения (140.8)

$$\mathrm{Re}\,(\tilde{s})=A\cos(\omega_0 t+\varphi)=s$$

представляет собой гармоническое колебание. Обозначение Re вещественной части условимся опускать и (140.8) будем записывать в виде

$$s=Ae^{i(\omega_0 t+\varphi)}.$$

В теории колебаний принимается, что колеблющаяся величина $s$ равна *вещественной части* комплексного выражения, стоящего в этом равенстве справа.

## § 141. Механические гармонические колебания

Пусть материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат $x$ около положения равновесия, принятого за начало координат. Тогда зависимость координаты $x$ от времени $t$ задается уравнением, аналогичным уравнению (140.1), где $s=x$:

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi). \qquad (141.1)$$

Согласно выражениям (140.4) и (140.5), скорость $v$ и ускорение $a$ колеблющейся точки соответственно равны

$$v=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)=$$

$$=A\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi+\pi/2);$$

$$a=-A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi)=$$

$$=A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi+\pi). \qquad (141.2)$$

Сила $F=ma$, действующая на колеблющуюся материальную точку массой $m$, с учетом (141.1) и (141.2) равна

$$F=-m\omega_0^2 x.$$

Следовательно, сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

**Кинетическая энергия** материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания, равна

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi), \qquad (141.3)$$

или

$$T=\frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1-\cos 2(\omega_0 t+\varphi)]. \qquad (141.4)$$

**Потенциальная энергия** материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы $F$, равна

$$\Pi=-\int_0^x F\,dx=\frac{m\omega_0^2 x^2}{2}=$$

$$=\frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t+\varphi), \qquad (141.5)$$

или

$$\Pi=\frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1+\cos 2(\omega_0 t+\varphi)]. \qquad (141.6)$$

Сложив (141.3) и (141.5), получим формулу для **полной энергии:**

$$E=T+\Pi=mA^2\omega_0^2/2. \qquad (141.7)$$

Полная энергия остается постоянной, так как при гармонических колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна.

Из формул (141.4) и (141.6) следует, что T и П изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания.

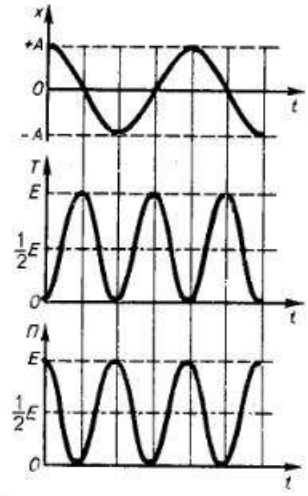



Рис. 200

На рис. 200 представлены графики зависимости $x$, $T$ и $\Pi$ от времени. Так как $\langle \sin^2\alpha \rangle = \langle \cos^2\alpha \rangle = 1/2$, то из формул (141.3), (141.5) и (141.7) следует, что $\langle T \rangle = \langle \Pi \rangle = {}^1/_2 E$.

## § 142. Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники

**Гармоническим осциллятором** называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида (140.6):

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0. \qquad (142.1)$$

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники, колебательный контур (для токов и напряжений столь малых, что элементы контура можно было бы считать линейными; см. § 146).

**1. Пружинный маятник** — это груз массой $m$, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F = -kx$, где $k$ — коэффициент упругости, в случае пружины называемый **жесткостью**. Уравнение движения маятника

$$m\ddot{x} = -kx,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Из выражений (142.1) и (140.1) следует, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \qquad (142.2)$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}. \qquad (142.3)$$

Формула (142.3) справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука (см. (21.3)), т. е. когда масса пружины мала по сравнению с массой тела.

Потенциальная энергия пружинного маятника, согласно (141.5) и (142.2), равна

$$\Pi = kx^2/2.$$

**2. Физический маятник** — это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс $C$ тела (рис. 201).

Если маятник отклонен из положения равновесия на некоторый угол $\alpha$, то в соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела (18.3) момент $M$ возвращающей силы можно

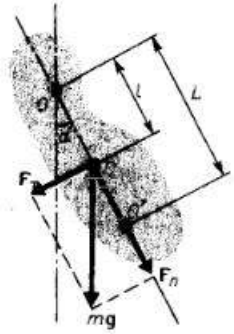



Рис. 201

записать в виде

$$M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha} = F_\tau l = -mgl \sin\alpha \approx -mgl\alpha, \quad (142.4)$$

где $J$ — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку $O$, $l$ — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника, $F_\tau = -mg \sin\alpha \approx -mg\alpha$ — возвращающая сила (знак минус обусловлен тем, что направления $F_\tau$ и $\alpha$ всегда противоположны; $\sin\alpha \approx \alpha$ соответствует малым колебаниям маятника, т. е. малым отклонениям маятника из положения равновесия).

Уравнение (142.4) можно записать в виде

$$J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0,$$

или

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Принимая

$$\omega_0 = \sqrt{mgl/J}, \quad (142.5)$$

получим уравнение

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0,$$

идентичное с (142.1), решение которого (140.1) известно:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (142.6)$$

Из выражения (142.6) следует, что при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega_0$ (см. (142.5)) и периодом

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{J/(mgl)} = 2\pi\sqrt{L/g}, \quad (142.7)$$

где $L = J/(ml)$ — **приведенная длина физического маятника.**

Точка $O'$ на продолжении прямой $OC$, отстоящая от оси подвеса на расстоянии приведенной длины $L$, называется **центром качаний** физического маятника (рис. 201). Применяя теорему Штейнера (16.1), получим

$$L = \frac{J}{ml} = \frac{J_C + ml^2}{ml} = l + \frac{J_C}{ml} > l,$$

т. е. $OO'$ всегда больше $OC$. Точка подвеса $O$ и центр качаний $O'$ обладают **свойством взаимозаменяемости:** если ось подвеса перенести в центр качаний, то точка $O$ прежней оси подвеса станет новым центром качаний и период колебаний физического маятника не изменится.

**3. Математический маятник** — это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой $m$, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести. Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити.

Момент инерции математического маятника

$$J = ml^2, \quad (142.8)$$

где $l$ — длина маятника.

Так как математический маятник можно представить как *частный случай физического маятника*, предположив, что вся его масса сосредоточена в одной точке — центре масс, то, подставив выражение (142.8) в формулу (142.7), получим выражение для периода малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (142.9)$$

Сравнивая формулы (142.7) и (142.9), видим, что если приведенная длина $L$ физического маятника равна длине $l$ математического маятника, то их периоды колебаний одинаковы. Следовательно, **приведенная длина физического маятника** — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

## § 143. Свободные гармонические колебания в колебательном контуре

Среди различных электрических явлений особое место занимают электромагнитные колебания, при которых электрические величины (заряды, токи) периодически изменяются и которые сопровождаются взаим-

ными превращениями электрического и магнитного полей. Для возбуждения и поддерживания электромагнитных колебаний используется **колебательный контур** — цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью $L$, конденсатора емкостью $C$ и резистора сопротивлением $R$.

Рассмотрим последовательные стадии колебательного процесса в идеализированном контуре, сопротивление которого пренебрежимо мало ($R \approx 0$). Для возбуждения в контуре колебаний конденсатор предварительно заряжают, сообщая его обкладкам заряды $\pm Q$. Тогда в начальный момент времени $t=0$ (рис. 202, *а*) между обкладками конденсатора возникнет электрическое поле, энергия которого $\frac{1}{2C} Q^2$ (см. (95.4)). Если замкнуть конденсатор на катушку индуктивности, он начнет разряжаться, и в контуре потечет возрастающий со временем ток $I$. В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, а энергия магнитного поля катушки (она равна $\frac{1}{2} L\dot{Q}^2$) — возрастать.

Так как $R \approx 0$, то, согласно закону сохранения энергии, полная энергия

$$W = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{1}{2} L\dot{Q}^2 = \text{const},$$

так как она на нагревание не расходуется. Поэтому в момент $t = {}^1/_4 T$, когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля обращается в нуль, а энергия магнитного поля (а следовательно, и ток) достигает наибольшего значения (рис. 202, *б*). Начиная с этого момента ток в контуре будет убывать; следовательно, начнет ослабевать магнитное поле катушки, и в ней индуцируется ток, который течет (согласно правилу Ленца) в том же направлении, что и ток разрядки конденсатора. Конденсатор начнет перезаряжаться, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток, который в конце концов обратится в нуль, а заряд на обкладках конденсатора достигнет максимума (рис. 202, *в*). Далее те же процессы начнут протекать в обратном направлении (рис. 202, *г*) и система к моменту времени $t=T$ придет в первоначальное состояние (рис. 202, *а*). После этого начнется повторение рассмотренного цикла разрядки и зарядки конденсатора. Если бы потерь энергии не было, то в контуре совершались бы периодические незатухающие колебания, т. е. периодически изменялись (колебались) бы заряд $Q$ на обкладках конденсатора, напряжение $U$ на конденсаторе и сила тока $I$, текущего через катушку индуктивности. Следовательно, в контуре возникают электрические колебания, причем колебания сопровождаются превращениями энергий электрического и магнитного полей.

Электрические колебания в колебательном контуре можно сопоставить с механическими колебаниями маятника (рис. 202 внизу), сопровождающимися взаимными превращениями потенциальной и кинетической энергий маятника. В данном случае энергия электрического поля конденсатора ($Q^2/(2C)$) аналогична потенциальной энергии упругой деформа-

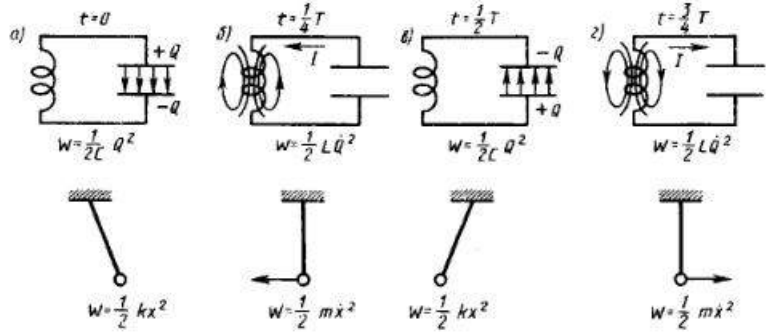



Рис. 202

ции $(kx^2/2)$, энергия магнитного поля катушки $(LQ^2/2)$ — кинетической энергии $(m\dot{x}^2/2)$, сила тока в контуре — скорости движения маятника. Индуктивность $L$ играет роль массы $m$, а сопротивление контура — роль силы трения, действующей на маятник.

Согласно закону Ома, для контура, содержащего катушку индуктивностью $L$, конденсатор емкостью $C$ и резистор сопротивлением $R$,

$$IR + U_C = \mathscr{E}_s,$$

где $IR$ — напряжение на резисторе, $U_C = Q/C$ — напряжение на конденсаторе, $\mathscr{E}_s = -L\frac{dI}{dt}$ — э. д. с. самоиндукции, возникающая в катушке при протекании в ней переменного тока ($\mathscr{E}_s$ — единственная э. д. с. в контуре). Следовательно,

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0. \qquad (143.1)$$

Разделив (143.1) на $L$ и подставив $I = \dot{Q}$ и $\frac{dI}{dt} = \ddot{Q}$, получим дифференциальное уравнение колебаний заряда $Q$ в контуре:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0. \qquad (143.2)$$

В данном колебательном контуре внешние э. д. с. отсутствуют, поэтому рассматриваемые колебания представляют собой *свободные* колебания (см. § 140). Если сопротивление $R = 0$, то свободные электромагнитные колебания в контуре являются гармоническими. Тогда из (143.2) получим дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0.$$

Из выражений (142.1) и (140.1) вытекает, что заряд $Q$ совершает гармонические колебания по закону

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (143.3)$$

где $Q_m$ — амплитуда колебаний заряда конденсатора с циклической частотой $\omega_0$, называемой **собственной частотой контура**, т. е.

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \qquad (143.4)$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \qquad (143.5)$$

Формула (143.5) впервые была получена У. Томсоном и называется **формулой Томсона.**

Сила тока в колебательном контуре (см. (140.4))

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= I_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2), \qquad (143.6)$$

где $I_m = \omega_0 Q_m$ — амплитуда силы тока.

Напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= U_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (143.7)$$

где $U_m = Q_m/C$ — амплитуда напряжения.

Из выражений (143.3) и (143.6) вытекает, что колебания тока $I$ опережают по фазе колебания заряда $Q$ на $\pi/2$, т. е., когда ток достигает максимального значения, заряд (а также и напряжение (см. (143.7)) обращается в нуль, и наоборот.

## § 144. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

Колеблющееся тело может участвовать в нескольких колебательных процессах, тогда необходимо найти результирующее колебание, иными словами, колебания необходимо сложить. Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \end{cases}$$

воспользовавшись методом вращающегося вектора амплитуды (см. § 140). Построим векторные диаграммы этих колебаний (рис. 203). Так как векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ вращаются с одинаковой угловой скоростью $\omega_0$, то разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ между ними остается постоянной.

Очевидно, что уравнение результирую-



Рис. 203

щего колебания будет

$$x=x_1+x_2=A\cos(\omega_0 t+\varphi). \quad (144.1)$$

В выражении (144.1) амплитуда $A$ и начальная фаза $\varphi$ соответственно задаются соотношениями

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1); \quad (144.2)$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}.$$

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз $(\varphi_2-\varphi_1)$ складываемых колебаний.

Проанализируем выражение (144.2) в зависимости от разности фаз $(\varphi_2-\varphi_1)$:

1) $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2m\pi$ $(m=0, 1, 2,...)$, тогда $A=A_1+A_2$, т. е. амплитуда результирующего колебания $A$ равна сумме амплитуд складываемых колебаний;

2) $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2m+1)\pi$ $(m=0, 1, 2,...)$, тогда $A=|A_1-A_2|$, т. е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний.

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биениями.**

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны $A$, а частоты равны $\omega$ и $\omega+\Delta\omega$, причем $\Delta\omega\ll\omega$. Начало отсчета выберем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$\begin{cases} x_1=A\cos\omega t, \\ x_2=A\cos(\omega+\Delta\omega)t. \end{cases}$$

Складывая эти выражения и учитывая, что во втором сомножителе $\Delta\omega/2\ll\omega$, найдем

$$x=\left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t. \quad (144.3)$$

Получившееся выражение есть произведение двух колебаний. Так как $\Delta\omega\ll\omega$, то сомножитель, стоящий в скобках, почти не изменяется, когда сомножитель $\cos\omega t$ совершит несколько полных колебаний. Поэтому результирующее колебание $x$ можно рассматривать как гармоническое

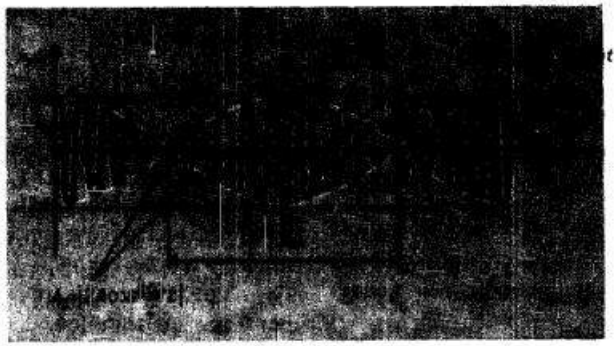


Рис. 204

с частотой $\omega$, амплитуда $A_б$ которого изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_б = |2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t|. \qquad (144.4)$$

Частота изменения $A_б$ в два раза больше частоты изменения косинуса (так как берется по модулю), т. е. частота биений равна разности частот складываемых колебаний: $\omega_б = \Delta\omega$.

Период биений

$$T_б = 2\pi/\Delta\omega.$$

Характер зависимости (144.3) показан на рис. 204, где сплошные жирные линии дают график результирующего колебания (144.3), а огибающие их — график медленно меняющейся по уравнению (144.4) амплитуды.

Определение частоты тона (звука определенной высоты (см. § 158)) биений между эталонным и измеряемым колебаниями — наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т. д.

Любые сложные периодические колебания $s = f(t)$ можно представить в виде суперпозиции одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами, а также частотами, кратными циклической частоте $\omega_0$:

$$s = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \ldots + A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n). \qquad (144.5)$$

Представление периодической функции в виде (144.5) связывают с понятием **гармонического анализа сложного периодического колебания, или разложения Фурье ***. Члены ряда Фурье, определяющие гармонические колебания с частотами $\omega_0$, $2\omega_0$, $3\omega_0$,..., называются **первой** (или **основной**), **второй**, **третьей** и т. д. **гармониками** сложного периодического колебания.

## § 145. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты $\omega$, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей $x$ и $y$. Для простоты начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю:

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t, \\ y = B \cos(\omega t + \varphi). \end{cases} \qquad (145.1)$$

Разность фаз обоих колебаний равна $\varphi$, $A$ и $B$ — амплитуды складываемых колебаний.

Уравнение траектории результирующего колебания находится исключением из выражений (145.1) параметра $t$. Записывая складываемые колебания в виде

$$x/A = \cos \omega t;$$

$$y/B = \cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi$$

и заменяя во втором уравнении $\cos \omega t$ на $x/A$ и $\sin \omega t$ на $\sqrt{1-(x/A)^2}$, получим после несложных преобразований *уравнение эллипса*, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно:

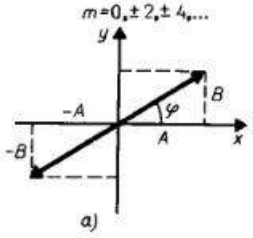
$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi. \qquad (145.2)$$

Так как траектория результирующего колебания имеет форму эллипса, то такие колебания называются **эллиптически поляризованными**.

Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз $\varphi$. Рассмотрим некоторые частные случаи, представляющие физический интерес:

1) $\varphi = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). В данном случае эллипс вырождается *в отрезок*

* Ж. Фурье (1768—1830) — французский ученый.



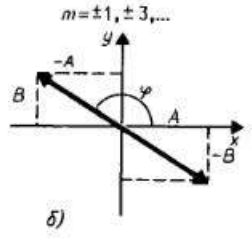




Рис. 205

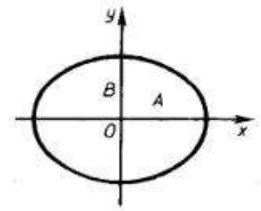



Рис. 206

*прямой*

$$y = \pm (B/A)x, \qquad (145.3)$$

где знак плюс соответствует нулю и четным значениям $m$ (рис. 205, *а*), а знак минус — нечетным значениям $m$ (рис. 205, *б*). Результирующее колебание является гармоническим колебанием с частотой $\omega$ и амплитудой $\sqrt{A^2+B^2}$, совершающимся вдоль прямой (145.3), составляющей с осью $x$ угол $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{A}\cos m\pi\right)$. В данном случае имеем дело с **линейно поляризованными колебаниями.**

2) $\varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

В данном случае уравнение примет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \qquad (145.4)$$

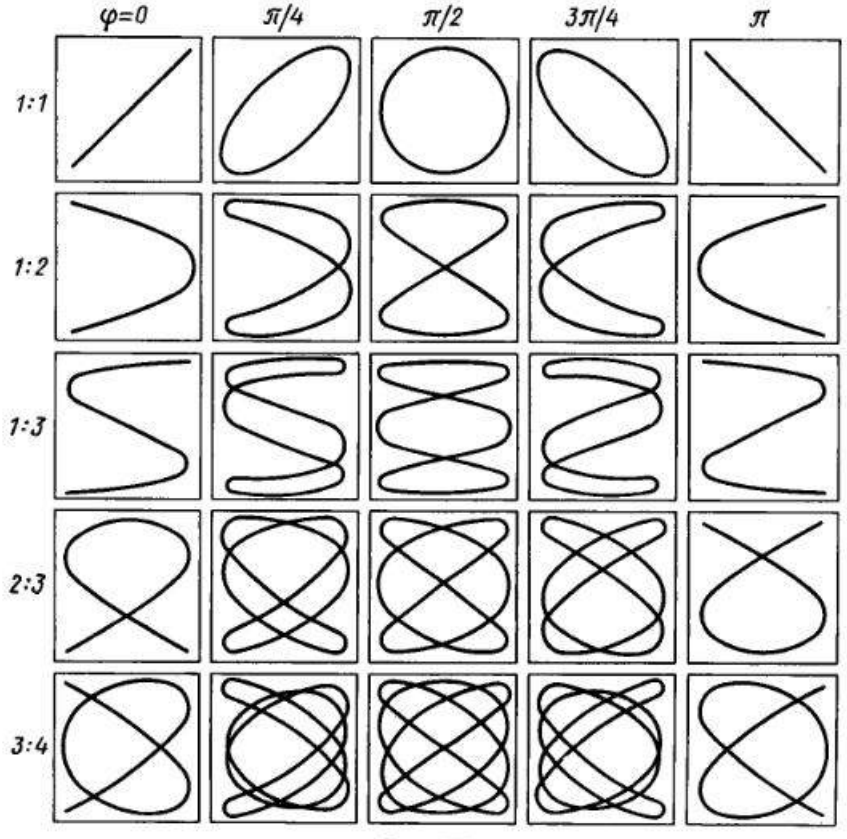



Рис. 207

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам (рис. 206). Кроме того, если $A=B$, то эллипс (145.4) вырождается *в окружность*. Такие колебания называются **циркулярно поляризованными колебаниями** или **колебаниями, поляризованными по кругу.**

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания довольно сложна. Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются **фигурами Лиссажу** *. Форма этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. На рис. 207 представлены фигуры Лиссажу для различных соотношений частот (указаны слева) и разностей фаз (указаны вверху).

Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат. По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной или определить отношение частот складываемых колебаний. Поэтому анализ фигур Лиссажу — широко используемый метод исследования соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний, а также формы колебаний.

## § 146. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний (механических и электромагнитных) и его решение. Автоколебания

Рассмотрим свободные **затухающие колебания** — колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается. Простейшим механизмом уменьшения энергии колебаний является ее превращение в теплоту вследствие трения в механических колебательных системах, а также омических потерь и излучения электромагнитной энергии в электрических колебательных системах.

Закон затухающих колебаний определяется свойствами колебательных систем. Обычно рассматривают **линейные системы** — идеализированные реальные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются. Линейными системами являются, например, пружинный маятник при малых растяжениях пружины (когда справедлив закон Гука), колебательный контур, индуктивность, емкость и сопротивление которого не зависят ни от тока в контуре, ни от напряжения. Различные по своей природе линейные системы описываются идентичными линейными дифференциальными уравнениями, что позволяет подходить к изучению колебаний различной физической природы с единой точки зрения, а также проводить их моделирование, в том числе и на ЭВМ.

**Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний** *линейной системы* задается в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 s=0, \qquad (146.1)$$

где $s$ — колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс, $\delta=\mathrm{const}$ — **коэффициент затухания,** $\omega_0$ — циклическая частота свободных *незатухающих* колебаний той же колебательной системы, т. е. при $\delta=0$ (при отсутствии потерь энергии) называется **собственной частотой** колебательной системы.

Решение уравнения (146.1) рассмотрим в виде

$$s=\mathrm{e}^{-\delta t}u, \qquad (146.2)$$

где $u=u(t)$. После нахождения первой и второй производных выражения (146.2) и подстановки их в (146.1) получим

$$\ddot{u}+(\omega_0^2-\delta^2)\,u=0. \qquad (146.3)$$

Решение уравнения (146.3) зависит от знака коэффициента перед искомой величиной. Рассмотрим случай, когда этот коэффициент положителен:

$$\omega^2=\omega_0^2-\delta^2 \qquad (146.4)$$

* Ж. Лиссажу (1822—1880) — французский физик.

(если $(\omega_0^2-\delta^2)>0$, то такое обозначение мы вправе сделать). Тогда получим уравнение типа (142.1)

$$\ddot{u}+\omega^2 u=0,$$

решением которого является функция

$$u=A_0\cos(\omega t+\varphi)$$

(см. (140.1)).

Таким образом, решение уравнения (146.1) в случае малых затуханий ($\delta^2\ll\omega_0^2$)

$$s=A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi), \qquad (146.5)$$

где

$$A=A_0 e^{-\delta t} \qquad (146.6)$$

— **амплитуда затухающих колебаний,** а $A_0$ — начальная амплитуда. Зависимость (146.5) показана на рис. 208 сплошной линией, а зависимость (146.6) — штриховыми линиями. Промежуток времени $\tau=1/\delta$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз, называется **временем релаксации.**

Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому затухающие колебания не являются периодическими и, строго говоря, к ним неприменимо понятие периода или частоты. Однако если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последующими максимумами (или минимумами) колеблющейся физической величины (рис. 208). Тогда период затухающих колебаний с учетом формулы (146.4) равен

$$T=2\pi/\omega=2\pi/\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}.$$

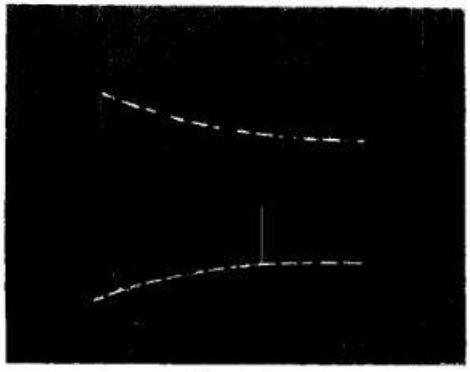


Рис. 208

Если $A(t)$ и $A(t+T)$ — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, то отношение

$$\frac{A(t)}{A(t+T)}=e^{\delta T}$$

называется **декрементом затухания,** а его логарифм

$$\theta=\ln\frac{A(t)}{A(t+T)}=\delta T=\frac{T}{\tau}=\frac{1}{N_e} \qquad (146.7)$$

— **логарифмическим декрементом затухания;** $N_e$ — число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз. Логарифмический декремент затухания — постоянная для данной колебательной системы величина.

Для характеристики колебательной системы пользуются понятием **добротности** $Q$, которая при малых значениях логарифмического декремента равна

$$Q=\frac{\pi}{\theta}=\pi N_e=\frac{\pi}{\delta T_0}=\frac{\omega_0}{2\delta} \qquad (146.8)$$

(так как затухание невелико ($\delta^2\ll\omega_0^2$), то $T$ принято равным $T_0$).

Из формулы (146.8) следует, что добротность пропорциональна числу колебаний $N_e$, совершаемых системой за время релаксации.

Применим выводы, полученные для свободных затухающих колебаний линейных систем, для колебаний различной физической природы — механических (в качестве примера рассмотрим пружинный маятник) и электромагнитных (в качестве примера рассмотрим электрический колебательный контур).

**1. Свободные затухающие колебания пружинного маятника.** Для пружинного маятника (см. § 142) массой $m$, совершающего малые колебания под действием упругой силы $F=-kx$, сила трения пропорциональна скорости, т. е.

$$F_{тр}=-rv=-r\dot{x},$$

где $r$ — **коэффициент сопротивления**; знак минус указывает на противоположные направления силы трения и скорости.

При данных условиях закон движения маятника будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \qquad (146.9)$$

Используя формулу $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (см. (142.2)) и принимая, что коэффициент затухания

$$\delta = r/(2m), \qquad (146.10)$$

получим идентичное уравнению (146.1) дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Из выражений (146.1) и (146.5) вытекает, что маятник колеблется по закону

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

с частотой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$ (см. (146.4)).

Добротность пружинного маятника, согласно (146.8) и (146.10), $Q = \frac{1}{r}\sqrt{km}$.

**2. Свободные затухающие колебания в электрическом колебательном контуре.** Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний заряда в контуре (при $R \neq 0$) имеет вид (см. (143.2))

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0.$$

Учитывая выражение (142.2) и принимая коэффициент затухания

$$\delta = R/(2L), \qquad (146.11)$$

дифференциальное уравнение (143.2) можно записать в идентичном уравнению (146.1) виде

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0.$$

Из выражений (146.1) и (146.5) вытекает, что колебания заряда совершаются по закону

$$Q = Q_m e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (146.12)$$

с частотой, согласно (146.4),

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \qquad (146.13)$$

меньшей собственной частоты контура $\omega_0$ (см. (143.4)). При $R = 0$ формула (146.13) переходит в (143.4).

Логарифмический декремент затухания определяется формулой (146.7), а добротность колебательного контура (см. (146.8))

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (146.14)$$

В заключение отметим, что при увеличении коэффициента затухания $\delta$ период затухающих колебаний растет и при $\delta = \omega_0$ обращается в бесконечность, т. е. движение перестает быть периодическим. В данном случае колеблющаяся величина асимптотически приближается к нулю, когда $t \to \infty$. Процесс не будет колебательным. Он называется **апериодическим.**

Огромный интерес для техники представляет возможность поддерживать колебания незатухающими. Для этого необходимо восполнять потери энергии реальной колебательной системы. Особенно важны и широко применимы так называемые **автоколебания** — незатухающие колебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой.

Автоколебания *принципиально* отличаются от свободных незатухающих колебаний, происходящих без действия сил, а также от вынужденных колебаний (см. § 147), происходящих под действием периодической силы. Автоколебательная система сама управляет внешними воздействиями, обеспечивая согласованность поступления энергии определенными порциями в нужный момент времени (в такт с ее колебаниями).

Примером автоколебательной системы могут служить часы. Храповой механизм подталкивает маятник в такт с его колебаниями. Энергия, передаваемая при этом маятнику, берется либо за счет раскручи-

вающейся пружины, либо за счет опускающегося груза. Колебания воздуха в духовых инструментах и органных трубах также возникают вследствие автоколебаний, поддерживаемых воздушной струей.

Автоколебательными системами являются также двигатели внутреннего сгорания, паровые турбины, ламповый генератор и т. д.

## § 147. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (механических и электромагнитных) и его решение

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна с помощью какого-либо периодически действующего фактора $X(t)$, изменяющегося по гармоническому закону:

$$X(t)=X_0\cos\omega t.$$

Если рассматривать механические колебания, то роль $X(t)$ играет внешняя вынуждающая сила

$$F=F_0\cos\omega t. \qquad (147.1)$$

С учетом силы (147.1) закон движения для пружинного маятника (146.9) запишется в виде

$$m\ddot{x}=-kx-r\dot{x}+F_0\cos\omega t.$$

Используя (142.2) и (146.10), придем к уравнению

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=(F_0/m)\cos\omega t. \qquad (147.2)$$

Если рассматривать электрический колебательный контур, то роль $X(t)$ играет подводимая к контуру внешняя периодически изменяющаяся по гармоническому закону э. д. с. или переменное напряжение

$$U=U_m\cos\omega t. \qquad (147.3)$$

Тогда уравнение (143.2) с учетом (147.3) можно записать в виде

$$\ddot{Q}+\frac{R}{L}\dot{Q}+\frac{1}{LC}Q=\frac{U_m}{L}\cos\omega t.$$

Используя (143.4) и (146.11), придем к уравнению

$$\ddot{Q}+2\delta\dot{Q}+\omega_0^2Q=(U_m/L)\cos\omega t. \qquad (147.4)$$

Колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы или внешней периодически изменяющейся э. д. с., называются соответственно **вынужденными механическими** и **вынужденными электромагнитными колебаниями.**

Уравнения (147.2) и (147.4) можно свести к линейному неоднородному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2\delta\frac{ds}{dt}+\omega_0^2s=x_0\cos\omega t, \qquad (147.5)$$

применяя впоследствии его решение для вынужденных колебаний конкретной физической природы ($x_0$ в случае механических колебаний равно $F_0/m$, в случае электромагнитных — $U_m/L$).

Решение уравнения (147.5) равно сумме общего решения (146.5) однородного уравнения (146.1) и частного решения неоднородного уравнения. Частное решение найдем в комплексной форме (см. § 140). Заменим правую часть уравнения (147.5) на комплексную величину $x_0e^{i\omega t}$:

$$\ddot{s}+2\delta\dot{s}+\omega_0^2s=x_0e^{i\omega t}. \qquad (147.6)$$

Частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$s=s_0e^{i\eta t}.$$

Подставляя выражение для $s$ и его производных ($\dot{s}=i\eta s_0e^{i\eta t}$, $\ddot{s}=-\eta^2s_0e^{i\eta t}$) в уравнение (147.6), получим

$$s_0e^{i\eta t}\left(-\eta^2+2i\delta\eta+\omega_0^2\right)=x_0e^{i\omega t}. \qquad (147.7)$$

Так как это равенство должно быть справедливым для всех моментов времени, то время $t$ из него должно исключаться. Отсюда следует, что $\eta=\omega$. Учитывая это, из уравнения (147.7) найдем величину $s_0$ и умножим ее числитель и знаменатель на $\left(\omega_0^2-\omega^2-2i\delta\omega\right)$:

$$s_0=\frac{x_0}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+2i\delta\omega}=$$

$$= x_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}.$$

Это комплексное число удобно представить в экспоненциальной форме:

$$s_0 = Ae^{-i\varphi},$$

где

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (147.8)$$

и

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (147.9)$$

Следовательно, решение уравнения (147.6) в комплексной форме примет вид

$$s = Ae^{i(\omega t - \varphi)}.$$

Его вещественная часть, являющаяся решением уравнения (147.5), равна

$$s = A\cos(\omega t - \varphi), \quad (147.10)$$

где $A$ и $\varphi$ задаются соответственно формулами (147.8) и (147.9).

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения (147.5) имеет вид

$$s = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \times \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (147.11)$$

Решение уравнения (147.5) равно сумме общего решения однородного уравнения

$$s_1 = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (147.12)$$

(см. 146.5)) и частного решения (147.11). Слагаемое (147.12) играет существенную роль только в начальной стадии процесса (при установлении колебаний) до тех пор, пока амплитуда вынужденных колебаний не достигнет значения, определяемого равенством (147.8). Графически вынужденные колебания представлены на рис. 209. Следовательно, в установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой $\omega$ и являются гармоническими; амплитуда и фаза колебаний, определяемые выражениями (147.8) и (147.9), также зависят от $\omega$.

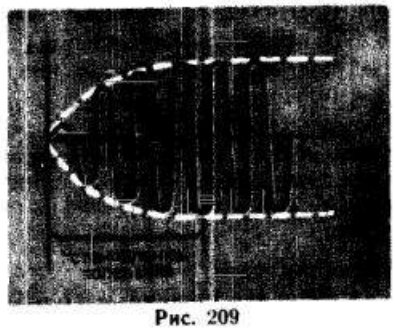


Рис. 209

Запишем формулы (147.10), (147.8) и (147.9) для электромагнитных колебаний, учитывая, что $\omega_0^2 = 1/(LC)$ (см. (143.4)) и $\delta = R/(2L)$ (см. (146.11)):

$$Q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{1/(\omega C) - \omega L}. \quad (147.13)$$

Продифференцировав $Q = Q_m\cos(\omega t - \alpha)$ по $t$, найдем силу тока в контуре при установившихся колебаниях:

$$I = -\omega Q_m \sin(\omega t - \alpha) = I_m\cos(\omega t - \alpha + \pi/2), \quad (147.14)$$

где

$$I_m = \omega Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (147.15)$$

Выражение (147.14) может быть записано в виде

$$I = I_m\cos(\omega t - \varphi),$$

где $\varphi = \alpha - \pi/2$ — сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением (см. (147.3)). В соответствии с выражением (147.13)

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (147.16)$$

Из формулы (147.16) вытекает, что ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi>0$), если $\omega L>1/(\omega C)$, и опережает напряжение ($\varphi<0$), если $\omega L<1/(\omega C)$.

Формулы (147.15) и (147.16) можно также получить с помощью векторной диаграммы. Это будет сделано в § 149 для переменных токов.

## § 148. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний (механических и электромагнитных). Резонанс

Рассмотрим зависимость *амплитуды* $A$ вынужденных колебаний от *частоты* $\omega$. Механические и электромагнитные колебания будем рассматривать одновременно, называя колеблющуюся величину либо смещением ($x$) колеблющегося тела из положения равновесия, либо зарядом ($Q$) конденсатора.

Из формулы (147.8) следует, что амплитуда $A$ смещения (заряда) имеет максимум. Чтобы определить **резонансную частоту** $\omega_{рез}$ — частоту, при которой амплитуда $A$ смещения (заряда) достигает максимума,— нужно найти максимум функции (147.8), или, что то же самое, минимум подкоренного выражения. Продифференцировав подкоренное выражение по $\omega$ и приравняв нулю, получим условие, определяющее $\omega_{рез}$:

$$-4\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\omega+8\delta^2\omega=0.$$

Это равенство выполняется при $\omega=0$, $\pm\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$, у которых только лишь положительное значение имеет физический смысл. Следовательно, резонансная частота

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}. \qquad (148.1)$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (частоты вынуждающего переменного напряжения) к частоте $\omega_{рез}$ называется **резонансом** (соответственно **механическим** или **электрическим**). При $\delta^2\ll\omega_0^2$ значение $\omega_{рез}$ практически совпадает с собственной частотой $\omega_0$ колебательной системы. Подставляя (148.1) в формулу (147.8), получим

$$A_{рез}=\frac{x_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}. \qquad (148.2)$$

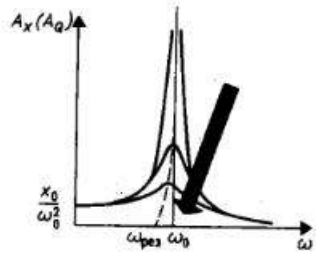


Рис. 210

На рис. 210 приведена зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных значениях $\delta$. Из (148.1) и (148.2) вытекает, что чем меньше $\delta$, тем выше и правее лежит максимум данной кривой. Если $\omega\to0$, то все кривые (см. также (147.8)) приходят к одному и тому же, отличному от нуля, предельному значению $x_0/\omega_0^2$, так называемому **статическому отклонению.** В случае механических колебаний $x_0/\omega_0^2=F_0/(m\omega_0^2)$, в случае электромагнитных — $U_m/(L\omega_0^2)$. Если $\omega\to\infty$, то все кривые асимптотически стремятся к нулю. Приведенная совокупность кривых называется **резонансными кривыми.**

Из формулы (148.2) вытекает, что при малом затухании ($\delta^2\ll\omega_0^2$) резонансная амплитуда смещения (заряда)

$$A_{рез}=\frac{x_0}{2\delta\omega_0}=\frac{\omega_0}{2\delta}\frac{x_0}{\omega_0^2}=Q\frac{x_0}{\omega_0^2},$$

где $Q$ — добротность колебательной системы (см. (146.8)), $x_0/\omega_0^2$ — рассмотренное выше статическое отклонение. Отсюда следует, что добротность $Q$ характеризует резонансные свойства колебательной системы: чем больше $Q$, тем больше $A_{рез}$.

На рис. 211 представлены резонансные кривые для амплитуды скорости (тока). Амплитуда скорости (тока)

$$\omega A=\frac{x_0\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}}=$$

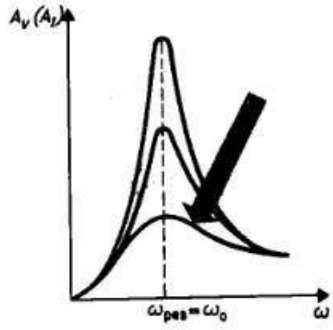



Рис. 211

$$=\frac{x_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega^2}+4\delta^2}}$$

максимальна при $\omega_{рез}=\omega_0$ и равна $x_0/(2\delta)$, т. е. чем больше коэффициент затухания $\delta$, тем ниже максимум резонансной кривой. Используя формулы (142.2), (146.10) и (143.4), (146.11), получим, что амплитуда скорости при механическом резонансе равна $(A_v)_{max}=x_0/(2\delta)=F_0/r$, а амплитуда тока при электрическом резонансе

$$(A_I)_{max}=x_0/(2\delta)=U_m/R.$$

Из выражения $\operatorname{tg}\varphi=2\delta\omega/(\omega_0^2-\omega^2)$ (см. (147.9)) следует, что если затухание в системе отсутствует ($\delta=0$), то *только* в этом случае колебания и вынуждающая сила (приложенное переменное напряжение) имеют одинаковые фазы; во всех других случаях $\varphi\neq 0$.

Зависимость $\varphi$ от $\omega$ при разных коэффициентах $\delta$ графически представлена на рис. 212, из которого следует, что при изменении $\omega$ изменяется и сдвиг фаз $\varphi$. Из формулы (147.9) вытекает, что при $\omega=0$ $\varphi=0$, а при $\omega=\omega_0$ независимо от значения коэффициента затухания $\delta\varphi=\pi/2$, т. е. сила (напряжение) опережает по фазе колебания на $\pi/2$. При дальнейшем увеличении $\omega$ сдвиг фаз возрастает и при $\omega\gg\omega_0$ $\varphi\to\pi$, т. е. фаза колебаний почти противоположна фазе внешней силы (переменного напряжения). Семейство кривых, изображенных на рис. 212, называется **фазовыми резонансными кривыми.**

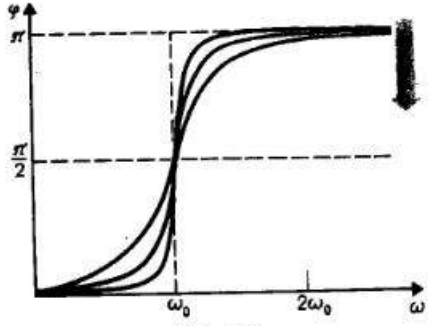



Рис. 212

Явления резонанса могут быть как вредными, так и полезными. Например, при конструировании машин и различного рода сооружений необходимо, чтобы собственная частота колебаний их не совпадала с частотой возможных внешних воздействий, в противном случае возникнут вибрации, которые могут вызвать серьезные разрушения. С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если их частота совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Так, радиотехника, прикладная акустика, электротехника используют явление резонанса.

## § 149. Переменный ток

Рассмотренные установившиеся вынужденные электромагнитные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности и конденсатор, переменного тока. **Переменный ток** можно считать **квазистационарным**, т. е. для него мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи практически одинаковы, так как их изменения происходят достаточно медленно, а электромагнитные возмущения распространяются по цепи со скоростью, равной скорости света. Для мгновенных значений квазистационарных токов выполняются закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа, которые будут использованы применительно к переменным токам (эти законы уже использовались при рассмотрении электромагнитных колебаний).

Рассмотрим последовательно процессы, происходящие в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности и кон-

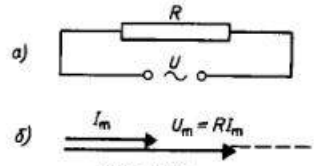


Рис. 213

денсатор, при приложении к ней переменного напряжения

$$U = U_m \cos \omega t, \qquad (149.1)$$

где $U_m$ — амплитуда напряжения.

**1. Переменный ток, текущий через резистор сопротивлением** $R$ $(L \to 0,\ C \to 0)$ (рис. 213, *а*). При выполнении условия квазистационарности ток через резистор определяется законом Ома:

$$I = U/R = (U_m/R) \cos \omega t = I_m \cos \omega t,$$

где амплитуда силы тока

$$I_m = U_m/R.$$

Для наглядного изображения соотношений между переменными токами и напряжениями воспользуемся *методом векторных диаграмм*. На рис. 213, *б* дана векторная диаграмма амплитудных значений тока $I_m$ и напряжения $U_m$ на резисторе (сдвиг фаз между $I_m$ и $U_m$ равен нулю).

**2. Переменный ток, текущий через катушку индуктивностью** $L$ $(R \to 0,\ C \to 0)$ (рис. 214, *а*). Если в цепи приложено переменное напряжение (149.1), то в ней потечет переменный ток, в результате чего возникнет э. д. с. самоиндукции (см. (126.3)) $\mathscr{E}_s = -L \dfrac{dI}{dt}$. Тогда закон Ома (см. (100.3)) для рассматриваемого участка цепи имеет вид

$$U_m \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0,$$

откуда

$$L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t. \qquad (149.2)$$

Так как внешнее напряжение приложено к катушке индуктивности, то

$$U_L = L \frac{dI}{dt} \qquad (149.3)$$

есть падение напряжения на катушке. Из уравнения (149.2) следует, что

$$dI = (U_m/L) \cos \omega t \, dt,$$

или после интегрирования, учитывая, что постоянная интегрирования равна нулю (так как отсутствует постоянная составляющая тока), получим

$$I = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_m}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \qquad (149.4)$$

где

$$I_m = U_m/(\omega L).$$

Величина

$$R_L = \omega L \qquad (149.5)$$

называется **реактивным индуктивным сопротивлением** (или **индуктивным сопротивлением**). Из выражения (149.4) вытекает, что для постоянного тока ($\omega = 0$) катушка индуктивности не имеет сопротивления. Подстановка значения $U_m = \omega L I_m$ в выражение (149.2) с учетом (149.3) приводит к следующему значению падения напряжения на катушке индуктивности:

$$U_L = \omega L I_m \cos \omega t. \qquad (149.6)$$

Сравнение выражений (149.4) и (149.6) приводит к выводу, что падение напряжения $U_L$ опережает по фазе ток $I$, текущий через катушку, на $\pi/2$, что и показано на векторной диаграмме (рис. 214, *б*).

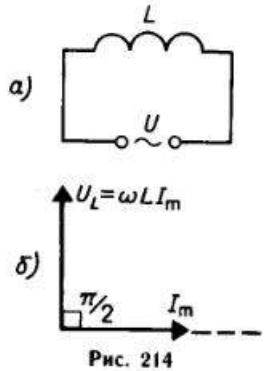


Рис. 214

**3. Переменный ток, текущий через конденсатор емкостью** $C$ $(R \to 0,\ L \to 0)$

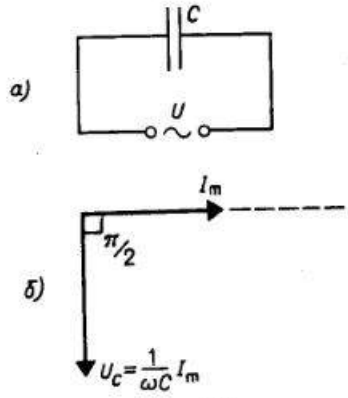



Рис. 215

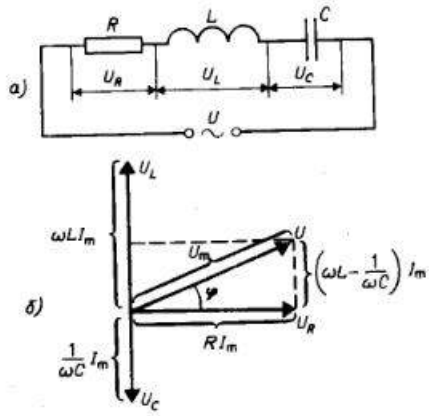



Рис. 216

(рис. 215, *а*). Если переменное напряжение (149.1) приложено к конденсатору, то он все время перезаряжается, и в цепи потечет переменный ток. Так как все внешнее напряжение приложено к конденсатору, а сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь, то

$$Q/C=U_C=U_m\cos\omega t.$$

Сила тока

$$I=\frac{dQ}{dt}=-\omega CU_m\sin\omega t=$$
$$=I_m\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right), \qquad (149.7)$$

где

$$I_m=\omega CU_m=\frac{U_m}{[1/(\omega C)]}.$$

Величина

$$R_C=1/(\omega C)$$

называется **реактивным емкостным сопротивлением** (или **емкостным сопротивлением**). Для постоянного тока ($\omega=0$) $R_C=\infty$, т. е. постоянный ток через конденсатор течь не может. Падение напряжения на конденсаторе

$$U_C=\frac{1}{\omega C}I_m\cos\omega t. \qquad (149.8)$$

Сравнение выражений (149.7) и (149.8) приводит к выводу, что падение напряжения $U_C$ отстает по фазе от текущего через конденсатор тока $I$ на $\pi/2$. Это показано на векторной диаграмме (рис. 215, *б*).

**4. Цепь переменного тока, содержащая последовательно включенные резистор, катушку индуктивности и конденсатор.** На рис. 216, *а* представлена цепь, содержащая резистор сопротивлением $R$, катушку индуктивностью $L$ и конденсатор емкостью $C$, на концы которой подается переменное напряжение (149.1). В цепи возникнет переменный ток, который вызовет на всех элементах цепи соответствующие падения напряжения $U_R$, $U_L$ и $U_C$. На рис. 216, *б* представлена векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на резисторе ($U_R$), катушке ($U_L$) и конденсаторе ($U_C$). Амплитуда $U_m$ приложенного напряжения должна быть равна векторной сумме амплитуд этих падений напряжений. Как видно из рис. 216, *б*, угол $\varphi$ определяет разность фаз между напряжением и силой тока. Из рисунка следует, что (см. также формулу (147.16))

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega L-1/(\omega C)}{R}. \qquad (149.9)$$

Из прямоугольного треугольника получаем $(RI_m)^2+\left[\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)I_m\right]^2=U_m^2$, откуда амплитуда силы тока имеет значение

$$I_m=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \qquad (149.10)$$

совпадающее с (147.15).

Следовательно, если напряжение в цепи изменяется по закону

$$U = U_m \cos \omega t,$$

то в цепи течет ток

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \qquad (149.11)$$

где $\varphi$ и $I_m$ определяются соответственно формулами (149.9) и (149.10).

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \qquad (149.12)$$

называется **полным сопротивлением** цепи, а величина

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

— **реактивным сопротивлением.**

Рассмотрим частный случай, когда в цепи отсутствует конденсатор. В данном случае падения напряжений $U_R$ и $U_L$ в сумме равны приложенному напряжению $U$. Векторная диаграмма для данного случая представлена на рис. 217, из которого следует, что

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \varphi = \omega L / R, \\ I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \end{cases} \qquad (149.13)$$

Выражения (149.9) и (149.10) совпадают с (149.13), если в них $1/(\omega C) = 0$, т. е. $C = \infty$. Следовательно, отсутствие конденсатора в цепи означает $C = \infty$, а не $C = 0$. Данный вывод можно трактовать следующим образом: сближая обкладки конденсатора до их полного соприкосновения, придем к цепи, в которой конденсатор отсутствует (расстояние между обкладками стремится к нулю, а емкость — к бесконечности; см. (94.3)).

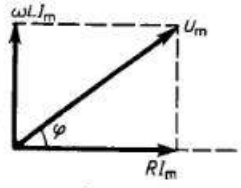



Рис. 217

## § 150. Резонанс напряжений

Если в цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные конденсатор, катушку индуктивности и резистор (см. рис. 216),

$$\omega L = 1/(\omega C), \qquad (150.1)$$

то угол сдвига фаз между током и напряжением (149.9) обращается в нуль ($\varphi = 0$), т. е. изменения тока и напряжения происходят синфазно. Условию (150.1) удовлетворяет частота

$$\omega_{рез} = 1/\sqrt{LC}. \qquad (150.2)$$

В данном случае полное сопротивление цепи $Z$ (149.12) становится минимальным, равным активному сопротивлению $R$ цепи, и ток в цепи определяется этим сопротивлением, принимая максимальные (возможные при данном $U_m$) значения. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи ($U_R = U$), а падения напряжений на конденсаторе ($U_C$) и катушке индуктивности ($U_L$) одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется **резонансом напряжений (последовательным резонансом)**, а частота (150.2) — **резонансной частотой.** Векторная диаграмма для резонанса напряжений приведена на рис. 218, а зависимость амплитуды силы тока от $\omega$ уже была дана на рис. 211.

В случае резонанса напряжений

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез},$$

поэтому, подставив в эту формулу значения резонансной частоты и амплитуды напряжений на катушке индуктивности

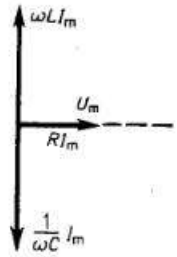



Рис. 218

и конденсаторе, получим

$$(U_L)_{рез}=(U_C)_{рез}=\sqrt{\frac{L}{C}}\,I_m=$$

$$=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,U_m=QU_m,$$

где $Q$ — добротность контура, определяемая выражением (146.14). Так как добротность обычных колебательных контуров больше единицы, то напряжение как на катушке индуктивности, так и на конденсаторе превышает напряжение, приложенное к цепи. Поэтому явление резонанса напряжений используется в технике для усиления колебания напряжения какой-либо определенной частоты. Например, в случае резонанса на конденсаторе можно получить напряжение с амплитудой $QU_m$ ($Q$ в данном случае — добротность контура), которая может быть значительно больше $U_m$). Это усиление напряжения возможно только для узкого интервала частот вблизи резонансной частоты контура, что позволяет выделить из многих сигналов одно колебание определенной частоты, т. е. на радиоприемнике настроиться на нужную длину волны. Явление резонанса напряжений необходимо учитывать при расчете изоляции электрических линий, содержащих конденсаторы и катушки индуктивности, так как иначе может наблюдаться их пробой.

## § 151. Резонанс токов

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую параллельно включенные конденсатор емкостью $C$ и катушку индуктивностью $L$ (рис. 219). Для простоты допустим, что активное сопротивление обеих ветвей настолько мало, что им можно пренебречь. Если приложенное напряжение

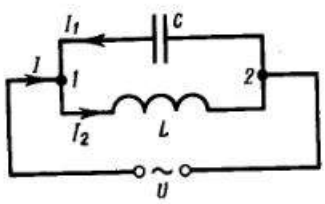



Рис. 219

изменяется по закону $U=U_m\cos\omega t$ (см. (149.1)), то, согласно формуле (149.11), в ветви $1C2$ течет ток

$$I_1=I_{m_1}\cos(\omega t-\varphi_1),$$

амплитуда которого определяется из выражения (149.10) при условии $R=0$ и $L=0$:

$$I_{m_1}=\frac{U_m}{1/(\omega C)}.$$

Начальная фаза $\varphi_1$ этого тока по формуле (149.9) определяется равенством

$$\operatorname{tg}\varphi_1=-\infty,$$

$$\varphi_1=(2n+3/2)\,\pi,\ \text{где } n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ . \qquad (151.1)$$

Аналогично, сила тока в ветви $1L2$

$$I_2=I_{m_2}\cos(\omega t-\varphi_2),$$

амплитуда которого определяется из (149.10) при условии $R=0$ и $C=\infty$ (условие отсутствия емкости в цепи, см. § 149):

$$I_{m_2}=U_m/(\omega L).$$

Начальная фаза $\varphi_2$ этого тока (см. (149.9))

$$\operatorname{tg}\varphi_2=+\infty,$$

откуда

$$\varphi_2=(2n+{}^1/_2)\,\pi,\ \text{где } n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ . \qquad (151.2)$$

Из сравнения выражений (151.1) и (151.2) вытекает, что разность фаз токов в ветвях $1C2$ и $1L2$ равна $\varphi_1-\varphi_2=\pi$, т. е. токи в ветвях противоположны по фазе. Амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи

$$I_m=|I_{m_1}-I_{m_2}|=U_m|\omega C-1/(\omega L)|.$$

Если $\omega=\omega_{рез}=1/\sqrt{LC}$, то $I_{m_1}=I_{m_2}$ и $I_m=0$. Явление резкого уменьшения амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно включенные конденсатор и катушку индуктивности, при приближении частоты $\omega$ приложенного напряжения к резонансной частоте $\omega_{рез}$ называется **резонансом токов (параллельным резонан-**

**сом).** В данном случае для резонансной частоты получили такое же значение, как и при резонансе напряжений (см. § 150).

Амплитуда силы тока $I_m$ оказалась равна нулю потому, что активным сопротивлением контура пренебрегли. Если учесть сопротивление $R$, то разность фаз $\varphi_1-\varphi_2$ не будет равна $\pi$, поэтому при резонансе токов амплитуда силы тока $I_m$ будет отлична от нуля, но примет наименьшее возможное значение. Таким образом, при резонансе токов во внешней цепи токи $I_1$ и $I_2$ компенсируются и сила тока $I$ в подводящих проводах достигает минимального значения, обусловленного только током через резистор. При резонансе токов силы токов $I_1$ и $I_2$ могут значительно превышать силу тока $I$.

Рассмотренный контур оказывает большое сопротивление переменному току с частотой, близкой к резонансной, поэтому это свойство резонанса токов используется в резонансных усилителях, позволяющих выделять одно определенное колебание из сигнала сложной формы. Кроме того, резонанс токов используется в индукционных печах, где нагревание металлов производится вихревыми токами (см. § 125). В них емкость конденсатора, включенного параллельно нагревательной катушке, подбирается так, чтобы при частоте генератора получился резонанс токов, в результате чего сила тока через нагревательную катушку будет гораздо больше, чем сила тока в подводящих проводах.

## § 152. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока:

$$P(t)=U(t)\,I(t),$$

где $U(t)=U_m\cos\omega t$, $I(t)=I_m\cos(\omega t-\varphi)$ (см. выражения (149.1) и (149.11)). Раскрыв $\cos(\omega t-\varphi)$, получим

$$P(t)=I_mU_m\cos(\omega t-\varphi)\cos\omega t=$$
$$=I_mU_m(\cos^2\omega t\cos\varphi+$$
$$+\sin\omega t\cos\omega t\sin\varphi).$$

Практический интерес представляет не мгновенное значение мощности, а ее среднее значение за период колебания. Учитывая, что $\langle\cos^2\omega t\rangle={}^1/_2$, $\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle=0$, получим

$$\langle P\rangle={}^1/_2I_mU_m\cos\varphi. \qquad (152.1)$$

Из векторной диаграммы (см. рис. 216) следует, что $U_m\cos\varphi=RI_m$.

Поэтому

$$\langle P\rangle={}^1/_2RI_m^2.$$

Такую же мощность развивает постоянный ток $I=I_m/\sqrt{2}$.

Величины

$$I=I_m/\sqrt{2},\quad U=U_m/\sqrt{2}$$

называются соответственно **действующими (или эффективными) значениями тока и напряжения.** Все амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения.

Учитывая действующие значения тока и напряжения, выражение средней мощности (152.1) можно записать в виде

$$\langle P\rangle=IU\cos\varphi, \qquad (152.2)$$

где множитель $\cos\varphi$ называется **коэффициентом мощности.**

Формула (152.2) показывает, что мощность, выделяемая в цепи переменного тока, в общем случае зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними. Если в цепи реактивное сопротивление отсутствует, то $\cos\varphi=1$ и $P=IU$. Если цепь содержит только реактивное сопротивление ($R=0$), то $\cos\varphi=0$ и средняя мощность равна нулю, какими бы большими ни были ток и напряжение. Если $\cos\varphi$ имеет значения, существенно меньшие единицы, то для передачи заданной мощности при данном напряжении генератора нужно увеличивать силу тока $I$, что приведет либо к выделению джоулевой теплоты, либо потребует увеличения сечения проводов, что повышает стоимость линий электропередачи. Поэтому на практике всегда стремятся увеличить $\cos\varphi$, наименьшее допустимое значение которого для промышленных установок составляет примерно 0,85.

# Контрольные вопросы

- Что такое колебания? свободные колебания? гармонические колебания? периодические процессы?
- Дайте определения амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты колебания.
- Какова связь амплитуды и фазы смещения, скорости и ускорения при прямолинейных гармонических колебаниях?
- В чем заключается идея метода вращающегося вектора амплитуды?
- Выведите формулы для скорости и ускорения гармонически колеблющейся точки как функции времени.
- Выведите и прокомментируйте формулы для кинетической, потенциальной и полной энергии при гармонических колебаниях.
- Чему равно отношение полной энергии гармонического колебания к максимальному значению возвращающей силы, вызывающей это колебание?
- Как можно сравнить между собой массы тела, измеряя частоты колебаний при подвешивании этих масс к пружине?
- Что называется гармоническим осциллятором? пружинным маятником? физическим? математическим?
- Выведите формулы для периодов колебаний пружинного, физического и математического маятников.
- Что такое приведенная длина физического маятника?
- Какие процессы происходят при свободных гармонических колебаниях в колебательном контуре? Чем определяется их период?
- Запишите и проанализируйте дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний в контуре.
- Что такое биения? Чему равна частота биений? период?
- Какова траектория точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми периодами? Когда получается окружность? прямая?
- Как по виду фигур Лиссажу можно определить отношение частот складываемых колебаний?
- Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Проанализируйте их для механических и электромагнитных колебаний.
- Как изменяется частота собственных колебаний с увеличением массы колеблющегося тела?
- По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний? Являются ли затухающие колебания периодическими?
- Почему частота затухающих колебаний должна быть меньше частоты собственных колебаний системы?
- Что такое коэффициент затухания? декремент затухания? логарифмический декремент затухания? В чем заключается физический смысл этих величин?
- При каких условиях наблюдается апериодическое движение?
- Что такое автоколебания? В чем их отличие от вынужденных и свободных незатухающих колебаний? Где они применяются?
- Что такое вынужденные колебания? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и решите его. Проведите их анализ для механических и электромагнитных колебаний.
- От чего зависит амплитуда вынужденных колебаний? Запишите выражение для амплитуды и фазы при резонансе.
- Нарисуйте, проанализируйте резонансные кривые для амплитуды смещения (заряда) и скорости (тока). В чем их отличие?
- Почему добротность является важнейшей характеристикой резонансных свойств системы?
- Чему равен сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой при резонансе?
- Что называется резонансом? Какова его роль?
- От чего зависит индуктивное сопротивление? емкостное сопротивление? Что называется реактивным сопротивлением?
- Как сдвинуты по фазе колебания переменного напряжения и переменного тока текущего через конденсатор? катушку индуктивности? резистор? Ответ обосновать также с помощью векторных диаграмм.

- Нарисуйте и объясните векторную диаграмму для цепи переменного тока с последовательно включенными резистором, катушкой индуктивности и конденсатором.
- Назовите характерные признаки резонанса напряжений; резонанса токов. Приведите графики резонанса токов и напряжений.
- Как вычислить мощность, выделяемую в цепи переменного тока? Что называется коэффициентом мощности?

## Задачи

**18.1.** Материальная точка, совершающая гармонические колебания с частотой $\nu=2$ Гц, в момент времени $t=0$ проходит положение, определяемое координатой $x_0=6$ см, со скоростью $v_0=14$ см/с. Определить амплитуду колебаний. [6.1 см]

**18.2.** Полная энергия гармонически колеблющейся точки равна 30 мкДж, а максимальная сила, действующая на точку, равна 1,5 мН. Написать уравнение движения этой точки, если период колебаний равен 2 с, а начальная фаза $\pi/3$. [$x=0{,}04\cos(\pi t+\pi/3)$]

**18.3.** При подвешивании грузов массами $m_1=500$ г и $m_2=400$ г к свободным пружинам последние удлинились одинаково ($l=15$ см). Пренебрегая массой пружин, определить: 1) периоды колебаний грузов; 2) который из грузов при одинаковых амплитудах обладает большей энергией и во сколько раз. [1) 0,78 с; 2) 1,25]

**18.4.** Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной 25 см. Определить, на каком расстоянии от центра масс должна быть точка подвеса, чтобы частота колебаний была максимальной. [7,2 см]

**18.5.** Два математических маятника, длины которых отличаются на $\Delta l=16$ см, совершают за одно и то же время: один $n_1=10$ колебаний, другой $n_2=6$ колебаний. Определить длины маятников $l_1$ и $l_2$. [$l_1=9$ см, $l_2=25$ см]

**18.6** Колебательный контур содержит катушку с общим числом витков, равным 50, индуктивностью 5 мкГн и конденсатор емкостью 2нФ. Максимальное напряжение на обкладках конденсатора составляет 150 В. Определить максимальный магнитный поток, пронизывающий катушку. [0,3 мкВб]

**18.7.** Разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода 8 с и одинаковой амплитудой 2 см составляет $\pi/4$. Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения этих колебаний, если начальная фаза одного из них равна нулю. $\left[x=0{,}037\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{8}\right)\right]$

**18.8.** Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x=\cos\pi t$ и $y=\cos\frac{\pi}{2}t$. Определить уравнение траектории точки и вычертить ее с нанесением масштаба. [$2y^2-x=1$]

**18.9.** За время, за которое система совершает 100 полных колебаний, амплитуда уменьшается в три раза. Определить добротность системы. [286]

**18.10.** Колебательный контур содержит катушку индуктивностью 25 мГн, конденсатор емкостью 10 мкФ и резистор сопротивлением 1 Ом. Конденсатор заряжен количеством электричества $Q_m=1$ мКл. Определить: 1) период колебаний контура; 2) логарифмический декремент затухания колебаний; 3) уравнение зависимости изменения напряжения на обкладках конденсатора от времени. [1) 3,14 мс; 2) 0,05; 3) $U=100\,e^{-20t}\cos 636\pi t$]

**18.11.** Последовательно соединенные резистор с сопротивлением 110 Ом и конденсатор подключены к внешнему переменному напряжению с амплитудным значением 110 В. Оказалось, что амплитудное значение установившегося тока в цепи 0,5 А. Определить разность фаз между током и внешним напряжением. [60°]

**18.12.** В цепь переменного тока частотой 50 Гц включена катушка длиной 50 см и площадью поперечного сечения 10 см$^2$, содержащая 3000 витков. Определить активное сопротивление катушки, если сдвиг фаз между напряжением и током составляет 60°. [4,1 Ом]

**18.13.** Генератор, частота которого составляет 32 кГц и амплитудное значение напряжения равно 120 В, включен в резонирующую цепь, емкость которой 1 нФ. Определить амплитудное значение напряжения на конденсаторе, если активное сопротивление цепи 5 Ом. [119 кВ]

**18.14.** Колебательный контур содержит катушку индуктивностью 5 мГц и конденсатор емкостью 2 мкФ. Для поддержания в колебательном контур незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе 1 В необходимо подводить среднюю мощность 0,1 мВт. Считая затухание колебаний в контуре достаточно малым, определить добротность данного контура. [100]

# Глава 19
# Упругие волны

## § 153. Волновые процессы. Продольные и поперечные волны

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться. Иначе говоря, фазы колебаний частиц среды и источника тем больше отличаются друг от друга, чем больше это расстояние. При изучении распространения колебаний не учитывается дискретное (молекулярное) строение среды и среда рассматривается как **сплошная**, т. е. непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется **волновым процессом** (или **волной**). При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице среды передаются лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому *основным свойством всех волн*, независимо от их природы, является *перенос энергии без переноса вещества*.

Среди разнообразных волн, встречающихся в природе и технике, выделяются следующие их типы: **волны на поверхности жидкости, упругие** и **электромагнитные волны. Упругими** (или **механическими**) волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Упругие волны бывают продольные и поперечные. В **продольных волнах** частицы среды колеблются в направлении распространения волны, в **поперечных** — в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Продольные волны могут распространяться в средах, в которых возникают упругие силы *при деформации сжатия и растяжения*, т. е. твердых, жидких и газообразных телах. Поперечные волны могут распространяться в среде, в которой возникают упругие силы *при деформации сдвига*, т. е. фактически только в твердых телах; в жидкостях и газах возникают только продольные волны, а в твердых телах — как продольные, так и поперечные.

**Упругая волна** называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими. На рис. 220 представлена гармоническая поперечная волна, распространяющаяся со скоростью $v$ вдоль оси $x$, т. е. приведена зависимость между смещением $\xi$ частиц среды, участвующих в волновом процессе, и расстоянием $x$ этих частиц (например, частицы $B$) от источника колебаний $O$ для какого-то фиксированного момента времени $t$. Хотя приведенный график функции $\xi(x, t)$ похож на график гармонического колебания, но они *различны по существу*. График волны дает зависимость смещения

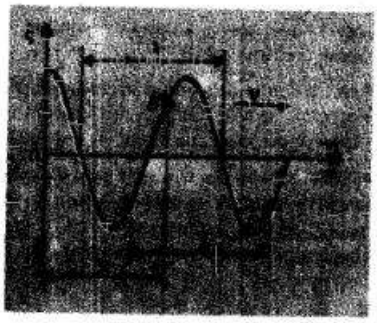


Рис. 220

*всех частиц среды* от расстояния до источника колебаний в данный момент времени, а график колебаний — зависимость смещения *данной частицы от времени*.

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется **длиной волны** $\lambda$ (рис. 220). Длина волны равна тому расстоянию, на которое распространяется определенная фаза колебания за период, т. е.

$$\lambda = vT,$$

или, учитывая, что $T = 1/\nu$, где $\nu$ — частота колебаний,

$$v = \lambda\nu.$$

Если рассмотреть волновой процесс подробнее, то ясно, что колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси $x$, а колеблется совокупность частиц, расположенных в некотором объеме, т. е. волна, распространяясь от источника колебаний, охватывает все новые и новые области пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени $t$, называется **волновым фронтом.** Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью.** Волновых поверхностей можно провести бесчисленное множество, а волновой фронт в каждый момент времени — один. Волновой фронт также является волновой поверхностью. В принципе волновые поверхности могут быть любой формы, а в простейшем случае они представляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу, или совокупность концентрических сфер. Соответственно **волна** называется **плоской** или **сферической**.

## § 154. Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость. Волновое уравнение

**Бегущими волнами** называются волны, которые переносят в пространстве энергию. Перенос энергии в волнах количественно характеризуется **вектором плотности потока энергии.** Этот вектор для упругих волн называется **вектором Умова** (по имени русского ученого Н. А. Умова (1846—1915), решившего задачу о движении энергии в среде). Направление вектора Умова совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Для вывода уравнения бегущей волны — зависимости смещения колеблющейся частицы от координат и времени — рассмотрим *плоскую волну*, предполагая, что колебания носят гармонический характер, а ось $x$ совпадает с направлением распространения волны (рис. 220). В данном случае волновые поверхности перпендикулярны оси $x$, а так как все точки волновой поверхности колеблются одинаково, то смещение $\xi$ будет зависеть только от $x$ и $t$, т. е. $\xi = \xi(x, t)$.

На рис. 220 рассмотрим некоторую частицу среды $B$, находящуюся от источника колебаний $O$ на расстоянии $x$. Если колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$, описываются функцией $\xi(0, t) = A\cos\omega t$, то частица среды $B$ колеблется по тому же закону, но ее колебания будут отставать по времени от колебаний источника на $\tau$, так как для прохождения волной расстояния $x$ требуется время $\tau = x/v$, где $v$ — скорость распространения волны. Тогда уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости $x$, имеет вид

$$\xi(x, t) = A\cos\omega(t - x/v), \quad (154.1)$$

откуда следует, что $\xi(x, t)$ является не только периодической функцией времени, но и периодической функцией координаты $x$. Уравнение (154.1) есть **уравнение бегущей волны.** Если плоская волна распространяется в противоположном направле-

нии, то

$$\xi(x, t)=A\cos\omega(t+x/v).$$

В общем случае **уравнение плоской волны,** распространяющейся вдоль положительного направления оси $x$ в среде, *не поглощающей* энергию, имеет вид

$$\xi(x, t)=A\cos[\omega(t-x/v)+\varphi_0], \quad (154.2)$$

где $A=\text{const}$ — **амплитуда волны,** $\omega$ — **циклическая частота волны,** $\varphi_0$ — **начальная фаза колебаний,** определяемая в общем случае выбором начал отсчета $x$ и $t$, $[\omega(t-x/v)+\varphi_0]$ — **фаза плоской волны.**

Для характеристики волн используется **волновое число**

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{vT}=\frac{\omega}{v}. \quad (154.3)$$

Учитывая (154.3), уравнению (154.2) можно придать вид

$$\xi(x, t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0). \quad (154.4)$$

Уравнение волны, распространяющейся вдоль отрицательного направления оси $x$, отличается от (154.4) только знаком члена $kx$.

Основываясь на формуле Эйлера (140.7), уравнение плоской волны можно записать в виде

$$\xi(x, t)=Ae^{i(\omega t-kx+\varphi_0)},$$

где физический смысл имеет лишь действительная часть (см. § 140).

Предположим, что при волновом процессе фаза постоянна, т. е.

$$\omega(t-x/v)+\varphi_0=\text{const}. \quad (154.5)$$

Продифференцировав выражение (154.5) и сократив на $\omega$, получим $dt-\frac{1}{v}dx=0$, откуда

$$\frac{dx}{dt}=v. \quad (154.6)$$

Следовательно, скорость $v$ распространения волны в уравнении (154.6) есть не что иное, как *скорость перемещения фазы волны,* и ее называют **фазовой скоростью.**

Повторяя ход рассуждений для плоской волны, можно доказать, что **уравнение сферической волны** — волны, волновые поверхности которой имеют вид концентрических сфер, записывается как

$$\xi(r, t)=\frac{A_0}{r}\cos(\omega t-kr+\varphi_0), \quad (154.7)$$

где $r$ — расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды. В случае сферической волны даже в среде, *не поглощающей* энергию, амплитуда колебаний не остается постоянной, а убывает с расстоянием по закону $1/r$. Уравнение (154.7) справедливо лишь для $r$, значительно превышающих размеры источника (тогда источник колебаний можно считать *точечным*).

Из выражения (154.3) вытекает, что фазовая скорость

$$v=\omega/k. \quad (154.8)$$

Если фазовая скорость волн в среде зависит от их частоты, то это явление называют **дисперсией волн,** а среда, в которой наблюдается дисперсия волн, называется **диспергирующей средой.**

Распространение волн в *однородной изотропной* среде в общем случае описывается **волновым уравнением** — дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

или

$$\Delta\xi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \quad (154.9)$$

где $v$ — фазовая скорость, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — **оператор Лапласа.** Решением уравнения (154.9) является уравнение любой волны. Соответствующей подстановкой можно убедиться, что уравнению (154.9) удовлетворяют, в частности, плоская волна (см. (154.2)) и сферическая волна (см. (154.7)). Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси $x$, волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \quad (154.10)$$

## § 155. Принцип суперпозиции. Групповая скорость

Если среда, в которой распространяется одновременно несколько волн, *линейна*, т. е. ее свойства не изменяются под действием возмущений, создаваемых волной, то к ним применим **принцип суперпозиции (наложения) волн**: при распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом из слагающих волновых процессов.

Исходя из принципа суперпозиции и разложения Фурье (см. (144.5)) любая волна может быть представлена в виде суммы гармонических волн, т. е. в виде волнового пакета, или группы волн. **Волновым пакетом** называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства.

«Сконструируем» простейший волновой пакет из двух распространяющихся вдоль положительного направления оси $x$ гармонических волн с одинаковыми амплитудами, близкими частотами и волновыми числами, причем $d\omega \ll \omega$ и $dk \ll k$. Тогда

$$\xi = A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] = 2A_0 \cos\left(\frac{t\,d\omega - x\,dk}{2}\right)\cos(\omega t - kx).$$

Эта волна отличается от гармонической тем, что ее амплитуда

$$A = \left|2A_0 \cos\left(\frac{t\,d\omega - x\,dk}{2}\right)\right|$$

есть медленно изменяющаяся функция координаты $x$ и времени $t$.

За скорость распространения этой негармонической волны (волнового пакета) принимают скорость перемещения максимума амплитуды волны, рассматривая тем самым максимум в качестве центра волнового пакета. При условии, что $t\,d\omega - x\,dk = \text{const}$, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = u. \qquad (155.1)$$

Скорость $u$ есть **групповая скорость**. Ее можно определить как скорость движения группы волн, образующих в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет. Хотя выражение (155.1) получено для волнового пакета из двух составляющих, можно доказать, что оно справедливо в самом общем случае.

Рассмотрим связь между групповой $u = \frac{d\omega}{dk}$ (см. (155.1)) и фазовой $u = \omega/k$ (см. (154.8)) скоростями. Учитывая, что $\lambda = 2\pi/k$ (см. (154.3)), получим

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k\frac{dv}{dk} = v + k\left(\frac{dv}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}\right) = v + k\left(-\frac{\lambda}{k}\right)\frac{dv}{d\lambda},$$

или

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}. \qquad (155.2)$$

Из формулы (155.2) вытекает, что $u$ может быть как меньше, так и больше $v$ в зависимости от знака $\frac{dv}{d\lambda}$. В недиспергирующей среде $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой.

Понятие групповой скорости очень важно, так как именно она фигурирует при измерении дальности в радиолокации, в системах управления космическими объектами и т. д. В теории относительности доказывается, что *групповая скорость* $u \leqslant c$, в то время как *для фазовой скорости ограничений не существует*.

## § 156. Интерференция волн

Согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов связывают с понятием **когерентности. Волны** называются

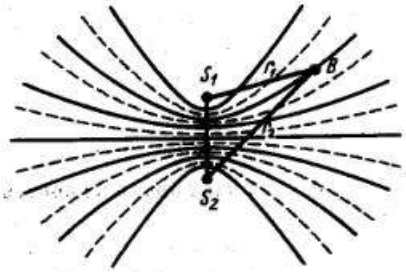



Рис. 221

**когерентными**, если разность их фаз остается постоянной во времени. Очевидно, что когерентными могут быть лишь волны, имеющие одинаковую частоту. При наложении в пространстве двух (или нескольких) когерентных волн в разных его точках получается усиление или ослабление результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Это явление называется **интерференцией волн.**

Рассмотрим наложение двух когерентных сферических волн, возбуждаемых точечными источниками $S_1$ и $S_2$ (рис. 221), колеблющимися с одинаковыми амплитудой $A_0$ и частотой $\omega$ и постоянной разностью фаз. Согласно (154.7),

$$\xi_1=\frac{A_0}{r_1}\cos(\omega t-kr_1+\varphi_1),$$

$$\xi_2=\frac{A_0}{r_2}\cos(\omega t-kr_2+\varphi_2),$$

где $r_1$ и $r_2$ — расстояния от источников волн до рассматриваемой точки $B$, $k$ — волновое число, $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — начальные фазы обеих накладывающихся сферических волн. Амплитуда результирующей волны в точке $B$ по (144.2) равна

$$A^2=A_0^2\left\{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{r_1r_2}\cos[k(r_1-r_2)-(\varphi_1-\varphi_2)]\right\}.$$

Так как для когерентных источников разность начальных фаз $(\varphi_1-\varphi_2)=\text{const}$, то результат наложения двух волн в различных точках зависит от величины $\Delta=r_1-r_2$, называемой **разностью хода волн**.

В точках, где

$$k(r_1-r_2)-(\varphi_1-\varphi_2)=\pm 2m\pi$$

$$(m=0, 1, 2,...), \qquad (156.1)$$

наблюдается **интерференционный максимум**: амплитуда результирующего колебания $A=A_0/r_1+A_0/r_2$. В точках, где

$$k(r_1-r_2)-(\varphi_1-\varphi_2)=\pm(2m+1)\pi$$

$$(m=0, 1, 2, ...), \qquad (156.2)$$

наблюдается **интерференционный минимум**: амплитуда результирующего колебания $A=|A_0/r_1-A_0/r_2|$ $(m=0, 1, 2, ...,)$ называется соответственно **порядком интерференционного максимума или минимума.**

Условия (156.1) и (156.2) сводятся к тому, что

$$r_1-r_2=\text{const}. \qquad (156.3)$$

Выражение (156.3) представляет собой уравнение гиперболы с фокусами в точках $S_1$ и $S_2$. Следовательно, геометрическое место точек, в которых наблюдается усиление или ослабление результирующего колебания, представляет собой семейство гипербол (рис. 221), отвечающих условию $\varphi_1-\varphi_2=0$. Между двумя интерференционными максимумами (на рис. 221 сплошные линии) находятся интерференционные минимумы (на рис. 221 штриховые линии).

## § 157. Стоячие волны

Особым случаем интерференции являются **стоячие волны** — это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

Для вывода уравнения стоячей волны предположим, что две плоские волны распространяются навстречу друг другу вдоль оси $x$ в среде без затухания, причем обе волны характеризуются одинаковыми амплитудами и частотами. Кроме того, начало координат выберем в точке, в которой обе волны имеют одинаковую фазу, а отсчет времени начнем с момента, когда фазы обеих волн равны нулю. Тогда со-

ответственно уравнения волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси $x$, и волны, распространяющейся ей навстречу, будут иметь вид

$$\begin{cases}\xi_1 = A\cos(\omega t - kx), \\ \xi_2 = A\cos(\omega t + kx).\end{cases} \quad (157.1)$$

Сложив эти уравнения и учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$ (см. (154.3)), получим **уравнение стоячей волны**:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos kx\cos\omega t =$$

$$= 2A\cos(2\pi x/\lambda)\cos\omega t. \quad (157.2)$$

Из уравнения стоячей волны (157.2) вытекает, что в каждой точке этой волны происходят колебания той же частоты $\omega$ с амплитудой $A_{ст} = |2A\cos(2\pi x/\lambda)|$, зависящей от координаты $x$ рассматриваемой точки.

В точках среды, где

$$2\pi x/\lambda = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \quad (157.3)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения, равного 2 А. В точках среды, где

$$2\pi x/\lambda = \pm(m + 1/2)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \quad (157.4)$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна ($A_{ст} = 2$ А), называются **пучностями стоячей волны**, а точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю ($A_{ст} = 0$), называются **узлами стоячей волны**. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают.

Из выражений (157.3) и (157.4) получим соответственно *координаты пучностей и узлов*:

$$x_п = \pm m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \quad (157.5)$$

$$x_{узл} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \quad (157.6)$$

Из формул (157.5) и (157.6) следует, что расстояния между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковы и равны $\lambda/2$. Расстояние между соседними пучностью и узлом стоячей волны равно $\lambda/4$.

В отличие от бегущей волны, все точки которой совершают колебания с *одинаковой амплитудой*, но с *запаздыванием по фазе* (в уравнении (157.1) бегущей волны фаза колебаний зависит от координаты $x$ рассматриваемой точки), все точки стоячей волны между двумя узлами колеблются с *разными амплитудами*, но с *одинаковыми фазами* (в уравнении (157.2) стоячей волны аргумент косинуса не зависит от $x$). При переходе через узел множитель $2A\cos(2\pi x/\lambda)$ меняет свой знак, поэтому фаза колебаний по разные стороны от узла отличается на $\pi$, т. е. точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе.

Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженной волн. Например, если конец веревки закрепить неподвижно, то отраженная в месте закрепления веревки волна будет интерферировать с бегущей волной и образует стоячую волну. На границе, где происходит отражение волны, в данном случае получается узел. Будет ли на границе отражения узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения получается пучность (рис. 222, *а*), если более плотная — узел (рис. 222, *б*). Образование узла связано с тем, что волна, отражаясь от более плотной среды, меняет фазу на противоположную и у границы происходит сложение колебаний противоположных направлений, в результате чего получается узел. Если же волна отражается от менее плотной среды, то изменения фазы не происходит и у границы колебания складываются с одинаковыми фазами — получается пучность.

Если рассматривать бегущую волну, то в направлении ее распространения переносится энергия колебательного движения. В случае же стоячей волны *переноса энергии нет*, так как падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях. Поэтому полная энергия результирующей стоячей волны, заклю-

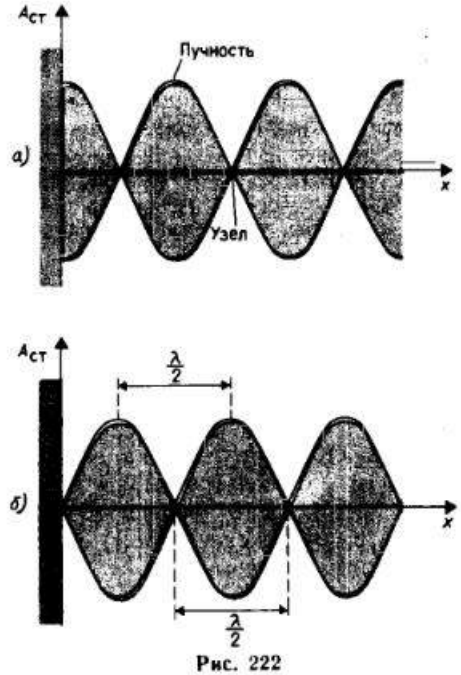



Рис. 222

ченной между узловыми точками, остается постоянной. Лишь в пределах расстояний, равных половине длины волны, происходят взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно.

## § 158. Характеристика звуковых волн

**Звуковыми** (или **акустическими**) **волнами** называются распространяющиеся в среде упругие волны, обладающие частотами в пределах 16—20 000 Гц. Волны указанных частот, воздействуя на слуховой аппарат человека, вызывают ощущение звука. Волны с $\nu < 16$ Гц **(инфразвуковые)** и $\nu > 20$ кГц **(ультразвуковые)** органами слуха человека не воспринимаются.

Звуковые волны в газах и жидкостях могут быть только продольными, так как эти среды обладают упругостью лишь по отношению к деформациям сжатия (растяжения). В твердых телах звуковые волны могут быть как продольными, так и поперечными, так как твердые тела обладают упругостью по отношению к деформациям сжатия (растяжения) и сдвига.

**Интенсивностью звука** (или **силой звука**) называется величина, определяемая средней по времени энергией, переносимой звуковой волной в единицу времени сквозь единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны:

$$I = W/(St).$$

Единица интенсивности звука в СИ — **ватт на метр в квадрате** (Вт/м$^2$).

Чувствительность человеческого уха различна для разных частот. Для того чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью, но если эта интенсивность превышает определенный предел, то звук не слышен и вызывает только болевое ощущение. Таким образом, для каждой частоты колебаний существует наименьшая **(порог слышимости)** и наибольшая **(порог болевого ощущения)** интенсивность звука, которая способна вызвать звуковое восприятие. На рис. 223 представлена зависимость порогов слышимости и болевого ощущения от частоты звука. Область, расположенная между этими двумя кривыми, является **областью слышимости.**

Если интенсивность звука является величиной, объективно характеризующей волновой процесс, то субъективной характеристикой звука, связанной с его интенсивностью, является **громкость звука**, зависящая от частоты. По физиологическому закону Вебера — Фехнера, с ростом интенсивности звука громкость возрастает по логарифмическому закону. На этом основании вводят объективную оценку громкости звука по измеренному значению его интенсивности:

$$L = \lg (I/I_0),$$

где $I_0$ — интенсивность звука на пороге слышимости, принимаемая для всех зву-




Рис. 223

ков равной $10^{-12}$ Вт/м$^2$. Величина $L$ называется **уровнем интенсивности звука** и выражается в **белах** (в честь изобретателя телефона Белла). Обычно пользуются единицами, в 10 раз меньшими,— **децибелами** (дБ).

Физиологической характеристикой звука является **уровень громкости**, который выражается в **фонах** (фон). Громкость для звука в 1000 Гц (частота стандартного чистого тона) равна 1 фон, если его уровень интенсивности равен 1 дБ. Например, шум в вагоне метро при большой скорости соответствует $\approx$90 фон, а шепот на расстоянии 1 м — $\approx$20 фон.

Реальный звук является наложением гармонических колебаний с большим набором частот, т. е. звук обладает **акустическим спектром**, который может быть **сплошным** (в некотором интервале присутствуют колебания всех частот) и **линейчатым** (присутствуют отделенные друг от друга определенные частоты).

Звуковое ощущение характеризуется помимо громкости еще высотой и тембром. **Высота звука** — качество звука, определяемое человеком субъективно на слух и зависящее от частоты звука. С ростом частоты высота звука увеличивается, т. е. звук становится «выше». Характер акустического спектра и распределения энергии между определенными частотами определяет своеобразие звукового ощущения, называемое **тембром звука.** Так, различные певцы, берущие одну и ту же ноту, имеют различный акустический спектр, т. е. они имеют различный тембр.

Источником звука может быть всякое тело, колеблющееся в упругой среде со звуковой частотой (например, в струнных инструментах источником звука является струна, соединенная с корпусом инструмента).

Совершая колебания, тело вызывает колебания прилегающих к нему частиц среды с такой же частотой. Состояние колебательного движения последовательно передается к все более удаленным от тела частицам среды, т. е. в среде распространяется волна с частотой колебаний, равной частоте ее источника, и с определенной скоростью, зависящей от плотности и упругих свойств среды. Скорость распространения звуковых волн в газах вычисляется по формуле

$$v=\sqrt{\gamma RT/M}, \qquad (158.1)$$

где $R$ — молярная газовая постоянная, $M$ — молярная масса, $\gamma=C_p/C_V$ — отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме, $T$ — термодинамическая температура. Из формулы (158.1) вытекает, что скорость звука в газе не зависит от давления $p$ газа, но возрастает с повышением температуры. Чем больше молярная масса газа, тем меньше в нем скорость звука. Например, при $T=273$ К скорость звука в воздухе ($M=29\cdot10^{-3}$ кг/моль) $v=331$ м/с, в водороде ($M=2\cdot10^{-3}$ кг/моль) $v=1260$ м/с. Выражение (158.1) соответствует опытным данным.

При распространении звука в атмосфере необходимо учитывать целый ряд факторов: скорость и направление ветра, влажность воздуха, молекулярную структуру газовой среды, явление преломления и отражения звука на границе двух сред. Кроме того, любая реальная среда обладает вязкостью, поэтому наблюдается затухание звука, т. е. уменьшение его амплитуды и, следовательно, интенсивности звуковой волны по мере ее распространения. Затухание звука обусловлено в значительной мере его поглощением в среде, связанным с необратимым переходом звуковой энергии в другие формы энергии (в основном в тепловую).

Для акустики помещений большое значение имеет **реверберация звука** — процесс постепенного затухания звука в закрытых помещениях после выключения его источника. Если помещения пустые, то происходит медленное затухание звука и создается «гулкость» помещения. Если звуки затухают быстро (при применении звукопоглощающих материалов), то они воспринимаются приглушенными. **Время реверберации** — это время, в течение которого интенсивность звука в помещении ослабляется в миллион раз, а его уровень — на 60 дБ. Помещение обладает хорошей акустикой, если время реверберации составляет 0,5—1,5 с.

## § 159. Эффект Доплера в акустике

**Эффектом Доплера** * называется изменение частоты колебаний, воспринимаемой приемником, при движении источника этих колебаний и приемника друг относительно друга. Например, из опыта известно, что тон гудка поезда повышается по мере его приближения к платформе и понижается при удалении, т. е. движение источника колебаний (гудка) относительно приемника (уха) изменяет частоту принимаемых колебаний.

Для рассмотрения эффекта Доплера предположим, что источник и приемник звука движутся вдоль соединяющей их прямой; $v_{ист}$ и $v_{пр}$ — соответственно скорости движения источника и приемника, причем они положительны, если источник (приемник) приближается к приемнику (источнику), и отрицательны, если удаляется. Частота колебаний источника равна $\nu_0$.

**1. Источник и приемник покоятся относительно среды,** т. е. $v_{ист}=v_{пр}=0$. Если $v$ — скорость распространения звуковой волны в рассматриваемой среде, то длина волны $\lambda=vT=v/\nu_0$. Распространяясь в среде, волна достигнет приемника и вызовет колебания его звукочувствительного элемента с частотой

$$\nu=v/\lambda=v/(vT)=\nu_0.$$

Следовательно, частота $\nu$ звука, которую зарегистрирует приемник, равна частоте $\nu_0$, с которой звуковая волна излучается источником.

**2. Приемник приближается к источнику, а источник покоится,** т. е. $v_{пр}>0$, $v_{ист}=0$. В данном случае скорость распространения волны относительно приемника станет равной $v+v_{пр}$. Так как длина волны при этом не меняется, то

$$\nu=\frac{v+v_{пр}}{\lambda}=\frac{v+v_{пр}}{vT}=\frac{(v+v_{пр})\,\nu_0}{v},$$

т. е. частота колебаний, воспринимаемых приемником, в $(v+v_{пр})/v$ раз больше частоты колебаний источника.



Рис. 224

**3. Источник приближается к приемнику, а приемник покоится,** т. е. $v_{ист}>0$, $v_{пр}=0$. Скорость распространения колебаний зависит лишь от свойств среды, поэтому за время, равное периоду колебаний источника, излученная им волна пройдет в направлении к приемнику расстояние $vT$ (равное длине волны $\lambda$) независимо от того, движется ли источник или покоится. За это же время источник пройдет в направлении волны расстояние $v_{ист}T$ (рис. 224), т. е. длина волны в направлении движения сократится и станет равной $\lambda'=\lambda-v_{ист}T=(v-v_{ист})\,T$, тогда

$$\nu=v/\lambda'=\frac{v}{(v-v_{ист})\,T}=\frac{v\nu_0}{v-v_{ист}},$$

т. е. частота $\nu$ колебаний, воспринимаемых приемником, увеличится в $v/(v-v_{ист})$ раз. В случаях 2 и 3, если $v_{ист}<0$ и $v_{пр}<0$, знак будет обратным.

**4. Источник и приемник движутся относительно друг друга.** Используя результаты, полученные для случаев 2 и 3, можно записать выражение для частоты колебаний, воспринимаемых источником:

$$\nu=\frac{(v\pm v_{пр})\,\nu_0}{v\mp v_{ист}}, \qquad (159.1)$$

причем верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак — в случае их взаимного удаления.

Из приведенных формул следует, что эффект Доплера различен в зависимости от того, движется ли источник или приемник. Если направления скоростей $v_{пр}$ и $v_{ист}$ не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, то вместо

* Х. Доплер (1803—1853) — австрийский физик, математик и астроном.

этих скоростей в формуле (159.1) надо брать их проекции на направление этой прямой.

## § 160. Ультразвук и его применение

По своей природе ультразвук представляет собой упругие волны, и в этом он не отличается от звука (см. § 158). Однако ультразвук, обладая высокими частотами ($\nu > 20$ кГц) и, следовательно, малыми длинами волн, характеризуется особыми свойствами, что позволяет выделить его в отдельный класс явлений. Из-за малых длин волн ультразвуковые волны, как и свет, могут быть получены в виде строго направленных пучков.

Для генерации ультразвука используются в основном два явления.

**Обратный пьезоэлектрический эффект** (см. также § 91) — это возникновение деформации в вырезанной определенным образом кварцевой пластинке (в последнее время вместо кварца применяется титанат бария) под действием электрического поля. Если такую пластинку поместить в высокочастотное переменное поле, то можно вызвать ее вынужденные колебания. При резонансе на собственной частоте пластинки получают большие амплитуды колебаний и, следовательно, большие интенсивности излучаемой ультразвуковой волны. Идея кварцевого ультразвукового генератора принадлежит французскому физику П. Ланжевену (1872—1946).

**Магнитострикция** — это возникновение деформации в ферромагнетиках под действием магнитного поля. Поместив ферромагнитный стержень (например, из никеля или железа) в быстропеременное магнитное поле, возбуждают его механические колебания, амплитуда колебаний которых максимальна в случае резонанса.

Ультразвуки широко используются в технике, например для направленной подводной сигнализации, обнаружения подводных предметов и определения глубин (гидролокатор, эхолот). Например, в эхолоте от пьезокварцевого генератора, укрепленного на судне, посылаются направленные ультразвуковые сигналы, которые, достигнув дна, отражаются от него и возвращаются обратно. Зная скорость их распространения в воде и определяя время прохождения (от подачи до возвращения) ультразвукового сигнала, можно вычислить глубину. Прием эха также производится с помощью пьезокварца. Звуковые колебания, дойдя до пьезокварца, вызывают в нем упругие колебания, в результате чего на противоположных поверхностях кварца возникают электрические заряды, которые измеряются.

Если пропускать ультразвуковой сигнал через исследуемую деталь, то можно обнаружить в ней дефекты по характерному рассеянию пучка и по появлению ультразвуковой тени. На этом принципе создана целая отрасль техники — **ультразвуковая дефектоскопия**, начало которой положено С. Я. Соколовым (1897—1957). Применение ультразвука легло также в основу новой области акустики — **акустоэлектроники**, позволяющей на ее основе разрабатывать приборы для обработки сигнальной информации в микрорадиоэлектронике.

Ультразвук применяют для воздействия на различные процессы (кристаллизацию, диффузию, тепло- и массообмен в металлургии и т. д.) и биологические объекты (повышение интенсивности процессов обмена и т. д.), для изучения физических свойств веществ (поглощения, структуры вещества и т. д.). Ультразвук используется также для механической обработки очень твердых и очень хрупких тел, в медицине (диагностика, ультразвуковая хирургия, микромассаж тканей) и т. д.

## Контрольные вопросы

- Как объяснить распространение колебаний в упругой среде? Что такое волна?
- Что называется поперечной волной? продольной? Когда они возникают?
- Что такое волновой фронт? волновая поверхность?

- Что называется длиной волны? Какова связь между длиной волны, скоростью и периодом?
- Какая волна является бегущей, гармонической, плоской, сферической? Каковы их уравнения?
- Что такое волновое число? фазовая и групповая скорости?
- В чем заключается физический смысл вектора Умова?
- При каких условиях возникает интерференция волн? Назовите условия интерференционных максимума и минимума.
- Две волны с одинаковым периодом распространяются в одном направлении. Разность хода равна четному числу полуволн. Что получится в результате интерференции?
- Две волны, распространяющиеся навстречу друг другу, отличаются только амплитудами. Образуют ли они стоячую волну?
- Чем стоячая волна отличается от бегущей?
- Чему равно расстояние между двумя соседними узлами стоячей волны? двумя соседними пучностями? соседними пучностью и узлом?
- Что такое звуковые волны? Звуковые волны в воздухе продольные или поперечные? Почему?
- Может ли звук распространяться в вакууме?
- От чего зависят громкость, высота и тембр звука?
- Что такое эффект Доплера? Чему будет равна частота колебаний, воспринимаемых покоящимся приемником, если источник колебаний от него удаляется?
- Какое влияние оказывает скорость ветра на эффект Доплера?
- Как определить частоту звука, воспринимаемую приемником, если источник звука и приемник движутся?

## Задачи

**19.1.** Плоская гармоническая волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси $x$ в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $v=12$ м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях $x_1=7$ м и $x_2=12$ м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi=\frac{5}{6}\pi$. Амплитуда волны $A=6$ см. Определить: 1) длину волны $\lambda$; 2) уравнение волны; 3) смещение $\xi_2$ второй точки в момент времени $t=3$ с. [1) 12 м; 2) $\xi(x,t)=0{,}06\cos(2\pi t-\frac{\pi}{6}x)$; 3) 6 см]

**19.2.** Два динамика расположены на расстоянии 2 м друг от друга и воспроизводят один и тот же музыкальный тон на частоте 1000 Гц. Приемник находится на расстоянии 4 м от центра динамиков. Принимая скорость звука 340 м/с, определить, на какое расстояние от центральной линии параллельно динамикам надо отодвинуть приемник, чтобы он зафиксировал первый интерференционный минимум. [0,34 м]

**19.3.** Для определения скорости звука в воздухе методом акустического резонанса используется труба с поршнем и звуковой мембраной, закрывающей один из ее торцов. Расстояние между соседними положениями поршня, при котором наблюдается резонанс на частоте 1700 Гц, составляет 10 см. Определить скорость звука в воздухе. [340 м/с]

**19.4.** Средняя квадратичная скорость молекул двухатомного газа при некоторых условиях составляет 461 м/с. Определить скорость распространения звука при тех же условиях. [315 м/с]

**19.5.** Поезд проходит со скоростью 54 км/ч мимо неподвижного приемника и подает звуковой сигнал. Приемник воспринимает скачок частоты $\Delta\nu=54$ Гц. Принимая скорость звука равной 340 м/с, определить частоту тона звукового сигнала гудка поезда. [611 Гц]

# Глава 20
# Электромагнитные волны

## § 161. Экспериментальное получение электромагнитных волн

Существование **электромагнитных волн** — переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью,— вытекает из уравнений Максвелла (см. § 139). Уравнения Максвелла сформулированы в 1865 г. на основе обобщения эмпирических законов электрических и магнитных явлений. Как уже указывалось, решающую роль для утверждения максвелловской теории сыграли опыты Герца (1888), доказавшие, что электрические и магнитные поля действительно распространяются в виде волн, поведение которых полностью описывается уравнениями Максвелла.

Источником электромагнитных волн в действительности может быть любой электрический колебательный контур или проводник, по которому течет переменный электрический ток, так как для возбуждения электромагнитных волн необходимо создать в пространстве переменное электрическое поле (ток смещения) или соответственно переменное магнитное поле. Однако излучающая способность источника определяется его формой, размерами и частотой колебаний. Чтобы излучение играло заметную роль, необходимо увеличить объем пространства, в котором переменное электромагнитное поле создается. Поэтому для получения электромагнитных волн непригодны закрытые колебательные контуры, так как в них электрическое поле сосредоточено между обкладками конденсатора, а магнитное — внутри катушки индуктивности.

Герц в своих опытах, уменьшая число витков катушки и площадь пластин конденсатора, а также раздвигая их (рис. 225, *а, б*), совершил переход от закрытого колебательного контура к **открытому колебательному контуру (вибратору Герца)**, представляющему собой два стержня, разделенных искровым промежутком (рис. 225, *в*). Если в закрытом колебательном контуре переменное электрическое поле сосредоточено внутри конденсатора (рис. 225, *а*), то в открытом оно заполняет окружающее контур пространство (рис. 225, *в*), что существенно повышает интенсивность электромагнитного излучения. Колебания в такой системе поддерживаются за счет источника э. д. с., подключенного к обкладкам конденсатора, а искровой промежуток применяется для того, чтобы увеличить разность потенциалов, до которой первоначально заряжаются обкладки.

Для возбуждения электромагнитных волн вибратор Герца *В* подключался к индуктору *И* (рис. 226). Когда напряжение на искровом промежутке достигало пробивного значения, возникала искра, закорачивающая обе половины вибратора, и в нем возникали свободные затухающие

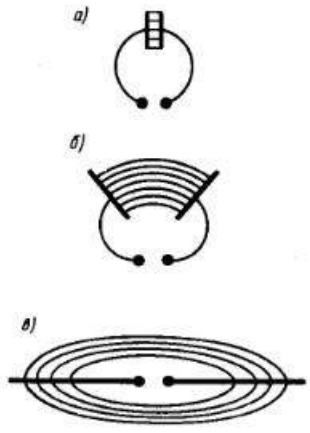


Рис. 225

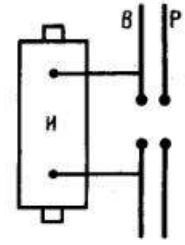


Рис. 226

колебания. При исчезновении искры контур размыкался и колебания прекращались. Затем индуктор снова заряжал конденсатор, возникала искра и в контуре опять наблюдались колебания и т. д. Для регистрации электромагнитных волн Герц пользовался вторым вибратором, называемым резонатором $P$, имеющим такую же частоту собственных колебаний, что и излучающий вибратор, т. е. настроенным в резонанс с вибратором. Когда электромагнитные волны достигали резонатора, то в его зазоре проскакивала электрическая искра.

С помощью описанного вибратора Герц достиг частот порядка 100 МГц и получил волны, длина $\lambda$ которых составляла примерно 3 м. П. Н. Лебедев, применяя миниатюрный вибратор из тонких платиновых стерженьков, получил миллиметровые электромагнитные волны с $\lambda = 6$—4 мм. Дальнейшее развитие методики эксперимента в этом направлении позволило в 1923 г. советскому физику А. А. Глаголевой-Аркадьевой (1884—1945) сконструировать **массовый излучатель**, в котором короткие электромагнитные волны, возбуждаемые колебаниями электрических зарядов в атомах и молекулах, генерировались с помощью искр, проскакиваемых между металлическими опилками, взвешенными в масле. Так были получены волны от 50 мм до 80 мкм. Тем самым было доказано существование волн, перекрывающих интервал между радиоволнами и инфракрасным излучением.

Недостатком вибраторов Герца и Лебедева и массового излучателя Глаголевой-Аркадьевой являлось то, что свободные колебания в них быстро затухали и обладали малой мощностью. Для получения незатухающих колебаний необходимо создать автоколебательную систему (см. § 146), которая обеспечивала бы подачу энергии с частотой, равной частоте собственных колебаний контура. Поэтому в 20-х годах нашего столетия перешли к генерированию электромагнитных волн с помощью электронных ламп. Ламповые генераторы позволяют получать колебания заданной (практически любой) мощности и синусоидальной формы.

Электромагнитные волны, обладая широким диапазоном частот (или длин волн $\lambda = c/\nu$, где $c$ — скорость электромагнитных волн в вакууме), отличаются друг от друга по способам их генерации и регистрации, а также по своим свойствам. Поэтому электромагнитные волны делятся на несколько видов: радиоволны, световые волны, рентгеновское и $\gamma$-излучения (табл. 5). Следует отметить, что границы между различными видами электромагнитных волн довольно условны.

Таблица 5

| Вид излучения | Длина волны, м | Частота волны, Гц | Источник излучения |
|---|---|---|---|
| Радиоволны | $10^3$—$10^{-4}$ | $3\cdot10^5$—$3\cdot10^{12}$ | Колебательный контур<br>Вибратор Герца<br>Массовый излучатель<br>Ламповый генератор |
| Световые волны: | | | |
| инфракрасное излучение | $5\cdot10^{-4}$—$8\cdot10^{-7}$ | $6\cdot10^{11}$—$3{,}75\cdot10^{14}$ | Лампы<br>Лазеры |
| видимый свет | $8\cdot10^{-7}$—$4\cdot10^{-7}$ | $3{,}75\cdot10^{14}$—$7{,}5\cdot10^{14}$ | |
| ультрафиолетовое излучение | $4\cdot10^{-7}$—$10^{-9}$ | $7{,}5\cdot10^{14}$—$3\cdot10^{17}$ | |
| Рентгеновское излучение | $2\cdot10^{-9}$—$6\cdot10^{-12}$ | $1{,}5\cdot10^{17}$—$5\cdot10^{19}$ | Трубки Рентгена |
| $\gamma$-Излучение | $<6\cdot10^{-12}$ | $>5\cdot10^{19}$ | Радиоактивный распад<br>Ядерные процессы<br>Космические процессы |

## § 162. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны

Как уже указывалось (см. § 161), одним из важнейших следствий уравнений Максвелла (см. § 139) является существование электромагнитных волн. Можно показать, что для *однородной* и *изотропной среды вдали от зарядов и токов*, создающих электромагнитное поле, из уравнений Максвелла следует, что векторы напряженностей **E** и **H** переменного электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению типа (154.9):

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \qquad (162.1)$$

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \qquad (162.2)$$

где $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

— оператор Лапласа, $v$ — фазовая скорость.

Всякая функция, удовлетворяющая уравнениям (162.1) и (162.2), описывает некоторую волну. Следовательно, электромагнитные поля действительно могут существовать в виде электромагнитных волн. Фазовая скорость электромагнитных волн определяется выражением

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad (162.3)$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $\varepsilon_0$ и $\mu_0$ — соответственно электрическая и магнитная постоянные, $\varepsilon$ и $\mu$ — соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды.

В вакууме (при $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$) скорость распространения электромагнитных волн совпадает со скоростью $c$. Так как $\varepsilon\mu > 1$, то скорость распространения электромагнитных волн в веществе всегда меньше, чем в вакууме.

При вычислении скорости распространения электромагнитного поля по формуле (162.3) получается результат, достаточно хорошо совпадающий с экспериментальными данными, если учитывать зависимость $\varepsilon$ и $\mu$ от частоты. Совпадение же размерного коэффициента в (162.3) со скоростью распространения света в вакууме указывает на глубокую связь между электромагнитными и оптическими явлениями, позволившую Максвеллу создать электромагнитную теорию света, согласно которой свет представляет собой электромагнитные волны.

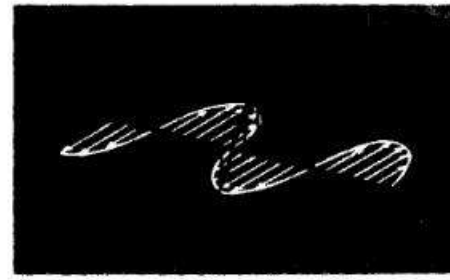


Рис. 227

Следствием теории Максвелла является **поперечность электромагнитных волн**: векторы **E** и **H** напряженностей электрического и магнитного полей волны взаимно перпендикулярны (на рис. 227 показана моментальная «фотография» плоской электромагнитной волны) и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору **v** скорости распространения волны, причем векторы **E**, **H** и **v** образуют правовинтовую систему. Из уравнений Максвелла следует также, что в электромагнитной волне векторы **E** и **H** всегда колеблются *в одинаковых фазах* (см. рис. 227), причем мгновенные значения $E$ и $H$ в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\,E = \sqrt{\mu_0\mu}\,H. \qquad (162.4)$$

Следовательно, $E$ и $H$ одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль и т. д.

От волновых уравнений (162.1) и (162.2) можно перейти к уравнениям

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \qquad (162.5)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \qquad (162.6)$$

где соответственно индексы $y$ и $z$ при $E$ и $H$ подчеркивают лишь то, что векторы

**E** и **H** направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей $y$ и $z$.

Уравнениям (162.5) и (162.6) удовлетворяют, в частности, плоские **монохроматические электромагнитные волны** (электромагнитные волны одной строго определенной частоты), описываемые уравнениями

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (162.7)$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (162.8)$$

где $E_0$ и $H_0$ — соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны, $\omega$ — круговая частота волны, $k = \omega/v$ — волновое число, $\varphi$ — начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$. В уравнениях (162.7) и (162.8) $\varphi$ одинаково, так как колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят с одинаковой фазой.

## § 163. Энергия электромагнитных волн. Импульс электромагнитного поля

Возможность обнаружения электромагнитных волн указывает на то, что они переносят энергию. Объемная плотность $w$ энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей $w_{эл}$ (см. (95.8)) и $w_м$ (см. (130.3)) электрического и магнитного полей:

$$w = w_{эл} + w_м = \varepsilon_0 \varepsilon E^2/2 + \mu_0 \mu H^2/2.$$

Учитывая выражение (162.4), получим, что плотность энергии электрического и магнитного полей в каждый момент времени одинакова, т. е. $w_{эл} = w_м$. Поэтому

$$w = 2w_{эл} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\,\sqrt{\varepsilon \mu}\, EH.$$

Умножив плотность энергии $w$ на скорость $v$ распространения волны в среде (см. (162.3)), получим модуль плотности потока энергии:

$$S = wv = EH.$$

Так как векторы **E** и **H** взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему, то направление вектора [**EH**] совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен $EH$. **Вектор плотности потока электромагнитной энергии** называется **вектором Умова—Пойнтинга**:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}].$$

Вектор **S** направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

Если электромагнитные волны поглощаются или отражаются телами (эти явления подтверждены опытами Г. Герца), то из теории Максвелла следует, что электромагнитные волны должны оказывать на тела давление. Давление электромагнитных волн объясняется тем, что под действием электрического поля волны заряженные частицы вещества начинают упорядоченно двигаться и подвергаются со стороны магнитного поля волны действию сил Лоренца. Однако значение этого давления ничтожно. Можно оценить, что при средней мощности солнечного излучения, приходящего на Землю, давление для абсолютно поглощающей поверхности составляет примерно 5 мкПа. В исключительно тонких экспериментах, ставших классическими, П. Н. Лебедев в 1899 г. доказал существование светового давления на твердые тела, а в 1910 г.— на газы. Опыты Лебедева имели огромное значение для утверждения выводов теории Максвелла о том, что свет представляет собой электромагнитные волны.

Существование давления электромагнитных волн приводит к выводу о том, что электромагнитному полю присущ механический импульс. Импульс электромагнитного поля

$$p = W/c,$$

где $W$ — энергия электромагнитного поля. Выражая импульс как $p = mc$ (поле в вакууме распространяется со скоростью $c$), получим $p = mc = W/c$, откуда

$$W = mc^2. \quad (163.1)$$

Это соотношение между массой и энергией свободного электромагнитного поля является *универсальным законом* природы (см. также § 40). Согласно специальной теории относительности, выражение (163.1) имеет общее значение и справедливо для любых тел независимо от их внутреннего строения.

Таким образом, рассмотренные свойства электромагнитных волн, определяемые теорией Максвелла, полностью подтверждаются опытами Герца, Лебедева и выводами специальной теории относительности, сыгравшими решающую роль для подтверждения и быстрого признания этой теории.

## § 164. Излучение диполя. Применение электромагнитных волн

Простейшим излучателем электромагнитных волн является электрический диполь, электрический момент которого изменяется во времени по гармоническому закону

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t,$$

где $\mathbf{p}_0$ — амплитуда вектора $\mathbf{p}$. Примером подобного диполя может служить система, состоящая из покоящегося положительного заряда $+Q$ и отрицательного заряда $-Q$, гармонически колеблющегося вдоль направления $\mathbf{p}$ с частотой $\omega$.

Задача об излучении диполя имеет в теории излучающих систем важное значение, так как всякую реальную излучающую систему (например, антенну) можно рассчитывать рассматривая излучение диполя. Кроме того, многие вопросы взаимодействия излучения с веществом можно объяснить на основе классической теории, рассматривая атомы как системы зарядов, в которых электроны совершают гармонические колебания около их положений равновесия.

Характер электромагнитного поля диполя зависит от выбора рассматриваемой точки. Особый интерес представляет так называемая **волновая зона диполя** — точки пространства, отстоящие от диполя на расстояниях $r$, значительно превышающих длину волны ($r \gg \lambda$),— так как в ней картина электромагнитного поля диполя сильно упрощается. Это связано с тем, что в волновой зоне диполя практически остаются только «отпочковавшиеся» от диполя, свободно распространяющиеся поля, в то время как поля, колеблющиеся вместе с диполем и имеющие более сложную структуру, сосредоточены в области расстояний $r \leqslant \lambda$.

Если волна распространяется в однородной изотропной среде, то время прохождения волны до точек, удаленных от диполя на расстояние $r$, одинаково. Поэтому во всех точках сферы, центр которой совпадает с диполем, фаза колебаний одинакова, т. е. в волновой зоне волновой фронт будет сферическим и, следовательно, волна, излучаемая диполем, есть сферическая волна.

В каждой точке векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ колеблются по закону $\cos(\omega t - kr)$, амплитуды этих векторов пропорциональны $\frac{1}{r}\sin\vartheta$ (для вакуума), т. е. зависят от расстояния $r$ до излучателя и угла $\vartheta$ между направлением радиуса-вектора и осью диполя. Отсюда следует, что интенсивность излучения диполя в волновой зоне

$$I \sim \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}. \qquad (164.1)$$

Зависимость (164.1) $I$ от $\vartheta$ при заданном значении $r$, приводимая в полярных координатах (рис. 228), называется **диаграммой направленности излучения диполя**. Как видно из выражения (164.1) и приведенной диаграммы, диполь сильнее всего излучает в направлениях, перпендикулярных его оси ($\vartheta = \pi/2$). Вдоль своей оси ($\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$) диполь не излучает вообще. Диаграмма направленности излучения диполя позволяет формировать излучение с определенными характеристика-

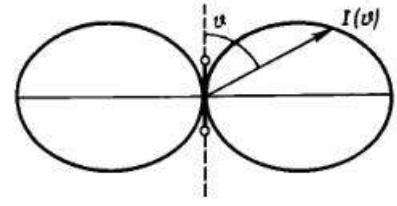



Рис. 228

ми и используется при конструировании антенн.

Впервые электромагнитные волны были использованы через семь лет после опытов Герца. 7 мая 1895 г. преподаватель физики офицерских минных классов А. С. Попов (1859—1906) на заседании Русского физико-химического общества продемонстрировал первый в мире радиоприемник, открывший возможность практического использования электромагнитных волн для беспроволочной связи, преобразившей жизнь человечества. Первая переданная в мире радиограмма содержала лишь два слова: «Генрих Герц». Изобретение радио Поповым сыграло огромную роль в деле распространения и развития теории Максвелла.

Электромагнитные волны сантиметрового и миллиметрового диапазонов, встречая на своем пути преграды, отражаются от них. Это явление лежит в основе радиолокации — обнаружения предметов (например, самолетов, кораблей и т. д.) на больших расстояниях и точного определения их положения. Помимо этого, методы радиолокации используются для наблюдения прохождения и образования облаков, движения метеоритов в верхних слоях атмосферы и т. д.

Для электромагнитных волн характерно явление дифракции — огибания волнами различных препятствий. Именно благодаря дифракции радиоволн возможна устойчивая радиосвязь между удаленными пунктами, разделенными между собой выпуклостью Земли. Длинные волны (сотни и тысячи метров) применяются в фототелеграфии, короткие волны (несколько метров и меньше) применяются в телевидении для передачи изображений на небольшие расстояния (немногим больше пределов прямой видимости). Электромагнитные волны используются также в радиогеодезии для очень точного определения расстояний с помощью радиосигналов, в радиоастрономии для исследования радиоизлучения небесных тел и т. д. Полное описание применения электромагнитных волн дать практически невозможно, так как нет областей науки и техники, где бы они не использовались.

## Контрольные вопросы

- Что такое электромагнитная волна? Какова скорость ее распространения?
- Что может служить источником электромагнитных волн?
- Каковы физические процессы, приводящие к возможности существования электромагнитных волн?
- Почему Герц в своих опытах использовал открытый колебательный контур?
- Как можно представить себе шкалу электромагнитных волн, и каковы источники излучения разных видов волн?
- Какие характеристики поля периодически изменяются в бегущей электромагнитной волне?
- Почему член $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ в уравнении Максвелла $\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{S}$ нужен для понимания распространения электромагнитной волны?
- Запишите волновое уравнение для векторов **E** и **H** переменного электромагнитного поля. Проанализируйте его решения и объясните физический смысл.
- Как определяется фазовая скорость электромагнитных волн?
- Как определить объемную плотность энергии в электромагнитной волне?
- В чем заключается физический смысл вектора Умова—Пойнтинга? Чему он равен?
- Почему важна задача об излучении диполя?
- В чем заключается физический смысл диаграммы направленности излучения диполя?

# Задачи

**20.1.** Электромагнитная волна с частотой 4 МГц переходит из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=3$ в вакуум. Определить приращение ее длины волны. [31,7 м]

**20.2.** Два параллельных провода, одни концы которых изолированы, а вторые индуктивно соединены с генератором электромагнитных колебаний, погружены в спирт. При соответствующем подборе частоты колебаний в системе возникают стоячие волны. Расстояние между двумя узлами стоячих волн на проводах равно 0,5 м. Принимая диэлектрическую проницаемость спирта $\varepsilon=26$, а его магнитную проницаемость $\mu=1$, определить частоту колебаний генератора. [58,8 МГц]

**20.3.** В вакууме вдоль оси $x$ распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет 18,8 В/м. Определить интенсивность волны, т. е. среднюю энергию, приходящуюся за единицу времени на единицу площади, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны. [0,47 Вт/м$^2$]

# 5 Оптика. Квантовая природа излучения

## Глава 21
## Элементы геометрической и электронной оптики

### § 165. Основные законы оптики. Полное отражение

Еще до установления природы света были известны следующие основные законы оптики: закон прямолинейного распространения света в оптически однородной среде; закон независимости световых пучков (справедлив только в линейной оптике); закон отражения света; закон преломления света.

**Закон прямолинейного распространения света:** свет в оптически однородной среде распространяется прямолинейно.

Доказательством этого закона является наличие тени с резкими границами от непрозрачных предметов при освещении их точечными источниками света (источники, размеры которых значительно меньше освещаемого предмета и расстояния до него). Тщательные эксперименты показали, однако, что этот закон нарушается, если свет проходит сквозь очень малые отверстия, причем отклонение от прямолинейности распространения тем больше, чем меньше отверстия.

**Закон независимости световых пучков:** эффект, производимый отдельным пучком, не зависит от того, действуют ли одновременно остальные пучки или они устранены. Разбивая световой поток на отдельные световые пучки (например, с помощью диафрагм), можно показать, что действие выделенных световых пучков независимо.

Если свет падает на границу раздела двух сред (двух прозрачных веществ), то падающий луч *I* (рис. 229) разделяется на два — отраженный *II* и преломленный *III*, направления которых задаются законами отражения и преломления.

**Закон отражения:** отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, проведенным к границе раздела двух сред в точке падения; угол $i_1'$ отражения равен углу $i_1$ падения:

$$i_1' = i_1.$$

**Закон преломления:** луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, проведенный к границе раздела в точке падения, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных сред:

$$\sin i_1 / \sin i_2 = n_{21}, \qquad (165.1)$$

где $n_{21}$ — **относительный показатель преломления** второй среды относительно первой. Индексы в обозначениях углов $i_1$, $i_1'$, $i_2$ указывают, в какой среде (первой или второй) идет луч.

Относительный показатель преломле-

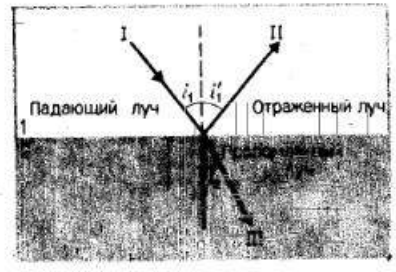



Рис. 229

ния двух сред равен отношению их абсолютных показателей преломления:

$$n_{21}=n_2/n_1. \qquad (165.2)$$

**Абсолютным показателем преломления** среды называется величина $n$, равная отношению скорости $c$ электромагнитных волн в вакууме к их фазовой скорости $v$ в среде:

$$n=c/v. \qquad (165.3)$$

Сравнение с формулой (162.3) дает, что $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$, где $\varepsilon$ и $\mu$ — соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды. Учитывая (165.2), закон преломления (165.1) можно записать в виде

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \qquad (165.4)$$

Из симметрии выражения (165.4) вытекает обратимость световых лучей. Если обратить луч *III* (рис. 229), заставив его падать на границу раздела под углом $i_2$, то преломленный луч в первой среде будет распространяться под углом $i_1$, т. е. пойдет в обратном направлении вдоль луча *I*.

Если свет распространяется из среды с бóльшим показателем преломления $n_1$ (оптически более плотной) в среду с меньшим показателем преломления $n_2$ (оптически менее плотную) ($n_1>n_2$), например из стекла в воду, то, согласно (165.4),

$$\frac{\sin i_2}{\sin i_1}=\frac{n_1}{n_2}>1$$

и преломленный луч удаляется от нормали и угол преломления $i_2$ больше, чем угол падения $i_1$ (рис. 230, *а*). С увеличением угла падения увеличивается угол преломления (рис. 230, *б, в*) до тех пор, пока при некотором угле падения ($i_1=i_{пр}$) угол преломления не окажется равным $\pi/2$. Угол $i_{пр}$ называется **предельным углом.** При углах падения $i_1>i_{пр}$ весь падающий свет полностью отражается (рис. 230, *г*).

По мере приближения угла падения к предельному интенсивность преломленного луча уменьшается, а отраженного — растет (рис. 230, *а—в*). Если $i_1=i_{пр}$, то интенсивность преломленного луча обращается в нуль, а интенсивность отраженного равна интенсивности падающего (рис. 230, *г*). Таким образом, при углах падения в пределах от $i_{пр}$ до $\pi/2$ луч не преломляется, а полностью отражается в первую среду, причем интенсивности отраженного и падающего лучей одинаковы. Это явление называется **полным отражением.**

Предельный угол $i_{пр}$ определим из формулы (165.4) при подстановке в нее $i_2=\pi/2$. Тогда

$$\sin i_{пр}=n_2/n_1=n_{21}. \qquad (165.5)$$

Уравнение (165.5) удовлетворяет значениям угла $i_{пр}$ при $n_2\leqslant n_1$. Следовательно, явление полного отражения имеет место только при падении света *из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную.*

Явление полного отражения используется в призмах полного отражения. Показатель преломления стекла равен $n\approx 1{,}5$, поэтому предельный угол для границы стекло — воздух $i_{пр}=\arcsin(1/1{,}5)=42°$. Поэтому при падении света на границу стекло — воздух при $i>42°$ всегда будет иметь место полное отражение. На рис. 231, *а—в* показаны призмы полного отражения, позволяющие: а) повернуть луч на 90 °; б) повернуть изображение; в) обернуть лучи. Такие призмы применяются в оптических приборах (например, в биноклях, перископах),

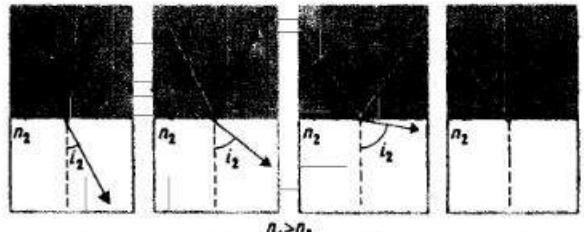



Рис. 230

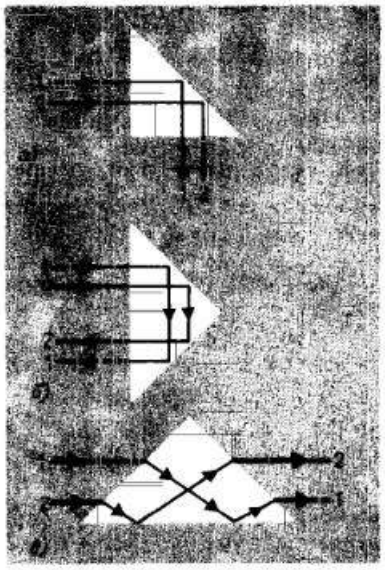


Рис. 231

а также в **рефрактометрах**, позволяющих определять показатели преломления тел (по закону преломления, измеряя $i_{пр}$, определяем относительный показатель преломления двух сред, а также абсолютный показатель преломления одной из сред, если показатель преломления второй среды известен).

Явление полного отражения используется также в **световодах (светопроводах)**, представляющих собой тонкие, произвольным образом изогнутые нити (волокна) из оптически прозрачного материала. В волоконных деталях применяют стеклянное волокно, световедущая жила (сердцевина) которого окружается стеклом — оболочкой из другого стекла с меньшим показателем преломления. Свет, падающий на торец световода под углами, бóльшими предельного, претерпевает на поверхности раздела сердцевины и оболочки полное отражение и распространяется только по световедущей жиле.

Таким образом, с помощью световодов можно как угодно искривлять путь светового пучка. Диаметр световедущих жил лежит в пределах от нескольких микрометров до нескольких миллиметров. Для передачи изображений, как правило, применяются многожильные световоды. Вопросы передачи световых волн и изображений изучаются в специальном разделе оптики — **волоконной оптике**, возникшей в 50-е годы XX столетия. Световоды используются в электронно-лучевых трубках, в электронно-счетных машинах, для кодирования информации, в медицине (например, диагностика желудка), для целей интегральной оптики и т. д.

## § 166. Тонкие линзы. Изображение предметов с помощью линз

Раздел оптики, в котором законы распространения света рассматриваются на основе представления о световых лучах, называется **геометрической оптикой**. Под **световыми лучами** понимаются нормальные к волновым поверхностям линии, вдоль которых распространяется поток световой энергии. Геометрическая оптика, оставаясь приближенным методом построения изображений в оптических системах, позволяет разобрать основные явления, связанные с прохождением через них света, и является поэтому основой теории оптических приборов.

**Линзы** представляют собой прозрачные тела, ограниченные двумя поверхностями (одна из них обычно сферическая, иногда цилиндрическая, а вторая — сферическая или плоская), преломляющими световые лучи, способные формировать оптические изображения предметов. Материалом для линз служат стекло, кварц, кристаллы, пластмассы и т. п. По внешней форме (рис. 232) линзы делятся на: 1) двояковыпуклые; 2) плосковыпуклые; 3) двояковогнутые; 4) плосковогнутые; 5) выпукло-вогнутые; 6) вогнуто-выпуклые. По оптическим свойствам **линзы** делятся на **собирающие** и **рассеивающие.**

Линза называется **тонкой**, если ее толщина (расстояние между ограничивающими поверхностями) значительно меньше по сравнению с радиусами поверхностей, ограничивающих линзу. Прямая, проходя-

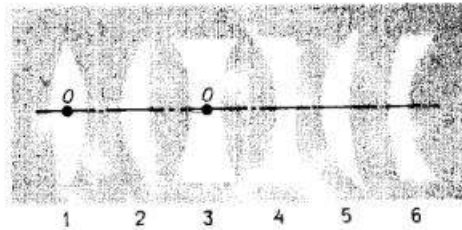



Рис. 232

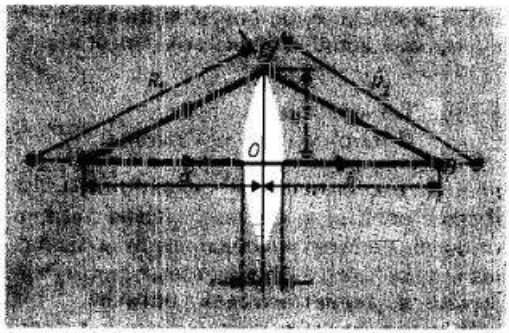



Рис. 233

щая через центры кривизны поверхностей линзы, называется **главной оптической осью.** Для всякой линзы существует точка, называемая **оптическим центром линзы,** лежащая на главной оптической оси и обладающая тем свойством, что лучи проходят сквозь нее не преломляясь. Для простоты оптический центр $O$ линзы будем считать совпадающим с геометрическим центром средней части линзы (это справедливо только для двояковыпуклой и двояковогнутой линз с одинаковыми радиусами кривизны обеих поверхностей; для плосковыпуклых и плосковогнутых линз оптический центр $O$ лежит на пересечении главной оптической оси со сферической поверхностью).

Для вывода формулы тонкой линзы — соотношения, связывающего радиусы кривизны $R_1$ и $R_2$ поверхностей линзы с расстояниями $a$ и $b$ от линзы до предмета и его изображения,— воспользуемся **принципом Ферма** *, или **принципом наименьшего времени:** действительный путь распространения света (траектория светового луча) есть путь, для прохождения которого свету требуется минимальное время по сравнению с любым другим мыслимым путем между теми же точками.

Рассмотрим две траектории светового луча (рис. 233) — прямую, соединяющую точки $A$ и $B$ (луч $AOB$), и траекторию, проходящую через край линзы (луч $ACB$),— воспользовавшись условием равенства времени прохождения света по этим траекториям. Время прохождения света по траектории $AOB$

$$t_1=\frac{a+N(e+d)+b}{c},$$

где $N=n/n_1$ — относительный показатель преломления ($n$ и $n_1$ — соответственно абсолютные показатели преломления линзы и окружающей среды). Время прохождения света по траектории $ACB$ равно

$$t_2=\frac{\sqrt{(a+e)^2+h^2}+\sqrt{(b+d)^2+h^2}}{c}.$$

Так как $t_1=t_2$, то

$$a+N(e+d)+b=$$
$$=\sqrt{(a+e)^2+h^2}+\sqrt{(b+d)^2+h^2}. \quad (166.1)$$

Рассмотрим **параксиальные (приосевые) лучи,** т. е. лучи, образующие с оптической осью малые углы. Только для параксиальных лучей получается **стигматическое изображение,** т. е. все лучи параксиального пучка, исходящего из точки $A$, пересекают оптическую ось в одной и той же точке $B$. Тогда $h\ll(a+e)$, $h\ll(b+d)$ и

$$\sqrt{(a+e)^2+h^2}=(a+e)\sqrt{1+\frac{h^2}{(a+e)^2}}=$$
$$=(a+e)\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{a+e}\right)^2\right]=$$
$$=a+e+\frac{h^2}{2(a+e)}.$$

Аналогично,

$$\sqrt{(b+d)^2+h^2}=b+d+\frac{h^2}{2(b+d)}.$$

Подставив найденные выражения в (166.1), получим

$$(N-1)(e+d)=\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{a+e}+\frac{1}{b+d}\right). \quad (166.2)$$

Для тонкой линзы $e\ll a$ и $d\ll b$, поэтому (166.2) можно представить в виде

$$(N-1)(e+d)=\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

* П. Ферма (1601—1665) — французский математик и физик.

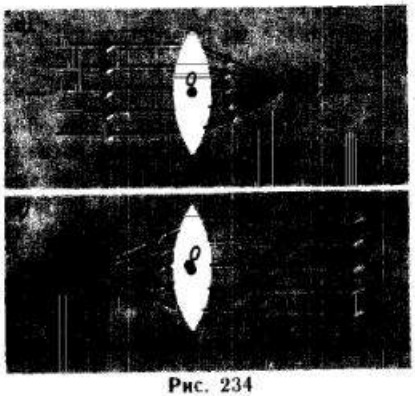


Рис. 234

Учитывая, что $e=R_2-\sqrt{R_2^2-h^2}=$ $=R_2-R_2\sqrt{1-h^2/R_2^2}=R_2-R_2[1-$ $-\frac{1}{2}(h/R_2)^2]=h^2/(2R_2)$ и соответственно $d=h^2/(2R_1)$, получим

$$(N-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}. \quad (166.3)$$

Выражение (166.3) представляет собой **формулу тонкой линзы**. Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы считается положительным, вогнутой — отрицательным.

Если $a=\infty$, т. е. лучи падают на линзу параллельным пучком (рис. 234, *а*), то

$$\frac{1}{b}=(N-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Соответствующее этому случаю расстояние $b=OF=f$ называется **фокусным расстоянием линзы:**

$$f=\frac{1}{(N-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}.$$

Оно зависит от относительного показателя преломления и радиусов кривизны.

Если $b=\infty$, т. е. изображение находится в бесконечности и, следовательно, лучи выходят из линзы параллельным пучком (рис. 234, *б*), то $a=OF=f$. Таким образом, фокусные расстояния линзы, окруженной с обеих сторон одинаковой средой, равны. Точки $F$, лежащие по обе стороны линзы на расстоянии, равном фокусному, называются **фокусами линзы.** Фокус — это точка, в которой после преломления собираются все лучи, падающие на линзу параллельно главной оптической оси.

Величина

$$(N-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f}=\Phi \quad (166.4)$$

называется **оптической силой линзы.** Ее единица — диоптрия (дптр). **Диоптрия** — оптическая сила линзы с фокусным расстоянием 1 м: 1 дптр $=1/$м.

Линзы с **положительной** оптической силой являются **собирающими, с отрицательной — рассеивающими.** Плоскости, проходящие через фокусы линзы перпендикулярно ее главной оптической оси, называются **фокальными плоскостями.** В отличие от собирающей рассеивающая линза имеет мнимые фокусы. В мнимом фокусе сходятся (после преломления) воображаемые продолжения лучей, падающих на рассеивающую линзу параллельно главной оптической оси (рис. 235).

Учитывая (166.4), формулу линзы (166.3) можно записать в виде

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}.$$

Для рассеивающей линзы расстояния $f$ и $b$ надо считать отрицательными.

Построение изображения предмета в линзах осуществляется с помощью следующих лучей:

1) луча, проходящего через оптический центр линзы и не изменяющего своего направления;

2) луча, идущего параллельно главной оптической оси; после преломления в линзе этот луч (или его продолжение) проходит через второй фокус линзы;

3) луча (или его продолжения), проходящего через первый фокус линзы; по-

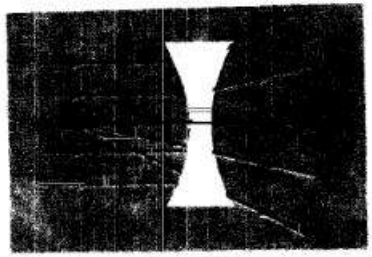


Рис. 235

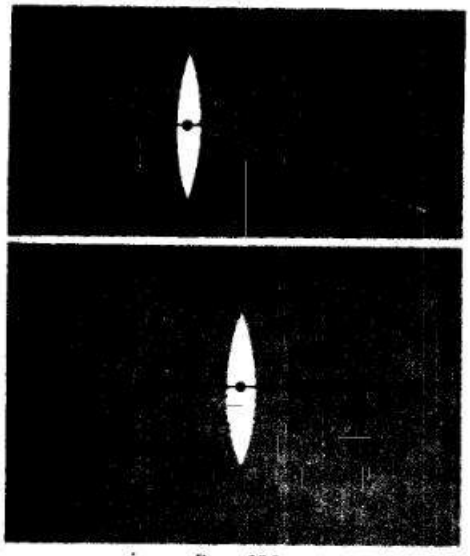


Рис. 236

сле преломления в ней он выходит из линзы параллельно ее главной оптической оси.

Для примера приведены построения изображений в собирающей (рис. 236) и в рассеивающей (рис. 237) линзах: действительное (рис. 236, *а*) и мнимое (рис. 236, *б*) изображения — в собирающей линзе, мнимое — в рассеивающей.

Отношение линейных размеров изображения и предмета называется **линейным увеличением линзы**. Отрицательным значениям линейного увеличения соответствует действительное изображение (оно перевернутое), положительным — мнимое изображение (оно прямое). Комбинации собирающих и рассеивающих линз применяются в оптических приборах, используемых для решения различных научных и технических задач.

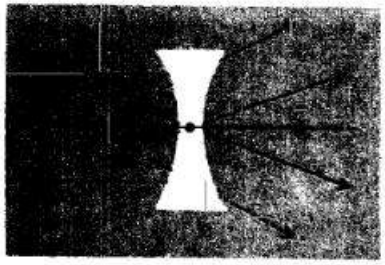


Рис. 237

## § 167. Аберрации (погрешности) оптических систем

Рассматривая прохождение света через тонкие линзы, мы ограничивались параксиальными лучами (см. § 166). Показатель преломления материала линзы считали не зависящим от длины волны падающего света, а падающий свет — монохроматическим. Так как в реальных оптических системах эти условия не выполняются, то в них возникают искажения изображения, называемые **аберрациями** (или **погрешностями**).

**1. Сферическая аберрация.** Если расходящийся пучок света падает на линзу, то параксиальные лучи после преломления пересекаются в точке $S'$ (на расстоянии $OS'$ от оптического центра линзы), а лучи, более удаленные от оптической оси,— в точке $S''$, ближе к линзе (рис. 238). В результате изображение светящейся точки на экране, перпендикулярном оптической оси, будет в виде расплывчатого пятна. Этот вид погрешности, связанный со сферичностью преломляющих поверхностей, называется сферической аберрацией. Количественной мерой сферической аберрации является отрезок $\delta = OS'' - OS'$. Применяя диафрагмы (ограничиваясь параксиальными лучами), можно сферическую аберрацию уменьшить, однако при этом уменьшается светосила линзы. Сферическую аберрацию можно практически устранить, составляя системы из собирающих ($\delta < 0$) и рассеивающих ($\delta > 0$) линз. Сферическая аберрация является частным случаем астигматизма.

**2. Кома.** Если через оптическую систему проходит широкий пучок от светящейся точки, расположенной не на оптической

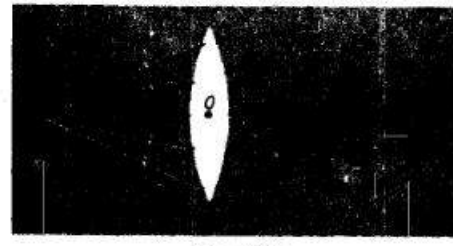


Рис. 238

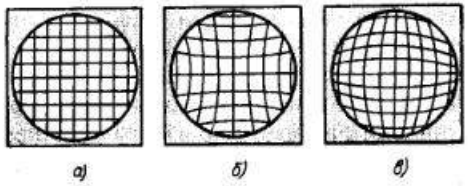


Рис. 239

оси, то получаемое изображение этой точки будет в виде освещенного пятнышка, напоминающего кометный хвост. Такая погрешность называется поэтому комой. Устранение комы производится теми же приемами, что и сферической аберрации.

**3. Дисторсия.** Погрешность, при которой при больших углах падения лучей на линзу линейное увеличение для точек предмета, которые находятся на разных расстояниях от главной оптической оси, несколько различается, называется дисторсией. В результате нарушается геометрическое подобие между предметом (прямоугольная сетка, рис. 239, *а*) и его изображением (рис. 239, *б* — подушкообразная дисторсия, рис. 239, *в* — бочкообразная дисторсия). Дисторсия особенно опасна в тех случаях, когда оптические системы применяются для съемок, например при аэрофотосъемке, в микроскопии и т. д. Дисторсию исправляют соответствующим подбором составляющих частей оптической системы.

**4. Хроматическая аберрация.** До сих пор мы предполагали, что коэффициенты преломления оптической системы постоянны. Однако это утверждение справедливо лишь для освещения оптической системы монохроматическим светом ($\lambda = \text{const}$); при сложном составе света необходимо учитывать зависимость коэффициента преломления вещества линзы (и окружающей среды, если это не воздух) от длины волны (явление дисперсии). При падении на оптическую систему белого света отдельные составляющие его монохроматические лучи фокусируются в разных точках (наибольшее фокусное расстояние имеют красные лучи, наименьшее — фиолетовые), поэтому изображение размыто и по краям окрашено. Это явление называется хроматической аберрацией. Так как разные сорта стекол обладают различной дисперсией, то, комбинируя собирающие и рассеивающие линзы из различных стекол, можно совместить фокусы двух **(ахроматы)** и трех **(апохроматы)** различных цветов, устранив тем самым хроматическую аберрацию. Системы, исправленные на сферическую и хроматическую аберрации, называются **апланатами.**

**5. Астигматизм.** Погрешность, обусловленная неодинаковостью кривизны оптической поверхности в разных плоскостях сечения падающего на ее светового пучка, называется астигматизмом. Так, изображение точки, удаленной от главной оптической оси, наблюдается на экране в виде расплывчатого пятна эллиптической формы. Это пятно в зависимости от расстояния экрана до оптического центра линзы вырождается либо в вертикальную, либо в горизонтальную прямую. Астигматизм исправляется подбором радиусов кривизны преломляющих поверхностей и их фокусных расстояний. Системы, исправленные на сферическую и хроматическую аберрации и астигматизм, называются **анастигматами.**

Устранение аберраций возможно лишь подбором специально рассчитанных сложных оптических систем. Одновременное исправление всех погрешностей — задача крайне сложная, а иногда даже неразрешимая. Поэтому обычно устраняются полностью лишь те погрешности, которые в том или ином случае особенно вредны.

## § 168. Основные фотометрические величины и их единицы

**Фотометрия** — раздел оптики, занимающийся вопросами измерения интенсивности света и его источников. В фотометрии используются следующие величины:

1) **энергетические** — характеризуют энергетические параметры оптического излучения безотносительно к его действию на приемники излучения;

2) **световые** — характеризуют физиологические действия света и оцениваются по воздействию на глаз (исходят из так называемой средней чувствительности глаза) или другие приемники излучения.

**1. Энергетические величины. Поток излучения** $\Phi_e$ — величина, равная отношению энергии $W$ излучения ко времени $t$, за которое излучение произошло:

$$\Phi_e = W/t.$$

Единица потока излучения — **ватт** (Вт).

**Энергетическая светимость (излучательность)** $R_e$ — величина, равная отношению потока излучения $\Phi_e$, испускаемого поверхностью, к площади $S$ сечения, сквозь которое этот поток проходит:

$$R_e = \Phi_e/S,$$

т. е. представляет собой поверхностную плотность потока излучения.

Единица энергетической светимости — **ватт на метр в квадрате** (Вт/м$^2$).

**Энергетическая сила света (сила излучения)** $I_e$ определяется с помощью понятия о точечном источнике света — источнике, размерами которого по сравнению с расстоянием до места наблюдения можно пренебречь. Энергетическая сила света $I_e$ — величина, равная отношению потока излучения $\Phi_e$ источника к телесному углу $\omega$, в пределах которого это излучение распространяется:

$$I_e = \Phi_e/\omega.$$

Единица энергетической силы света — **ватт на стерадиан** (Вт/ср).

**Энергетическая яркость (лучистость)** $B_e$ — величина, равная отношению энергетической силы света $\Delta I_e$ элемента излучающей поверхности к площади $\Delta S$ проекции этого элемента на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения:

$$B_e = \Delta I_e/\Delta S.$$

Единица энергетической яркости — **ватт на стерадиан-метр в квадрате** (Вт/(ср·м$^2$)).

**Энергетическая освещенность (облученность)** $E_e$ характеризует величину потока излучения, падающего на единицу освещаемой поверхности. Единица энергетической освещенности совпадает с единицей энергетической светимости (Вт/м$^2$).

**2. Световые величины.** При оптических измерениях используются различные приемники излучения (например, глаз, фотоэлементы, фотоумножители), которые не обладают одинаковой чувствительностью к энергии различных длин волн, являясь, таким образом, **селективными (избирательными).** Каждый приемник излучения характеризуется своей кривой чувствительности к свету различных длин волн. Поэтому световые измерения, являясь субъективными, отличаются от объективных, энергетических и для них вводятся световые единицы, используемые только для видимого света. *Основной световой единицей в СИ* является единица силы света — **кандела** (кд), определение которой дано выше (см. Введение). Определение световых единиц аналогично энергетическим.

**Световой поток** $\Phi$ определяется как мощность оптического излучения по вызываемому им световому ощущению (по его действию на селективный приемник света с заданной спектральной чувствительностью).

Единица светового потока — **люмен** (лм): 1 лм — световой поток, испускаемый точечным источником силой света в 1 кд внутри телесного угла в 1 ср (при равномерности поля излучения внутри телесного угла) (1 лм = 1 кд·ср).

**Светимость** $R$ определяется соотношением

$$R = \Phi/S.$$

Единица светимости — **люмен на метр в квадрате** (лм/м$^2$).

**Яркость** $B_\varphi$ светящейся поверхности в некотором направлении $\varphi$ есть величина, равная отношению силы света $I$ в этом направлении к площади $S$ проекции светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную данному направлению:

$$B_\varphi = I/(S\cos\varphi).$$

Единица яркости — **кандела на метр в квадрате** (кд/м$^2$).

**Освещенность** $E$ — величина, равная отношению светового потока $\Phi$, падающего на поверхность, к площади $S$ этой по-

верхности:

$$E=\Phi/S.$$

Единица освещенности — **люкс** (лк): 1 лк — освещенность поверхности, на 1 м$^2$ которой падает световой поток в 1 лм (1 лк = 1 лм/м$^2$).

## § 169. Элементы электронной оптики

Область физики и техники, в которой изучаются вопросы формирования, фокусировки и отклонения пучков заряженных частиц и получения с их помощью изображений под действием электрических и магнитных полей в вакууме, называется **электронной оптикой.** Комбинируя различные электронно-оптические элементы — электронные линзы, зеркала, призмы,— получают электронно-оптические приборы, например электронно-лучевую трубку, электронный микроскоп, электронно-оптический преобразователь.

1. **Электронные линзы** представляют собой устройства, с помощью электрических и магнитых полей которых формируются и фокусируются пучки заряженных частиц. Существуют электростатические и магнитные линзы. В качестве **электростатической линзы** может быть использовано электрическое поле с вогнутыми и выпуклыми эквипотенциальными поверхностями, например в системах металлических электродов и диафрагм, обладающих осевой симметрией. На рис. 240 изображена простейшая собирающая электростатическая линза, где $A$ — точка предмета, $B$ — ее изображение, пунктиром изображены линии напряженности поля.

**Магнитная линза** обычно представляет собой соленоид с сильным магнитным полем, коаксиальным пучку электронов. Чтобы магнитное поле сконцентрировать на оси симметрии, соленоид помещают в железный кожух с узким внутренним кольцевым разрезом.

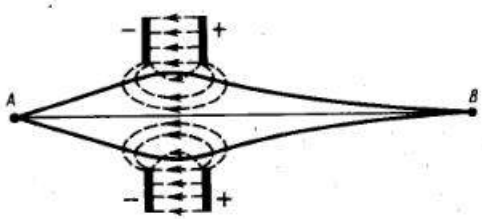


Рис. 240

Если расходящийся пучок заряженных частиц попадает в однородное магнитное поле, направленное вдоль оси пучка, то скорость каждой частицы можно разложить на два компонента: поперечный и продольный. Первый из них определяет равномерное движение по окружности в плоскости, перпендикулярной направлению поля (см. § 115), второй — равномерное прямолинейное движение вдоль поля. Результирующее движение частицы будет происходить по спирали, ось которой совпадает с направлением поля. Для электронов, испускаемых под различными углами, нормальные составляющие скоростей будут различны, т. е. будут различны и радиусы описываемых ими спиралей. Однако отношение нормальных составляющих скорости к радиусам спиралей за период вращения (см. § 115) будет для всех электронов одинаково; следовательно, через один оборот все электроны сфокусируются в одной и той же точке на оси магнитной линзы.

«Преломление» электростатических и магнитных линз зависит от их фокусных расстояний, которые определяются устройством линзы, скоростью электронов, разностью потенциалов, приложенной к электродам (электростатическая линза), и индукцией магнитного поля (магнитная линза). Изменяя разность потенциалов или регулируя ток в катушке, можно изменить фокусное расстояние линз. Стигматическое изображение предметов в электронных линзах получается только для параксиальных электронных пучков. Как и в оптических системах (см. § 167), в электронно-оптических элементах также имеют место погрешности: сферическая аберрация, кома, дисторсия, астигматизм. При разбросе скоростей электронов в пучке наблюдается также и хроматическая аберрация. Аберрации ухудшают разрешающую способность и качество изображения, а поэтому в каждом конкретном случае необходимо их устранять.

2. **Электронный микроскоп** — это устройство, предназначенное для получения изображения микрообъектов; в нем в отличие от оптического микроскопа вместо световых лучей используют уско-

ренные до больших энергий (30—100 кэВ и более) в условиях глубокого вакуума (примерно 0,1 мПа) электронные пучки, а вместо обычных линз — электронные линзы. В электронных микроскопах предметы рассматриваются либо в проходящем, либо в отраженном потоке электронов, поэтому различают **просвечивающие и отражательные электронные микроскопы.**

На рис. 241 приведена принципиальная схема просвечивающего электронного микроскопа. Электронный пучок, формируемый электронной пушкой *1*, попадает в область действия **конденсорной линзы** *2*, которая фокусирует на объекте *3* электронный пучок необходимого сечения и интенсивности. Пройдя объект и испытав в нем отклонения, электроны проходят вторую магнитную линзу — **объектив** *4* — и собираются ею в промежуточное изображение *5*. Затем с помощью **проекционной линзы** *6* на флуоресцирующем экране достигается окончательное изображение *7*.

Разрешающая способность электронного микроскопа ограничивается, с одной стороны, волновыми свойствами (дифракцией) электронов, с другой — аберрациями электронных линз. Согласно теории, разрешающая способность микроскопа пропорциональна длине волны, а так как длина волны применяемых электронных пучков (примерно 1 пм) в тысячи раз меньше длины волны световых лучей, то разрешение электронных микроскопов соответственно больше и составляет 0,01—0,0001 мкм (для оптических микроскопов приблизительно равно 0,2—0,3 мкм). С помощью электронных микроскопов можно добиться значительно бóльших увеличений (до $10^6$ раз), что позволяет наблюдать детали структур размерами 0,1 нм.

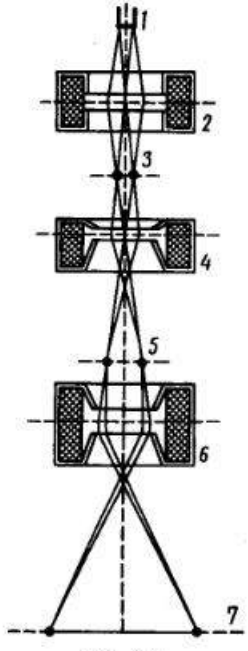


Рис. 241

**3. Электронно-оптический преобразователь** — это устройство, предназначенное для усиления яркости светового изображения и преобразования невидимого глазом изображения объекта (например, в инфракрасных или ультрафиолетовых лучах) в видимое. Схема простейшего электронно-оптического преобразователя приведена на рис. 242. Изображение предмета *A* с помощью оптической линзы *1* проецируется на фотокатод *2*. Излучение от объекта вызывает с поверхности фотокатода фотоэлектронную эмиссию, пропорциональную распределению яркости спроецированного на него изображения. Фотоэлектроны, ускоренные электрическим полем (*3* — ускоряющий электрод), фокусируются с помощью электронной линзы *4* на флуоресцирующий экран *5*, где электронное изображение преобразуется в световое (получается окончательное изображение *A″*). Электронная часть преобразователя находится в высоковакуумном сосуде *6*.

Из оптики известно, что всякое увеличение изображения связано с уменьшением его освещенности. Достоинство элек-

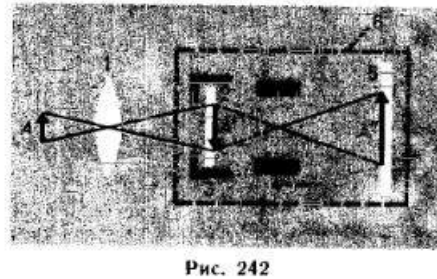


Рис. 242

тронно-оптических преобразователей заключается в том, что в них можно получить увеличенное изображение $A''$ даже большей освещенности, чем сам предмет $A$, так как освещенность определяется энергией электронов, создающих изображение на флуоресцирующем экране. Разрешающая способность каскадных (нескольких последовательно соединенных) электронно-оптических преобразователей составляет 25—60 штрихов на 1 мм. Коэффициент преобразования — отношение излучаемого экраном светового потока к потоку, падающему от объекта на фотокатод,— у каскадных электронно-оптических преобразователей достигает $\approx 10^6$. Недостаток этих приборов — малая разрешающая способность и довольно высокий темновой фон, что влияет на качество изображения.

## Контрольные вопросы

- В чем заключается физический смысл абсолютного показателя преломления среды? Что такое относительный показатель преломления?
- При каком условии наблюдается полное отражение?
- В чем заключается принцип работы световодов?
- В чем заключается принцип Ферма?
- Как осуществляется построение изображения предметов в линзах?
- Чем отличаются энергетические и световые величины в фотометрии? Какие они бывают?
- Почему разрешающая способность электронных микроскопов гораздо выше, чем обычных?
- Можно ли в электронно-оптических преобразователях получить увеличенное изображение бо́льшей освещенности, чем предмет? Почему?

## Задачи

**21.1.** На плоскопараллельную стеклянную пластинку ($n=1{,}5$) толщиной 6 см падает под углом 35° луч света. Определить боковое смещение луча, прошедшего сквозь эту пластинку. [1,41 см]

**21.2.** Необходимо изготовить плосковыпуклую линзу с оптической силой 6 дптр. Определить радиус кривизны выпуклой поверхности линзы, если показатель преломления материала линзы равен 1,6. [10 см]

**21.3.** Определить, на какую высоту необходимо повесить лампочку мощностью 300 Вт, чтобы освещенность под ней была равна 50 лк. Наклон доски составляет 35°, а световая отдача лампочки равна 15 лм/Вт. Принять, что полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником света, $\Phi_0 = 4\pi I$. [2,42 м]

# Глава 22
# Интерференция света

### § 170. Развитие представлений о природе света

Основные законы оптики известны еще с древних веков. Так, Платон (430 г. до н. э.) установил законы прямолинейного распространения и отражения света. Аристотель (350 г. до н. э.) и Птоломей изучали преломление света. Первые представления о природе света возникли у древних греков и египтян, которые в дальнейшем, по мере изобретения и усовершенствования различных оптических инструментов, например параболических зеркал (XIII в.), фотоаппарата и микроскопа (XVI в.), зрительной трубы (XVII в.), развивались и трансформировались. В конце XVII в. на основе многове-

кового опыта и развития представлений о свете возникли **две теории света: корпускулярная** (И. Ньютон) и **волновая** (Р. Гук и Х. Гюйгенс).

Согласно корпускулярной теории (теории истечения), свет представляет собой поток частиц (корпускул), испускаемых светящимися телами и летящих по прямолинейным траекториям. Движение световых корпускул Ньютон подчинил сформулированным им законам механики. Так, отражение света понималось аналогично отражению упругого шарика при ударе о плоскость, где также соблюдается закон равенства углов падения и отражения. Преломление света Ньютон объяснял притяжением корпускул преломляющей средой, в результате чего скорость корпускул меняется при переходе из одной среды в другую. Из теории Ньютона следовало постоянство синуса угла падения $i_1$ к синусу угла преломления $i_2$:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2}=\frac{v}{c}=n, \qquad (170.1)$$

где $c$ — скорость распространения света в вакууме, $v$ — скорость распространения света в среде. Так как $n$ в среде всегда больше единицы, то, *по теории Ньютона*, $v>c$, т. е. скорость распространения света в среде должна быть всегда больше скорости его распространения в вакууме.

Согласно волновой теории, развитой на основе аналогии оптических и акустических явлений, свет представляет собой упругую волну, распространяющуюся в особой среде — эфире. Эфир заполняет все мировое пространство, пронизывает все тела и обладает механическими свойствами — упругостью и плотностью. Согласно Гюйгенсу, большая скорость распространения света обусловлена особыми свойствами эфира.

Волновая теория основывается на **принципе Гюйгенса:** каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторичных волн, а огибающая этих волн дает положение волнового фронта в следующий момент времени. Напомним, что волновым фронтом называется геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени $t$. Принцип Гюйгенса позволяет анализировать распространение света и вывести законы отражения и преломления.

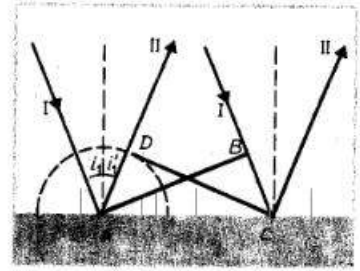


Рис. 243

Выведем законы отражения и преломления света, исходя из принципа Гюйгенса. Пусть на границу раздела двух сред падает плоская волна (фронт волны — плоскость $AB$), распространяющаяся вдоль направления $I$ (рис. 243). Когда фронт волны достигнет отражающей поверхности в точке $A$, эта точка начнет излучать вторичную волну. Для прохождения волной расстояния $BC$ требуется время $\Delta t=BC/v$. За это же время фронт вторичной волны достигнет точек полусферы, радиус $AD$ которой равен $v\Delta t=BC$. Положение фронта отраженной волны в этот момент времени в соответствии с принципом Гюйгенса задается плоскостью $DC$, а направление распространения этой волны — лучом $II$. Из равенства треугольников $ABC$ и $ADC$ вытекает закон отражения: угол отражения $i_1'$ равен углу падения $i_1$.

Для вывода закона преломления предположим, что плоская волна (фронт волны — плоскость $AB$), распространяющаяся в вакууме вдоль направления $I$ со скоростью света $c$, падает на границу раздела со средой, в которой скорость ее распространения равна $v$ (рис. 244). Пусть время, затрачиваемое волной для про-

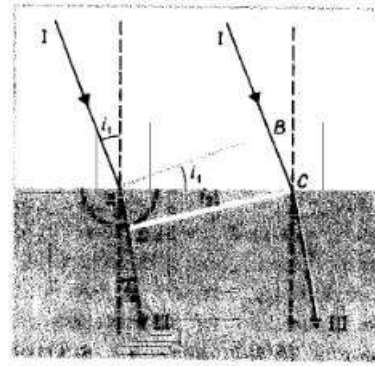


Рис. 244

хождения пути $BC$, равно $\Delta t$. Тогда $BC=c\Delta t$. За это же время фронт волны, возбуждаемый точкой $A$ в среде со скоростью $v$, достигнет точек полусферы, радиус которой $AD=v\Delta t$. Положение фронта преломленной волны в этот момент времени в соответствии с принципом Гюйгенса задается плоскостью $DC$, а направление ее распространения — лучом $III$. Из рис. 244 следует, что

$$AC=BC/\sin i_1=AD/\sin i_2,$$

т. е.

$$c\Delta t/\sin i_1=v\Delta t/\sin i_2,$$

откуда

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2}=\frac{c}{v}=n. \qquad (170.2)$$

Сравнивая выражения (170.2) и (170.1), видим, что волновая теория приводит к выводу, отличному от вывода теории Ньютона. По *теории Гюйгенса*, $v<c$, т. е. скорость распространения света в среде должна быть всегда меньше скорости его распространения в вакууме.

Таким образом, к началу XVIII в. существовало два противоположных подхода к объяснению природы света: корпускулярная теория Ньютона и волновая теория Гюйгенса. Обе эти теории объясняли прямолинейное распространение света, законы отражения и преломления. XVIII век стал веком борьбы этих теорий. Экспериментальное доказательство справедливости волновой теории было получено в 1851 г., когда Э. Фуко (и независимо от него А. Физо) измерил скорость распространения света в воде и получил значение, соответствующее формуле (170.2). К началу XIX столетия корпускулярная теория была полностью отвергнута и восторжествовала волновая теория. Большая заслуга в этом отношении принадлежит английскому физику Т. Юнгу, исследовавшему явления дифракции и интерференции, и французскому физику О. Френелю (1788—1827), дополнившему принцип Гюйгенса и объяснившему эти явления.

Несмотря на признание волновой теории, она обладала целым рядом недостатков. Например, явления интерференции, дифракции и поляризации могли быть объяснены только в том случае, если световые волны считать поперечными. С другой стороны, если световые волны — поперечные, то их носитель — эфир — должен обладать свойствами твердых тел. Попытка же наделить эфир свойствами твердого тела успеха не имела, так как эфир не оказывает заметного воздействия на движущиеся в нем тела. Далее эксперименты показали, что скорость распространения света в разных средах различна, поэтому эфир должен обладать в разных средах различными свойствами. Теория Гюйгенса не могла объяснить также физической природы наличия разных цветов.

Наука о свете накапливала экспериментальные данные, свидетельствующие о взаимосвязи световых, электрических и магнитных явлений, что позволило Максвеллу в 70-х годах прошлого столетия создать электромагнитную теорию света (см. § 139). Согласно электромагнитной теории Максвелла (см. (162.3)),

$$c/v=\sqrt{\varepsilon\mu}=n,$$

где $c$ и $v$ — соответственно скорости распространения света в вакууме и в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$ и магнитной проницаемостью $\mu$. Это соотношение связывает оптические, электрические и магнитные постоянные вещества. По Максвеллу, $\varepsilon$ и $\mu$ — величины, не зависящие от длины волны света, поэтому электромагнитная теория не могла объяснить явление дисперсии (зависимость показателя преломления от длины волны). Эта трудность была преодолена в конце XIX в. Лоренцем, предложившим **электронную теорию,** согласно которой диэлектрическая проницаемость $\varepsilon$ зависит от длины волны падающего света. Теория Лоренца ввела представление об электронах, колеблющихся внутри атома, и позволила объяснить явления испускания и поглощения света веществом.

Несмотря на огромные успехи электромагнитной теории Максвелла и электронной теории Лоренца, они были несколько противоречивы и при их применении встречался ряд затруднений. Обе теории основывались на гипотезе об эфире, только «упругий эфир» был заменен «эфиром электромагнитным» (теория Максвелла)

или «неподвижным эфиром» (теория Лоренца). Теория Максвелла не смогла объяснить процессов испускания и поглощения света, фотоэлектрического эффекта, комптоновского рассеяния и т. д. Теория Лоренца, в свою очередь, не смогла объяснить многие явления, связанные с взаимодействием света с веществом, в частности вопрос о распределении энергии по длинам волн при тепловом излучении черного тела.

Перечисленные затруднения и противоречия были преодолены благодаря смелой гипотезе (1900) немецкого физика М. Планка (1858—1947), согласно которой излучение и поглощение света происходит не непрерывно, а дискретно, т. е. **определенными порциями (квантами)**, энергия которых определяется частотой ν:

$$\varepsilon_0 = h\nu, \qquad (170.3)$$

где $h$ — постоянная Планка.

Теория Планка не нуждалась в понятии об эфире. Она объяснила тепловое излучение черного тела. Эйнштейн в 1905 г. создал **квантовую теорию света**, согласно которой не только *излучение* света, но и его *распространение* происходит в виде **потока световых квантов — фотонов**, энергия которых определяется соотношением (170.3), а масса

$$m_\phi = \frac{\varepsilon_0}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}. \qquad (170.4)$$

Квантовые представления о свете хорошо согласуются с законами излучения и поглощения света, законами взаимодействия света с веществом. Однако как с помощью этих представлений объяснить такие хорошо изученные явления, как интерференция, дифракция и поляризация света? Эти явления легко объясняются на основе волновых представлений. Все многообразие изученных свойств и законов распространения света, его взаимодействия с веществом показывает, что свет имеет сложную природу. Он представляет собой *единство противоположных видов движения* — **корпускулярного (квантового)** и **волнового (электромагнитного)**. Длительный путь развития привел к современным представлениям о **двойственной корпускулярно-волновой природе света.** Выражения (170.3) и (170.4) связывают корпускулярные характеристики излучения — массу и энергию кванта — с волновыми — частотой колебаний и длиной волны. Таким образом, свет представляет собой *единство дискретности и непрерывности*, что находится в полном соответствии с выводами материалистической диалектики.

## § 171. Когерентность и монохроматичность световых волн

Интерференцию света можно объяснить рассматривая интерференцию волн (см. § 156). Необходимым условием интерференции волн является их **когерентность**, т. е. согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов. Этому условию удовлетворяют **монохроматические волны** — неограниченные в пространстве волны одной определенной и строго постоянной частоты. Так как ни один реальный источник не дает строго монохроматического света, то волны, излучаемые любыми независимыми источниками света, всегда некогерентны. Поэтому на опыте не наблюдается интерференция света от независимых источников, например от двух электрических лампочек.

Понять физическую причину немонохроматичности, а следовательно, и некогерентности волн, испускаемых двумя независимыми источниками света, можно исходя из самого механизма испускания света атомами. В двух самостоятельных источниках света атомы излучают независимо друг от друга. В каждом из таких атомов процесс излучения конечен и длится очень короткое время ($\tau \approx 10^{-8}$ с). За это время возбужденный атом возвращается в нормальное состояние и излучение им света прекращается. Возбудившись вновь, атом снова начинает испускать световые волны, но уже с новой начальной фазой. Так как разность фаз между излучением двух таких независимых атомов изменяется при каждом новом акте испускания, то волны, спонтанно излучаемые атомами любого

источника света, некогерентны. Таким образом, волны, испускаемые атомами, лишь в течение интервала времени $\approx 10^{-8}$ с имеют приблизительно постоянные амплитуду и фазу колебаний, тогда как за больший промежуток времени и амплитуда, и фаза изменяются. Прерывистое излучение света атомами в виде отдельных коротких импульсов называется **волновым цугом.**

Описанная модель испускания света справедлива и для любого макроскопического источника, так как атомы светящегося тела излучают свет также *независимо* друг от друга. Это означает, что начальные фазы соответствующих им волновых цугов не связаны между собой. Помимо этого, даже для одного и того же атома начальные фазы разных цугов отличаются для двух последующих актов излучения. Следовательно, свет, испускаемый макроскопическим источником, некогерентен.

Любой немонохроматический свет можно представить в виде совокупности сменяющих друг друга независимых гармонических цугов. Средняя продолжительность одного цуга $\tau_{ког}$ называется **временем когерентности.** Когерентность существует только в пределах одного цуга, и время когерентности не может превышать время излучения, т. е. $\tau_{ког} < \tau$. Прибор обнаружит четкую интерференционную картину лишь тогда, когда время разрешения прибора значительно меньше времени когерентности накладываемых световых волн.

Если волна распространяется в однородной среде, то фаза колебаний в определенной точке пространства сохраняется только в течение времени когерентности $\tau_{ког}$. За это время волна распространяется в вакууме на расстояние $l_{ког} = c\tau_{ког}$, называемое **длиной когерентности** (или **длиной цуга**). Таким образом, длина когерентности есть расстояние, при прохождении которого две или несколько волн утрачивают когерентность. Отсюда следует, что наблюдение интерференции света возможно лишь при оптических разностях хода, меньших длины когерентности для используемого источника света.

Чем ближе волна к монохроматической, тем меньше ширина $\Delta\omega$ спектра ее частот и, как можно показать, больше ее время когерентности $\tau_{ког}$, а следовательно, и длина когерентности $l_{ког}$. Когерентность колебаний, которые совершаются в одной и той же точке пространства, определяемая степенью монохроматичности волн, называется **временно́й когерентностью.**

Наряду с временно́й когерентностью, для описания когерентных свойств волн в плоскости, перпендикулярной направлению их распространения, вводится понятие **пространственной когерентности.** Два источника, размеры и взаимное расположение которых позволяют (при необходимой степени монохроматичности света) наблюдать интерференцию, называются **пространственно-когерентными. Радиусом когерентности** (или **длиной пространственной когерентности**) называется максимальное поперечное направлению распространения волны расстояние, на котором возможно проявление интерференции. Таким образом, пространственная когерентность определяется радиусом когерентности.

Радиус когерентности

$$r_{ког} \sim \lambda/\varphi,$$

где $\lambda$ — длина световых волн, $\varphi$ — угловой размер источника. Так, минимально возможный радиус когерентности для солнечных лучей (при угловом размере Солнца на Земле $\varphi \approx 10^{-2}$ рад и $\lambda \approx 0{,}5$ мкм) составляет $\approx 0{,}05$ мм. При таком малом радиусе когерентности невозможно непосредственно наблюдать интерференцию солнечных лучей, поскольку разрешающая способность человеческого глаза на расстоянии наилучшего зрения составляет лишь 0,1 мм. Отметим, что первое наблюдение интерференции провел в 1802 г. Т. Юнг именно с солнечным светом, для чего он предварительно пропускал солнечные лучи через очень малое отверстие в непрозрачном экране (при этом на несколько порядков уменьшался угловой размер источника света и тем самым резко увеличивался радиус когерентности (или длина пространственной когерентности)).

## § 172. Интерференция света

Предположим, что две монохроматические световые волны, накладываясь друг на друга, возбуждают в определенной точке пространства колебания одинакового направления: $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Под $x$ понимают напряженность электрического $E$ или магнитного $H$ полей волны; векторы **E** и **H** колеблются во взаимно перпендикулярных плоскостях (см. § 162). Напряженности электрического и магнитного полей подчиняются принципу суперпозиции (см. § 80 и 110). Амплитуда результирующего колебания в данной точке $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ (см. 144.2)). Так как волны когерентны, то $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ имеет постоянное во времени (но свое для каждой точки пространства) значение, поэтому интенсивность результирующей волны ($I \sim A^2$)

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (172.1)$$

В точках пространства, где $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$, интенсивность $I > I_1 + I_2$, где $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$, интенсивность $I < I_1 + I_2$. Следовательно, при наложении двух (или нескольких) когерентных световых волн происходит пространственное перераспределение светового потока, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других — минимумы интенсивности. Это явление называется **интерференцией света.**

Для некогерентных волн разность $\varphi_2 - \varphi_1$ непрерывно изменяется, поэтому среднее во времени значение $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ равно нулю, и интенсивность результирующей волны всюду одинакова и при $I_1 = I_2$ равна $2I_1$ (для когерентных волн при данном условии в максимумах $I = 4I_1$, в минимумах $I = 0$).

Как можно создать условия, необходимые для возникновения интерференции световых волн? Для получения когерентных световых волн применяют метод разделения волны, излучаемой одним источником, на две части, которые после прохождения разных оптических путей накладываются друг на друга и наблюдается интерференционная картина.

Пусть разделение на две когерентные волны происходит в определенной точке $O$. До точки $M$, в которой наблюдается интерференционная картина, одна волна в среде с показателем преломления $n_1$ прошла путь $s_1$, вторая — в среде с показателем преломления $n_2$ — путь $s_2$. Если в точке $O$ фаза колебаний равна $\omega t$, то в точке $M$ первая волна возбудит колебание $A_1 \cos\omega(t - s_1/v_1)$, вторая волна — колебание $A_2 \cos\omega(t - s_2/v_2)$, где $v_1 = c/n_1$, $v_2 = c/n_2$ — соответственно фазовая скорость первой и второй волны. Разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами в точке $M$, равна

$$\delta = \omega\left(\frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1}\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(s_2 n_2 - s_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta$$

(учли, что $\omega/c = 2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda_0$, где $\lambda_0$ — длина волны в вакууме). Произведение геометрической длины $s$ пути световой волны в данной среде на показатель $n$ преломления этой среды называется **оптической длиной пути** $L$, а $\Delta = L_2 - L_1$ — разность оптических длин проходимых волнами путей — называется **оптической разностью хода.**

Если оптическая разность хода равна целому числу волн в вакууме

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \quad (172.2)$$

то $\delta = \pm 2m\pi$ и колебания, возбуждаемые в точке $M$ обеими волнами, будут происходить в одинаковой фазе. Следовательно, (172.2) является **условием интерференционного максимума.**

Если оптическая разность хода

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \quad (172.3)$$

то $\delta = \pm(2m+1)\pi$ и колебания, возбуждаемые в точке $M$ обеими волнами, будут происходить в противофазе. Следовательно, (172.3) является **условием интерференционного минимума.**

## § 173. Методы наблюдения интерференции света

Для осуществления интерференции света необходимо получить когерентные световые пучки, для чего применяются различные приемы. До появления лазеров (см. § 233) во всех приборах для наблюдения интерференции света когерентные пучки получали разделением и последующим сведением световых лучей, исходящих из одного и того же источника. Практически это можно осуществить с помощью экранов и щелей, зеркал и преломляющих тел. Рассмотрим некоторые из этих методов.

**1. Метод Юнга.** Источником света служит ярко освещенная щель $S$ (рис. 245), от которой световая волна падает на две узкие равноудаленные щели $S_1$ и $S_2$, параллельные щели $S$. Таким образом, щели $S_1$ и $S_2$ играют роль когерентных источников. Интерференционная картина (область $BC$) наблюдается на экране (Э), расположенном на некотором расстоянии параллельно $S_1$ и $S_2$. Как уже указывалось (см. § 171), Т. Юнгу принадлежит первое наблюдение явления интерференции.

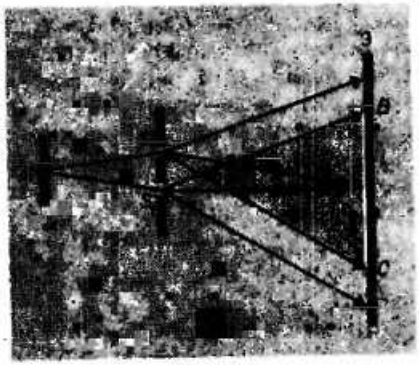


Рис. 245

**3. Зеркала Френеля.** Свет от источника $S$ (рис. 246) падает расходящимся пучком на два плоских зеркала $A_1O$ и $A_2O$, расположенных относительно друг друга под углом, лишь немного отличающимся от 180° (угол $\varphi$ мал). Учитывая правила построения изображения в плоских зеркалах, можно показать, что и источник, и его изображения $S_1$ и $S_2$ (угловое расстояние между которыми равно $2\varphi$) лежат на одной и той же окружности радиуса $r$ с центром в $O$ (точка соприкосновения зеркал).

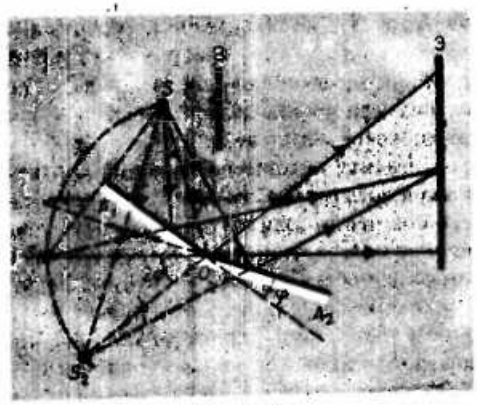


Рис. 246

Световые пучки, отразившиеся от обоих зеркал, можно считать выходящими из мнимых источников $S_1$ и $S_2$, являющихся мнимыми изображениями $S$ в зеркалах. Мнимые источники $S_1$ и $S_2$ взаимно когерентны, и исходящие из них световые пучки, встречаясь друг с другом, интерферируют в области взаимного перекрывания (на рис. 246 она выполнена зеленым цветом). Можно показать, что максимальный угол расхождения перекрывающихся пучков не может быть больше $2\varphi$. Интерференционная картина наблюдается на экране (Э), защищенном от прямого попадания света заслонкой (З).

**3. Бипризма Френеля.** Она состоит из двух одинаковых, сложенных основаниями призм с малыми преломляющими углами. Свет от источника $S$ (рис. 247) преломляется в обеих призмах, в результате чего за бипризмой распространяются световые лучи, как бы исходящие из мнимых источни-

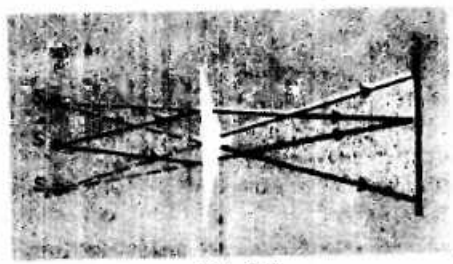


Рис. 247

ков $S_1$ и $S_2$, являющихся когерентными. Таким образом, на поверхности экрана (в области, выполненной в цвете) происходит наложение когерентных пучков и наблюдается интерференция.

**4. Расчет интерференционной картины от двух источников.** Расчет интерференционной картины для рассмотренных выше методов наблюдения интерференции света можно провести используя две узкие параллельные щели, расположенные достаточно близко друг к другу (рис. 248). Щели $S_1$ и $S_2$ находятся на расстоянии $d$ друг от друга и являются когерентными (реальными или мнимыми изображениями источника $S$ в какой-то оптической системе) источниками света. Интерференция наблюдается в произвольной точке $A$ экрана, параллельного обеим щелям и расположенного от них на расстоянии $l$, причем $l \gg d$. Начало отсчета выбрано в точке $O$, симметричной относительно щелей.

Интенсивность в любой точке $A$ экрана, лежащей на расстоянии $x$ от $O$, определяется оптической разностью хода $\Delta = s_2 - s_1$ (см. § 172). Из рис. 248 имеем

$$s_2^2 = l^2 + (x + d/2)^2; \quad s_1^2 = l^2 + (x - d/2)^2,$$

откуда

$$s_2^2 - s_1^2 = 2xd,$$

или

$$\Delta = s_2 - s_1 = 2xd/(s_1 + s_2).$$

Из условия $l \gg d$ следует, что $s_1 + s_2 \approx 2l$, поэтому

$$\Delta = xd/l. \qquad (173.1)$$

Подставив найденное значение $\Delta$ (173.1) в условия (172.2) и (172.3), получим, что максимумы интенсивности будут наблюдаться при

$$x_{max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (173.2)$$

а минимумы — при

$$x_{min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (173.3)$$

Расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами), называемое **шириной интерференционной полосы**, равно

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda_0. \qquad (173.4)$$

$\Delta x$ не зависит от порядка интерференции (величины $m$) и является постоянной для данных $l$, $d$ и $\lambda_0$. Согласно формуле (173.4), $\Delta x$ обратно пропорционально $d$; следовательно, при большом расстоянии между источниками, например при $d \approx l$, отдельные полосы становятся неразличимыми. Для видимого света $\lambda_0 \approx 10^{-7}$ м, поэтому четкая доступная для визуального наблюдения интерференционная картина имеет место при $l \gg d$ (это условие и принималось при расчете). По измеренным значениям $l$, $d$ и $\Delta x$, используя (173.4), можно экспериментально определить длину световой волны. Из выражений (173.2) и (173.3) следует, таким образом, что интерференционная картина, создаваемая на экране двумя когерентными источниками света, представляет собой чередование светлых и темных полос, параллельных друг другу. Главный максимум, соответствующий $m = 0$, проходит через точку $O$. Вверх и вниз от него на равных расстояниях друг от друга располагаются максимумы (минимумы) первого ($m = 1$), второго ($m = 2$) порядков и т. д. Описанная картина, однако, справедлива лишь при освещении монохроматическим светом ($\lambda_0 = \text{const}$). Если использовать белый свет, представляющий собой непрерывный набор длин волн от 0,39 мкм (фиолетовая граница спектра) до 0,75 мкм (красная граница спектра), то интерфе-

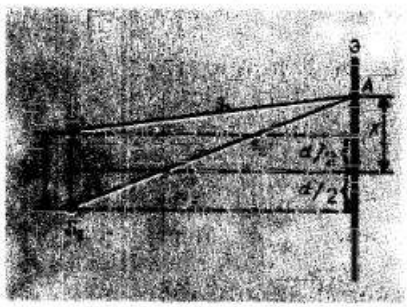



Рис. 248

ренционные максимумы для каждой длины волны будут, согласно формуле (173.4), смещены друг относительно друга и иметь вид радужных полос. Только для $m=0$ максимумы всех длин волн совпадают и в середине экрана будет наблюдаться белая полоса, по обе стороны которой симметрично расположатся спектрально окрашенные полосы максимумов первого, второго порядков и т. д. (ближе к белой полосе будут находиться зоны фиолетового цвета, дальше — зоны красного цвета).

## § 174. Интерференция света в тонких пленках

В природе часто можно наблюдать радужное окрашивание тонких пленок (масляные пленки на воде, мыльные пузыри, оксидные пленки на металлах), возникающее в результате интерференции света, отраженного двумя поверхностями пленки.

Пусть на плоскопараллельную прозрачную пленку с показателем преломления $n$ и толщиной $d$ под углом $i$ (рис. 249) падает плоская монохроматическая волна (для простоты рассмотрим один луч). На поверхности пленки в точке $O$ луч разделится на два: частично отразится от верхней поверхности пленки, а частично преломится. Преломленный луч, дойдя до точки $C$, частично преломится в воздух ($n_0=1$), а частично отразится и пойдет к точке $B$. Здесь он опять частично отразится (этот ход луча в дальнейшем из-за малой интенсивности не рассматриваем) и преломится, выходя в воздух под углом $i$. Вышедшие из пленки лучи *1* и *2* когерентны, если оптическая разность их хода мала по сравнению с длиной когерентности падающей волны. Если на их пути поставить собирающую линзу, то они сойдутся в одной из точек $P$ фокальной плоскости линзы и дадут интерференционную картину, которая определяется оптической разностью хода между интерферирующими лучами.

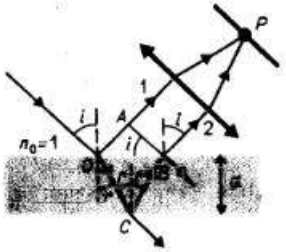


Рис. 249

Оптическая разность хода, возникающая между двумя интерферирующими лучами от точки $O$ до плоскости $AB$,

$$\Delta=n(OC+CB)-(OA\pm\lambda_0/2),$$

где показатель преломления окружающей пленку среды принят равным 1, а член $\pm\lambda_0/2$ обусловлен потерей полуволны при отражении света от границы раздела. Если $n>n_0$, то потеря полуволны произойдет в точке $O$ и вышеупомянутый член будет иметь знак минус, если же $n<n_0$, то потеря полуволны произойдет в точке $C$ и $\lambda_0/2$ будет иметь знак плюс. Согласно рис. 249, $OC=CB=d/\cos r$, $OA=OB\sin i=2d\operatorname{tg} r\sin i$. Учитывая для данного случая закон преломления $\sin i=n\sin r$, получим

$$\Delta=2dn\cos r=$$

$$=2dn\sqrt{1-\sin^2 r}=2d\sqrt{n^2-\sin^2 i}.$$

С учетом потери полуволны для оптической разности хода получим

$$\Delta=2d\sqrt{n^2-\sin^2 i}\pm\lambda_0/2. \quad (174.1)$$

Для случая, изображенного на рис. 249 ($n>n_0$),

$$\Delta=2d\sqrt{n^2-\sin^2 i}+\lambda_0/2.$$

В точке $P$ будет максимум, если (см. (172.2))

$$2d\sqrt{n^2-\sin^2 i}+\lambda_0/2=m\lambda_0$$

$$(m=0, 1, 2, \ldots), \quad (174.2)$$

и минимум, если (см. (172.3))

$$2d\sqrt{n^2-\sin^2 i}+\frac{\lambda_0}{2}=(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$$

$$(m=0, 1, 2, \ldots). \quad (174.3)$$

Доказывается, что интерференция наблюдается только, если удвоенная толщина пластинки меньше длины когерентности падающей волны.

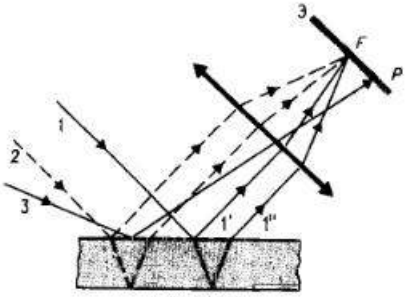


Рис. 250

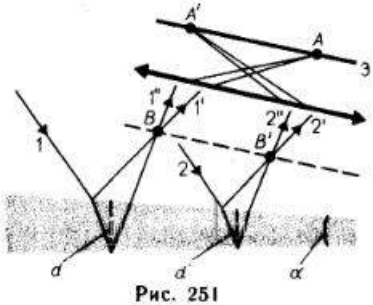


Рис. 251

**1. Полосы равного наклона (интерференция от плоскопараллельной пластинки).** Из выражений (174.2) и (174.3) следует, что интерференционная картина в плоскопараллельных пластинках (пленках) определяется величинами $\lambda_0$, $d$, $n$ и $i$. Для данных $\lambda_0$, $d$ и $n$ каждому наклону $i$ лучей соответствует своя интерференционная полоса. Интерференционные полосы, возникающие в результате наложения лучей, падающих на плоскопараллельную пластинку под одинаковыми углами, называются **полосами равного наклона.**

Лучи *1′* и *1″*, отразившиеся от верхней и нижней граней пластинки (рис. 250), параллельны друг другу, так как пластинка плоскопараллельна. Следовательно, интерферирующие лучи *1′* и *1″* «пересекаются» только в бесконечности, поэтому говорят, что **полосы равного наклона** *локализованы в бесконечности*. Для их наблюдения используют собирающую линзу и экран (Э), расположенный в фокальной плоскости линзы. Параллельные лучи *1′* и *1″* соберутся в фокусе *F* линзы (на рис. 250 ее оптическая ось параллельна лучам *1′* и *1″*), в эту же точку придут и другие лучи (на рис. 250 — луч *2*), параллельные лучу *1*, в результате чего увеличивается общая интенсивность. Лучи *3*, наклоненные под другим углом, соберутся в другой точке *P* фокальной плоскости линзы. Легко показать, что если оптическая ось линзы перпендикулярна поверхности пластинки, то полосы равного наклона будут иметь вид концентрических колец с центром в фокусе линзы.

**2. Полосы равной толщины (интерференция от пластинки переменной толщины).** Пусть на клин (угол $\alpha$ между боковыми гранями мал) падает плоская волна, направление распространения которой совпадает с параллельными лучами *1* и *2* (рис. 251). Из всех лучей, на которые разделяется падающий луч *1*, рассмотрим лучи *1′* и *1″*, отразившиеся от верхней и нижней поверхностей клина. При определенном взаимном положении клина и линзы лучи *1′* и *1″* пересекутся в некоторой точке *A*, являющейся изображением точки *B*. Так как лучи *1′* и *1″* когерентны, они будут интерферировать. Если источник расположен довольно далеко от поверхности клина и угол $\alpha$ достаточно мал, то оптическая разность хода между интерферирующими лучами *1′* и *1″* может быть с достаточной степенью точности вычислена по формуле (174.1), где в качестве $d$ берется толщина клина в месте падения на него луча. Лучи *2′* и *2″*, образовавшиеся за счет деления луча *2*, падающего в другую точку клина, собираются линзой в точке *A′*. Оптическая разность хода уже определяется толщиной *d′*. Таким образом, на экране возникает система интерференционных полос. Каждая из полос возникает за счет отражения от мест пластинки, имеющих одинаковую толщину (в общем случае толщина пластинки может изменяться произвольно). Интерференционные полосы, возникающие в результате интерференции от мест одинаковой толщины, называются **полосами равной толщины.**

Так как верхняя и нижняя грани клина не параллельны между собой, то лучи *1′* и *1″* (*2′* и *2″*) пересекаются вблизи пластинки, в изображенном на рис. 251 случае — над ней (при другой

конфигурации клина они могут пересекаться и под пластинкой). Таким образом, *полосы равной толщины локализованы вблизи поверхности клина*. Если свет падает на пластинку нормально, то полосы равной толщины локализуются на верхней поверхности клина.

**3. Кольца Ньютона.** Кольца Ньютона, являющиеся классическим примером полос равной толщины, наблюдаются при отражении света от воздушного зазора, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны (рис. 252). Параллельный пучок света падает нормально на плоскую поверхность линзы и частично отражается от верхней и нижней поверхностей воздушного зазора между линзой и пластинкой. При наложении отраженных лучей возникают полосы равной толщины, при нормальном падении света имеющие вид концентрических окружностей.

В отраженном свете оптическая разность хода (с учетом потери полуволны при отражении), согласно (174.1), при условии, что показатель преломления воздуха $n=1$, а $i=0$,

$$\Delta=2d+\lambda_0/2,$$

где $d$ — ширина зазора. Из рис. 252 следует, что $R^2=(R-d)^2+r^2$, где $R$ — радиус кривизны линзы, $r$ — радиус кривизны окружности, всем точкам которой соответствует одинаковый зазор $d$. Учитывая, что $d$ мало, получим $d=r^2/(2R)$. Следовательно,

$$\Delta=r^2/R+\lambda_0/2. \qquad (174.4)$$

Приравняв (174.4) к условиям максимума (172.2) и минимума (172.3), получим выражения для радиуса $m$-го светлого кольца

$$r_m=\sqrt{(m-{}^1/_2)\,\lambda_0 R}\quad (m=1, 2, 3, \ldots)$$

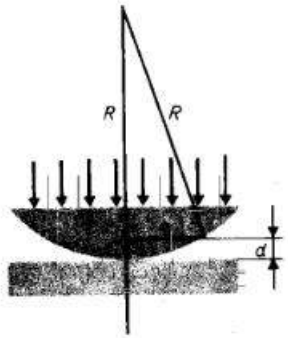



Рис. 252

и радиуса $m$-го темного кольца

$$r_m=\sqrt{m\lambda_0 R}\quad (m=0, 1, 2, \ldots).$$

Измеряя радиусы соответствующих колец, можно (зная радиус кривизны линзы $R$) определить $\lambda_0$ и, наоборот, по известной $\lambda_0$ найти радиус кривизны линзы $R$.

Как для полос равного наклона, так и для полос равной толщины положение максимумов зависит от длины волны $\lambda_0$ (см. (174.2)). Поэтому система светлых и темных полос получается только при освещении монохроматическим светом. При наблюдении в белом свете получается совокупность смещенных друг относительно друга полос, образованных лучами разных длин волн, и интерференционная картина приобретает радужную окраску. Все рассуждения были проведены для отраженного света. Интерференцию можно наблюдать и в проходящем свете, причем в данном случае не наблюдается потери полуволны. Следовательно, оптическая разность хода для проходящего и отраженного света отличатся на $\lambda_0/2$, т. е. *максимумам интерференции в отраженном свете соответствуют минимумы в проходящем, и наоборот*.

## § 175. Применение интерференции света

Явление интерференции обусловлено волновой природой света; его количественные закономерности зависят от длины волны $\lambda_0$. Поэтому это явление применяется для подтверждения волновой природы света и для измерения длин волн **(интерференционная спектроскопия)**.

Явление интерференции применяется также для улучшения качества оптических приборов **(просветление оптики)** и получения высокоотражающих покрытий. Прохождение света через каждую преломляющую поверхность линзы, например через границу стекло — воздух, сопровождается отражением $\approx 4\,\%$ падающего потока (при показателе преломления стекла $\approx 1{,}5$). Так как современные объективы содержат большое количество линз, то число отражений в них велико, а поэтому велики и потери светового потока. Таким

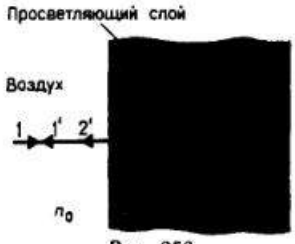


Рис. 253

образом, интенсивность прошедшего света ослабляется и светосила оптического прибора уменьшается. Кроме того, отражения от поверхностей линз приводят к возникновению бликов, что часто (например, в военной технике) демаскирует положение прибора.

Для устранения указанных недостатков осуществляют так называемое *просветление оптики*. Для этого на свободные поверхности линз наносят тонкие пленки с показателем преломления меньшим, чем у материала линзы. При отражении света от границ раздела воздух — пленка и пленка — стекло возникает интерференция когерентных лучей *1'* и *2'* (рис. 253). Толщину пленки $d$ и показатели преломления стекла $n_c$ и пленки $n$ можно подобрать так, чтобы интерферирующие лучи гасили друг друга. Для этого их амплитуды должны быть равны, а оптическая разность хода — равна $(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$ (см. (172.3)).

Расчет показывает, что амплитуды отраженных лучей равны, если

$$n=\sqrt{n_c}. \qquad (175.1)$$

Так как $n_c$, $n$ и показатель преломления воздуха $n_0$ удовлетворяют условиям $n_c > n > n_0$, то потеря полуволны происходит на обеих поверхностях; следовательно, условие минимума (предполагаем, что свет падает нормально, т. е. $i=0$)

$$2nd=(2m+1)\frac{\lambda_0}{2},$$

где $nd$ — **оптическая толщина пленки.** Обычно принимают $m=0$, тогда

$$nd=\lambda_0/4.$$

Таким образом, если выполняется условие (175.1) и оптическая толщина пленки равна $\lambda_0/4$, то в результате интерференции наблюдается гашение отраженных лучей. Так как добиться одновременного гашения для всех длин волн невозможно, то это обычно делается для наиболее воспримчивой глазом длины волны $\lambda_0 \approx$ $\approx 0{,}55$ мкм. Поэтому объективы с просветленной оптикой кажутся голубыми.

Создание высокоотражающих покрытий стало возможным лишь на основе **многолучевой интерференции.** В отличие от двухлучевой интерференции, которую мы рассматривали до сих пор, многолучевая интерференция возникает при наложении большого числа когерентных световых пучков. Распределение интенсивности в интерференционной картине существенно различается; интерференционные максимумы значительно уже и ярче, чем при наложении двух когерентных световых пучков. Так, результирующая амплитуда световых колебаний одинаковой амплитуды в максимумах интенсивности, где сложение происходит в одинаковой фазе, в $N$ раз больше, а интенсивность в $N^2$ раз больше, чем от одного пучка ($N$ — число интерферирующих пучков). Отметим, что для нахождения результирующей амплитуды удобно пользоваться графическим методом, используя метод вращающегося вектора амплитуды (см. § 140). Многолучевая интерференция осуществляется в дифракционной решетке (см. § 180).

Многолучевую интерференцию можно осуществить в многослойной системе чередующихся пленок с разными показателями преломления (но одинаковой оптической толщиной, равной $\lambda_0/4$), нанесенных на отражающую поверхность (рис. 254). Можно показать, что на границе раздела пленок (между двумя слоями ZnS с бо́льшим показателем преломления $n_1$ находится пленка криолита с меньшим показателем преломления $n_2$) возникает большое число отраженных интерферирующих лучей, которые при оптической толщине пленок $\lambda_0/4$ будут взаимно усиливаться, т. е. коэффициент отражения возрастает. Характерной особенностью такой высокоотражательной системы является то, что она действует в очень узкой спектральной области, причем чем больше коэффициент

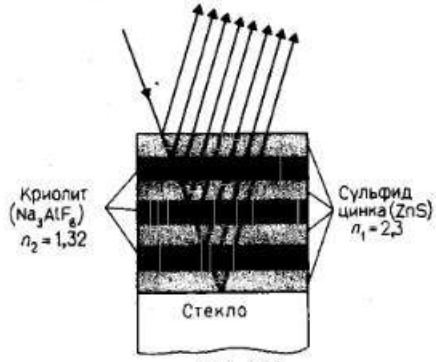



Рис. 254

отражения, тем у́же эта область. Например, система из семи пленок для области 0,5 мкм дает коэффициент отражения $\rho \approx$ $\approx 96\,\%$ (при коэффициенте пропускания $\approx 3{,}5\,\%$ и коэффициенте поглощения $< 0{,}5\,\%$). Подобные отражатели применяются в лазерной технике, а также используются для создания интерференционных светофильтров высокой (узкополосных оптических фильтров).

Явление интерференции также применяется в очень точных измерительных приборах, называемых **интерферометрами.** Все интерферометры основаны на одном и том же принципе и различаются лишь конструкционно. На рис. 255 представлена упрощенная схема **интерферометра Майкельсона.** Монохроматический свет от источника $S$ падает под углом 45° на плоскопараллельную пластинку $P_1$. Сторона пластинки, удаленная от $S$, посеребренная и полупрозрачная, разделяет луч на две части: луч *1* (отражается от посеребренного слоя) и луч *2* (проходит через него). Луч *1* отражается от зеркала $M_1$ и, возвращаясь обратно, вновь проходит через пластинку $P_1$ (луч *1′*). Луч *2* идет к зеркалу $M_2$, отражается от него, возвращается обратно и отражается от пластинки $P_1$ (луч *2′*) Так как первый из лучей проходит пластинку $P_1$ дважды, то для компенсации возникающей разности хода на пути второго луча ставится пластинка $P_2$ (точно такая же, как и $P_1$, только не покрытая слоем серебра).

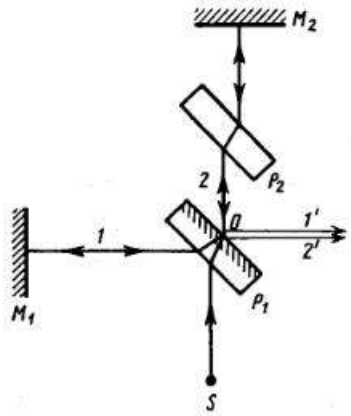



Рис. 255

Лучи *1′* и *2′* когерентны; следовательно, будет наблюдаться интерференция, результат которой зависит от оптической разности хода луча *1* от точки $O$ до зеркала $M_1$ и луча *2* от точки $O$ до зеркала $M_2$. При перемещении одного из зеркал на расстояние $\lambda_0/4$ разность хода обоих лучей увеличится на $\lambda_0/2$ и произойдет смена освещенности зрительного поля. Следовательно, по незначительному смещению интерференционной картины можно судить о малом перемещении одного из зеркал и использовать интерферометр Майкельсона для точного (порядка $10^{-7}$ м) измерения длин (измерения длины тел, длины световой волны, изменения длины тела при изменении температуры (интерференционный дилатометр)).

Советский физик В. П. Линник (1889—1984) использовал принцип действия интерферометра Майкельсона для создания **микроинтерферометра** (комбинация интерферометра и микроскопа), служащего для контроля чистоты обработки поверхности.

Интерферометры — очень чувствительные оптические приборы, позволяющие определять незначительные изменения показателя преломления прозрачных тел (газов, жидких и твердых тел) в зависимости от давления, температуры, примесей и т. д. Такие интерферометры получили название **интерференционных рефрактометров.** На пути интерферирующих лучей располагаются две одинаковые кюветы длиной $l$, одна из которых заполнена, например, газом с известным ($n_0$), а другая — с неизвестным ($n_x$) показателями

преломления. Возникшая между интерферирующими лучами дополнительная оптическая разность хода $\Delta=(n_x-n_0)l$. Изменение разности хода приведет к сдвигу интерференционных полос. Этот сдвиг можно характеризовать величиной

$$m_0=\Delta/\lambda=(n_x-n_0)\,l/\lambda,$$

где $m_0$ показывает, на какую часть ширины интерференционной полосы сместилась интерференционная картина. Измеряя величину $m_0$ при известных $l$, $n_0$ и $\lambda$, можно вычислить $n_x$ или изменение $n_x-n_0$. Например, при смещении интерференционной картины на $^1/_5$ полосы при $l=10$ см и $\lambda=0{,}5$ мкм $n_x-n_0=10^{-6}$, т. е. интерференционные рефрактометры позволяют измерять изменение показателя преломления с очень высокой точностью (до 1/1 000 000).

Применение интерферометров очень многообразно. Кроме перечисленного, они применяются для изучения качества изготовления оптических деталей, измерения углов, исследования быстропротекающих процессов, происходящих в воздухе, обтекающем летательные аппараты, и т. д. Применяя интерферометр, Майкельсон впервые провел сравнение международного эталона метра с длиной стандартной световой волны. С помощью интерферометров исследовалось также распространение света в движущихся телах, что привело к фундаментальным изменениям представлений о пространстве и времени.

## Контрольные вопросы

- Каковы основные положения и выводы корпускулярной и волновой теорий света? Почему возникло представление о двойственной корпускулярно-волновой природе света?
- Какую величину называют временем когерентности? длиной когерентности? Какова связь между ними?
- Для чего вводятся понятия временно́й и пространственной когерентностей?
- Что такое оптическая длина пути? оптическая разность хода?
- Два когерентных световых пучка с оптической разностью хода $\Delta=\frac{3}{2}\lambda$ интерферируют в некоторой точке. Максимум или минимум наблюдается в этой точке? Почему?
- Почему интерференцию можно наблюдать от двух лазеров и нельзя от двух электроламп?
- Как изменится интерференционная картина в опыте Юнга (см. рис. 245), если эту систему поместить в воду?
- Будут ли отличаться интерференционные картины от двух узких близколежащих параллельных щелей при освещении их монохроматическим и белым светом? Почему?
- Что такое полосы равной толщины и равного наклона? Где они локализованы?
- Освещая тонкую пленку из прозрачного материала монохроматическим светом, падающим нормально к поверхности пленки, на ней наблюдают параллельные чередующиеся равноудаленные темные и светлые полосы. Одинакова ли толщина отдельных участков пленки?
- Почему центр колец Ньютона, наблюдаемых в проходящем свете, обычно светлый?
- Между двумя пластинками имеется воздушный клин, освещая который монохроматическим светом наблюдают интерференционные полосы. Как изменится расстояние между полосами, если пространство заполнить прозрачной жидкостью?
- Когда и почему слой (слои) с оптической толщиной в четверть длины волны служит (служат) для полного гашения отраженных лучей и для получения высокоотражающих покрытий?

## Задачи

**22.1.** Определить, какую длину пути $s_1$ пройдет фронт волны монохроматического света в вакууме за то же время, за которое он проходит путь $s_2=1{,}5$ мм в стекле с показателем преломления $n_2=1{,}5$. [2,25 мм]

**22.2.** В опыте Юнга щели, расположенные на расстоянии 0,3 мм, освещались монохроматическим светом с длиной волны 0,6 мкм. Определить расстояние от щелей до экрана, если ширина интерференционных полос равна 1 мм. [0,5 мм]

**22.3.** На стеклянный клин ($n=1,5$) нормально падает монохроматический свет ($\lambda=698$ нм). Определить угол между поверхностями клина, если расстояние между двумя соседними интерференционными минимумами в отраженном свете равно 2 мм. [4′]

**22.4.** Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим нормально. При заполнении пространства между линзой и стеклянной пластинкой прозрачной жидкостью радиусы темных колец в отраженном свете уменьшились в 1,21 раза. Определить показатель преломления жидкости. [1,46]

**22.5.** На линзу с показателем преломления 1,55 нормально падает монохроматический свет с длиной волны 0,55 мкм. Для устранения потерь отраженного света на линзу наносится тонкая пленка. Определить: 1) оптимальный показатель преломления пленки; 2) толщину пленки. [1) 1,24; 2) 0,11 мкм]

**22.6.** В опыте с интерферометром Майкельсона для смещения интерференционной картины на 450 полос зеркало пришлось переместить на расстояние 0,135 мм. Определить длину волны падающего света. [0,6 мкм]

**22.7.** На пути одного из лучей интерференционного рефрактометра поместили откачанную трубку длиной 10 см. При заполнении трубки хлором интерференционная картина сместилась на 131 полосу. Определить показатель преломления хлора, если наблюдение производится с монохроматическим светом с длиной волны 0,59 мкм. [1,000773]

# Глава 23
# Дифракция света

## § 176. Принцип Гюйгенса — Френеля

**Дифракцией** называется огибание волнами препятствий, встречающихся на их пути, или в более широком смысле — любое отклонение распространения волн вблизи препятствий от законов геометрической оптики. Благодаря дифракции волны могут попадать в область геометрической тени, огибать препятствия, проникать через небольшие отверстия в экранах и т. д. Например, звук хорошо слышен за углом дома, т. е. звуковая волна его огибает.

Явление дифракции объясняется с помощью *принципа Гюйгенса* (см. § 170), согласно которому каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторичных волн, а огибающая этих волн дает положение волнового фронта в следующий момент времени.

Пусть плоская волна нормально падает на отверстие в непрозрачном экране (рис. 256). Согласно Гюйгенсу, каждая точка выделяемого отверстием участка волнового фронта служит источником вторичных волн (в однородной изотропной среде они сферические). Построив огибающую вторичных волн для некоторого момента времени, видим, что фронт волны заходит в область геометрической тени, т. е. волна огибает края отверстия.

Явление дифракции характерно для волновых процессов. Поэтому если свет является волновым процессом, то для него должна наблюдаться дифракция, т. е. све-

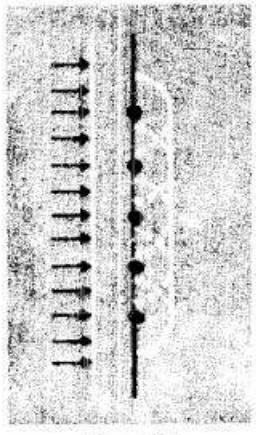


Рис. 256

товая волна, падающая на границу какого-либо непрозрачного тела, должна огибать его (проникать в область геометрической тени). Из опыта, однако, известно, что предметы, освещаемые светом, идущим от точечного источника, дают резкую тень и, следовательно, лучи не отклоняются от их прямолинейного распространения. Почему же возникает резкая тень, если свет имеет волновую природу? К сожалению, теория Гюйгенса ответить на этот вопрос не могла.

Принцип Гюйгенса решает лишь задачу о направлении распространения волнового фронта, но не затрагивает вопроса об амплитуде, а следовательно, и об интенсивности волн, распространяющихся по разным направлениям. Френель вложил в принцип Гюйгенса физический смысл, дополнив его идеей интерференции вторичных волн.

Согласно **принципу Гюйгенса — Френеля**, световая волна, возбуждаемая каким-либо источником $S$, может быть представлена как *результат суперпозиции когерентных вторичных волн*, «излучаемых» фиктивными источниками. Такими источниками могут служить бесконечно малые элементы любой замкнутой поверхности, охватывающей источник $S$. Обычно в качестве этой поверхности выбирают одну из волновых поверхностей, поэтому все фиктивные источники действуют синфазно. Таким образом, волны, распространяющиеся от источника, являются результатом интерференции всех когерентных вторичных волн. Френель исключил возможность возникновения обратных вторичных волн и предположил, что если между источником и точкой наблюдения находится непрозрачный экран с отверстием, то на поверхности экрана амплитуда вторичных волн равна нулю, а в отверстии — такая же, как при отсутствии экрана.

Учет амплитуд и фаз вторичных волн позволяет в каждом конкретном случае найти амплитуду (интенсивность) результирующей волны в любой точке пространства, т. е. определить закономерности распространения света. В общем случае расчет интерференции вторичных волн довольно сложный и громоздкий, однако, как будет показано ниже, для некоторых случаев нахождение амплитуды результирующего колебания осуществляется алгебраическим суммированием.

## § 177. Метод зон Френеля. Прямолинейное распространение света

Принцип Гюйгенса — Френеля в рамках волновой теории должен был ответить на вопрос о прямолинейном распространении света. Френель решил эту задачу, рассмотрев взаимную интерференцию вторичных волн и применив прием, получивший название **метода зон Френеля**.

Найдем в произвольной точке $M$ амплитуду световой волны, распространяющейся в однородной среде из точечного источника $S$ (рис. 257). Согласно принципу Гюйгенса — Френеля, заменим действие источника $S$ действием воображаемых

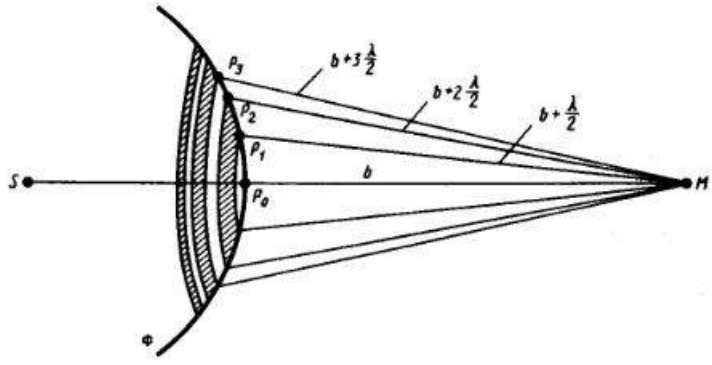



Рис. 257

источников, расположенных на вспомогательной поверхности Ф, являющейся поверхностью фронта волны, идущей из $S$ (поверхность сферы с центром $S$). Френель разбил волновую поверхность Ф на кольцевые зоны такого размера, чтобы расстояния от краев зоны до $M$ отличались на $\lambda/2$, т. е. $P_1M-P_0M=P_2M-P_1M=P_3M-P_2M=\ldots=\lambda/2$. Подобное разбиение фронта волны на зоны можно выполнить, проведя с центром в точке $M$ сферы радиусами $b+\frac{\lambda}{2}$, $b+2\frac{\lambda}{2}$, $b+3\frac{\lambda}{2}$, ..., $b+m\frac{\lambda}{2}$. Так как колебания от соседних зон проходят до точки $M$ расстояния, отличающиеся на $\lambda/2$, то в точку $M$ они приходят в противоположной фазе и при наложении эти колебания будут взаимно ослаблять друг друга. Поэтому амплитуда результирующего светового колебания в точке $M$

$$A=A_1-A_2+A_3-A_4+\ldots\pm A_m, \tag{177.1}$$

где $A_1$, $A_2$, ..., $A_m$ — амплитуды колебаний, возбуждаемых 1-й, 2-й, ..., $m$-й зонами.

Для оценки амплитуд колебаний найдем площади зон Френеля. Внешняя граница $m$-й зоны выделяет на волновой поверхности сферический сегмент высоты $h_m$ (рис. 258). Обозначив площадь этого сегмента через $\sigma_m$, найдем, что площадь $m$-й зоны Френеля равна $\Delta\sigma_m=\sigma_m-\sigma_{m-1}$, где $\sigma_{m-1}$ — площадь сферического сегмента, выделяемого внешней границей $(m-1)$-й зоны. Из рисунка следует, что

$$r_m^2=a^2-(a-h_m)^2=(b+m\lambda/2)^2-(b+h_m)^2. \tag{177.2}$$

После элементарных преобразований, учитывая, что $\lambda\ll a$ и $\lambda\ll b$, получим

$$h_m=\frac{bm\lambda}{2(a+b)}. \tag{177.3}$$

Площадь сферического сегмента

$$\sigma_m=2\pi ah_m=\frac{\pi ab\lambda}{a+b}m,$$

а площадь $m$-й зоны Френеля

$$\Delta\sigma_m=\sigma_m-\sigma_{m-1}=\frac{\pi ab\lambda}{a+b}. \tag{177.4}$$

Выражение (177.4) не зависит от $m$; следовательно, при не слишком больших $m$ площади зон Френеля одинаковы. Таким образом, построение зон Френеля разбивает волновую поверхность сферической волны на равные зоны.

Согласно предположению Френеля, действие отдельных зон в точке $M$ тем меньше, чем больше угол $\varphi_m$ (рис. 258) между нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности зоны и направлением на $M$, т. е. действие зон постепенно убывает от центральной (около $P_0$) к периферическим (до нуля). Кроме того, интенсивность излучения в направлении точки $M$ уменьшается с ростом $m$ и вследствие увеличения расстояния от зоны до точки $M$. Учитывая оба этих фактора, можем записать

$$A_1>A_2>A_3>A_4>\ldots .$$

Общее число зон Френеля, умещающихся на полусфере, очень велико; например, при $a=b=10$ см и $\lambda=0{,}5$ мкм $N=\frac{2\pi a^2}{\pi ab\lambda}(a+b)=8\cdot10^5$. Поэтому в качестве допустимого приближения можно считать, что амплитуда колебания $A_m$ от некоторой $m$-й зоны Френеля равна среднему арифметическому от амплитуд примыкающих к ней зон, т. е.

$$A_m=\frac{A_{m-1}+A_{m+1}}{2}. \tag{177.5}$$

Тогда выражение (177.1) можно записать в виде

$$A=\frac{A_1}{2}+\left(\frac{A_1}{2}-A_2+\frac{A_3}{2}\right)+\left(\frac{A_3}{2}-A_4+\frac{A_5}{2}\right)+\ldots=\frac{A_1}{2}, \tag{177.6}$$

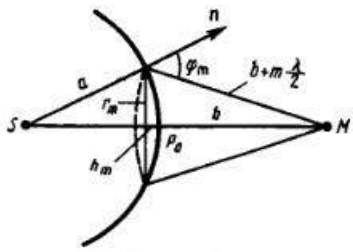



Рис. 258

так как выражения, стоящие в скобках, согласно (177.5), равны нулю, а оставшаяся часть от амплитуды последней зоны $\pm A_m/2$ ничтожно мала.

Таким образом, амплитуда, создаваемая в произвольной точке $M$ сферической волновой поверхностью, равна половине амплитуды, создаваемой одной центральной зоной. Следовательно, действие всей волновой поверхности на точку $M$ сводится к действию ее малого участка, меньшего центральной зоны.

Если в выражении (177.2) положим, что высота сегмента $h_m \ll a$ (при не слишком больших $m$), тогда $r_m^2 = 2ah_m$. Подставив сюда значение (177.3), найдем радиус внешней границы $m$-й зоны Френеля:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}. \qquad (177.7)$$

При $a = b = 10$ см и $\lambda = 0{,}5$ мкм радиус первой (центральной) зоны $r_1 = 0{,}158$ мм. Следовательно, распространение света от $S$ к $M$ происходит так, будто световой поток распространяется внутри очень узкого канала вдоль $SM$, т. е. *прямолинейно*. Таким образом, принцип Гюйгенса — Френеля позволяет объяснить прямолинейное распространение света в однородной среде.

Правомерность деления волнового фронта на зоны Френеля подтверждена экспериментально. Для этого используются **зонные пластинки** — в простейшем случае стеклянные пластинки, состоящие из системы чередующихся прозрачных и непрозрачных концентрических колец, построенных по принципу расположения зон Френеля, т. е. с радиусами $r_m$ зон Френеля, определяемыми выражением (177.7) для определенных значений $a$, $b$ и $\lambda$ ($m = 0, 2, 4, \ldots$ для прозрачных и $m = 1, 3, 5, \ldots$ для непрозрачных колец). Если поместить зонную пластинку на расстоянии $a$ от точечного источника и на расстоянии $b$ от точки наблюдения на линии, соединяющей эти две точки, то для света длиной волны $\lambda$ она перекроет четные зоны и оставит свободными нечетные начиная с центральной. В результате этого результирующая амплитуда $A = A_1 + A_3 + A_5 + \ldots$ должна быть больше, чем при полностью открытом фронте. Действительно, на опыте зонная пластинка во много раз увеличивает интенсивность света в точке $M$, действуя подобно собирающей линзе.

## § 178. Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске

Рассмотрим **дифракцию сферических волн**, или **дифракцию Френеля**, осуществляемую в том случае, когда дифракционная картина наблюдается на конечном расстоянии от препятствия, вызвавшего дифракцию.

**1. Дифракция на круглом отверстии.** Сферическая волна, распространяющаяся из точечного источника $S$, встречает на своем пути экран с круглым отверстием. Дифракционную картину наблюдаем на экране (Э) в точке $B$, лежащей на линии, соединяющей $S$ с центром отверстия (рис. 259). Экран параллелен плоскости отверстия и находится от него на расстоянии $b$. Разобьем открытую часть волновой поверхности Ф на зоны Френеля. Вид дифракционной картины зависит от числа зон Френеля, укладывающихся в отверстии. Амплитуда результирующего колебания, возбуждаемого в точке $B$ всеми зонами (см. (177.1) и (177.6)),

$$A = A_1/2 \pm A_m/2,$$

где знак плюс соответствует нечетным $m$ и минус — четным $m$.

Когда отверстие открывает нечетное число зон Френеля, то амплитуда (интенсивность) в точке $B$ будет больше, чем при

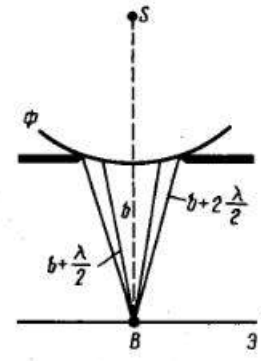



Рис. 259

свободном распространении волны, если четное, то амплитуда (интенсивность) будет равна нулю. Если в отверстие укладывается одна зона Френеля, то в точке $B$ амплитуда $A=A_1$, т. е. вдвое больше, чем в отсутствие непрозрачного экрана с отверстием (см. § 177). Интенсивность света больше соответственно в четыре раза. Если в отверстии укладываются две зоны Френеля, то их действия в точке $B$ практически уничтожат друг друга из-за интерференции. Таким образом, дифракционная картина от круглого отверстия вблизи точки $B$ будет иметь вид чередующихся темных и светлых колец с центрами в точке $B$ (если $m$ четное, то в центре будет темное кольцо, если $m$ нечетное — то светлое кольцо), причем интенсивность максимумов убывает с расстоянием от центра картины.

Расчет амплитуды результирующего колебания на внеосевых участках экрана более сложен, так как соответствующие им зоны Френеля частично перекрываются непрозрачным экраном. Если отверстие освещается не монохроматическим, а белым светом, то кольца окрашены.

Число зон Френеля, укладывающихся в отверстии, зависит от его диаметра. Если он большой, то $A_m \ll A_1$ и результирующая амплитуда $A=A_1/2$, т. е. такая же, как и при полностью открытом волновом фронте. Никакой дифракционной картины не наблюдается, свет распространяется, как и в отсутствие круглого отверстия, прямолинейно.

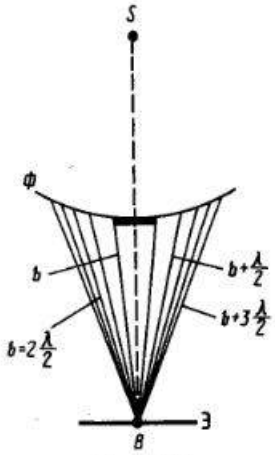


Рис. 260

**2. Дифракция на диске.** Сферическая волна, распространяющаяся от точечного источника $S$, встречает на своем пути диск. Дифракционную картину наблюдаем на экране (Э) в точке $B$, лежащей на линии, соединяющей $S$ с центром диска (рис. 260). В данном случае закрытый диском участок фронта волны надо исключить из рассмотрения и зоны Френеля строить начиная с краев диска. Пусть диск закрывает $m$ первых зон Френеля. Тогда амплитуда результирующего колебания в точке $B$ равна

$$A=A_{m+1}-A_{m+2}+A_{m+3}-\ldots=$$

$$=\frac{A_{m+1}}{2}+\left(\frac{A_{m+1}}{2}-A_{m+2}+\frac{A_{m+3}}{2}\right)+\ldots$$

или

$$A=A_{m+1}/2,$$

так как выражения, стоящие в скобках, равны нулю. Следовательно, в точке $B$ *всегда* наблюдается интерференционный максимум (светлое пятно), соответствующий половине действия первой открытой зоны Френеля. Центральный максимум окружен концентрическими с ним темными и светлыми кольцами, а интенсивность максимумов убывает с расстоянием от центра картины.

С увеличением радиуса диска первая открытая зона Френеля удаляется от точки $B$ и увеличивается угол $\varphi_m$ (см. рис. 258) между нормалью к поверхности этой зоны и направлением на точку $B$. В результате интенсивность центрального максимума с увеличением размеров диска уменьшается. При больших размерах диска за ним наблюдается тень, вблизи границ которой имеет место весьма слабая дифракционная картина. В данном случае дифракцией света можно пренебречь и считать свет распространяющимся прямолинейно.

Отметим, что дифракция на круглом отверстии и дифракция на диске впервые рассмотрены Френелем.

## § 179. Дифракция Фраунгофера на одной щели

Немецкий физик И. Фраунгофер (1787—1826) рассмотрел **дифракцию плоских световых волн, или дифракцию в параллельных лучах. Дифракция Фраунгофера**, имеющая большое практическое значение, наблюдается в том случае, когда источник света и точка наблюдения бесконечно удалены от препятствия, вызвавшего дифракцию. Чтобы этот тип дифракции осуществить, достаточно точечный источник света поместить в фокусе собирающей линзы, а дифракционную картину исследовать в фокальной плоскости второй собирающей линзы, установленной за препятствием.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера от бесконечно длинной щели (для этого практически достаточно, чтобы длина щели была значительно больше ее ширины). Пусть плоская монохроматическая световая волна падает нормально плоскости узкой щели шириной $a$ (рис. 261, $a$). Оптическая разность хода между крайними лучами $MC$ и $ND$, идущими от щели в произвольном направлении $\varphi$,

$$\Delta = NF = a \sin \varphi, \qquad (179.1)$$

где $F$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки $M$ на луч $ND$.

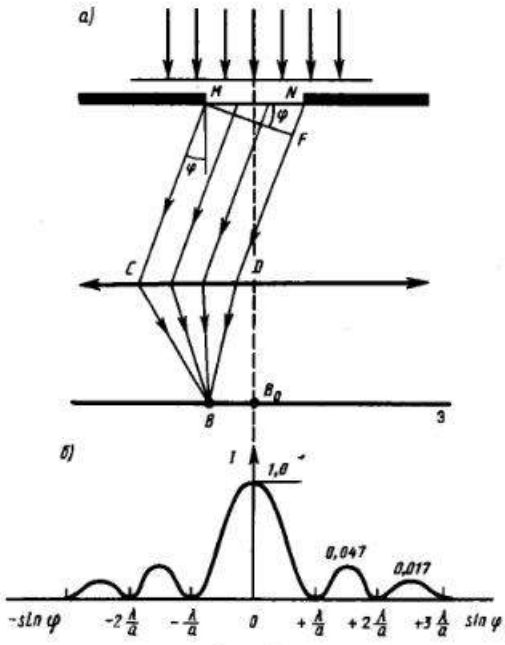



Рис. 261

Разобьем открытую часть волновой поверхности в плоскости щели $MN$ на зоны Френеля, имеющие вид полос, параллельных ребру $M$ щели. Ширина каждой зоны выбирается так, чтобы разность хода от краев этих зон была равна $\lambda/2$, т. е. всего на ширине щели уместится $\Delta : \lambda/2$ зон. Так как свет на щель падает нормально, то плоскость щели совпадает с фронтом волны; следовательно, все точки фронта в плоскости щели будут колебаться в одинаковой фазе. Амплитуды вторичных волн в плоскости щели будут равны, так как выбранные зоны Френеля имеют одинаковые площади и одинаково наклонены к направлению наблюдения.

Из выражения (179.1) вытекает, что число зон Френеля, укладывающихся на ширине щели, зависит от угла $\varphi$. От числа зон Френеля, в свою очередь, зависит результат наложения всех вторичных волн. Из приведенного построения следует, что при интерференции света от каждой пары *соседних* зон Френеля амплитуда результирующих колебаний равна нулю, так как колебания от каждой пары соседних зон взаимно погашают друг друга. Следовательно, если *число зон Френеля четное*

$$a \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (179.2)$$

то в точке $B$ наблюдается **дифракционный минимум** (полная темнота), если же *число зон Френеля нечетное*

$$a \sin \varphi = \pm (2m+1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (179.3)$$

то наблюдается **дифракционный максимум**, соответствующий действию одной нескомпенсированной зоны Френеля. Отметим, что в прямом направлении ($\varphi = 0$) щель действует как одна зона Френеля, и в этом направлении свет распространяется с наибольшей интенсивностью, т. е. в точке $B_0$ наблюдается **центральный дифракционный максимум**.

Из условий (179.2) и (179.3) можно найти направления на точки экрана, в которых амплитуда (а следовательно, и интенсивность) равна нулю ($\sin\varphi_{min} = \pm m\lambda/a$) или максимальна ($\sin\varphi_{max} = \pm(2m+1)\lambda/(2a)$). Распределение интенсивности на экране, получаемое вследствие дифракции **(дифракционный спектр)**, приведено на рис. 261, *б*. Расчеты показывают, что интенсивности центрального и последующих максимумов относятся как 1:0,047:0,017:0,0083:..., т. е. основная часть световой энергии сосредоточена в центральном максимуме. Из опыта и соответствующих расчетов следует, что сужение щели приводит к тому, что центральный максимум расплывается, а его яркость уменьшается (это, естественно, относится и к другим максимумам). Наоборот, чем щель шире ($a > \lambda$), тем картина ярче, но дифракционные полосы уже, а число самих полос больше. При $a \gg \lambda$ в центре получается резкое изображение источника света, т. е. имеет место прямолинейное распространение света.

Положение дифракционных максимумов зависит от длины волны $\lambda$, поэтому рассмотренный вид дифракционная картина имеет лишь для монохроматического света. При освещении щели белым светом центральный максимум имеет вид белой полоски; он общий для всех длин волн (при $\varphi = 0$ разность хода равна нулю для всех $\lambda$). Боковые максимумы радужно окрашены, так как условие максимума при любых $m$ различно для разных $\lambda$. Таким образом, справа и слева от центрального максимума наблюдаются максимумы первого ($m = 1$), второго ($m = 2$) и других порядков, обращенные фиолетовым краем к центру дифракционной картины. Однако они настолько расплывчаты, что отчетливого разделения различных длин волн с помощью дифракции на одной щели получить невозможно.

## § 180. Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке

Большое практическое значение имеет дифракция, наблюдаемая при прохождении света через **одномерную дифракционную решетку** — систему параллельных щелей равной ширины, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками. Рассматривая дифракцию Фраунгофера на щели, мы видели, что распределение интенсивности на экране определяется направлением дифрагированных лучей. Это означает, что перемещение щели параллельно самой себе влево или вправо не изменит дифракционной картины. Следовательно, если перейти от одной щели ко многим (к дифракционной решетке), то дифракционные картины, создаваемые каждой щелью в отдельности, будут одинаковыми.

Дифракционная картина на решетке определяется как результат взаимной интерференции волн, идущих от всех щелей, т. е. *в дифракционной решетке осуществляется многолучевая интерференция* когерентных дифрагированных пучков света, идущих от всех щелей.

Рассмотрим дифракционную решетку. На рис. 262 для наглядности показаны только две соседние щели $MN$ и $CD$. Если ширина каждой щели равна $a$, а ширина непрозрачных участков между щелями $b$, то величина $d = a + b$ называется **постоянной (периодом) дифракционной решетки**. Пусть плоская монохроматическая волна падает нормально к плоскости решетки. Так как щели находятся друг от друга на одинаковых расстояниях, то разности хода лучей, идущих от двух соседних щелей, будут для данного направления $\varphi$ одинаковы в пределах всей дифракционной ре-

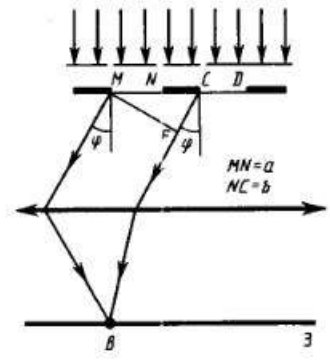



Рис. 262

шетки:

$$\Delta = CF = (a+b)\sin\varphi = d\sin\varphi. \quad (180.1)$$

Очевидно, что в тех направлениях, в которых *ни одна* из щелей не распространяет свет, он не будет распространяться и при двух щелях, т. е. *прежние (главные) минимумы* интенсивности будут наблюдаться в направлениях, определяемых условием (179.2):

$$a\sin\varphi = \pm m\lambda \ (m = 1, 2, 3, \ldots). \quad (180.2)$$

Кроме того, вследствие взаимной интерференции световых лучей, посылаемых двумя щелями, в некоторых направлениях они будут гасить друг друга, т. е. возникнут **дополнительные минимумы**. Очевидно, что эти дополнительные минимумы будут наблюдаться в тех направлениях, которым соответствует разность хода лучей $\lambda/2$, $3\lambda/2$, ..., посылаемых, например, от крайних левых точек $M$ и $C$ обеих щелей. Таким образом, с учетом (180.1) **условие дополнительных минимумов:**

$$d\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \ (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Наоборот, действие одной щели будет усиливать действие другой, если

$$d\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \quad (180.3)$$

т. е. выражение (180.3) задает условие **главных максимумов**.

Таким образом, полная дифракционная картина для двух щелей определяется из условия:

главные минимумы

$$a\sin\varphi = \lambda, \ 2\lambda, \ 3\lambda, \ \ldots;$$

дополнительные минимумы

$$d\sin\varphi = \frac{\lambda}{2}, \ \frac{3}{2}\lambda, \ \frac{5}{2}\lambda, \ \ldots;$$

главные максимумы

$$d\sin\varphi = 0, \ \lambda, \ 2\lambda, \ 3\lambda, \ \ldots,$$

т. е. между двумя главными максимумами располагается один дополнительный минимум. Аналогично можно показать, что между каждыми двумя главными максимумами при трех щелях располагается два дополнительных минимума, при четырех щелях — три и т. д.

Если дифракционная решетка состоит из $N$ щелей, то условием главных минимумов является условие (180.2), условием главных максимумов — условие (180.3), а условием дополнительных минимумов

$$d\sin\varphi = \pm m'\lambda/N \quad (m' = 1, 2, \ldots, N-1, N+1, \ldots, 2N-1, 2N+1, \ldots), \quad (180.4)$$

где $m'$ может принимать все целочисленные значения, кроме $0, N, 2N, \ldots$, т. е. кроме тех, при которых условие (180.4) переходит в (180.3). Следовательно, в случае $N$ щелей между двумя главными максимумами располагается $N-1$ дополнительных минимумов, разделенных вторичными максимумами, создающими весьма слабый фон.

Чем больше щелей $N$, тем большее количество световой энергии пройдет через решетку, тем больше минимумов образуется между соседними главными максимумами, тем, следовательно, более интенсивными и более острыми будут максимумы. На рис. 263 качественно представлена дифракционная картина от восьми щелей.

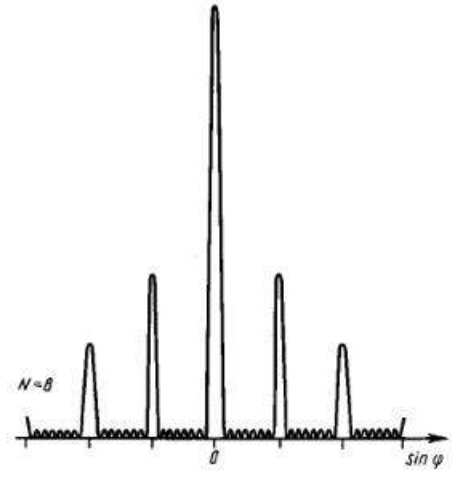



Рис. 263

Так как модуль sin φ не может быть больше единицы, то из (180.3) следует, что число главных максимумов

$$m \leqslant d/\lambda$$

определяется отношением периода решетки к длине волны.

Положение главных максимумов зависит от длины волны λ (см. (180.3)). Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального ($m=0$), разложатся в спектр, фиолетовая область которого будет обращена к центру дифракционной картины, красная — наружу. Это свойство дифракционной решетки используется для исследования спектрального состава света (определения длин волн и интенсивностей всех монохроматических компонентов), т. е. дифракционная решетка может быть использована как спектральный прибор.

Дифракционные решетки, используемые в различных областях спектра, различаются размерами, формой, материалом поверхности, профилем штрихов и их частотой (от 6000 до 0,25 штрих/мм, что позволяет перекрывать область спектра от ультрафиолетовой его части до инфракрасной). Например, ступенчатый профиль решетки позволяет концентрировать основную часть падающей энергии в направлении одного определенного ненулевого порядка.

## § 181. Пространственная решетка. Рассеяние света

Дифракция света наблюдается не только на плоской **одномерной решетке** (штрихи нанесены перпендикулярно некоторой прямой линии), но и на **двумерной решетке** (штрихи нанесены во взаимно перпендикулярных направлениях в одной и той же плоскости). Большой интерес представляет также дифракция на **пространственных (трехмерных) решетках** — пространственных образованиях, в которых элементы структуры подобны по форме, имеют геометрически правильное и периодически повторяющееся расположение, а также постоянные (периоды) решеток, соизмеримые с длиной волны электромагнитного излучения. Иными словами, подобные пространственные образования должны иметь периодичность по трем не лежащим в одной плоскости направлениям. В качестве пространственных дифракционных решеток могут быть использованы кристаллические тела, так как в них неоднородности (атомы, молекулы, ионы) регулярно повторяются в трех направлениях.

Дифракция света может происходить также в так называемых **мутных средах** — средах с явно выраженными оптическими неоднородностями. К мутным средам относятся аэрозоли (облака, дым, туман), эмульсия, коллоидные растворы и т. д., т. е. такие среды, в которых взвешено множество очень мелких частиц инородных веществ. Свет, проходя через мутную среду, дифрагирует от беспорядочно расположенных микронеоднородностей, давая равномерное распределение интенсивностей по всем направлениям, не создавая какой-либо определенной дифракционной картины. Происходит так называемое **рассеяние света** *в мутной среде*. Это явление можно наблюдать, например, когда узкий пучок солнечных лучей, проходя через запыленный воздух, рассеивается на пылинках и становится тем самым видимым.

Рассеяние света (как правило, слабое) наблюдается также и *в чистых средах*, не содержащих посторонних частиц. Л. И. Мандельштам объяснил рассеяние света в средах нарушением их оптической однородности, при котором показатель преломления среды не постоянен, а меняется от точки к точке. В дальнейшем польский физик М. Смолуховский (1872—1917) указал, что причиной рассеяния света могут быть также флуктуации плотности, возникающие в процессе хаотического теплового движения молекул среды. Рассеяние света в чистых средах, обусловленное флуктуациями плотности, анизотропии или концентрации, называется **молекулярным рассеянием.**

Молекулярным рассеянием объясняется, например, голубой цвет неба. Согласно закону Д. Рэлея, интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны ($I \sim \lambda^{-4}$), поэтому голубые и синие лучи рассеивают-

ся сильнее, чем желтые и красные, обусловливая тем самым голубой цвет неба. По этой же причине свет, прошедший через значительную толщу атмосферы, оказывается обогащенным более длинными волнами (сине-фиолетовая часть спектра полностью рассеивается) и поэтому при закате и восходе Солнце кажется красным. Флуктуации плотности и интенсивность рассеяния света возрастают с увеличением температуры. Поэтому в ясный летний день цвет неба является более насыщенным по сравнению с таким же зимним днем.

## § 182. Дифракция на пространственной решетке. Формула Вульфа — Брэггов

Для наблюдения дифракционной картины необходимо, чтобы постоянная решетки была того же порядка, что и длина волны падающего излучения (см. (180.3)). Кристаллы, являясь трехмерными пространственными решетками (см. § 181), имеют постоянную порядка $10^{-10}$ м и, следовательно, непригодны для наблюдения дифракции в видимом свете ($\lambda \approx \approx 5 \cdot 10^{-7}$ м). Эти факты позволили немецкому физику М. Лауэ (1879—1960) прийти к выводу, что в качестве естественных дифракционных решеток для рентгеновского излучения можно использовать кристаллы, поскольку расстояние между атомами в кристаллах одного порядка с $\lambda$ рентгеновского излучения ($\approx 10^{-12} \div \div 10^{-8}$ м).

Простой метод расчета дифракции рентгеновского излучения от кристаллической решетки предложен независимо друг от друга советским физиком Г. В. Вульфом (1863—1925) и английскими физиками Г. и Л. Брэггами (отец (1862—1942) и сын (1890—1971)). Они предположили, что дифракция рентгеновских лучей является результатом их отражения от системы параллельных кристаллографических плоскостей (плоскостей, в которых лежат узлы (атомы) кристаллической решетки).

Представим кристаллы в виде совокупности параллельных кристаллографических плоскостей (рис. 264), отстоящих друг

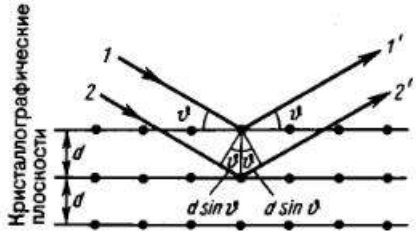



Рис. 264

от друга на расстоянии $d$. Пучок параллельных монохроматических рентгеновских лучей (*1*, *2*) падает под **углом скольжения** $\vartheta$ (угол между направлением падающих лучей и кристаллографической плоскостью) и возбуждает атомы кристаллической решетки, которые становятся источниками когерентных вторичных волн *1'* и *2'*, интерферирующих между собой, подобно вторичным волнам, от щелей дифракционной решетки. Максимумы интенсивности (дифракционные максимумы) наблюдаются в тех направлениях, в которых все отраженные атомными плоскостями волны будут находиться в одинаковой фазе. Эти направления удовлетворяют **формуле Вульфа — Брэггов**

$$2d \sin \vartheta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (182.1)$$

т. е. при разности хода между двумя лучами, отраженными от соседних кристаллографических плоскостей, кратной целому числу длин волн $\lambda$, наблюдается дифракционный максимум.

При произвольном направлении падения монохроматического рентгеновского излучения на кристалл дифракция не возникает. Чтобы ее наблюдать, надо, поворачивая кристалл, найти угол скольжения. Дифракционная картина может быть получена и при произвольном положении кристалла, для чего нужно пользоваться непрерывным рентгеновским спектром, испускаемым рентгеновской трубкой. Тогда для таких условий опыта всегда найдутся длины волн $\lambda$, удовлетворяющие условию (182.1).

Формула Вульфа — Брэггов используется при решении двух важных задач:

1. Наблюдая дифракцию рентгеновских лучей известной длины волны на

кристаллической структуре неизвестного строения и измеряя $\theta$ и $m$, можно найти межплоскостное расстояние ($d$), т. е. определить структуру вещества. Этот метод лежит в основе **рентгеноструктурного анализа.** Формула Вульфа — Брэггов остается справедливой и при дифракции электронов и нейтронов. Методы исследования структуры вещества, основанные на дифракции электронов и нейтронов, называются соответственно **электронографией** и **нейтронографией.**

2. Наблюдая дифракцию рентгеновских лучей неизвестной длины волны на кристаллической структуре при известном $d$ и измеряя $\theta$ и $m$, можно найти длину волны падающего рентгеновского излучения. Этот метод лежит в основе **рентгеновской спектроскопии.**

## § 183. Разрешающая способность оптических приборов

Используя даже идеальную оптическую систему (такую, для которой отсутствуют дефекты и аберрации), невозможно получить стигматическое изображение точечного источника, что объясняется волновой природой света. Изображение любой светящейся точки в монохроматическом свете представляет собой дифракционную картину, т. е. точечный источник отображается в виде центрального светлого пятна, окруженного чередующимися темными и светлыми кольцами.

Согласно **критерию Рэлея,** изображения двух близлежащих одинаковых точечных источников или двух близлежащих спектральных линий с равными интенсивностями и одинаковыми симметричными контурами разрешимы (разделены для восприятия), если центральный максимум дифракционной картины от одного источника (линии) совпадает с первым минимумом дифракционной картины от другого (рис. 265, *а*). При выполнении критерия Рэлея интенсивность «провала» между максимумами составляет 80 % интенсивности в максимуме, что является достаточным для разрешения линий $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Если критерий Рэлея нарушен, то наблюдается одна линия (рис. 265, *б*).

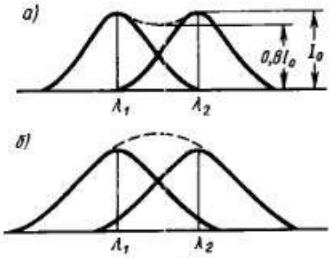


Рис. 265

**1. Разрешающая способность объектива.** Если на объектив падает свет от двух удаленных точечных источников $S_1$ и $S_2$ (например, звезд) с некоторым угловым расстоянием $d\varphi$, то вследствие дифракции световых волн на краях дифрагмы, ограничивающей объектив, в его фокальной плоскости вместо двух точек наблюдаются максимумы, окруженные чередующимися темными и светлыми кольцами (рис. 266).

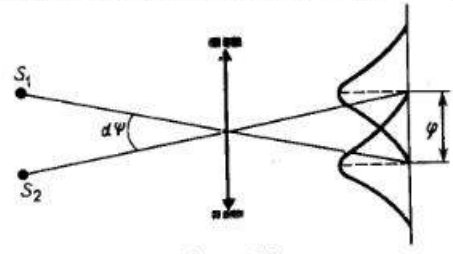


Рис. 266

Можно доказать, что две близлежащие звезды, наблюдаемые в объективе в монохроматическом свете, разрешимы, если угловое расстояние между ними

$$\varphi \geqslant 1{,}22\,\lambda/D, \qquad (183.1)$$

где $\lambda$ — длина волны света, $D$ — диаметр объектива.

**Разрешающей способностью (разрешающей силой) объектива** называется величина

$$R = 1/d\varphi,$$

где $d\varphi$ — наименьшее угловое расстояние между двумя точками, при котором они еще оптическим прибором разрешаются.

Согласно критерию Рэлея, изображения двух одинаковых точек разрешимы, когда центральный максимум дифракционной картины для одной точки совпадает с первым минимумом дифракционной кар-

тины для другой (рис. 266). Из рисунка следует, что при выполнении критерия Рэлея угловое расстояние между точками $d\psi$ должно быть равно $\varphi$, т. е. с учетом (183.1)

$$d\psi = \varphi = 1{,}22\lambda/D.$$

Следовательно, разрешающая способность объектива

$$R = 1/d\psi = D/(1{,}22\lambda), \qquad (183.2)$$

т. е. зависит от диаметра и длины волны света.

Из формулы (183.2) видно, что для увеличения разрешающей способности оптических приборов нужно либо увеличить диаметр объектива, либо уменьшить длину волны. Поэтому для наблюдения более мелких деталей предмета употребляют ультрафиолетовое излучение, а полученное изображение в данном случае наблюдается с помощью флуоресцирующего экрана либо фиксируется на фотопластинке. Еще бóльшую разрешающую способность можно было бы получить с помощью рентгеновского излучения, но оно обладает большой проникающей способностью и проходит через вещество не преломляясь; следовательно, в данном случае невозможно создать преломляющие линзы. Потоки электронов (при определенных энергиях) обладают примерно такой же длиной волны, как и рентгеновское излучение. Поэтому электронный микроскоп имеет очень высокую разрешающую способность (см. § 169).

**Разрешающей способностью спектрального прибора** называют безразмерную величину

$$R = \lambda/(\delta\lambda), \qquad (183.3)$$

где $\delta\lambda$ — абсолютное значение минимальной разности длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии регистрируются раздельно.

**2. Разрешающая способность дифракционной решетки.** Пусть максимум $m$-го порядка для длины волны $\lambda_2$ наблюдается под углом $\varphi$, т. е., согласно (180.3), $d \sin \varphi = m\lambda_2$. При переходе от максимума к соседнему минимуму разность хода меняется на $\lambda/N$ (см. (180.4)), где $N$ — число щелей решетки. Следовательно, минимум $\lambda_1$, наблюдаемый под углом $\varphi_{min}$, удовлетворяет условию $d \sin \varphi_{min} = m\lambda_1 + \lambda_1/N$. По критерию Рэлея, $\varphi = \varphi_{min}$, т. е. $m\lambda_2 = m\lambda_1 + \lambda_1/N$, или $\lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) = mN$. Так как $\lambda_1$ и $\lambda_2$ близки между собой, т. е. $\lambda_2 - \lambda_1 = \delta\lambda$, то, согласно (183.3),

$$R_{\text{диф.реш}} = mN.$$

Таким образом, разрешающая способность дифракционной решетки пропорциональна порядку $m$ спектров и числу $N$ щелей, т. е. при заданном числе щелей увеличивается при переходе к спектрам высших порядков. Современные дифракционные решетки обладают довольно высокой разрешающей способностью (до $2 \cdot 10^5$).

## § 184. Понятие о голографии

**Голография** (от греч. «полная запись») — особый способ записи и последующего восстановления волнового поля, основанный на регистрации интерференционной картины. Она обязана своим возникновением законам волновой оптики — законам интерференции и дифракции.

Этот принципиально новый способ фиксирования и воспроизведения пространственного изображения предметов изобретен английским физиком Д. Габором (1900—1979) в 1947 г. (Нобелевская премия 1971 г.). Экспериментальное воплощение и дальнейшая разработка этого способа (советским ученым Ю. Н. Денисюком в 1962 г. и американскими физиками Э. Лейтом и Ю. Упатниексом в 1963 г.) стали возможными после появления в 1960 г. источников света высокой степени когерентности — лазеров (см. § 233).

Рассмотрим элементарные основы принципа голографии, т. е. регистрации и восстановления информации о предмете. Для регистрации и восстановления волны необходимо уметь регистрировать и восстанавливать амплитуду и фазу идущей от предмета волны. Это в принципе возможно, так как распределение интенсивности в интерференционной картине, описываемое формулой (144.2), $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$ (учитывая, что $I \sim A^2$), определяется как амплитудой

интерферирующих волн, так и разностью их фаз. Поэтому для регистрации как фазовой, так и амплитудной информации кроме *волны, идущей от предмета* (так называемой **предметной волны**), используют еще когерентную с ней *волну*, идущую *от источника* света (так называемую **опорную волну**). Идея голографирования состоит в том, что фотографируется распределение интенсивности в интерференционной картине, возникающей при суперпозиции волнового поля объекта и когерентной ему опорной волны известной фазы. Последующая дифракция света на зарегистрированном распределении почернений в фотослое восстанавливает волновое поле объекта и допускает изучение этого поля при отсутствии объекта.

Практически эта идея может быть осуществлена с помощью принципиальной схемы, показанной на рис. 267, *а*. Лазерный пучок делится на две части, причем одна его часть отражается зеркалом на фотопластинку (опорная волна), а вторая попадает на фотопластинку, отразившись от предмета (предметная волна). Опорная и предметная волны, являясь когерентными и накладываясь друг на друга, образуют на фотопластинке интерференционную картину. После проявления фотопластинки и получается **голограмма** — зарегистрированная на фотопластинке интерференционная картина, образованная при сложении опорной и предметной волн.

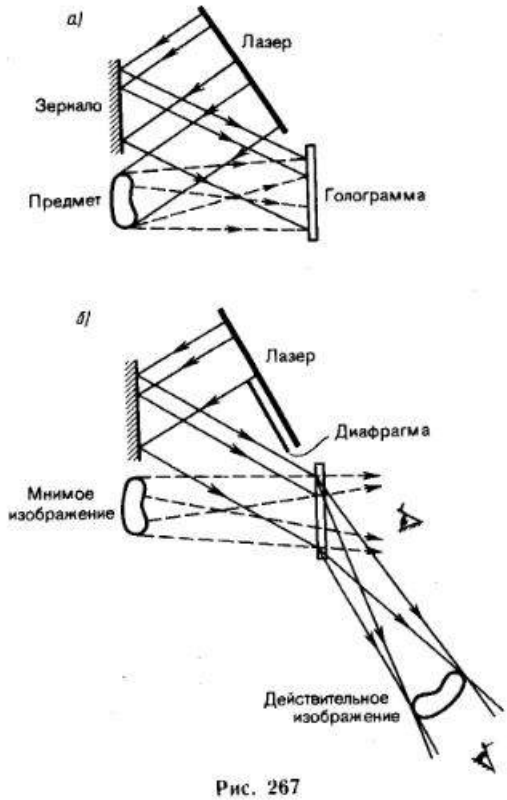



Рис. 267

Для восстановления изображения (рис. 267, *б*) голограмма помещается в то же самое положение, где она находилась до регистрации. Ее освещают опорным пучком того же лазера (вторая часть лазерного пучка перекрывается диафрагмой). В результате дифракции света на интерференционной структуре голограммы восстанавливается копия предметной волны, образующая объемное (со всеми присущими предмету свойствами) мнимое изображение предмета, расположенное в том месте, где предмет находился при голографировании. Оно кажется настолько реальным, что его хочется потрогать. Кроме того, восстанавливается еще действительное изображение предмета, имеющее рельеф, обратный рельефу предмета, т. е. выпуклые места заменены вогнутыми, и наоборот (если наблюдение ведется справа от голограммы).

Обычно пользуются мнимым голографическим изображением, которое по зрительному восприятию создает полную иллюзию существования реального предмета. Рассматривая из разных положений объемное изображение предмета, даваемое голограммой, можно увидеть более удаленные предметы, закрытые более близкими из них (заглянуть за ближние предметы). Это объясняется тем, что, перемещая голову в сторону, мы воспринимаем изображение, восстановленное от периферической части голограммы, на которую при экспонировании падали также и лучи, отраженные от скрытых предметов. Голограмму можно расколоть на несколько кусков. Но даже малая часть голограммы восстанавливает полное изображение. Однако уменьшение размеров голограммы приводит к ухудшению четкости получае-

мого изображения. Это объясняется тем, что голограмма для опорного пучка служит дифракционной решеткой, а при уменьшении числа штрихов дифракционной решетки (при уменьшении размеров голограммы) ее разрешающая способность уменьшается.

Методы голографии (запись голограммы в трехмерных средах, цветное и панорамное голографирование и т. д.) находят все большее развитие. Применения голографии разнообразны, но наиболее важные, приобретающие все большее значение, являются запись и хранение информации. Методы голографии позволяют записывать в сотни раз больше страниц печатного текста, чем методы обычной микрофотографии. По подсчетам, на фотопластинку размером $32 \times 32$ мм можно записать 1024 голограммы (площадь каждой из них 1 мм$^2$), т. е. на одной фотопластинке можно «разместить» книгу объемом свыше тысячи страниц. В качестве будущих разработок могут служить ЭВМ с голографической памятью, голографический электронный микроскоп, голографические кино и телевидение, голографическая интерферометрия и т. д.

## Контрольные вопросы

- Каковы дополнения Френеля к принципу Гюйгенса?
- В чем заключается принцип построения зон Френеля?
- В чем заключается принцип действия зонных пластинок?
- Когда наблюдается дифракция Френеля? дифракция Фраунгофера?
- Почему дифракция не наблюдается на больших отверстиях и больших дисках?
- Как влияет на дифракцию Фраунгофера от одной щели увеличение длины волны и ширины щели?
- Как определить наибольший порядок спектра дифракционной решетки?
- Как изменится дифракционная картина при удалении экрана от решетки?
- Почему при использовании белого света только центральный максимум белый, а боковые максимумы радужно окрашены?
- Почему штрихи на дифракционной решетке должны быть тесно расположены друг к другу? Почему их должно быть большое число?
- Запишите условия дифракционных минимумов для одной щели и главных максимумов для решетки. Каков характер этих дифракционных картин?
- Почему на кристаллах не наблюдается дифракция видимого света и наблюдается дифракция рентгеновского излучения?
- Каков механизм рассеяния света в мутной среде? в чистой среде?
- Как объяснить голубой цвет неба? Почему при закате и восходе солнце кажется красным?
- Какие практические применения имеет формула Вульфа—Брэггов?
- Когда два одинаковых точечных источника разрешимы по Рэлею?
- От чего зависит разрешающая способность дифракционной решетки и как вывести формулу для ее определения?
- Почему для получения голограммы кроме предметной волны необходима еще и опорная волна?
- В чем заключается иден голографирования?

## Задачи

**23.1.** Плоская световая волна с длиной волны 0,6 мкм падает нормально на диафрагму с круглым отверстием диаметром 1 см. Определить расстояние от точки наблюдения до отверстия, если отверстие открывает: 1) две зоны Френеля; 2) три зоны Френеля. [1)20,8 м; 2) 13,9 м]

**23.2.** Дифракционная картина наблюдается на расстоянии 1 м от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Посередине между источником света и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Определить радиус отверстия, при котором центр дифракционной картины на экране будет наиболее темным. [0,55 мм]

**23.3.** На щель шириной 0,2 мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны 0,5 мкм. Экран, на котором наблюдается дифракционная картина, расположен параллельно щели на расстоянии 1 м. Определить расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны центрального фраунгоферова максимума. [5 см]

**23.4.** Определить число штрихов на 1 мм дифракционной решетки, если углу $\pi/2$ соответствует максимум пятого порядка для монохроматического света с длиной волны 0,5 мкм. [400 мм$^{-1}$]

**23.5.** Узкий параллельный пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на грань кристалла с расстоянием 0,28 нм между его атомными плоскостями. Определить длину волны рентгеновского излучения, если под углом 30° к плоскости грани наблюдается дифракционный максимум второго порядка. [140 пм]

**23.6.** Определить постоянную дифракционной решетки, если она в первом порядке разрешает две спектральные линии калия ($\lambda_1 = 578$ нм и $\lambda_2 = 580$ нм). Длина решетки 1 см. [34,6 мкм]

# Глава 24
# Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

## § 185. Дисперсия света

**Дисперсией света** называется зависимость показателя преломления $n$ вещества от частоты $\nu$ (длины волны $\lambda$) света или зависимость фазовой скорости $v$ световых волн (см. § 154) от его частоты $\nu$. Дисперсия света представляется в виде зависимости

$$n = f(\lambda). \qquad (185.1)$$

Следствием дисперсии является разложение в спектр пучка белого света при прохождении его через призму. Первые экспериментальные наблюдения дисперсии света принадлежат И. Ньютону (1672 г.).

Рассмотрим дисперсию света в призме. Пусть монохроматический пучок света падает на призму с показателем преломления $n$ (рис. 268) под углом $\alpha_1$. После двукратного преломления (на левой и правой гранях призмы) луч оказывается отклоненным от первоначального направления на угол $\varphi$. Из рисунка следует, что

$$\varphi = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) =$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 - A. \qquad (185.2)$$

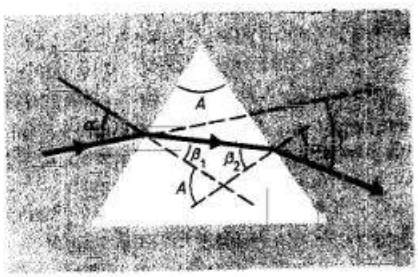


Рис. 268

Предположим, что углы $A$ и $\alpha_1$ малы, тогда углы $\alpha_2$, $\beta_1$ и $\beta_2$ будут также малы и вместо синусов этих углов можно воспользоваться их значениями. Поэтому $\alpha_1/\beta_1 = n$, $\beta_2/\alpha_2 = 1/n$, а так как $\beta_1 + \beta_2 = A$, то

$$\alpha_2 = \beta_2 n = n(A - \beta_1) =$$

$$= n(A - \alpha_1/n) = nA - \alpha_1,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = nA. \qquad (185.3)$$

Из выражений (185.3) и (185.2) следует, что

$$\varphi = A(n - 1), \qquad (185.4)$$

т. е. угол отклонения лучей призмой тем больше, чем больше преломляющий угол призмы.

Из выражения (185.4) вытекает, что угол отклонения лучей призмой зависит от величины $n - 1$, а $n$ — функция длины волны, поэтому лучи разных длин волн после прохождения призмы окажутся отклоненными на разные углы, т. е. пучок белого света за призмой разлагается в спектр, что и наблюдалось И. Ньютоном. Таким образом, с помощью призмы, так же как и с помощью дифракционной решетки,

разлагая свет в спектр, можно определить его спектральный состав.

Рассмотрим *различия в дифракционном и призматическом спектрах.*

1. Дифракционная решетка разлагает падающий свет непосредственно по длинам волн (см. (180.3)), поэтому по измеренным углам (по направлениям соответствующих максимумов) можно вычислить длину волны. Разложение света в спектр в призме происходит по значениям показателя преломления, поэтому для определения длины волны света надо знать зависимость $n=f(\lambda)$ (185.1).

2. Составные цвета в дифракционном и призматическом спектрах располагаются различно. Из (180.3) следует, что в дифракционной решетке синус угла отклонения пропорционален длине волны. Следовательно, красные лучи, имеющие бóльшую длину волны, чем фиолетовые, отклоняются дифракционной решеткой сильнее. Призма же разлагает лучи в спектр по значениям показателя преломления, который для всех прозрачных веществ с увеличением длины волны монотонно уменьшается (рис. 269). Следовательно, красные лучи, имеющие меньший показатель преломления, чем фиолетовые, отклоняются призмой слабее.

Величина

$$D=\frac{dn}{d\lambda},$$

называемая **дисперсией вещества**, показывает, как быстро изменяется показатель преломления с длиной волны. Из рис. 269 следует, что показатель преломления для прозрачных веществ с уменьшением длины волны монотонно увеличивается; следовательно, величина $\frac{dn}{d\lambda}$ по модулю также увеличивается с уменьшением $\lambda$. Такая **дисперсия** называется **нормальной.** Как будет показано ниже, ход кривой $n(\lambda)$ — **кривой дисперсии** — вблизи линий и полос поглощения будет иным: $n$ уменьшается с уменьшением $\lambda$. Такой ход зависимости $n$ от $\lambda$ называется **аномальной дисперсией.**

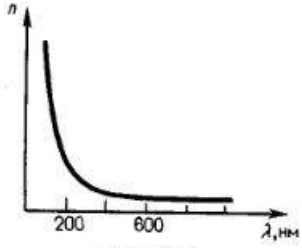


Рис. 269

На явлении нормальной дисперсии основано действие **призменных спектрографов.** Несмотря на их определенные недостатки (например, необходимость градуировки, различная дисперсия в разных участках спектра) при определении спектрального состава света, призменные спектрографы находят широкое применение в спектральном анализе. Это объясняется тем, что изготовление хороших призм значительно проще, чем изготовление хороших дифракционных решеток. В призменных спектрографах также легче получить бóльшую светосилу.

## § 186. Электронная теория дисперсии света

Из макроскопической электромагнитной теории Максвелла следует, что абсолютный показатель преломления среды

$$n=\sqrt{\varepsilon\mu},$$

где $\varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость среды, $\mu$ — магнитная проницаемость. В оптической области спектра для всех веществ $\mu\approx 1$, поэтому

$$n=\sqrt{\varepsilon}. \qquad (186.1)$$

Из формулы (186.1) выявляются некоторые противоречия с опытом: величина $n$, являясь переменной (см. § 185), остается в то же время равной определенной постоянной $\sqrt{\varepsilon}$. Кроме того, значения $n$, получаемые из этого выражения, не согласуются с опытными значениями. Трудности объяснения дисперсии света с точки зрения электромагнитной теории Максвелла устраняются электронной теорией Лоренца. В теории Лоренца дисперсия света рассматривается как результат взаимо-

действия электромагнитных волн с заряженными частицами, входящими в состав вещества и совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны.

Применим электронную теорию дисперсии света для однородного диэлектрика, предположив формально, что дисперсия света является следствием зависимости $\varepsilon$ от частоты $\omega$ световых волн. Диэлектрическая проницаемость вещества по определению (см. (88.6) и (88.2)) равна

$$\varepsilon = 1 + \varkappa = 1 + P/(\varepsilon_0 E),$$

где $\varkappa$ — диэлектрическая восприимчивость среды, $\varepsilon_0$ — электрическая постоянная, $P$ — мгновенное значение поляризованности. Следовательно,

$$n^2 = 1 + P/(\varepsilon_0 E), \qquad (186.2)$$

т. е. зависит от $P$. В данном случае основное значение имеет электронная поляризация, т. е. вынужденные колебания электронов под действием электрической составляющей поля волны, так как для ориентационной поляризации молекул частота колебаний в световой волне очень высока ($\nu \approx 10^{15}$ Гц).

В первом приближении можно считать, что вынужденные колебания совершают только внешние, наиболее слабо связанные с ядром электроны — **оптические электроны**. Для простоты рассмотрим колебания только одного оптического электрона. Наведенный дипольный момент электрона, совершающего вынужденные колебания, равен $p = ex$, где $e$ — заряд электрона, $x$ — смещение электрона под действием электрического поля световой волны. Если концентрация атомов в диэлектрике равна $n_0$, то мгновенное значение поляризованности

$$P = n_0 p = n_0 e x. \qquad (186.3)$$

Из (186.2) и (186.3) получим

$$n^2 = 1 + n_0 e x/(\varepsilon_0 E). \qquad (186.4)$$

Следовательно, задача сводится к определению смещения $x$ электрона под действием внешнего поля $E$. Поле световой волны будем считать функцией частоты $\omega$, т. е. изменяющимся по гармоническому закону: $E = E_0 \cos \omega t$.

Уравнение вынужденных колебаний электрона (см. § 147) для простейшего случая (без учета силы сопротивления, обусловливающей поглощение энергии падающей волны) запишется в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t = \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t, \qquad (186.5)$$

где $F_0 = eE_0$ — амплитудное значение силы, действующей на электрон со стороны поля волны, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — собственная частота колебаний электрона, $m$ — масса электрона. Решив уравнение (186.5), найдем $\varepsilon = n^2$ в зависимости от констант атома ($e$, $m$, $\omega_0$) и частоты $\omega$ внешнего поля, т. е. решим задачу дисперсии.

Решение уравнения (186.5) можно записать в виде

$$x = A \cos \omega t, \qquad (186.6)$$

где

$$A = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \qquad (186.7)$$

в чем легко убедиться подстановкой (см. (147.8)). Подставляя (186.6) и (186.7) в (186.4), получим

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}. \qquad (186.8)$$

Если в веществе имеются различные заряды $e_i$, совершающие вынужденные колебания с различными собственными частотами $\omega_{0i}$, то

$$n^2 = 1 + \frac{n_0}{\varepsilon_0} \sum_i \frac{e_i^2/m_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}, \qquad (186.9)$$

где $m_i$ — масса $i$-го заряда.

Из выражений (186.8) и (186.9) вытекает, что показатель преломления $n$ зависит от частоты $\omega$ внешнего поля, т. е. полученные зависимости действительно подтверждают явление дисперсии света, хотя и при указанных выше допущениях, кото-

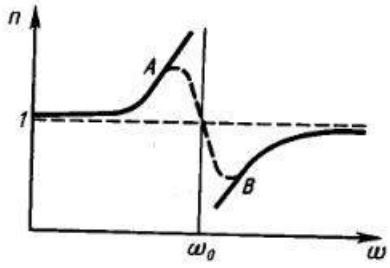



Рис. 270

рые в дальнейшем надо устранить. Из выражений (186.8) и (186.9) следует, что в области от $\omega=0$ до $\omega=\omega_0$ $n^2$ больше единицы и возрастает с увеличением $\omega$ (нормальная дисперсия); при $\omega=\omega_0$ $n^2=\pm\infty$; в области от $\omega=\omega_0$ до $\omega=\infty$ $n^2$ меньше единицы и возрастает от $-\infty$ до 1 (нормальная дисперсия). График зависимости $n$ от $\omega$ представлен на рис. 270. Подобное поведение $n$ вблизи собственной частоты $\omega_0$ получилось в результате допущения об отсутствии сил сопротивления при колебаниях электронов. Если принять в расчет и это обстоятельство, то график функции $n(\omega)$ вблизи $\omega_0$ задается штриховой линией $AB$. Область $AB$ — область аномальной дисперсии ($n$ убывает при возрастании $\omega$), остальные участки зависимости $n$ от $\omega$ описывают нормальную дисперсию ($n$ возрастает с возрастанием $\omega$).

Советскому физику Д. С. Рождественскому (1876—1940) принадлежит классическая работа по изучению аномальной дисперсии в парах натрия. Он разработал интерференционный метод для очень точного измерения показателя преломления паров и экспериментально показал, что формула (186.9) правильно характеризует зависимость $n$ от $\omega$, а также ввел в нее поправку, учитывающую квантовые свойства света и атомов.

## § 187. Поглощение (абсорбция) света

**Поглощением (абсорбцией) света** называется явление потери энергии световой волной, проходящей через вещество, вследствие преобразования энергии волны в другие формы (внутреннюю энергию вещества и в энергию вторичного излучения других направлений и спектрального состава). В результате поглощения интенсивность света при прохождении через вещество уменьшается.

Поглощение света в веществе описывается **законом Бугера***:

$$I=I_0e^{-\alpha x}, \qquad (187.1)$$

где $I_0$ и $I$ — интенсивности плоской монохроматической световой волны на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной $x$, $\alpha$ — **коэффициент поглощения**, зависящий от длины волны света, химической природы и состояния вещества и не зависящий от интенсивности света. При $x=1/\alpha$ интенсивность света $I$ по сравнению с $I_0$ уменьшается в $e$ раз.

Коэффициент поглощения зависит от длины волны $\lambda$ (или частоты $\omega$) и для различных веществ различен. Например, одноатомные газы и пары металлов (т. е. вещества, в которых атомы расположены на значительных расстояниях друг от друга и их можно считать изолированными) обладают близким к нулю коэффициентом поглощения и лишь для очень узких спектральных областей (примерно $10^{-12}$—$10^{-11}$ м) наблюдаются резкие максимумы (так называемый **линейчатый спектр поглощения**). Эти линии соответствуют частотам собственных колебаний электронов в атомах. Спектр поглощения молекул, определяемый колебаниями атомов в молекулах, характеризуется **полосами поглощения** (примерно $10^{-10}$—$10^{-7}$ м).

Коэффициент поглощения для диэлектриков невелик (примерно $10^{-3}$—$10^{-5}$ см$^{-1}$), однако у них наблюдается селективное поглощение света в определенных интервалах длин волн, когда $\alpha$ резко возрастает, и наблюдаются сравнительно широкие полосы поглощения, т. е. диэлектрики имеют **сплошной спектр поглощения**. Это связано с тем, что в диэлектриках нет свободных электронов и поглощение света обусловлено явлением резонанса при вынужденных колебаниях

* П. Бугер (1698—1758) — французский ученый.

электронов в атомах и атомов в молекулах диэлектрика.

Коэффициент поглощения для металлов имеет большие значения (примерно $10^3$—$10^5$ см$^{-1}$) и поэтому металлы являются непрозрачными для света. В металлах из-за наличия свободных электронов, движущихся под действием электрического поля световой волны, возникают быстропеременные токи, сопровождающиеся выделением джоулевой теплоты. Поэтому энергия световой волны быстро уменьшается, превращаясь во внутреннюю энергию металла. Чем выше проводимость металла, тем сильнее в нем поглощение света.

На рис. 271 представлены типичная зависимость коэффициента поглощения $\alpha$ от длины волны света $\lambda$ и зависимость показателя преломления $n$ от $\lambda$ в области полосы поглощения. Из рисунка следует, что внутри полосы поглощения наблюдается аномальная дисперсия ($n$ убывает с уменьшением $\lambda$). Однако поглощение вещества должно быть значительным, чтобы повлиять на ход показателя преломления.

Зависимостью коэффициента поглощения от длины волны объясняется окрашенность поглощающих тел. Например, стекло, слабо поглощающее красные и оранжевые лучи и сильно поглощающее зеленые и синие, при освещении белым светом будет казаться красным. Если на такое стекло направить зеленый и синий свет, то из-за сильного поглощения света этих длин волн стекло будет казаться черным. Это явление используется для изготовления **светофильтров**, которые в зависимости от химического состава (стекла с присадками различных солей, пленки из пластмасс, содержащие красители, растворы красителей и т. д.) пропускают свет только определенных длин волн, поглощая остальные. Разнообразие пределов селективного (избирательного) поглощения у различных веществ объясняет разнообразие и богатство цветов и красок, наблюдающееся в окружающем мире.

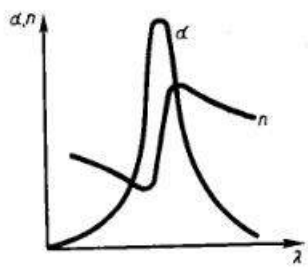


Рис. 271

Явление поглощения широко используется в **абсорбционном спектральном анализе** смеси газов, основанном на измерениях спектров частот и интенсивностей линий (полос) поглощения. Структура спектров поглощения определяется составом и строением молекул, поэтому изучение спектров поглощения является одним из основных методов количественного и качественного исследования веществ.

## 188. Эффект Доплера

Эффект Доплера в акустике (см. § 159) объясняется тем, что частота колебаний, воспринимаемых приемником, определяется скоростями движения источника колебаний и приемника по отношению к среде, являющейся носителем звуковых волн. Эффект Доплера наблюдается также и для световых волн. Так как особой среды, служащей носителем электромагнитных волн, не существует, то частота световых волн, воспринимаемых приемником (наблюдателем), определяется только относительной скоростью источника и приемника (наблюдателя).

Согласно принципу относительности Эйнштейна (см. § 35), уравнение световой волны во всех инерциальных системах отсчета одинаково по форме. Используя преобразования Лоренца (см. § 36), можно получить уравнение волны, посылаемой источником, в направлении приемника в другой инерциальной системе отсчета, а следовательно, и связать частоты световых волн, излучаемых источником ($\nu_0$) и воспринимаемых приемником ($\nu$). Теория относительности приводит к следующей форме, описывающей **эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме:**

$$\nu=\nu_0\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+(v/c)\cos\theta}=\nu_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta}, \qquad (188.1)$$

где $v$ — скорость источника света относительно приемника, $c$ — скорость света в вакууме, $\beta = v/c$, $\vartheta$ — угол между вектором скорости $\mathbf{v}$ и направлением наблюдения, измеряемый в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

Из выражения (188.1) следует, что при $\vartheta = 0$

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}} = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}. \quad (188.2)$$

Формула (188.2) определяет так называемый **продольный эффект Доплера,** наблюдаемый при движении приемника вдоль линии, соединяющей его с источником. При малых относительных скоростях $v$ ($v \ll c$), разлагая (188.2) в ряд по степеням $\beta$ и пренебрегая членом порядка $\beta^2$, получим

$$\nu = \nu_0 (1 - \beta) = \nu_0 (1 - v/c). \quad (188.3)$$

Следовательно, при удалении источника и приемника друг от друга (при их положительной относительной скорости) наблюдается сдвиг в область более длинных волн ($\nu < \nu_0$, $\lambda > \lambda_0$) — так называемое **красное смещение.** При сближении же источника и приемника (при их отрицательной относительной скорости) наблюдается сдвиг в область более коротких волн ($\nu > \nu_0$, $\lambda < \lambda_0$) — так называемое **фиолетовое смещение.**

Если $\vartheta = \pi/2$, то выражение (188.1) примет вид

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (188.4)$$

Формула (188.4) определяет так называемый **поперечный эффект Доплера,** наблюдаемый при движении приемника перпендикулярно линии, соединяющей его с источником.

Из выражения (188.4) следует, что поперечный эффект Доплера зависит от $\beta^2$, т. е. при малых $\beta$ является эффектом второго порядка малости по сравнению с продольным эффектом, зависящим от $\beta$ (см. (188.3)). Поэтому обнаружение поперечного эффекта Доплера связано с большими трудностями. Поперечный эффект, хотя и много меньше продольного, имеет принципиальное значение, так как не наблюдается в акустике (при $v \ll c$ из (188.4) следует, что $\nu = \nu_0$!), и является, следовательно, чисто релятивистским эффектом. Он связан с замедлением течения времени движущегося наблюдателя. Экспериментальное обнаружение поперечного эффекта Доплера явилось еще одним подтверждением справедливости теории относительности; он был обнаружен в 1938 г. в опытах американского физика Г. Айвса.

Продольный эффект Доплера был впервые обнаружен в 1900 г. в лабораторных условиях русским астрофизиком А. А. Белопольским (1854—1934) и повторен в 1907 г. русским физиком Б. Б. Голицыным (1862—1919). Продольный эффект Доплера используется при исследовании атомов, молекул, а также космических тел, так как по смещению частоты световых колебаний, которое проявляется в виде смещения или уширения спектральных линий, определяется характер движения излучающих частиц или излучающих тел. Эффект Доплера получил широкое распространение в радиотехнике и радиолокации, например в радиолокационных измерениях расстояний до движущихся объектов.

## § 189. Излучение Вавилова — Черенкова

Советский физик П. А. Черенков (1904—1990), работавший под руководством Вавилова, показал, что при движении релятивистских заряженных частиц в среде с *постоянной скоростью $v$, превышающей фазовую скорость света в этой среде,* т. е. при условии $v > c/n$ ($n$ — показатель преломления среды), возникает электромагнитное излучение, названное впоследствии **излучением (эффектом) Вавилова — Черенкова.** Природа данного излучения, обнаруженного для разнообразных веществ, в том числе и для чистых жидкостей, подробно изучалась С. И. Вавиловым. Он показал, что данное свечение не является люминесценцией (см. § 245), как

считалось ранее, и высказал предположение, что оно связано с движением свободных электронов через вещество.

Излучение Вавилова — Черенкова в 1937 г. было теоретически объяснено советскими учеными И. Е. Таммом (1895—1971) и И. М. Франком (р. 1908) (Черенков, Тамм и Франк в 1958 г. удостоены Нобелевской премии).

Согласно электромагнитной теории, заряженная частица (например, электрон) излучает электромагнитные волны лишь при движении с ускорением. Тамм и Франк показали, что это утверждение справедливо только до тех пор, пока скорость заряженной частицы не превышает фазовой скорости $c/n$ электромагнитных волн в среде, в которой частица движется. Если частица обладает скоростью $v > c/n$, то, даже двигаясь равномерно, она будет излучать электромагнитные волны. Таким образом, согласно теории Тамма и Франка, электрон, движущийся в прозрачной среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в данной среде, должен сам излучать свет.

Отличительной особенностью излучения Вавилова — Черенкова является его распространение не по всем направлениям, а лишь по направлениям, составляющим острый угол $\theta$ с траекторией частицы, т. е. вдоль образующих конуса, ось которого совпадает с направлением скорости частицы. Определим угол $\theta$

$$\cos\theta = (c/n)/v = c/(nv). \quad (189.1)$$

Возникновение излучения Вавилова — Черенкова и его направленность истолкованы Франком и Таммом на основе представлений об интерференции света с использованием принципа Гюйгенса.

На основе излучения Вавилова — Черенкова разработаны широко используемые экспериментальные методы для регистрации частиц высоких энергий и определения их свойств (направление движения, величина и знак заряда, энергия). Счетчики для регистрации заряженных частиц, в которых используется излучение Вавилова — Черенкова, получили название **черенковских счетчиков.** В этих счетчиках частица регистрируется практически мгновенно (при движении заряженной частицы в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в данной среде, возникает световая вспышка, преобразуемая с помощью фотоэлектронного умножителя (см. § 105) в импульс тока). Это позволило в 1955 г. итальянскому физику Э. Сегре (р. 1905) открыть в черенковском счетчике короткоживущую античастицу — антипротон.

## Контрольные вопросы

- Чем отличается нормальная дисперсия от аномальной?
- По каким признакам можно отличить спектры, полученные с помощью призмы и дифракционной решетки?
- В чем заключаются основные положения и выводы электронной теории дисперсии света?
- Почему металлы сильно поглощают свет?
- В чем основное отличие эффекта Доплера для световых волн и эффекта Доплера в акустике?
- Почему поперечный эффект Доплера чисто релятивистский эффект? Чем он обусловлен?
- Когда возникает излучение Вавилова—Черенкова?

## Задачи

**24.1.** На грань стеклянной призмы ($n = 1{,}5$) нормально падает луч света. Определить угол отклонения луча призмой, если ее преломляющий угол равен 25°. [14°21′]

**24.2.** При прохождении света в некотором веществе пути $x$ его интенсивность уменьшилась в два раза. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении им пути $4x$. [В 16 раз]

**24.3.** Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 0{,}6$ мкм движется по направлению к наблюдателю со скоростью $v = 0{,}15\ c$ ($c$ — скорость света в вакууме). Определить длину волны $\lambda$, которую зарегистрирует приемник наблюдателя. [516 нм]

**24.4.** Определить минимальную кинетическую энергию (в мегаэлектрон-вольтах), которой должен обладать электрон, чтобы в среде с показателем преломления 1,5 возникло излучение Вавилова—Черенкова. [0,17 МэВ]

# Глава 25
# Поляризация света

## § 190. Естественный и поляризованный свет

Следствием теории Максвелла (см. § 162) является поперечность световых волн: векторы напряженностей электрического **E** и магнитного **H** полей волны взаимно перпендикулярны и колеблются перпендикулярно вектору скорости **v** распространения волны (перпендикулярно лучу). Поэтому для описания закономерностей поляризации света достаточно знать поведение лишь одного из векторов. Обычно все рассуждения ведутся относительно **светового вектора** — вектора напряженности **E** электрического поля (это название обусловлено тем, что при действии света на вещество основное значение имеет электрическая составляющая поля волны, действующая на электроны в атомах вещества).

Свет представляет собой суммарное электромагнитное излучение множества атомов. Атомы же излучают световые волны независимо друг от друга, поэтому световая волна, излучаемая телом в целом, характеризуется всевозможными равновероятными колебаниями светового вектора (рис. 272, *а*; луч перпендикулярен плоскости рисунка). В данном случае равномерное распределение векторов **E** объясняется большим числом атомарных излучателей, а равенство амплитудных значений векторов **E** — одинаковой (в среднем) интенсивностью излучения каждого из атомов. **Свет** со всевозможными равновероятными ориентациями вектора **E** (и, следовательно, **H**) называется **естественным.**

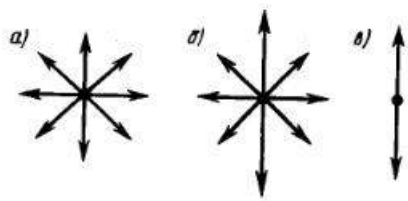


Рис. 272

**Свет,** в котором направления колебаний светового вектора каким-то образом упорядочены, называется **поляризованным.** Так, если в результате каких-либо внешних воздействий появляется преимущественное (но не исключительное!) направление колебаний вектора **E** (рис. 272, *б*), то имеем дело с **частично поляризованным светом. Свет,** в котором вектор **E** (и, следовательно, **H**) колеблется только в одном направлении, перпендикулярном лучу (рис. 272, *в*), называется **плоскополяризованным (линейно поляризованным).**

Плоскость, проходящая через направление колебаний светового вектора плоскополяризованной волны и направление распространения этой волны, называется **плоскостью поляризации.** Плоскополяризованный свет является предельным случаем **эллиптически поляризованного света** — света, для которого вектор **E** (вектор **H**) изменяется со временем так, что его конец описывает эллипс, лежащий в плоскости, перпендикулярной лучу. Если эллипс поляризации вырождается (см. § 145) в прямую (при разности фаз $\varphi$, равной нулю или $\pi$), то имеем дело с рассмотренным выше плоскополяризованным светом, если в окружность (при $\varphi = \pm\pi/2$ и равенстве амплитуд складываемых волн), то имеем дело с **циркулярно поляризованным (поляризованным по кругу) светом.**

**Степенью поляризации** называется величина

$$P=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}},$$

где $I_{max}$ и $I_{min}$ — максимальная и минимальная интенсивности света, соответствующие двум взаимно перпендикулярным компонентам вектора **E**. Для естественного света $I_{max}=I_{min}$ и $P=0$, для плоскополяризованного $I_{min}=0$ и $P=1$.

Естественный свет можно преобразовать в плоскополяризованный, используя так называемые **поляризаторы,** пропускающие колебания только определенного направления (например, пропускающие колебания, параллельные плоскости поляризатора, и полностью задерживающие колебания, перпендикулярные этой плоскости). В качестве поляризаторов могут быть использованы среды, анизотропные в отношении колебаний вектора **E**, например кристаллы (их анизотропия известна, см. § 70). Из природных кристаллов, давно используемых в качестве поляризатора, следует отметить турмалин.

Рассмотрим классические опыты с турмалином (рис. 273). Направим естественный свет перпендикулярно пластинке турмалина $T_1$, вырезанной параллельно так называемой **оптической оси** $OO$ (см. § 192). Вращая кристалл $T_1$ вокруг направления луча, никаких изменений интенсивности прошедшего через турмалин света не наблюдаем. Если на пути луча поставить вторую пластинку турмалина $T_2$ и вращать ее вокруг направления луча, то интенсивность света, прошедшего через пластинки, меняется в зависимости от угла $\alpha$ между оптическими осями кристаллов **по закону Малюса** *:

$$I=I_0\cos^2\alpha, \qquad (190.1)$$

где $I_0$ и $I$ — соответственно интенсивности света, падающего на второй кристалл и вышедшего из него. Следовательно, интенсивность прошедшего через пластинки света изменяется от минимума (полное

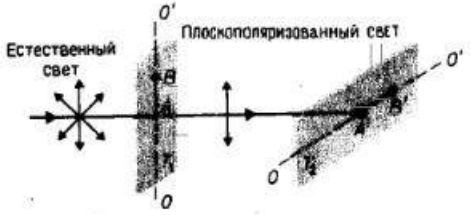



Рис. 273

гашение света) при $\alpha=\pi/2$ (оптические оси пластинок перпендикулярны) до максимума при $\alpha=0$ (оптические оси пластинок параллельны). Однако, как это следует из рис. 274, амплитуда **E** световых колебаний, прошедших через пластинку $T_2$, будет меньше амплитуды световых колебаний $\mathbf{E}_0$, падающих на пластинку $T_2$:

$$E=E_0\cos\alpha.$$

Так как интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, то и получается выражение (190.1).

Результаты опытов с кристаллами турмалина объясняются довольно просто, если исходить из изложенных выше условий пропускания света поляризатором. Первая пластинка турмалина пропускает колебания только определенного направления (на рис. 273 это направление показано стрелкой $AB$) т. е. преобразует естественный свет в плоскополяризованный. Вторая же пластинка турмалина в зависимости от ее ориентации из поляризованного света пропускает большую или меньшую его часть, которая соответствует компоненту **E**, параллельному оси второго турмалина. На рис. 273 обе пластинки расположены так, что направления пропускаемых ими колебаний $AB$ и $A'B'$ перпендикуляр-

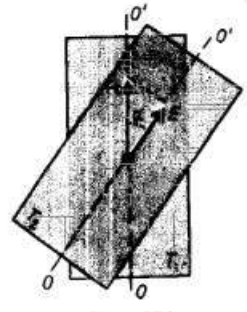



Рис. 274

* Э. Малюс (1775—1812) — французский физик.

ны друг другу. В данном случае $T_1$ пропускает колебания, направленные по $AB$, а $T_2$ их полностью гасит, т. е. за вторую пластинку турмалина свет не проходит.

Пластинка $T_1$, преобразующая естественный свет в плоскополяризованный, является **поляризатором.** Пластинка $T_2$, служащая для анализа степени поляризации света, называется **анализатором.** Обе пластинки совершенно одинаковы (их можно поменять местами).

Если пропустить естественный свет через два поляризатора, плоскости которых образуют угол $\alpha$, то из первого выйдет плоскополяризованный свет, интенсивность которого $I_0 = {}^1/_2 I_{ест}$, из второго, согласно (190.1), выйдет свет интенсивностью $I = I_0 \cos^2 \alpha$. Следовательно, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора,

$$I = {}^1/_2 I_{ест} \cos^2 \alpha,$$

откуда $I_{max} = {}^1/_2 I_{ест}$ (поляризаторы параллельны) и $I_{min} = 0$ (поляризаторы скрещены).

## § 191. Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков

Если естественный свет падает на границу раздела двух диэлектриков (например, воздуха и стекла), то часть его отражается, а часть преломляется и распространяется во второй среде. Устанавливая на пути отраженного и преломленного лучей анализатор (например, турмалин), убеждаемся в том, что отраженный и преломленный лучи частично поляризованы: при поворачивании анализатора вокруг лучей интенсивность света периодически усиливается и ослабевает (полного гашения не наблюдается!). Дальнейшие исследования показали, что в отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные плоскости падения (на рис. 275 они обозначены точками), в преломленном — колебания, параллельные плоскости падения (изображены стрелками).

Степень поляризации (степень выделения световых волн с определенной ориентацией электрического (и магнитного) вектора) зависит от угла падения лучей и показателя преломления. Шотландский физик **Д. Брюстер** (1781—1868) установил **закон,** согласно которому при угле падения $i_B$ (**угол Брюстера**), определяемого соотношением

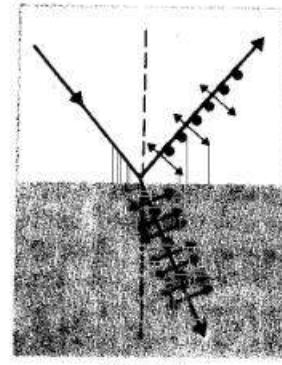


Рис. 275

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21}$$

($n_{21}$ — показатель преломления второй среды относительно первой), *отраженный луч является плоскополяризованным* (содержит только колебания, перпендикулярные плоскости падения) (рис. 276). *Преломленный же луч при угле падения $i_B$ поляризуется максимально, но не полностью.*

Если свет падает на границу раздела под углом Брюстера, то отраженный и преломленный лучи *взаимно перпендикулярны* ($\operatorname{tg} i_B = \sin i_B / \cos i_B$, $n_{21} = \sin i_B / \sin i_2$ ($i_2$ — угол преломления), откуда $\cos i_B =$

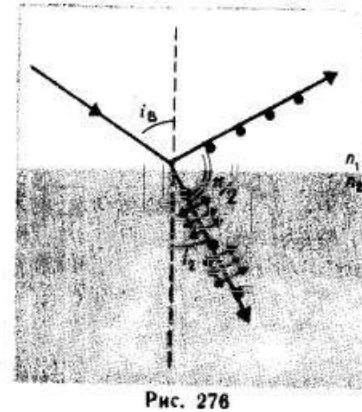



Рис. 276

$=\sin i_2$). Следовательно, $i_B+i_2=\pi/2$, но $i'_B=i_B$ (закон отражения), поэтому $i'_B+i_2=\pi/2$.

Степень поляризации отраженного и преломленного света при различных углах падения можно рассчитать из уравнений Максвелла, если учесть граничные условия для электромагнитного поля на границе раздела двух изотропных диэлектриков (так называемые **формулы Френеля**).

Степень поляризации преломленного света может быть значительно повышена (многократным преломлением при условии падения света каждый раз на границу раздела под углом Брюстера). Если, например, для стекла ($n=1{,}53$) степень поляризации преломленного луча составляет $\approx 15\,\%$, то после преломления на 8—10 наложенных друг на друга стеклянных пластинок вышедший из такой системы свет будет практически полностью поляризованным. Такая совокупность пластинок называется **стопой.** Стопа может служить для анализа поляризованного света как при его отражении, так и при его преломлении.

## § 192. Двойное лучепреломление

Все прозрачные кристаллы (кроме кристаллов кубической системы, которые оптически изотропны) обладают способностью **двойного лучепреломления,** т. е. раздваивания каждого падающего на них светового пучка. Это явление, в 1669 г. впервые обнаруженное датским ученым Э. Бартолином (1625—1698) для исландского шпата (разновидность кальцита $CaCO_3$), объясняется особенностями распространения света в анизотропных средах и непосредственно вытекает из уравнений Максвелла.

Если на толстый кристалл исландского шпата направить узкий пучок света, то из кристалла выйдут два пространственно разделенных луча, параллельных друг другу и падающему лучу (рис. 277). Даже в том случае, когда первичный пучок падает на кристалл нормально, преломленный пучок разделяется на два, причем один из них является продолжением первичного, а второй отклоняется (рис. 278). Второй из этих лучей получил название **необыкновенного** (*e*), а первый — **обыкновенного** (*o*).

В кристалле исландского шпата имеется единственное направление, вдоль которого двойное лучепреломление не наблюдается. Направление в оптически анизотропном кристалле, по которому луч света распространяется, не испытывая двойного лучепреломления, называется **оптической осью кристалла.** В данном случае речь идет именно *о направлении*, а не о прямой линии, проходящей через какую-то точку кристалла. Любая прямая, проходящая параллельно данному направлению, является оптической осью кристалла. Кристаллы в зависимости от типа их симметрии бывают **одноосные** и **двуосные,** т. е. имеют одну или две оптические оси (к первым и относится исландский шпат).

Плоскость, проходящая через направление луча света и оптическую ось кристалла, называется **главной плоскостью** (или **главным сечением** кристалла). Анализ поляризации света (например, с помощью турмалина или стеклянного зеркала) показывает, что вышедшие из кристалла лучи плоско поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях: колебания светового вектора (вектора напряженности **E** электрического поля)

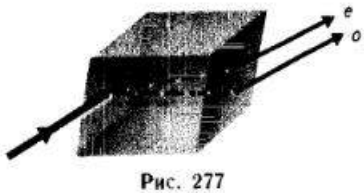


Рис. 277

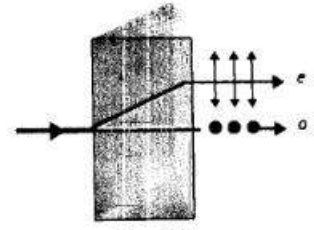


Рис. 278

в обыкновенном луче происходят перпендикулярно главной плоскости, в необыкновенном — в главной плоскости (рис. 278).

Неодинаковое преломление обыкновенного и необыкновенного лучей указывает на различие для них показателей преломления. Очевидно, что при любом направлении обыкновенного луча колебания светового вектора перпендикулярны оптической оси кристалла, поэтому обыкновенный луч распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью и, следовательно, показатель преломления $n_o$ для него есть величина постоянная. Для необыкновенного же луча угол между направлением колебаний светового вектора и оптической осью отличен от прямого и зависит от направления луча, поэтому необыкновенные лучи распространяются по различным направлениям с разными скоростями. Следовательно, показатель преломления $n_e$ необыкновенного луча является переменной величиной, зависящей от направления луча. Таким образом, обыкновенный луч подчиняется закону преломления (отсюда и название «обыкновенный»), а для необыкновенного луча этот закон не выполняется. После выхода из кристалла, если не принимать во внимание поляризацию во взаимно перпендикулярных плоскостях, эти два луча ничем друг от друга не отличаются.

Как уже рассматривалось, обыкновенные лучи распространяются в кристалле по всем направлениям с одинаковой скоростью $v_o = c/n_o$, а необыкновенные — с разной скоростью $v_e = c/n_e$ (в зависимости от угла между вектором **E** и оптической осью). Для луча, распространяющегося вдоль оптической оси, $n_o = n_e$, $v_o = v_e$, т. е. вдоль оптической оси существует только одна скорость распространения света. Различие в $v_e$ и $v_o$ для всех направлений, кроме направления оптической оси, и обусловливает явление двойного лучепреломления света в одноосных кристаллах.

Допустим, что в точке $S$ внутри одноосного кристалла находится точечный источник света. На рис. 279 показано распространение обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле (главная

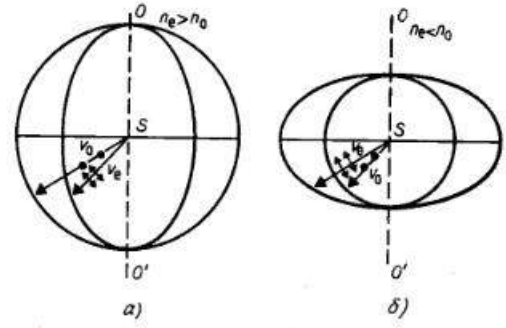



Рис. 279

плоскость совпадает с плоскостью чертежа, $OO'$ — направление оптической оси). Волновой поверхностью обыкновенного луча (он распространяется с $v_o = \text{const}$) является сфера, необыкновенного луча ($v_e \neq \text{const}$) — эллипсоид вращения. Наибольшее расхождение волновых поверхностей обыкновенного и необыкновенного лучей наблюдается в направлении, перпендикулярном оптической оси. Эллипсоид и сфера касаются друг друга в точках их пересечения с оптической осью $OO'$. Если $v_e < v_o$ ($n_e > n_o$), то эллипсоид необыкновенного луча вписан в сферу обыкновенного луча (эллипсоид скоростей вытянут относительно оптической оси) и **одноосный кристалл** называется **положительным** (рис. 279, *а*). Если $v_e > v_o$ ($n_e < n_o$), то эллипсоид описан вокруг сферы (эллипсоид скоростей растянут в направлении, перпендикулярном оптической оси) и одноосный кристалл называется **отрицательным** (рис. 279, *б*). Рассмотренный выше исландский шпат относится к отрицательным кристаллам.

В качестве примера построения обыкновенного и необыкновенного лучей рас-

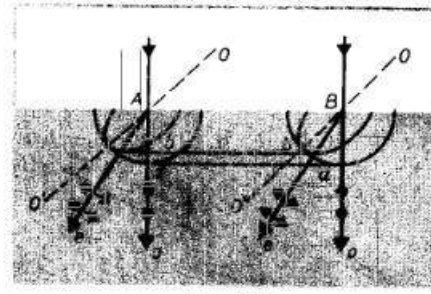



Рис. 280

смотрим преломление плоской волны на границе анизотропной среды, например положительной (рис. 280). Пусть свет падает нормально к преломляющей грани кристалла, а оптическая ось $OO'$ составляет с нею некоторый угол. В точках $A$ и $B$ построим сферические волновые поверхности, соответствующие обыкновенному лучу, и эллипсоидальные — необыкновенному лучу. В точке, лежащей на $OO'$, эти поверхности соприкасаются. Согласно принципу Гюйгенса, поверхность, касательная к сферам, будет фронтом ($a$ — $a$) обыкновенной волны, поверхность, касательная к эллипсоидам,— фронтом ($b$ — $b$) необыкновенной волны. Проведя к точкам касания прямые, получим направления распространения обыкновенного ($o$) и необыкновенного ($e$) лучей. Таким образом, в данном случае обыкновенный луч пойдет вдоль первоначального направления, необыкновенный же отклонится от первоначального направления.

## § 193. Поляризационные призмы и поляроиды

В основе работы поляризационных приспособлений, служащих для получения поляризованного света, лежит явление двойного лучепреломления. Наиболее часто для этого применяются **призмы** и **поляроиды.** Призмы делятся на два класса:

1) призмы, дающие только плоскополяризованный луч **(поляризационные призмы);**

2) призмы, дающие два поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях луча **(двоякопреломляющие призмы).**

Поляризационные призмы построены по принципу полного отражения (см. § 165) одного из лучей (например, обыкновенного) от границы раздела, в то время как другой луч с другим показателем преломления проходит через эту границу. Типичным представителем поляризационных призм является **призма Ни́коля** *, называемая часто **ни́колем.** Призма

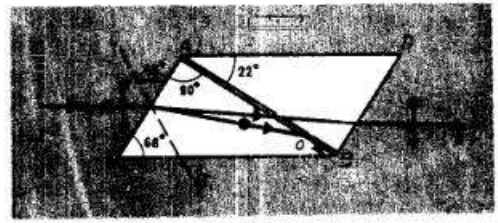



Рис. 281

Николя (рис. 281) представляет собой двойную призму из исландского шпата, склеенную вдоль линии $AB$ канадским бальзамом с $n=1{,}55$. Оптическая ось $OO'$ призмы составляет с входной гранью угол 48°. На передней грани призмы естественный луч, параллельный ребру $CB$, раздваивается на два луча: обыкновенный ($n_o=1{,}66$) и необыкновенный ($n_e=1{,}51$). При соответствующем подборе угла падения, равного или большего предельного, обыкновенный луч испытывает полное отражение (канадский бальзам для него является средой оптически менее плотной), а затем поглощается зачерненной боковой поверхностью $CB$. Необыкновенный луч выходит из кристалла параллельно падающему лучу, незначительно смещенному относительно него (ввиду преломления на наклонных гранях $AC$ и $BD$).

**Двоякопреломляющие призмы** используют различие в показателях преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, чтобы развести их возможно дальше друг от друга. Примером двоякопреломляющих призм могут служить призмы из исландского шпата и стекла, призмы, составленные из двух призм из исландского шпата со взаимно перпендикулярными оптиче-

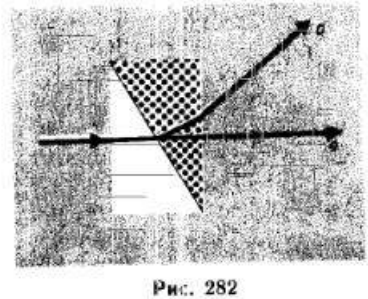


Рис. 282

* У. Николь (1768—1851) — шотландский ученый.

скими осями. Для первых призм (рис. 282) обыкновенный луч преломляется в шпате и стекле два раза и, следовательно, сильно отклоняется, необыкновенный же луч при соответствующем подборе показателя преломления стекла $n$ ($n \approx n_e$) проходит призму почти без отклонения. Для вторых призм различие в ориентировке оптических осей влияет на угол расхождения между обыкновенным и необыкновенным лучами.

Двоякопреломляющие кристаллы обладают свойством **дихроизма**, т. е. различного поглощения света в зависимости от ориентации электрического вектора световой волны, и называются **дихроичными кристаллами**. Примером сильно дихроичного кристалла является турмалин, в котором из-за сильного селективного поглощения обыкновенного луча уже при толщине пластинки 1 мм из нее выходит только необыкновенный луч. Такое различие в поглощении, зависящее, кроме того, от длины волны, приводит к тому, что при освещении дихроичного кристалла белым светом кристалл по разным направлениям оказывается различно окрашенным.

Дихроичные кристаллы приобрели еще более важное значение в связи с изобретением **поляроидов**. Примером поляроида может служить тонкая пленка из целлулоида, в которую вкраплены кристаллики герапатита (сернокислого иод-хинина). Герапатит — двоякопреломляющее вещество с очень сильно выраженным дихроизмом в области видимого света. Установлено, что такая пленка уже при толщине $\approx 0{,}1$ мм полностью поглощает обыкновенные лучи видимой области спектра, являясь в таком тонком слое совершенным поляризатором. Преимущество поляроидов перед призмами — возможность изготовлять их с площадями поверхностей до нескольких квадратных метров. Однако степень поляризации в них сильнее зависит от $\lambda$, чем в призмах. Кроме того, их меньшая по сравнению с призмами прозрачность (приблизительно 30 %) в сочетании с небольшой термостойкостью не позволяет использовать поляроиды в мощных световых потоках. Поляроиды применяются, например, для защиты от ослепляющего действия солнечных лучей и фар встречного автотранспорта.

Разные кристаллы создают различное по значению и направлению двойное лучепреломление, поэтому, пропуская через них поляризованный свет и измеряя его изменение после прохождения кристаллов, можно определить их оптические характеристики и производить **минералогический** анализ. Для этой цели используются **поляризационные микроскопы.**

## § 194. Анализ поляризованного света

Пусть на кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает плоскополяризованный свет (рис. 283). Внутри пластинки он разбивается на обыкновенный ($o$) и необыкновенный ($e$) лучи, которые в кристалле пространственно не разделены (но движутся с разными скоростями), а на выходе из кристалла складываются.

Так как в обыкновенном и необыкновенном лучах колебания светового вектора совершаются во взаимно перпендикулярных направлениях, то на выходе из пластинки в результате сложения этих колебаний возникают световые волны, вектор $\mathbf{E}$ (а следовательно, и $\mathbf{H}$) в которых меняется со временем так, что его конец описывает эллипс, ориентированный произвольно относительно координатных осей. Уравнение этого эллипса (см. (145.2)):

$$\frac{x^2}{E_o^2} - \frac{2xy}{E_o E_e}\cos\varphi + \frac{y^2}{E_e^2} = \sin^2\varphi, \quad (194.1)$$

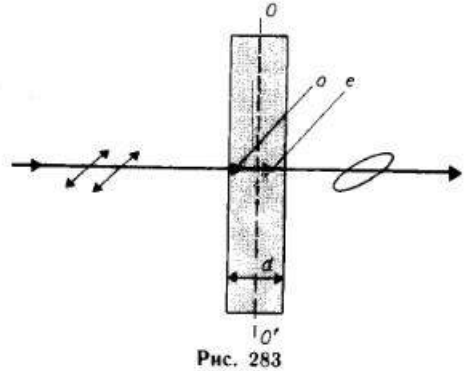


Рис. 283

где $E_o$ и $E_e$ — соответственно составляющие напряженности электрического поля волны в обыкновенном и необыкновенном лучах, $\varphi$ — разность фаз колебаний. Таким образом, в результате прохождения через кристаллическую пластинку *плоскополяризованный* свет превращается *в эллиптически поляризованный*.

Между обыкновенным и необыкновенным лучами в пластинке возникает оптическая разность хода

$$\Delta=(n_o-n_e)\,d,$$

или разность фаз

$$\varphi=\frac{2\pi}{\lambda_0}(n_o-n_e)\,d,$$

где $d$ — толщина пластинки, $\lambda_0$ — длина волны в вакууме.

Если $\Delta=(n_o-n_e)\,d=\lambda/4$, $\varphi=\pm\pi/2$, то уравнение (194.1) примет вид

$$\frac{x^2}{E_o^2}+\frac{y^2}{E_e^2}=1,$$

т. е. эллипс ориентирован относительно главных осей кристалла. При $E_o=E_e$ (если световой вектор в падающем на пластинку плоскополяризованном свете составляет угол $\alpha=45°$ с направлением оптической оси пластинки)

$$x^2+y^2=E_o^2,$$

т. е. на выходе из пластинки свет оказывается циркулярно поляризованным.

Вырезанная параллельно оптической оси пластинка, для которой оптическая разность хода

$$\Delta=(n_o-n_e)\,d=\pm\left(m+\frac{1}{4}\right)\lambda_0$$

$$(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

называется **пластинкой в четверть волны** (пластинкой $\lambda/4$). Знак плюс соответствует отрицательным кристаллам, минус — положительным. Плоскополяризованный свет, пройдя пластинку $\lambda/4$, на выходе превращается в эллиптически поляризованный (в частном случае циркулярно поляризованный). Конечный результат, как уже рассматривали, определяется разностью фаз $\varphi$ и углом $\alpha$.

Пластинка, для которой

$$(n_o-n_e)\,d=\pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_0$$

$$(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

называется **пластинкой в полволны** и т. д.

В циркулярно поляризованном свете разность фаз $\varphi$ между любыми двумя взаимно перпендикулярными колебаниями равна $\pm\pi/2$. Если на пути такого света поставить пластинку $\lambda/4$, то она внесет дополнительную разность фаз $\pm\pi/2$. Результирующая разность фаз станет равной 0 или $\pi$. Следовательно (см. (194.1)), циркулярно поляризованный свет, пройдя пластинку $\lambda/4$, становится плоскополяризованным. Если теперь на пути луча поставить поляризатор, то можно добиться полного его гашения. Если же падающий свет естественный, то он при прохождении пластинки $\lambda/4$ таковым и останется (ни при каком положении пластинки и поляризатора погашения луча не достичь).

Таким образом, если при вращении поляризатора при любом положении пластинки интенсивность не меняется, то падающий свет естественный. Если интенсивность меняется и можно достичь полного гашения луча, то падающий свет циркулярно поляризованный, если полного гашения не достичь, то падающий свет представляет смесь естественного и циркулярно поляризованного.

Если на пути эллиптически поляризованного света поместить пластинку $\lambda/4$, оптическая ось которой ориентирована параллельно одной из осей эллипса, то она внесет дополнительную разность фаз $\pm\pi/2$. Результирующая разность фаз станет равной нулю или $\pi$. Следовательно, эллиптически поляризованный свет, пройдя пластинку $\lambda/4$, повернутую определенным образом, превращается в плоскополяризованный и может быть погашен поворотом поляризатора. Этим методом можно отличить эллиптически поляризованный свет от частично поляризованного или циркулярно поляризованный свет от естественного.

## § 195. Искусственная оптическая анизотропия

Двойное лучепреломление имеет место в естественных анизотропных средах (см. § 192). Существуют, однако, различные способы получения **искусственной оптической анизотропии**, т. е. сообщения оптической анизотропии естественно изотропным веществам.

Оптически изотропные вещества становятся оптически анизотропными под действием: 1) одностороннего сжатия или растяжения (кристаллы кубической системы, стекла и др.); 2) электрического поля (**эффект Керра** *; жидкости, аморфные тела, газы); 3) магнитного поля (жидкости, стекла, коллоиды). В перечисленных случаях вещество приобретает свойства одноосного кристалла, оптическая ось которого совпадает с направлением деформации, электрического или магнитного полей соответственно указанным выше воздействиям.

Мерой возникающей оптической анизотропии служит разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном оптической оси:

$$n_o - n_e = k_1 \sigma$$

(в случае деформации);

$$n_o - n_e = k_2 E^2 \qquad (195.1)$$

(в случае электрического поля);

$$n_o - n_e = k_3 H^2$$

(в случае магнитного поля),

где $k_1$, $k_2$, $k_3$ — постоянные, характеризующие вещество, $\sigma$ — нормальное напряжение (см. § 21), $E$ и $H$ — соответственно напряженность электрического и магнитного полей.

На рис. 284 приведена установка для наблюдения эффекта Керра в жидкостях (установки для изучения рассмотренных явлений однотипны). **Ячейка Керра** — кювета с жидкостью (например, нитробензолом), в которую введены пластины конденсатора, помещается между скрещенными поляризатором P и анализатором A. При отсутствии электрического поля свет через систему не проходит. При наложении электрического поля жидкость становится двоякопреломляющей; при изменении разности потенциалов между электродами меняется степень анизотропии вещества, а следовательно, и интенсивность света, прошедшего через анализатор. На пути $l$ между обыкновенным и необыкновенным лучами возникает оптическая разность хода

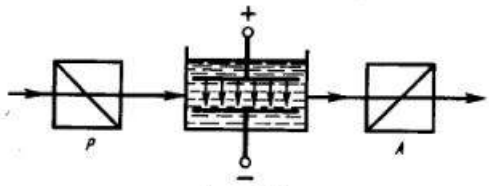


Рис. 284

$$\Delta = l(n_o - n_e) = k_2 l E^2$$

(с учетом формулы (195.1)) или соответственно разность фаз

$$\varphi = 2\pi \Delta/\lambda = 2\pi B l E^2,$$

где $B = k_2/\lambda$ — постоянная Керра.

**Эффект Керра** — оптическая анизотропия веществ под действием электрического поля — объясняется различной поляризуемостью молекул жидкости по разным направлениям. Это явление практически безынерционно, т. е. переход вещества из изотропного состояния в анизотропное при включении поля (и обратно) составляет приблизительно $10^{-10}$ с. Поэтому ячейка Керра служит идеальным световым затвором и применяется в быстропротекающих процессах (звукозапись, воспроизводство звука, скоростная фото- и киносъемка, изучение скорости распространения света и т. д.), в оптической локации, в оптической телефонии и т. д.

Искусственная анизотропия под действием механических воздействий позволяет исследовать напряжения, возникающие в прозрачных телах. В данном случае о степени деформации отдельных участков изделия (например, остаточных деформа-

* Д. Керр (1824—1904) — шотландский физик.

ций в стекле при закалке) судят по распределению в нем окраски. Так как применяемые обычно в технике материалы (металлы) непрозрачны, то исследование напряжений производят на прозрачных моделях, а потом делают соответствующий пересчет на проектируемую конструкцию.

## § 196. Вращение плоскости поляризации

Некоторые вещества (например, из твердых тел — кварц, сахар, киноварь, из жидкостей — водный раствор сахара, винная кислота, скипидар), называемые **оптически активными,** обладают способностью вращать плоскость поляризации.




Рис. 285

Вращение плоскости поляризации можно наблюдать на следующем опыте (рис. 285). Если между скрещенными поляризатором $P$ и анализатором $A$, дающими темное поле зрения, поместить оптически активное вещество (например, кювету с раствором сахара), то поле зрения анализатора просветляется. При повороте анализатора на некоторый угол $\varphi$ можно вновь получить темное поле зрения. Угол $\varphi$ и есть угол, на который оптически активное вещество поворачивает плоскость поляризации света, прошедшего через поляризатор. Так как поворотом анализатора можно получить темное поле зрения, то свет, прошедший через оптически активное вещество, является плоскополяризованным.

Опыт показывает, что угол поворота плоскости поляризации для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha d,$$

для оптически активных растворов

$$\varphi = [\alpha] C d, \qquad (196.1)$$

где $d$ — расстояние, пройденное светом в оптически активном веществе, $\alpha$ ($[\alpha]$) — так называемое **удельное вращение,** численно равное углу поворота плоскости поляризации света слоем оптически активного вещества единичной толщины (единичной концентрации — для растворов), $C$ — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе, кг/м$^3$. Удельное вращение зависит от природы вещества, температуры и длины волны света в вакууме.

Опыт показывает, что все вещества, оптически активные в жидком состоянии, обладают таким же свойством и в кристаллическом состоянии. Однако если вещества активны в кристаллическом состоянии, то не всегда активны в жидком (например, расплавленный кварц). Следовательно, оптическая активность обусловливается как строением молекул вещества (их асимметрией), так и особенностями расположения частиц в кристаллической решетке.

**Оптически активные вещества** в зависимости от направления вращения плоскости поляризации разделяются на **право- и левовращающие.** В первом случае плоскость поляризации, если смотреть навстречу лучу, вращается вправо (по часовой стрелке), во втором — влево (против часовой стрелки). Вращение плоскости поляризации объяснено О. Френелем (1817 г.). Согласно теории Френеля скорость распространения света в оптически активных веществах различна для лучей, поляризованных по кругу вправо и влево.

Явление вращения плоскости поляризации и, в частности, формула (196.1) лежат в основе точного метода определения концентрации растворов оптически активных веществ, называемого **поляриметрией (сахариметрией).** Для этого используется установка, показанная на рис. 285. По найденному углу поворота плоскости поляризации $\varphi$ и известному значению $[\alpha]$ из (196.1) находится концентрация растворенного вещества.

Впоследствии М. Фарадеем обнаружено вращение плоскости поляризации в оптически неактивных телах, возникающее под действием магнитного поля. Это явление получило название **эффекта Фарадея**

**(или магнитного вращения плоскости поляризации).** Оно имело огромное значение для науки, так как было первым явлением, в котором обнаружилась связь между оптическими и электромагнитными процессами.

## Контрольные вопросы

- Что называется естественным светом? плоскополяризованным светом? частично поляризованным светом? эллиптически поляризованным светом?
- Как практически можно отличить плоскополяризованный свет от естественного?
- Интенсивность естественного света, пропущенного через два поляризатора, уменьшилась вдвое. Как ориентированы поляризаторы?
- Чем замечателен угол Брюстера?
- Покажите, что при выполнении закона Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.
- Что называется оптической осью кристалла? Чем отличаются двуосные кристаллы от одноосных?
- Чем обусловлено двойное лучепреломление в оптически анизотропном одноосном кристалле?
- Чем отличаются отрицательные кристаллы от положительных? Приведите построение волновых поверхностей для обыкновенного и необыкновенного лучей.
- Какие поляризационные приборы вы знаете? В чем заключается принцип их действия?
- Что называется пластинкой в четверть волны? в полволны?
- Можно ли с помощью только поляризатора отличить эллиптически поляризованный свет от частично поляризованного? Почему?
- На поляризатор падает циркулярно поляризованный свет, интенсивность которого равна $I_0$. Какова интенсивность света за поляризатором?
- Как, используя пластинку в четверть волны и поляризатор, отличить циркулярно поляризованный свет от естественного?
- Каково будет действие пластинки в полволны на естественный свет? на плоскополяризованный свет, плоскость поляризации которого составляет угол 45° с оптической осью пластинки?
- Что такое эффект Керра? Какова физическая причина его возникновения?
- Какие вещества называются оптически активными?
- В чем отличие оптической активности от двойного лучепреломления?

## Задачи

**25.1.** Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света, прошедшего через два поляризатора, расположенные так, что угол между их главными плоскостями равен 45°, а в каждом из николей теряется 5 % интенсивности падающего на него света. [В 4,43 раза]

**25.2.** Предельный угол полного отражения для пучка света на границе кристалла каменной соли с воздухом равен 40,5°. Определить угол Брюстера при падении света из воздуха на поверхность этого кристалла. [57°]

**25.3.** Плоскополяризованный свет, длина волны которого в вакууме $\lambda = 600$ нм, падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно его оптической оси. Принимая показатели преломления для исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно $n_o = 1{,}66$ и $n_e = 1{,}49$, определить длины волн этих лучей в кристалле. [$\lambda_o = 361$ нм, $\lambda_e = 403$ нм]

**25.4.** Определить наименьшую толщину кристаллической пластинки в полволны для $\lambda = 589$ нм, если разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей для данной длины волны $n_o - n_e = 0{,}17$. [1,73 мкм]

**25.5.** Естественный монохроматический свет падает на систему из двух скрещенных николей, между которыми находится кварцевая пластинка толщиной 4 мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, прошедшего через эту систему, если удельное вращение кварца равно 15 угл. град/мм? [В 2,67 раза]

# Глава 26
# Квантовая природа излучения

## § 197. Тепловое излучение и его характеристики

Тела, нагретые до достаточно высоких температур, светятся. Свечение тел, обусловленное нагреванием, называется **тепловым (температурным) излучением.** Тепловое излучение, являясь самым распространенным в природе, совершается за счет энергии теплового движения атомов и молекул вещества (т. е. за счет его внутренней энергии) и свойственно всем телам при температуре выше 0 К. Тепловое излучение характеризуется сплошным спектром, положение максимума которого зависит от температуры. При высоких температурах излучаются короткие (видимые и ультрафиолетовые) электромагнитные волны, при низких — преимущественно длинные (инфракрасные).

Тепловое излучение — практически единственный вид излучения, который может быть **равновесным.** Предположим, что нагретое (излучающее) тело помещено в полость, ограниченную идеально отражающей оболочкой. С течением времени, в результате непрерывного обмена энергией между телом и излучением, наступит равновесие, т. е. тело в единицу времени будет поглощать столько же энергии, сколько и излучать. Допустим, что равновесие между телом и излучением по какой-либо причине нарушено и тело излучает энергии больше, чем поглощает. Если в единицу времени тело больше излучает, чем поглощает (или наоборот), то температура тела начнет понижаться (или повышаться). В результате будет ослабляться (или возрастать) количество излучаемой телом энергии, пока, наконец, не установится равновесие. Все другие виды излучения неравновесны.

Количественной характеристикой теплового излучения служит **спектральная плотность энергетической светимости (излучательности) тела** — мощность излучения с единицы площади поверхности тела в интервале частот единичной ширины:

$$R_{\nu,T}=\frac{\mathrm{d}W^{\text{изл}}_{\nu,\nu+\mathrm{d}\nu}}{\mathrm{d}\nu},$$

где $\mathrm{d}W^{\text{изл}}_{\nu,\nu+\mathrm{d}\nu}$ — энергия электромагнитного излучения, испускаемого за единицу времени (мощность излучения) с единицы площади поверхности тела в интервале частот от $\nu$ до $\nu+\mathrm{d}\nu$.

Единица спектральной плотности энергетической светимости ($R_{\nu,T}$) — **джоуль на метр в квадрате в секунду** (Дж/(м$^2$·с)).

Записанную формулу можно представить в виде функции длины волны:

$$\mathrm{d}W^{\text{изл}}_{\nu,\nu+\mathrm{d}\nu}=R_{\nu,T}\,\mathrm{d}\nu=R_{\lambda,T}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Так как $c=\lambda\nu$, то

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu}=-\frac{c}{\nu^2}=-\frac{\lambda^2}{c},$$

где знак минус указывает на то, что с возрастанием одной из величин ($\nu$ или $\lambda$) другая величина убывает. Поэтому в дальнейшем знак минус будем опускать. Таким образом,

$$R_{\nu,T}=R_{\lambda,T}\frac{\lambda^2}{c}. \qquad (197.1)$$

С помощью формулы (197.1) можно перейти от $R_{\nu,T}$ к $R_{\lambda,T}$ и наоборот.

Зная спектральную плотность энергетической светимости, можно вычислить **интегральную энергетическую светимость (интегральную излучательность)** (ее называют просто энергетической светимостью тела), просуммировав по всем частотам:

$$R_T=\int_0^\infty R_{\nu,T}\,\mathrm{d}\nu. \qquad (197.2)$$

Способность тел поглощать падающее на них излучение характеризуется **спектральной поглощательной способностью**

$$A_{\nu,T}=\frac{dW^{погл}_{\nu,\nu+d\nu}}{dW_{\nu,\nu+d\nu}},$$

показывающей, какая доля энергии, приносимой за единицу времени на единицу площади поверхности тела падающими на нее электромагнитными волнами с частотами от $\nu$ до $\nu+d\nu$, поглощается телом. Спектральная поглощательная способность — величина безразмерная. $R_{\nu,T}$ и $A_{\nu,T}$ зависят от природы тела, его термодинамической температуры и при этом различаются для излучений с различными частотами. Поэтому эти величины относят к определенным $T$ и $\nu$ (вернее, к достаточно узкому интервалу частот от $\nu$ до $\nu+d\nu$).

Тело, способное поглощать полностью при любой температуре все падающее на него излучение любой частоты, называется **черным.** Следовательно, спектральная поглощательная способность черного тела для всех частот и температур тождественно равна единице ($A^{ч}_{\nu,T}\equiv 1$). Абсолютно черных тел в природе нет, однако такие тела, как сажа, платиновая чернь, черный бархат и некоторые другие, в определенном интервале частот по своим свойствам близки к ним.

Идеальной моделью черного тела является замкнутая полость с небольшим отверстием $O$, внутренняя поверхность которой зачернена (рис. 286). Луч света, попавший внутрь такой полости, испытывает многократные отражения от стенок, в результате чего интенсивность вышедшего излучения оказывается практически равной нулю. Опыт показывает, что при размере отверстия, меньшего 0,1 диаметра полости, падающее излучение всех частот «полностью поглощается». Вследствие этого открытые окна домов со стороны улицы кажутся черными, хотя внутри комнат достаточно светло из-за отражения света от стен.



Рис. 286

Наряду с понятием черного тела используют понятие **серого тела** — тела, поглощательная способность которого меньше единицы, но одинакова для всех частот и зависит только от температуры, материала и состояния поверхности тела. Таким образом, для серого тела $A^{с}_{\nu,T}=A_T=$ $=\text{const}<1$.

Исследование теплового излучения сыграло важную роль в создании квантовой теории света, поэтому необходимо рассмотреть законы, которым оно подчиняется.

## § 198. Закон Кирхгофа

Кирхгоф, опираясь на второй закон термодинамики и анализируя условия равновесного излучения в изолированной системе тел, установил количественную связь между спектральной плотностью энергетической светимости и спектральной поглощательной способностью тел. Отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральной поглощательной способности не зависит от природы тела; оно является для всех тел универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры **(закон Кирхгофа):**

$$\frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}}=r_{\nu,T}. \qquad (198.1)$$

Для черного тела $A^{ч}_{\nu,T}\equiv 1$, поэтому из закона Кирхгофа (см. (198.1)) вытекает, что $R_{\nu,T}$ для черного тела равна $r_{\nu,T}$. Таким образом, **универсальная функция Кирхгофа** $r_{\nu,T}$ есть не что иное, как **спектральная плотность энергетической светимости черного тела.** Следовательно, согласно закону Кирхгофа, для всех тел отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральной поглощательной способности равно спектральной плотно-

сти энергетической светимости черного тела при той же температуре и частоте.

Из закона Кирхгофа следует, что спектральная плотность энергетической светимости любого тела в любой области спектра всегда меньше спектральной плотности энергетической светимости черного тела (при тех же значениях $T$ и $\nu$), так как $A_{\nu,T}<1$ и поэтому $R_{\nu,T}<r_{\nu,T}$. Кроме того, из (198.1) вытекает, что если тело не поглощает электромагнитные волны какой-то частоты, то оно их и не излучает, так как при $A_{\nu,T}=0$ $R_{\nu,T}=0$.

Используя закон Кирхгофа, выражению для энергетической светимости тела (197.2) можно придать вид

$$R_T=\int_0^\infty A_{\nu,T}r_{\nu,T}\,d\nu.$$

Для серого тела

$$R_T^c=A_T\int_0^\infty r_{\nu,T}\,d\nu=A_TR_e, \qquad (198.2)$$

где

$$R_e=\int_0^\infty r_{\nu,T}\,d\nu \qquad (198.3)$$

— **энергетическая светимость черного тела** (зависит только от температуры).

Закон Кирхгофа описывает только тепловое излучение, являясь настолько характерным для него, что может служить надежным критерием для определения природы излучения. Излучение, которое закону Кирхгофа не подчиняется, не является тепловым.

## § 199. Законы Стефана — Больцмана и смещения Вина

Из закона Кирхгофа (см. (198.1)) следует, что спектральная плотность энергетической светимости черного тела является универсальной функцией, поэтому нахождение ее явной зависимости от частоты и температуры является важной задачей теории теплового излучения.

Австрийский физик Й. Стефан (1835—1893), анализируя экспериментальные данные (1879), и Л. Больцман, применяя термодинамический метод (1884), решили эту задачу лишь частично, установив зависимость энергетической светимости $R_e$ от температуры. Согласно **закону Стефана — Больцмана,**

$$R_e=\sigma T^4, \qquad (199.1)$$

т. е. энергетическая светимость черного тела пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры; $\sigma$ — постоянная Стефана — Больцмана: ее экспериментальное значение равно $5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К$^4$).

Закон Стефана — Больцмана, определяя зависимость $R_e$ от температуры, не дает ответа относительно спектрального состава излучения черного тела. Из экспериментальных кривых зависимости функции $r_{\lambda,T}\left(r_{\lambda,T}=\frac{c}{\lambda^2}r_{\nu,T}\right)$ от длины волны $\lambda$ при различных температурах (рис. 287) следует, что распределение энергии в спектре черного тела является неравномерным. Все кривые имеют явно выраженный максимум, который по мере повышения температуры смещается в сторону более коротких волн. Площадь, ограниченная кривой зависимости $r_{\lambda,T}$ от $\lambda$ и осью абсцисс, пропорциональна энергетической светимости $R_e$ черного тела и, следовательно, по закону Стефана — Больцмана, четвертой степени температуры.

Немецкий физик В. Вин (1864—1928), опираясь на законы термо- и электродинамики, установил зависимость длины волны $\lambda_{max}$, соответствующей максимуму функции $r_{\lambda,T}$, от температуры $T$. Согласно **закону смещения Вина,**

$$\lambda_{max}=b/T, \qquad (199.2)$$

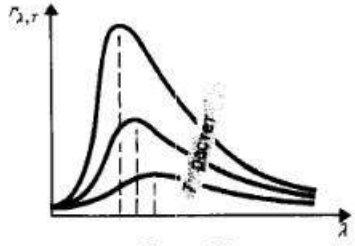



Рис. 287

т. е. длина волны $\lambda_{max}$, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости $r_{\lambda,T}$ черного тела, обратно пропорциональна его термодинамической температуре, $b$ — постоянная Вина: ее экспериментальное значение равно $2{,}9\cdot10^{-3}$ м·К. Выражение (199.2) потому называют законом *смещения* Вина, что оно показывает смещение положения максимума функции $r_{\lambda,T}$ по мере возрастания температуры в область коротких длин волн. Закон Вина объясняет, почему при понижении температуры нагретых тел в их спектре все сильнее преобладает длинноволновое излучение (например, переход белого каления в красное при остывании металла).

Несмотря на то что законы Стефана — Больцмана и Вина играют в теории теплового излучения важную роль, они являются частными законами, так как не дают общей картины распределения энергии по частотам при различных температурах.

## § 200. Формулы Рэлея — Джинса и Планка

Из рассмотрения законов Стефана — Больцмана и Вина следует, что термодинамический подход к решению задачи о нахождении универсальной функции Кирхгофа $r_{\nu,T}$ не дал желаемых результатов. Следующая строгая попытка теоретического вывода зависимости $r_{\nu,T}$ принадлежит английским ученым Д. Рэлею и Д. Джинсу (1877—1946), которые применили к тепловому излучению методы статистической физики, воспользовавшись классическим законом равномерного распределения энергии по степеням свободы.

**Формула Рэлея — Джинса** для спектральной плотности энергетической светимости черного тела имеет вид

$$r_{\nu,T}=\frac{2\pi\nu^2}{c^2}\langle\varepsilon\rangle=\frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT, \quad (200.1)$$

где $\langle\varepsilon\rangle=kT$ — средняя энергия осциллятора с собственной частотой $\nu$. Для осциллятора, совершающего колебания, средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы (см. § 50), поэтому

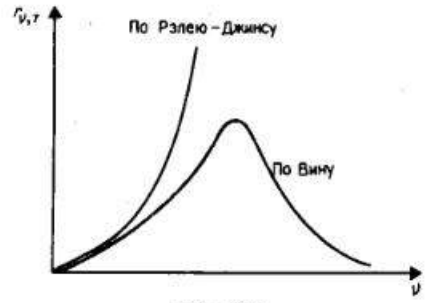



Рис. 288

средняя энергия каждой колебательной степени свободы $\langle\varepsilon\rangle=kT$.

Как показал опыт, выражение (200.1) согласуется с экспериментальными данными *только* в области достаточно малых частот и больших температур. В области больших частот формула Рэлея — Джинса резко расходится с экспериментом, а также с законом Вина (рис. 288). Кроме того, оказалось, что попытка получить закон Стефана — Больцмана (см. (199.1)) из формулы Рэлея — Джинса приводит к абсурду. Действительно, вычисленная с использованием (200.1) энергетическая светимость черного тела (см. (198.3))

$$R_e=\int_0^\infty r_{\nu,T}\,d\nu=\frac{2\pi kT}{c^2}\int_0^\infty \nu^2\,d\nu=\infty,$$

в то время как по закону Стефана — Больцмана $R_e$ пропорциональна четвертой степени температуры. Этот результат получил название «ультрафиолетовой катастрофы». Таким образом, в рамках классической физики не удалось объяснить законы распределения энергии в спектре черного тела.

Правильное, согласующееся с опытными данными выражение для спектральной плотности энергетической светимости черного тела было найдено в 1900 г. немецким физиком М. Планком. Для этого ему пришлось отказаться от установившегося положения классической физики, согласно которому энергия любой системы может изменяться *непрерывно*, т. е. может принимать любые сколь угодно близкие значения. Согласно выдвинутой Планком **квантовой гипотезе**, атомные осцилляторы излучают энергию не непрерывно, а опреде-

ленными порциями — **квантами**, причем энергия кванта пропорциональна частоте колебания (см. (170.3)):

$$\varepsilon_0 = h\nu = hc/\lambda, \qquad (200.2)$$

где $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — **постоянная Планка.** Так как излучение испускается порциями, то энергия осциллятора $\varepsilon$ может принимать лишь определенные *дискретные значения*, кратные целому числу элементарных порций энергии $\varepsilon_0$:

$$\varepsilon = nh\nu \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

В данном случае среднюю энергию $\langle \varepsilon \rangle$ осциллятора нельзя принимать равной $kT$. Вероятность, что осциллятор находится в состоянии с энергией $\varepsilon_n$, пропорциональна $e^{-\varepsilon_n/(kT)}$, но при вычислении средних значений (при дискретных значениях энергии) интегралы заменяются суммами. При данном условии средняя энергия осциллятора

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1},$$

а спектральная плотность энергетической светимости черного тела

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}.$$

Таким образом, Планк вывел для универсальной функции Кирхгофа формулу

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}, \qquad (200.3)$$

которая блестяще согласуется с экспериментальными данными по распределению энергии в спектрах излучения черного тела во всем интервале частот и температур. Теоретический вывод этой формулы М. Планк изложил 14 декабря 1900 г. на заседании Немецкого физического общества. Этот день стал датой рождения квантовой физики.

В области малых частот, т. е. при $h\nu \ll kT$ (энергия кванта очень мала по сравнению с энергией теплового движения $kT$), формула Планка (200.3) совпадает с формулой Рэлея — Джинса (200.1). Для доказательства этого разложим экспоненциальную функцию в ряд, ограничившись для рассматриваемого случая двумя первыми членами:

$$e^{h\nu/(kT)} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}, \quad e^{h\nu/(kT)} - 1 \approx \frac{h\nu}{kT}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу Планка (200.3), найдем, что

$$r_{\nu,T} \approx \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{h\nu/(kT)} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

т. е. получили формулу Рэлея — Джинса (200.1).

Из формулы Планка можно получить закон Стефана — Больцмана. Согласно (198.3) и (200.3),

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu,T}\, d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} d\nu.$$

Введем безразмерную переменную $x = h\nu/(kT)$; $dx = h\, d\nu/(kT)$; $d\nu = kT\, dx/h$. Формула для $R_e$ преобразуется к виду

$$R_e = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x - 1} = \sigma T^4, \qquad (200.4)$$

где $\sigma = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}$, так как $\int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$. Таким образом, действительно формула Планка позволяет получить закон Стефана—Больцмана (ср. формулы (199.1) и (200.4)). Кроме того, подстановка числовых значений $k$, $c$ и $h$ дает для постоянной Стефана—Больцмана величину, хорошо согласующуюся с экспериментальными данными.

Закон смещения Вина получим с помощью формул (197.1) и (200.3):

$$r_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(kT\lambda)} - 1},$$

откуда

$$\frac{\partial r_{\lambda,T}}{\partial \lambda} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^6 (e^{hc/(kT\lambda)} - 1)} \left( \frac{\frac{hc}{kT\lambda} e^{hc/(kT\lambda)}}{e^{hc/(kT\lambda)} - 1} - 5 \right).$$

Значение $\lambda_{max}$, при котором функция достигает максимума, найдем, приравняв нулю эту про-

изводную. Тогда, введя $x=hc/(kT\lambda_{max})$, получим уравнение

$$xe^x-5(e^x-1)=0.$$

Решение этого трансцендентного уравнения методом последовательных приближений дает $x=4{,}965$. Следовательно, $hc/(kT\lambda_{max})=4{,}965$, откуда

$$T\lambda_{max}=hc/(4{,}965\ k)=b,$$

т. е. получили закон смещения Вина (см. 199.2)).

Из формулы Планка, зная универсальные постоянные $h$, $k$ и $c$, можно вычислить постоянные Стефана — Больцмана $\sigma$ и Вина $b$. С другой стороны, зная экспериментальные значения $\sigma$ и $b$, можно вычислить значения $h$ и $k$ (именно так и было впервые найдено числовое значение постоянной Планка).

Таким образом, формула Планка не только хорошо согласуется с экспериментальными данными, но и содержит в себе частные законы теплового излучения, а также позволяет вычислить постоянные в законах теплового излучения. Следовательно, формула Планка является полным решением основной задачи теплового излучения, поставленной Кирхгофом. Ее решение стало возможным лишь благодаря революционной квантовой гипотезе Планка.

## § 201. Оптическая пирометрия. Тепловые источники света

Законы теплового излучения используются для измерения температуры раскаленных и самосветящихся тел (например, звезд). Методы измерения высоких температур, использующие зависимость спектральной плотности энергетической светимости или интегральной энергетической светимости тел от температуры, называются **оптической пирометрией.** Приборы для измерения температуры нагретых тел по интенсивности их теплового излучения в оптическом диапазоне спектра называются **пирометрами.** В зависимости от того, какой закон теплового излучения используется при измерении температуры тел, различают **радиационную, цветовую и яркостную температуры.**

**1. Радиационная температура** — это такая температура черного тела, при которой его энергетическая светимость $R_e$ (см. (198.3)) равна энергетической светимости $R_T$ (см. (197.2)) исследуемого тела. В данном случае регистрируется энергетическая светимость исследуемого тела и по закону Стефана — Больцмана (199.1) вычисляется его радиационная температура:

$$T_p=\sqrt[4]{R_T/\sigma}.$$

Радиационная температура $T_p$ тела всегда меньше его истинной температуры $T$. Для доказательства этого предположим, что исследуемое тело является серым. Тогда, используя (199.1) и (198.2), можно записать

$$R_T^c=A_TR_e=A_T\sigma T^4.$$

С другой стороны,

$$R_T^c=\sigma T_p^4.$$

Из сравнения этих выражений вытекает, что

$$T_p=\sqrt[4]{A_T}T.$$

Так как $A_T<1$, то $T_p<T$, т. е. истинная температура тела всегда выше радиационной.

**2. Цветовая температура.** Для серых тел (или тел, близких к ним по свойствам) спектральная плотность энергетической светимости

$$R_{\lambda,T}=A_Tr_{\lambda,T},$$

где $A_T=\text{const}<1$. Следовательно, распределение энергии в спектре излучения серого тела такое же, как и в спектре черного тела, имеющего ту же температуру. Поэтому к серым телам применим закон Вина (см. (199.2)), т. е., зная длину волны $\lambda_{max}$, соответствующую максимальной спектральной плотности энергетической светимости $R_{\lambda,T}$ исследуемого тела, можно определить его температуру

$$T_ц=b/\lambda_{max},$$

которая называется цветовой температурой. Для серых тел цветовая температура

совпадает с истинной. Для тел, которые сильно отличаются от серых (например, обладающих селективным поглощением), понятие цветовой температуры теряет смысл. Таким способом определяется температура на поверхности Солнца ($T_{\text{ц}} \approx$ $\approx 6500$ К) и звезд.

**3. Яркостная температура** $T_{\text{я}}$ — это температура черного тела, при которой для определенной длины волны его спектральная плотность энергетической светимости равна спектральной плотности энергетической светимости исследуемого тела, т. е.

$$r_{\lambda,T_{\text{я}}} = R_{\lambda,T}, \qquad (201.1)$$

где $T$ — истинная температура тела. По закону Кирхгофа (см. (198.1)), для исследуемого тела при длине волны $\lambda$

$$R_{\lambda,T}/A_{\lambda,T} = r_{\lambda,T},$$

или, учитывая (201.1),

$$A_{\lambda,T} = r_{\lambda,T_{\text{я}}}/r_{\lambda,T}. \qquad (201.2)$$

Так как для нечерных тел $A < 1$, то $r_{\lambda,T_{\text{я}}} < r_{\lambda,T}$ и, следовательно, $T_{\text{я}} < T$, т. е. истинная температура тела всегда выше яркостной.

В качестве яркостного пирометра обычно используется **пирометр с исчезающей нитью.** Накал нити пирометра подбирается таким, чтобы выполнялось условие (201.1). В данном случае изображение нити пирометра становится неразличимым на фоне поверхности раскаленного тела, т. е. нить как бы «исчезает». Используя проградуированный по черному телу миллиамперметр, можно определить яркостную температуру.

Зная поглощательную способность $A_{\lambda,T}$ тела при той же длине волны, по яркостной температуре можно определить истинную. Переписав формулу Планка (200.3) в виде

$$r_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(kT\lambda)} - 1}$$

и учитывая это в (201.2), получим

$$A_{\lambda,T} = (e^{hc/(k\lambda T)} - 1)/(e^{hc/(k\lambda T_{\text{я}})} - 1),$$

т. е. при известных $A_{\lambda,T}$ и $\lambda$ можно определить истинную температуру исследуемого тела.

**4. Тепловые источники света.** Свечение раскаленных тел используется для создания источников света, первые из которых — лампы накаливания и дуговые лампы — были соотвественно изобретены русскими учеными А. Н. Лодыгиным в 1873 г. и П. Н. Яблочковым в 1876 г.

На первый взгляд кажется, что черные тела должны быть наилучшими тепловыми источниками света, так как их спектральная плотность энергетической светимости для любой длины волны больше спектральной плотности энергетической светимости нечерных тел, взятых при одинаковой температуре. Однако оказывается, что для некоторых тел (например, вольфрама), обладающих селективностью теплового излучения, доля энергии, приходящаяся на излучение в видимой области спектра, значительно больше, чем для черного тела, нагретого до той же температуры. Поэтому вольфрам, обладая еще и высокой температурой плавления, является наилучшим материалом для изготовления нитей ламп.

Температура вольфрамовой нити в вакуумных лампах не должна превышать 2450 К, поскольку при более высоких температурах происходит ее сильное распыление. Максимум излучения при этой температуре соответствует длине волны $\approx 1{,}1$ мкм, т. е. очень далек от максимума чувствительности человеческого глаза ($\approx 0{,}55$ мкм). Наполнение баллонов ламп инертными газами (например, смесью криптона и ксенона с добавлением азота) при давлении $\approx 50$ кПа позволяет увеличить температуру нити до 3000 К, что приводит к улучшению спектрального состава излучения. Однако светоотдача при этом не увеличивается, так как возникают дополнительные потери энергии из-за теплообмена между нитью и газом вследствие теплопроводности и конвекции. Для уменьшения потерь энергии за счет теплообмена и повышения светоотдачи газонаполненных ламп нить изготовляют в виде спирали, отдельные витки которой обогревают друг друга. При высокой температуре вокруг этой спирали образуется неподвижный слой газа и исключается теплообмен вследствие конвекции. Энергетический

к. п. д. ламп накаливания в настоящее время не превосходит 5 %.

## § 202. Виды фотоэлектрического эффекта. Законы внешнего фотоэффекта

Гипотеза Планка, блестяще решившая задачу теплового излучения черного тела, получила подтверждение и дальнейшее развитие при объяснении фотоэффекта — явления, открытие и исследование которого сыграло важную роль в становлении квантовой теории. Различают фотоэффект внешний, внутренний и вентильный. **Внешним фотоэлектрическим эффектом (фотоэффектом)** называется испускание электронов веществом под действием электромагнитного излучения. Внешний фотоэффект наблюдается в твердых телах (металлах, полупроводниках, диэлектриках), а также в газах на отдельных атомах и молекулах (фотоионизация). Фотоэффект обнаружен (1887 г.) Г. Герцем, наблюдавшим усиление процесса разряда при облучении искрового промежутка ультрафиолетовым излучением.

Первые фундаментальные исследования фотоэффекта выполнены русским ученым А. Г. Столетовым. Принципиальная схема для исследования фотоэффекта приведена на рис. 289. Два электрода (катод $K$ из исследуемого металла и анод $A$ — в схеме Столетова применялась металлическая сетка) в вакуумной трубке подключены к батарее так, что с помощью потенциометра $R$ можно изменять не только значение, но и знак подаваемого на них напряжения. Ток, возникающий при освещении катода монохроматическим светом (через кварцевое окошко), измеряется включенным в цепь миллиамперметром. Облучая катод светом различных длин волн, Столетов установил следующие закономерности, не утратившие своего значения до нашего времени: 1) наиболее эффективное действие оказывает ультрафиолетовое излучение; 2) под действием света вещество теряет только отрицательные заряды; 3) сила тока, возникающего под действием света, прямо пропорциональна его интенсивности.

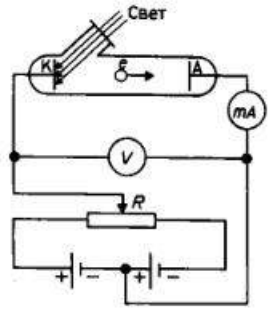


Рис. 289

Дж. Дж. Томсон в 1898 г. измерил удельный заряд испускаемых под действием света частиц (по отклонению в электрическом и магнитном полях). Эти измерения показали, что под действием света вырываются электроны.

**Внутренний фотоэффект** — это вызванные электромагнитным излучением переходы электронов внутри полупроводника или диэлектрика из связанных состояний в свободные без вылета наружу. В результате концентрация носителей тока внутри тела увеличивается, что приводит к возникновению **фотопроводимости** (повышению электропроводности полупроводника или диэлектрика при его освещении) или к возникновению э. д. с.

**Вентильный фотоэффект** — возникновение э. д. с. (фото-э. д. с.) при освещении контакта двух разных полупроводников или полупроводника и металла (при отсутствии внешнего электрического поля). Вентильный фотоэффект открывает, таким образом, пути для прямого преобразования солнечной энергии в электрическую.

На рис. 289 приведена экспериментальная установка для исследования **вольт-амперной характеристики фотоэффекта** — зависимости фототока $I$, образуемого потоком электронов, испускаемых катодом под действием света, от напряжения $U$ между электродами. Такая зависимость, соответствующая двум различным освещенностям $E_e$ катода (частота света в обоих случаях одинакова), приведена на рис. 290. По мере увеличения $U$ фототок постепенно возрастает, т. е. все большее число фотоэлектронов достигает анода. Пологий характер кривых показывает, что

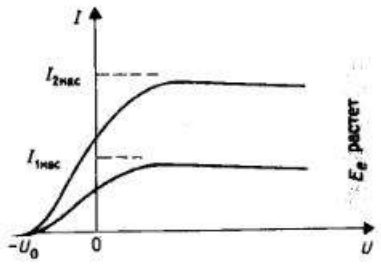



Рис. 290

электроны вылетают из катода с различными скоростями. Максимальное значение тока $I_{нас}$ — **фототок насыщения** — определяется таким значением $U$, при котором все электроны, испускаемые катодом, достигают анода:

$$I_{нас}=en,$$

где $n$ — число электронов, испускаемых катодом в 1 с.

Из вольт-амперной характеристики следует, что при $U=0$ фототок не исчезает. Следовательно, электроны, выбитые светом из катода, обладают некоторой начальной скоростью $v$, а значит, и отличной от нуля кинетической энергией и могут достигнуть анода без внешнего поля. Для того чтобы фототок стал равным нулю, необходимо приложить **задерживающее напряжение** $U_0$. При $U=U_0$ ни один из электронов, даже обладающий при вылете из катода максимальной скоростью $v_{max}$, не может преодолеть задерживающего поля и достигнуть анода. Следовательно,

$$mv_{max}^2/2=eU_0, \qquad (202.1)$$

т. е., измерив задерживающее напряжение $U_0$, можно определить максимальные значения скорости и кинетической энергии фотоэлектронов.

При изучении вольт-амперных характеристик разнообразных материалов (важна чистота поверхности, поэтому измерения проводятся в вакууме и на свежих поверхностях) при различных частотах падающего на катод излучения и различных энергетических освещенностях катода и обобщения полученных данных были установлены следующие **три закона внешнего фотоэффекта.**

I. **Закон Столетова:** при фиксированной частоте падающего света число фотоэлектронов, вырываемых из катода в единицу времени, пропорционально интенсивности света (сила фототока насыщения пропорциональна энергетической освещенности $E_e$ катода).

II. Максимальная начальная скорость (максимальная начальная кинетическая энергия) фотоэлектронов не зависит от интенсивности падающего света, а определяется только его частотой $\nu$, а именно линейно возрастает с увеличением частоты.

III. Для каждого вещества существует «красная граница» фотоэффекта, т. е. минимальная частота $\nu_0$ света (зависящая от химической природы вещества и состояния его поверхности), при которой свет любой интенсивности фотоэффекта не вызывает.

Качественное объяснение фотоэффекта с волновой точки зрения на первый взгляд не должно было бы представлять трудностей. Действительно, под действием поля световой волны в металле возникают вынужденные колебания электронов, амплитуда которых (например, при резонансе) может быть достаточной для того, чтобы электроны покинули металл; тогда и наблюдается фотоэффект. Кинетическая энергия, с которой электрон вырывается из металла, должна была бы зависеть от интенсивности падающего света, так как с увеличением последней электрону передавалась бы бо́льшая энергия. Однако этот вывод противоречит II закону фотоэффекта. Так как, по волновой теории, энергия, передаваемая электронам, пропорциональна интенсивности света, то свет любой частоты, но достаточно большой интенсивности должен был бы вырывать электроны из металла; иными словами, «красной границы» фотоэффекта не должно быть, что противоречит III закону фотоэффекта. Кроме того, волновая теория не смогла объяснить **безынерционность фотоэффекта,** установленную опытами. Таким образом, фотоэффект необъясним с точки зрения волновой теории света.

## § 203. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Экспериментальное подтверждение квантовых свойств света

А. Эйнштейн в 1905 г. показал, что явление фотоэффекта и его закономерности могут быть объяснены на основе предложенной им *квантовой теории фотоэффекта*. Согласно Эйнштейну, свет частотой $\nu$ не только *испускается*, как это предполагал Планк (см. § 200), но и *распространяется* в пространстве и *поглощается* веществом отдельными порциями (квантами), энергия которых $\varepsilon_0 = h\nu$. Таким образом, распространение света нужно рассматривать не как непрерывный волновой процесс, а как поток локализованных в пространстве дискретных световых квантов, движущихся со скоростью $c$ распространения света в вакууме. Эти кванты электромагнитного излучения получили название **фотонов**.

По Эйнштейну, каждый квант поглощается только одним электроном. Поэтому число вырванных фотоэлектронов должно быть пропорционально интенсивности света (I закон фотоэффекта). Безынерционность фотоэффекта объясняется тем, что передача энергии при столкновении фотона с электроном происходит почти мгновенно.

Энергия падающего фотона расходуется на совершение электроном работы выхода $A$ из металла (см. § 104) и на сообщение вылетевшему фотоэлектрону кинетической энергии $mv_{max}/2$. По закону сохранения энергии,

$$h\nu = A + mv_{max}^2/2. \qquad (203.1)$$

Уравнение (203.1) называется **уравнением Эйнштейна для внешнего фотоэффекта.**

Уравнение Эйнштейна позволяет объяснить II и III законы фотоэффекта. Из (203.1) непосредственно следует, что максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона линейно возрастает с увеличением частоты падающего излучения и не зависит от его интенсивности (числа фотонов), так как ни $A$, ни $\nu$ от интенсивности света не зависят (II закон фотоэффекта). Так как с уменьшением частоты света кинетическая энергия фотоэлектронов уменьшается (для данного металла $A = \text{const}$), то при некоторой достаточно малой частоте $\nu = \nu_0$ кинетическая энергия фотоэлектронов станет равной нулю и фотоэффект прекратится (III закон фотоэффекта). Согласно изложенному, из (203.1) получим, что

$$\nu_0 = A/h \qquad (203.2)$$

и есть «красная граница» фотоэффекта для данного металла. Она зависит лишь от работы выхода электрона, т. е. от химической природы вещества и состояния его поверхности.

Выражение (203.1), используя (202.1) и (203.2), можно записать в виде

$$eU_0 = h(\nu - \nu_0).$$

Уравнение Эйнштейна было подтверждено опытами Милликена. В его приборе (1916 г.) поверхность исследуемого металла подвергалась очистке в вакууме (фотоэффект и работа выхода сильно зависят от состояния поверхности). Исследовалась зависимость максимальной кинетической энергии фотоэлектронов (изменялось задерживающее напряжение $U_0$ (см. (202.1)) от частоты $\nu$ и определялась постоянная Планка. В 1926 г. советские физики П. И. Лукирский (1894—1954) и С. С. Прилежаев для исследования фотоэффекта применили **метод вакуумного сферического конденсатора.** Анодом в их установке служили посеребренные стенки стеклянного сферического баллона, а катодом — шарик ($R \approx 1{,}5$ см) из исследуемого металла, помещенный в центр сферы. В остальном схема принципиально не отличается от описанной на рис. 289. Такая форма электродов позволила увеличить наклон вольт-амперных характеристик и тем самым более точно определять задерживающее напряжение $U_0$ (а следовательно, и $h$). Значение $h$, полученное из данных опытов, согласуется со значениями, найденными другими методами (по излучению черного тела (§ 200) и по коротковолновой границе сплошного рентге-

новского спектра (§ 229)). Все это является доказательством правильности уравнения Эйнштейна, а вместе с тем и его квантовой теории фотоэффекта.

Если интенсивность света очень большая (лазерные пучки; см. § 233), то возможен **многофотонный (нелинейный) фотоэффект,** при котором электрон, испускаемый металлом, может одновременно получить энергию не от одного, а от $N$ фотонов ($N=2\div7$). Уравнение Эйнштейна для многофотонного фотоэффекта

$$Nh\nu = A + mv_{max}^2/2.$$

В опытах с фокусируемыми лазерными пучками плотность фотонов очень большая, поэтому электрон может поглотить не один, а несколько фотонов. При этом электрон может приобрести энергию, необходимую для выхода из вещества, даже под действием света с частотой, меньшей «красной границы» — порога однофотонного фотоэффекта. В результате «красная граница» смещается в сторону более длинных волн.

Идея Эйнштейна о распространении света в виде потока отдельных фотонов и квантовом характере взаимодействия электромагнитного излучения с веществом подтверждена в 1922 г. опытами А. Ф. Иоффе и Н. И. Добронравова. В электрическом поле плоского конденсатора уравновешивалась заряженная пылинка из висмута. Нижняя обкладка конденсатора изготовлялась из тончайшей алюминиевой фольги, которая являлась одновременно анодом миниатюрной рентгеновской трубки. Анод бомбардировался ускоренными до 12 кВ фотоэлектронами, испускаемыми катодом под действием ультрафиолетового излучения. Освещенность катода подбиралась столь слабой, чтобы из него в 1 с вырывалось лишь 1000 фотоэлектронов, а следовательно, и число рентгеновских импульсов было 1000 в 1 с. Опыт показал, что в среднем через каждые 30 мин уравновешенная пылинка выходила из равновесия, т. е. рентгеновское излучение освобождало из нее фотоэлектрон, приобретающий энергию согласно уравнению Эйнштейна (203.1).

Если бы рентгеновское излучение распространялось в виде сферических волн, а не отдельных фотонов, то каждый рентгеновский импульс отдавал бы пылинке очень малую часть своей энергии, которая распределялась бы, в свою очередь, между огромным числом электронов, содержащихся в пылинке. Поэтому при таком механизме трудно вообразить, что один из электронов за такое короткое время, как 30 мин, может накопить энергию, достаточную для преодоления работы выхода из пылинки. Напротив, с точки зрения корпускулярной теории это возможно. Так, если рентгеновское излучение распространяется в виде потока дискретных фотонов, то электрон выбивается из пылинки только тогда, когда в нее попадает фотон. Элементарный расчет для выбранных условий дает, что в среднем в пылинку попадает один фотон из $1{,}8\cdot10^6$. Так как в 1 с вылетает 1000 фотонов, то в среднем в пылинку будет попадать один фотон в 30 мин, что согласуется с результатами опыта.

Если свет представляет собой поток фотонов, то каждый фотон, попадая в регистрирующий прибор (глаз, фотоэлемент), должен вызывать то или иное действие независимо от других фотонов. Это же означает, что при регистрации *слабых* световых потоков должны наблюдаться *флуктуации* их интенсивности. Эти флуктуации слабых потоков *видимого света* действительно наблюдались С. И. Вавиловым. Наблюдения проводились визуально. Глаз, адаптированный к темноте, обладает довольно резким порогом зрительного ощущения, т. е. воспринимает свет, интенсивность которого не меньше некоторого порога. Для света с $\lambda=525$ нм порог зрительного ощущения соответствует у разных людей примерно 100—400 фотонам, падающим на сетчатку за 1 с. С. И. Вавилов наблюдал периодически повторяющиеся вспышки света одинаковой длительности. С уменьшением светового потока некоторые вспышки уже не воспринимались глазом, причем чем слабее был световой поток, тем больше было пропусков вспышек. Это объясняется флуктуациями интенсивности света, т. е. число фотонов

оказывалось по случайным причинам меньше порогового значения. Таким образом, опыт Вавилова явился наглядным подтверждением квантовых свойств света.

## § 204. Применение фотоэффекта

На явлении фотоэффекта основано действие фотоэлектронных приборов, получивших разнообразное применение в различных областях науки и техники. В настоящее время практически невозможно указать отрасли производства, где бы не использовались **фотоэлементы** — приемники излучения, работающие на основе фотоэффекта и преобразующие энергию излучения в электрическую.

Простейшим фотоэлементом с внешним фотоэффектом является **вакуумный фотоэлемент.** Он представляет собой откачанный стеклянный баллон, внутренняя поверхность которого (за исключением окошка для доступа излучения) покрыта фоточувствительным слоем, служащим фотокатодом. В качестве анода обычно используется кольцо или сетка, помещаемая в центре баллона. Фотоэлемент включается в цепь батареи, э. д. с. которой выбирается такой, чтобы обеспечить фототок насыщения. Выбор материала фотокатода определяется рабочей областью спектра: для регистрации видимого света и инфракрасного излучения используется кислородно-цезиевый катод, для регистрации ультрафиолетового излучения и коротковолновой части видимого света — сурьмяно-цезиевый. Вакуумные фотоэлементы безынерционны, и для них наблюдается строгая пропорциональность фототока интенсивности излучения. Эти свойства позволяют использовать вакуумные фотоэлементы в качестве фотометрических приборов, например фотоэлектрический экспонометр, люксметр (измеритель освещенности) и т. д.

Для увеличения интегральной чувствительности вакуумных фотоэлементов (фототок насыщения, приходящийся на 1 лм светового потока) баллон заполняется разреженным инертным газом (Ar или Ne при давлении $\approx 1{,}3 \div 13$ Па). Фототок в таком элементе, называемом **газонаполненным**, усиливается вследствие ударной ионизации молекул газа фотоэлектронами. Интегральная чувствительность газонаполненных фотоэлементов ($\approx 1$ мА/лм) гораздо выше, чем для вакуумных (20—150 мкА/лм), но они обладают по сравнению с последними большей инерционностью (менее строгой пропорциональностью фототока интенсивности излучения), что приводит к ограничению области их применения.

Для усиления фототока применяются уже рассмотренные выше (см. рис. 155) **фотоэлектронные умножители,** в которых наряду с фотоэффектом используется явление вторичной электронной эмиссии (см. § 105). Размеры фотоэлектронных умножителей немного превышают размеры обычной радиолампы, общий коэффициент усиления составляет $\approx 10^7$ (при напряжении питания 1—1,5 кВ), а их интегральная чувствительность может достигать 10 А/лм. Поэтому фотоэлектронные умножители начинают вытеснять фотоэлементы, правда, их применение связано с использованием высоковольтных стабилизированных источников питания, что несколько неудобно.

Фотоэлементы с внутренним фотоэффектом, называемые **полупроводниковыми фотоэлементами** или **фотосопротивлениями (фоторезисторами),** обладают гораздо большей интегральной чувствительностью, чем вакуумные. Для их изготовления используются PbS, CdS, PbSe и некоторые другие полупроводники. Если фотокатоды вакуумных фотоэлементов и фотоэлектронных умножителей имеют «красную границу» фотоэффекта не выше 1,1 мкм, то применение фотосопротивлений позволяет производить измерения в далекой инфракрасной области спектра ($3 \div 4$ мкм), а также в областях рентгеновского и гамма-излучений. Кроме того, они малогабаритны и имеют низкое напряжение питания. Недостаток фотосопротивлений — их заметная инерционность, поэтому они непригодны для регистрации быстропеременных световых потоков.

Фотоэлементы с вентильным фотоэффектом, называемые **вентильными фотоэлементами (фотоэлементами с запираю-**

**щим слоем)**, обладая, подобно элементам с внешним фотоэффектом, строгой пропорциональностью фототока интенсивности излучения, имеют бо́льшую по сравнению с ними интегральную чувствительность (примерно 2—30 мА/лм) и не нуждаются во внешнем источнике э. д. с. К числу вентильных фотоэлементов относятся германиевые, кремниевые, селеновые, купроксные, сернисто-серебряные и др.

Кремниевые и другие вентильные фотоэлементы применяются для создания солнечных батарей, непосредственно преобразующих световую энергию в электрическую. Эти батареи уже в течение многих лет работают на советских космических спутниках и кораблях. К. п. д. этих батарей составляет $\approx 10\ \%$ и, как показывают теоретические расчеты, может быть доведен до $\approx 22\ \%$, что открывает широкие перспективы их использования в качестве источников электроэнергии для бытовых и производственных нужд.

Рассмотренные виды фотоэффекта используются также в производстве для контроля, управления и автоматизации различных процессов, в военной технике для сигнализации и локации невидимым излучением, в технике звукового кино, в различных системах связи и т. д.

## § 205. Масса и импульс фотона. Давление света

Согласно гипотезе световых квантов Эйнштейна, свет испускается, поглощается и распространяется дискретными порциями (квантами), названными **фотонами**. Энергия фотона $\varepsilon_0 = h\nu$. Его масса находится из закона взаимосвязи массы и энергии (см. (40.8)):

$$m_\gamma = h\nu/c^2. \qquad (205.1)$$

Фотон — элементарная частица, которая всегда (в любой среде!) движется со скоростью света $c$ и имеет массу покоя, равную нулю. Следовательно, масса фотона отличается от массы таких элементарных частиц, как электрон, протон и нейтрон, которые обладают отличной от нуля массой покоя и могут находиться в состоянии покоя.

Импульс фотона $p_\gamma$ получим, если в общей формуле (40.7) теории относительности положим массу покоя фотона $m_{0\gamma} = 0$:

$$p_\gamma = \varepsilon_0/c = h\nu/c. \qquad (205.2)$$

Из приведенных рассуждений следует, что фотон, как и любая другая частица, характеризуется энергией, массой и импульсом. Выражения (205.1), (205.2) и (200.2) связывают *корпускулярные* характеристики фотона — массу, импульс и энергию — с *волновой* характеристикой света — его частотой $\nu$.

Если фотоны обладают импульсом, то свет, падающий на тело, должен оказывать на него давление. С точки зрения квантовой теории, давление света на поверхность обусловлено тем, что каждый фотон при соударении с поверхностью передает ей свой импульс.

Рассчитаем с точки зрения квантовой теории световое давление, оказываемое на поверхность тела потоком монохроматического излучения (частота $\nu$), падающего перпендикулярно поверхности. Если в единицу времени на единицу площади поверхности тела падает $N$ фотонов, то при коэффициенте отражения $\rho$ света от поверхности тела $\rho N$ фотонов отразится, а $(1-\rho)N$ — поглотится. Каждый поглощенный фотон передает поверхности импульс $p_\gamma = h\nu/c$, а каждый отраженный — $2p_\gamma = 2h\nu/c$ (при отражении импульс фотона изменяется на $-p_\gamma$). Давление света на поверхность равно импульсу, который передают поверхности в 1 с $N$ фотонов:

$$p = \frac{2h\nu}{c}\rho N + \frac{h\nu}{c}(1-\rho)N = (1+\rho)\frac{h\nu}{c}N.$$

$Nh\nu = E_e$ есть энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени, т. е. энергетическая освещенность поверхности (см. § 168), а $E_e/c = w$ — объемная плотность энергии излучения. Поэтому давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность,

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = w(1+\rho). \qquad (205.3)$$

Формула (205.3), выведенная на основе квантовых представлений, совпадает

с выражением, получаемым из электромагнитной (волновой) теории Максвелла (см. § 163). Таким образом, давление света одинаково успешно объясняется и волновой, и квантовой теорией. Как уже говорилось (см. § 163), экспериментальное доказательство существования светового давления на твердые тела и газы дано в опытах П. Н. Лебедева, сыгравших в свое время большую роль в утверждении теории Максвелла. Лебедев использовал легкий подвес на тонкой нити, по краям которого прикреплены легкие крылышки, одни из которых зачернены, а поверхности других зеркальные. Для исключения конвекции и радиометрического эффекта (см. § 49) использовалась подвижная система зеркал, позволяющая направлять свет на обе поверхности крылышек, подвес помещался в откачанный баллон, крылышки подбирались очень тонкими (чтобы температура обеих поверхностей была одинакова). Значение светового давления на крылышки определялось по углу закручивания нити подвеса и совпадало с теоретически рассчитанным. В частности, оказалось, что давление света на зеркальную поверхность вдвое больше, чем на зачерненную (см. (205.3)).

## § 206. Эффект Комптона и его элементарная теория

Наиболее полно корпускулярные свойства света проявляются в эффекте Комптона. Американский физик А. Комптон (1892—1962), исследуя в 1923 г. рассеяние монохроматического рентгеновского излучения веществами с легкими атомами (парафин, бор), обнаружил, что в составе рассеянного излучения наряду с излучением первоначальной длины волны наблюдается также излучение более длинных волн. Опыты показали, что разность $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ не зависит от длины волны $\lambda$ падающего излучения и природы рассеивающего вещества, а определяется только величиной угла рассеяния $\theta$:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_C \sin^2(\theta/2), \quad (206.1)$$

где $\lambda'$ — длина волны рассеянного излучения, $\lambda_C$ — **комптоновская длина волны** (при рассеянии фотона на электроне $\lambda_C = 2{,}426$ пм).

**Эффектом Комптона** называется упругое рассеяние коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и $\gamma$-излучений) на свободных (или слабосвязанных) электронах вещества, сопровождающееся увеличением длины волны. Этот эффект не укладывается в рамки волновой теории, согласно которой длина волны при рассеянии изменяться не должна: под действием периодического поля световой волны электрон колеблется с частотой поля и поэтому излучает рассеянные волны той же частоты.

Объяснение эффекта Комптона дано на основе квантовых представлений о природе света. Если считать, как это делает квантовая теория, что излучение имеет корпускулярную природу, т. е. представляет собой поток фотонов, то эффект Комптона — результат упругого столкновения рентгеновских фотонов со свободными электронами вещества (для легких атомов электроны слабо связаны с ядрами атомов, поэтому их можно считать свободными). В процессе этого столкновения фотон передает электрону часть своих энергии и импульса в соответствии с законами их сохранения.

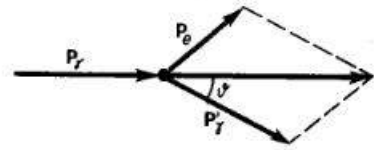



Рис. 291

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц (рис. 291) — налетающего фотона, обладающего импульсом $p_\gamma = h\nu/c$ и энергией $\varepsilon_\gamma = h\nu$, с покоящимся свободным электроном (энергия покоя $W_0 = m_0c^2$; $m_0$ — масса покоя электрона). Фотон, столкнувшись с электроном, передает ему часть своей энергии и импульса и изменяет направление движения (рассеивается). Уменьшение энергии фотона означает увеличение длины волны рассеянного излучения. Пусть импульс и энергия рассеянного фотона равны $p'_\gamma = h\nu'/c$ и $\varepsilon'_\gamma = h\nu'$. Элек-

трон, ранее покоившийся, приобретает импульс $p_e = mv$, энергию $W = mc^2$ и приходит в движение — испытывает отдачу. При каждом таком столкновении выполняются законы сохранения энергии и импульса.

Согласно закону сохранения энергии,

$$W_0 + \varepsilon_\gamma = W + \varepsilon'_\gamma, \qquad (206.2)$$

а согласно закону сохранения импульса,

$$\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}'_\gamma. \qquad (206.3)$$

Подставив в выражении (206.2) значения величин и представив (206.3) в соответствии с рис. 291, получим

$$m_0c^2 + h\nu = mc^2 + h\nu', \qquad (206.4)$$

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2}{c^2}\nu\nu'\cos\theta. \qquad (206.5)$$

Масса электрона отдачи связана с его скоростью $v$ соотношением $m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$ (см. (39.1)). Возведя уравнение (206.4) в квадрат, а затем вычитая из него (206.5) и учитывая (39.1), получим

$$m_0c^2(\nu - \nu') = h\nu\nu'(1 - \cos\theta).$$

Поскольку $\nu = c/\lambda$, $\nu' = c/\lambda'$ и $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, получим

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}. \qquad (206.6)$$

Выражение (206.6) есть не что иное, как полученная экспериментально Комптоном формула (206.1). Подстановка в нее значений $h$, $m_0$ и $c$ дает комптоновскую длину волны электрона $\lambda_C = h/(m_0c) = 2{,}426$ пм.

Наличие в составе рассеянного излучения «несмещенной» линии (излучения первоначальной длины волны) можно объяснить следующим образом. При рассмотрении механизма рассеяния предполагалось, что фотон соударяется лишь со свободным электроном. Однако если электрон сильно связан с атомом, как это имеет место для внутренних электронов (особенно в тяжелых атомах), то фотон обменивается энергией и импульсом с атомом в целом. Так как масса атома по сравнению с массой электрона очень велика, то атому передается лишь ничтожная часть энергии фотона. Поэтому в данном случае длина волны $\lambda'$ рассеянного излучения практически не будет отличаться от длины волны $\lambda$ падающего излучения.

Из приведенных рассуждений следует также, что эффект Комптона не может наблюдаться в видимой области спектра, поскольку энергия фотона видимого света сравнима с энергией связи электрона с атомом, при этом даже внешний электрон нельзя считать свободным.

Эффект Комптона наблюдается не только на электронах, но и на других заряженных частицах, например протонах, однако из-за большой массы протона его отдача «просматривается» лишь при рассеянии фотонов очень высоких энергий.

Как эффект Комптона, так и фотоэффект на основе квантовых представлений обусловлены взаимодействием фотонов с электронами. В первом случае фотон рассеивается, во втором — поглощается. Рассеяние происходит при взаимодействии фотона со свободным электроном, а фотоэффект — со связанными электронами. Можно показать, что при столкновении фотона со свободным электроном не может произойти поглощения фотона, так как это находится в противоречии с законами сохранения импульса и энергии. Поэтому при взаимодействии фотонов со свободными электронами может наблюдаться только их рассеяние, т. е. эффект Комптона.

## § 207. Диалектическое единство корпускулярных и волновых свойств электромагнитного излучения

Рассмотренные в этой главе явления — излучение черного тела, фотоэффект, эффект Комптона — служат доказательством квантовых (корпускулярных) представлений о свете как о потоке фотонов. С другой стороны, такие явления, как ин-

терференция, дифракция и поляризация света, убедительно подтверждают волновую (электромагнитную) природу света. Наконец, давление и преломление света объясняются как волновой, так и квантовой теориями. Таким образом, электромагнитное излучение обнаруживает удивительное единство, казалось бы, взаимоисключающих свойств — непрерывных (волны) и дискретных (фотоны), которые взаимно дополняют друг друга.

Основные уравнения (см. § 205), связывающие корпускулярные свойства электромагнитного излучения (энергия и импульс фотона) с волновыми свойствами (частота или длина волны):

$$\varepsilon_\gamma = h\nu, \quad p_\gamma = h\nu/c = h/\lambda.$$

Более детальное рассмотрение оптических явлений приводит к выводу, что свойства непрерывности, характерные для электромагнитного поля световой волны, не следует противопоставлять свойствам дискретности, характерным для фотонов. Свет, обладая *одновременно* корпускулярными и волновыми свойствами, обнаруживает определенные закономерности в их проявлении. Так, волновые свойства света проявляются в закономерностях его распространения, интерференции, дифракции, поляризации, а корпускулярные — в процессах взаимодействия света с веществом. Чем больше длина волны, тем меньше энергия и импульс фотона и тем труднее обнаруживаются квантовые свойства света (с этим связано, например, существование «красной границы» фотоэффекта). Наоборот, чем меньше длина волны, тем больше энергия и импульс фотона и тем труднее обнаруживаются волновые свойства света (например, волновые свойства (дифракция) рентгеновского излучения обнаружены лишь после применения в качестве дифракционной решетки кристаллов).

Взаимосвязь между двойственными корпускулярно-волновыми свойствами света можно объяснить, если использовать, как это делает квантовая оптика, *статистический подход* к рассмотрению закономерностей распространения света. Например, дифракция света на щели состоит в том, что при прохождении света через щель происходит *перераспределение* фотонов в пространстве. Так как вероятность попадания фотонов в различные точки экрана неодинакова, то и возникает дифракционная картина. Освещенность экрана пропорциональна вероятности попадания фотонов на единицу площади экрана. С другой стороны, по волновой теории, освещенность пропорциональна квадрату амплитуды световой волны в той же точке экрана. Следовательно, *квадрат амплитуды световой волны в данной точке пространства является мерой вероятности попадания фотонов в данную точку.*

## Контрольные вопросы

- На фарфоровой тарелке на светлом фоне имеется темный рисунок. Почему, если ее быстро вынуть из печи, где она нагревалась до высокой температуры, и рассматривать в темноте, наблюдается светлый рисунок на темном фоне?
- Чем отличается серое тело от черного?
- В чем заключается физический смысл универсальной функции Кирхгофа?
- Как и во сколько раз изменится энергетическая светимость черного тела, если его термодинамическая температура уменьшится вдвое?
- Нарисуйте и сопоставьте кривые $r_{\nu,T}$ и $r_{\lambda,T}$.
- Как сместится максимум спектральной плотности энергетической светимости $r_{\nu,T}$ черного тела с повышением температуры?
- Используя формулу Планка, найдите постоянную Стефана — Больцмана.
- При каких условиях из формулы Планка получаются закон Вина и формула Рэлея — Джинса?
- Может ли золотая пластинка служить фотосопротивлением?
- Как при заданной частоте света изменится фототок насыщения с уменьшением освещенности катода?
- Как из опытов по фотоэффекту определяется постоянная Планка?

- Как с помощью уравнения Эйнштейна объяснить I и II законы фотоэффекта?
- Нарисуйте и объясните вольт-амперные характеристики, соответствующие двум различным освещенностям катода (при заданной частоте света) и двум различным частотам (при заданной освещенности).
- Чему равно отношение давлений света на зеркальную и зачерненную поверхности?
- В чем отличие характера взаимодействия фотона и электрона при фотоэффекте и эффекте Комптона?
- В чем заключается диалектическое единство корпускулярных и волновых свойств электромагнитного излучения?

## Задачи

**26.1.** Черное тело нагрели от температуры $T_1 = 500$ К до $T_2 = 2000$ К. Определить: 1) во сколько раз увеличилась его энергетическая светимость; 2) как изменилась длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости. [1) Б 256 раз; 2) уменьшилась на 4,35 мкм]

**26.2.** Черное тело находится при температуре $T_1 = 2900$ К. При его остывании длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 9$ мкм. Определить температуру $T_2$, до которой тело охладилось. [290 К]

**26.3.** Определить работу выхода $A$ электронов из вольфрама, если красная граница фотоэффекта для него $\lambda_0 = 275$ нм. [4,52 эВ]

**26.4.** Определить постоянную Планка, если известно, что для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением некоторого металла светом с частотой $\nu_1 = 2{,}2 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, необходимо приложить задерживающее напряжение $U_{01} = 6{,}6$ В, а светом с частотой $\nu_2 = 4{,}6 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ — задерживающее напряжение $U_{02} = 16{,}5$ В. [$6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с]

**26.5.** Определить в электрон-вольтах энергию фотона, при которой его масса равна массе покоя электрона. [0,51 МэВ]

**26.6.** Давление монохроматического света с длиной волны 600 нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,1 мкПа. Определить число фотонов, падающих на поверхность площадью 10 см$^2$ за 1 с. [$9 \cdot 10^{16}$]

**26.7** Фотон с длиной волны 100 пм рассеялся под углом 180° на свободном электроне. Определить в электрон-вольтах кинетическую энергию электрона отдачи. [580 эВ]



# Элементы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел

## Глава 27
## Теория атома водорода по Бору

### § 208. Модели атома Томсона и Резерфорда

Представление об атомах как неделимых мельчайших частицах вещества («атомос» — неразложимый) возникло еще в античные времена (Демокрит, Эпикур, Лукреций). В средние века, во времена безграничного господства церкви, учение об атомах, будучи материалистическим, естественно, не могло получить признания, а тем более дальнейшего развития. К началу XVIII в. атомистическая теория приобретает все большую популярность, так как к этому времени в работах А. Лавуазье (1743—1794, французский химик), М. В. Ломоносова и Д. Дальтона была доказана реальность существования атомов. Однако в это время вопрос о внутреннем строении атомов даже не возникал, так как атомы по-прежнему считались неделимыми.

Большую роль в развитии атомистической теории сыграл Д. И. Менделеев, разработавший в 1869 г. Периодическую систему элементов, в которой впервые на научной основе был поставлен вопрос о единой природе атомов. Во второй половине XIX в. экспериментально было доказано, что электрон является одной из основных составных частей любого вещества. Эти выводы, а также многочисленные экспериментальные данные привели к тому, что в начале XX в. серьезно встал вопрос о строении атома.

Первая попытка создания на основе накопленных экспериментальных данных модели атома принадлежит Дж. Дж. Томсону (1903). Согласно этой модели, атом представляет собой непрерывно заряженный положительным зарядом шар радиусом порядка $10^{-10}$ м, внутри которого около своих положений равновесия колеблются электроны; суммарный отрицательный заряд электронов равен положительному заряду шара, поэтому атом в целом нейтрален. Через несколько лет было доказано, что представление о непрерывно распределенном внутри атома положительном заряде ошибочно.

В развитии представлений о строении атома велико значение опытов английского физика Э. Резерфорда (1871—1937) по рассеянию $\alpha$-частиц в веществе. Альфа-частицы возникают при радиоактивных превращениях; они являются положительно заряженными частицами с зарядом $2e$ и массой, примерно в 7300 раз большей массы электрона. Пучки $\alpha$-частиц обладают высокой монохроматичностью (для данного превращения имеют практически одну и ту же скорость (порядка $10^7$ м/с)).

Резерфорд, исследуя прохождение $\alpha$-частиц в веществе (через золотую фольгу толщиной примерно 1 мкм), показал, что основная их часть испытывает незначительные отклонения, но некоторые $\alpha$-частицы (примерно одна из 20 000) резко отклоняются от первоначального направления (углы отклонения достигали даже 180°). Так как электроны не могут существенно изменить движение столь тяжелых и быстрых частиц, как $\alpha$-частицы, то Резерфордом был сделан вывод, что

значительное отклонение α-частиц обусловлено их взаимодействием с положительным зарядом большой массы. Однако значительное отклонение испытывают лишь немногие α-частицы; следовательно, лишь некоторые из них проходят вблизи данного положительного заряда. Это, в свою очередь, означает, что положительный заряд атома сосредоточен в объеме, очень малом по сравнению с объемом атома.

На основании своих исследований Резерфорд в 1911 г. предложил **ядерную (планетарную) модель атома**. Согласно этой модели, вокруг положительного ядра, имеющего заряд $Ze$ ($Z$ — порядковый номер элемента в системе Менделеева, $e$ — элементарный заряд), размер $10^{-15}$—$10^{-14}$ м и массу, практически равную массе атома, в области с линейными размерами порядка $10^{-10}$ м по замкнутым орбитам движутся электроны, образуя электронную оболочку атома. Так как атомы нейтральны, то заряд ядра равен суммарному заряду электронов, т. е. вокруг ядра должно вращаться $Z$ электронов.

Для простоты предположим, что электрон движется вокруг ядра по круговой орбите радиуса $r$. При этом кулоновская сила взаимодействия между ядром и электроном сообщает электрону центростремительное ускорение. Второй закон Ньютона для электрона, движущегося по окружности под действием кулоновской силы, имеет вид

$$\frac{Zee}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{m_e v^2}{r}, \qquad (208.1)$$

где $m_e$ и $v$ — масса и скорость электрона на орбите радиуса $r$, $\varepsilon_0$ — электрическая постоянная.

Уравнение (208.1) содержит два неизвестных: $r$ и $v$. Следовательно, существует бесчисленное множество значений радиуса и соответствующих ему значений скорости (а значит, и энергии), удовлетворяющих этому уравнению. Поэтому величины $r$, $v$ (следовательно, и $E$) могут меняться непрерывно, т. е. может испускаться любая, а не вполне определенная порция энергии. Тогда спектры атомов должны быть сплошными. В действительности же опыт показывает, что атомы имеют линейчатый спектр. Из выражения (208.1) следует, что при $r\approx\approx 10^{-10}$ м скорость движения электронов $v\approx 10^6$ м/с, а ускорение $v^2/r=10^{22}$ м/с$^2$. Согласно электродинамике, ускоренно движущиеся электроны должны излучать электромагнитные волны и вследствие этого непрерывно терять энергию. В результате электроны будут приближаться к ядру и в конце концов упадут на него. Таким образом, атом Резерфорда оказывается неустойчивой системой, что опять-таки противоречит действительности.

Попытки построить модель атома в рамках классической физики не привели к успеху: модель Томсона была опровергнута опытами Резерфорда, ядерная же модель оказалась неустойчивой электродинамически и противоречила опытным данным. Преодоление возникших трудностей потребовало создания качественно новой — квантовой — теории атома.

## § 209. Линейчатый спектр атома водорода

Исследования спектров излучения разреженных газов (т. е. спектров излучения отдельных атомов) показали, что каждому газу присущ вполне определенный линейчатый спектр, состоящий из отдельных спектральных линий или групп близко расположенных линий. Самым изученным является спектр наиболее простого атома — атома водорода.

Швейцарский ученый И. Бальмер (1825—1898) подобрал эмпирическую формулу, описывающую все известные в то время спектральные линии атома водорода в *видимой области спектра*:

$$\frac{1}{\lambda}=R'\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right) \quad (n=3,\ 4,\ 5,\ \ldots), \qquad (209.1)$$

где $R'=1{,}10\cdot 10^7$ м$^{-1}$ — **постоянная Ридберга** *. Так как $\nu=c/\lambda$, то формула

* И. Ридберг (1854—1919) — шведский ученый, специалист в области спектроскопии.

(209.1) может быть переписана для частот:

$$\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 3, 4, 5, \ldots), \tag{209.2}$$

где $R = R'c = 3{,}29 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$ также постоянная Ридберга.

Из выражений (209.1) и (209.2) вытекает, что спектральные линии, отличающиеся различными значениями $n$, образуют группу или серию линий, называемую **серией Бальмера**. С увеличением $n$ линии серии сближаются; значение $n = \infty$ определяет **границу серии**, к которой со стороны бо́льших частот примыкает сплошной спектр.

В дальнейшем (в начале XX в.) в спектре атома водорода было обнаружено еще несколько серий. В *ультрафиолетовой области спектра* находится **серия Лаймана**:

$$\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

В *инфракрасной области спектра* были также обнаружены:

**серия Пашена**

$$\nu = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 4, 5, 6, \ldots);$$

**серия Брэкета**

$$\nu = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 5, 6, 7, \ldots);$$

**серия Пфунда**

$$\nu = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 6, 7, 8, \ldots);$$

**серия Хэмфри**

$$\nu = R\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 7, 8, 9, \ldots).$$

Все приведенные выше серии в спектре атома водорода могут быть описаны одной формулой, называемой **обобщенной формулой Бальмера**:

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{209.3}$$

где $m$ имеет в каждой данной серии постоянное значение, $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (определяет серию), $n$ принимает целочисленные значения начиная с $m+1$ (определяет отдельные линии этой серии).

Исследование более сложных спектров — спектров паров щелочных металлов (например, Li, Na, K) — показало, что они представляются набором незакономерно расположенных линий. Ридбергу удалось разделить их на три серии, каждая из которых располагается подобно линиям бальмеровской серии.

Приведенные выше сериальные формулы подобраны эмпирически и долгое время не имели теоретического обоснования, хотя и были подтверждены экспериментально с очень большой точностью. Приведенный выше вид сериальных формул, удивительная повторяемость в них целых чисел, универсальность постоянной Ридберга свидетельствуют о глубоком физическом смысле найденных закономерностей, вскрыть который в рамках классической физики оказалось невозможным.

## § 210. Постулаты Бора

Первая попытка построить качественно новую — квантовую — теорию атома была предпринята в 1913 г. датским физиком Нильсом Бором (1885–1962). Он поставил перед собой цель связать в единое целое эмпирические закономерности линейчатых спектров, ядерную модель атома Резерфорда и квантовый характер излучения и поглощения света. В основу своей теории Бор положил два постулата.

**Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний):** в атоме существуют стационарные (не изменяющиеся со временем) состояния, в которых он не излучает энергии. Стационарным состояниям атома соответствуют стационарные орбиты, по которым движутся электроны. Движение электронов по стационарным орбитам не сопровождается излучением электромагнитных волн.

В стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь дискретные квантованные значения момента импульса, удовлетворяющие условию

$$m_e v r_n = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{210.1}$$

где $m_e$ — масса электрона, $v$ — его скорость по $n$-й орбите радиуса $r_n$, $\hbar = h/(2\pi)$.

**Второй постулат Бора (правило частот):** при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую излучается (поглощается) один фотон с энергией

$$h\nu = E_n - E_m, \qquad (210.2)$$

равной разности энергий соответствующих стационарных состояний ($E_n$ и $E_m$ — соответственно энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения)). При $E_m < E_n$ происходит излучение фотона (переход атома из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией, т. е. переход электрона с более удаленной от ядра орбиты на более близлежащую), при $E_m > E_n$ — его поглощение (переход атома в состояние с большей энергией, т. е. переход электрона на более удаленную от ядра орбиту). Набор возможных дискретных частот $\nu = (E_n - E_m)/h$ квантовых переходов и определяет линейчатый спектр атома.

## § 211. Опыты Франка и Герца

Немецкие физики Д. Франк и Г. Герц, изучая методом задерживающего потенциала столкновения электронов с атомами газов (1913), экспериментально доказали дискретность значений энергии атомов. Принципиальная схема их установки приведена на рис. 292. Вакуумная трубка, заполненная парами ртути (давление приблизительно равно 13 Па), содержала катод (К), две сетки ($C_1$ и $C_2$) и анод (А).

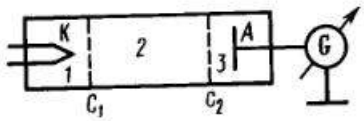



Рис. 292

Электроны, эмиттируемые катодом, ускорялись разностью потенциалов, приложенной между катодом и сеткой $C_1$. Между сеткой $C_2$ и анодом приложен небольшой (примерно 0,5 В) задерживающий потенциал. Электроны, ускоренные в области *1*, попадают в область *2* между сетками, где

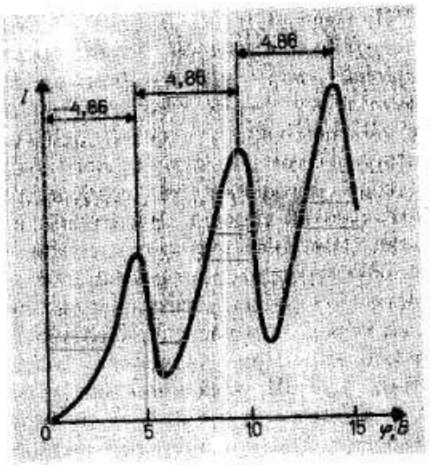



Рис. 293

испытывают соударения с атомами паров ртути. Электроны, которые после соударений имеют достаточную энергию для преодоления задерживающего потенциала в области *3*, достигают анода. При неупругих соударениях электронов с атомами ртути последние могут возбуждаться. Согласно боровской теории, каждый из атомов ртути может получить лишь вполне определенную энергию, переходя при этом в одно из возбужденных состояний. Поэтому если в атомах действительно существуют стационарные состояния, то электроны, сталкиваясь с атомами ртути, должны терять энергию дискретно, определенными порциями, равными разности энергий соответствующих стационарных состояний атома.

Из опыта следует (рис. 293), что при увеличении ускоряющего потенциала вплоть до 4,86 В анодный ток возрастает монотонно, его значение проходит через максимум (4,86 В), затем резко уменьшается и возрастает вновь. Дальнейшие максимумы наблюдаются при $2 \cdot 4{,}86$ и $3 \cdot 4{,}86$ В.

Ближайшим к основному, невозбужденному, состоянию атома ртути является возбужденное состояние, отстоящее от основного по шкале энергий на 4,86 эВ. Пока разность потенциалов между катодом и сеткой меньше 4,86 В, электроны, встречая на своем пути атомы ртути, испытывают с ними только упругие соударе-

ния. При $e\varphi=4{,}86$ эВ энергия электрона становится достаточной, чтобы вызвать неупругий удар, при котором электрон отдает атому ртути всю кинетическую энергию, возбуждая переход одного из электронов атома из нормального энергетического состояния на возбужденный энергетический уровень. Электроны, потерявшие свою кинетическую энергию, уже не смогут преодолеть тормозящего поля и достигнуть анода. Этим и объясняется первое резкое падение анодного тока при $e\varphi=4{,}86$ эВ. При значениях энергии, кратных 4,86 эВ, электроны могут испытать с атомами ртути 2, 3, ... неупругих соударения, потеряв при этом полностью свою энергию, и не достигнуть анода, т. е. должно наблюдаться резкое падение анодного тока. Это действительно наблюдается на опыте (рис. 293).

Таким образом, опыты Франка и Герца показали, что электроны при столкновении с атомами ртути передают атомам только определенные порции энергии, причем 4,86 эВ — наименьшая возможная порция энергии (наименьший квант энергии), которая может быть поглощена атомом ртути в основном энергетическом состоянии. Следовательно, идея Бора о существовании в атомах стационарных состояний блестяще выдержала экспериментальную проверку.

Атомы ртути, получившие при соударении с электронами энергию $\Delta E$, переходят в возбужденное состояние и должны возвратиться в основное, излучая при этом, согласно второму постулату Бора (см. (210.2)), световой квант с частотой $\nu=\Delta E/h$. По известному значению $\Delta E=4{,}86$ эВ можно вычислить длину волны излучения: $\lambda=hc/\Delta E\approx 255$ нм. Таким образом, если теория верна, то атомы ртути, бомбардируемые электронами с энергией 4,86 эВ, должны являться источником ультрафиолетового излучения с $\lambda\approx 255$ нм. Опыт действительно обнаруживает одну ультрафиолетовую линию с $\lambda\approx 254$ нм. Таким образом, опыты Франка и Герца экспериментально подтвердили не только первый, но и второй постулат Бора. Эти опыты сыграли огромное значение в развитии атомной физики.

## § 212. Спектр атома водорода по Бору

Постулаты, выдвинутые Бором, позволили рассчитать спектр атома водорода и **водородоподобных систем** — систем, состоящих из ядра с зарядом $Ze$ и одного электрона (например, ионы $He^+$, $Li^{2+}$), а также теоретически вычислить постоянную Ридберга.

Следуя Бору, рассмотрим движение электрона в водородоподобной системе, ограничиваясь круговыми стационарными орбитами. Решая совместно уравнение (208.1) $m_e v^2/r=Ze^2/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, предложенное Резерфордом, и уравнение (210.1), получим выражение для радиуса $n$-й стационарной орбиты:

$$r_n=n^2\frac{\hbar^2\cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e Ze^2}, \qquad (212.1)$$

где $n=1, 2, 3, \ldots$. Из выражения (212.1) следует, что радиусы орбит растут пропорционально квадратам целых чисел.

Для атома водорода ($Z=1$) радиус первой орбиты электрона при $n=1$, называемый **первым боровским радиусом** ($a$), равен

$$r_1=a=\frac{\hbar^2\cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2}=$$

$$=0{,}528\cdot 10^{-10}\ \text{м}=52{,}8\ \text{пм}, \qquad (212.2)$$

что соответствует расчетам на основании кинетической теории газов. Так как радиусы стационарных орбит измерить невозможно, то для проверки теории необходимо обратиться к таким величинам, которые могут быть измерены экспериментально. Такой величиной является энергия, излучаемая и поглощаемая атомами водорода.

Полная энергия электрона в водородоподобной системе складывается из его кинетической энергии ($m_e v^2/2$) и потенциальной энергии в электростатическом поле ядра ($-Ze^2/(4\pi\varepsilon_0 r)$):

$$E=\frac{m_e v^2}{2}-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(учли, что $\frac{m_e v^2}{2}=\frac{1}{2}Ze^2/(4\pi\varepsilon_0 r)$ (см. (208.1))). Учитывая квантованные для радиуса $n$-й стационарной орбиты значения (212.1), получим, что энергия электрона может принимать только следующие дозволенные дискретные значения:

$$E_n=-\frac{1}{n^2}\frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{212.3}$$

где знак минус означает, что электрон находится в связанном состоянии.

Из формулы (212.3) следует, что энергетические состояния атома образуют последовательность энергетических уровней, изменяющихся в зависимости от значения $n$. Целое число $n$ в выражении (212.3), определяющее энергетические уровни атома, называется **главным квантовым числом**. Энергетическое состояние с $n=1$ является **основным (нормальным)** состоянием; состояния с $n>1$ являются **возбужденными**. Энергетический уровень, соответствующий основному состоянию атома, называется **основным (нормальным)** уровнем; все остальные уровни являются **возбужденными**.

Придавая $n$ различные целочисленные значения, получим для атома водорода

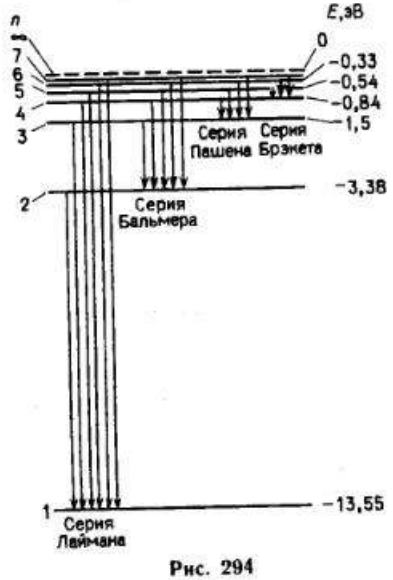



Рис. 294

($Z=1$), согласно формуле (212.3), возможные уровни энергии, схематически представленные на рис. 294. Энергия атома водорода с увеличением $n$ возрастает (уменьшается ее отрицательная величина) и энергетические уровни сближаются к границе, соответствующей значению $n=\infty$. Атом водорода обладает, таким образом, минимальной энергией ($E_1=-13{,}55$ эВ) при $n=1$ и максимальной ($E_\infty=0$) при $n=\infty$ (при удалении электрона из атома). Следовательно, значение $E_\infty=0$ соответствует **ионизации** атома (отрыву от него электрона).

Согласно второму постулату Бора (см. (210.2)), при переходе атома водорода ($Z=1$) из стационарного состояния $n$ с большей энергией в стационарное состояние $m$ с меньшей энергией испускается квант

$$h\nu=E_n-E_m=-\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right),$$

откуда частота излучения

$$\nu=\frac{m_e e^4}{8h^3\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)=R\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right), \tag{212.4}$$

где

$$R=m_e e^4/(8h^3\varepsilon_0^2).$$

Воспользовавшись при вычислении $R$ современными значениями универсальных постоянных, получим величину, совпадающую с экспериментальным значением постоянной Ридберга в эмпирических формулах для атома водорода (см. § 209). Это совпадение убедительно доказывает правильность полученной Бором формулы (212.3) для энергетических уровней водородоподобной системы.

Подставляя, например, в формулу (212.4) $m=1$ и $n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$, получим группу линий, образующих серию Лаймана (см. § 209) и соответствующих переходам электронов с возбужденных уровней ($n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$) на основной ($m=1$). Аналогично, при подстановке $m=2,\ 3,\ 4,\ 5,$

6 и соответствующих им значений $n$ получим серии Бальмера, Пашена, Брэкета, Пфунда и Хэмфри (часть из них схематически представлена на рис. 294), описанные в § 209. Следовательно, по теории Бора, количественно объяснившей спектр атома водорода, спектральные серии соответствуют излучению, возникающему в результате перехода атома в данное состояние из возбужденных состояний, расположенных выше данного.

Спектр поглощения атома водорода является линейчатым, но содержит только серию Лаймана. Он также объясняется теорией Бора. Так как свободные атомы водорода обычно находятся в основном состоянии (стационарное состояние с наименьшей энергией при $n=1$), то при сообщении атомам извне определенной энергии могут наблюдаться лишь переходы атомов из основного состояния в возбужденные (возникает серия Лаймана).

Теория Бора была крупным шагом в развитии атомной физики и явилась важным этапом в создании квантовой механики. Однако эта теория обладает внутренними противоречиями (с одной стороны, применяет законы классической физики, а с другой — основывается на квантовых постулатах). Она рассмотрела спектры атома водорода и водородоподобных систем и вычислила частоты спектральных линий, однако не смогла объяснить их интенсивности и ответить на вопрос: почему совершаются те или иные переходы? Серьезным недостатком теории Бора была невозможность описания с ее помощью спектра атома гелия — одного из простейших атомов, непосредственно следующего за атомом водорода.

## Контрольные вопросы

- Почему ядерная модель атома оказалась несостоятельной?
- Почему из различных серий спектральных линий атома водорода первой была изучена серия Бальмера?
- Какой смысл имеют числа $m$ и $n$ в обобщенной формуле Бальмера?
- Чему равна частота излучения атома водорода, соответствующая коротковолновой границе серии Брэкета?
- Разъясните смысл постулатов Бора. Как с их помощью объясняется линейчатый спектр атома?
- На каких участках кривой рис. 293 наблюдаются упругие и на каких — неупругие столкновения электронов с атомами?
- Какие основные выводы можно сделать на основании опытов Франка и Герца?
- Пользуясь моделью Бора, укажите спектральные линии, которые могут возникнуть при переходе атома водорода в состояния с $n=3$ и $n=4$.
- Нанесите на шкалу длин волн три линии каждой из первых двух спектральных серий атома водорода.
- Почему спектр поглощения атома водорода содержит только серию Лаймана?
- Покажите, что формулу (212.3) можно записать в виде $E_n=-13{,}55/n^2$, где $E$ выражается в электрон-вольтах.

## Задачи

**27.1.** Определить максимальную и минимальную энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра атома водорода (серии Лаймана). [$E_{max}=13{,}2$ эВ, $E_{min}=10{,}2$ эВ]

**27.2.** Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера. [364 нм]

**27.3.** Используя теорию Бора, определить орбитальный магнитный момент электрона, движущегося по второй орбите атома водорода. [$p_m=eh/(2m)=1{,}8\cdot10^{-23}$ А·м$^2$]

**27.4.** Используя теорию Бора, определить изменение орбитального механического момента электрона при переходе его из возбужденного состояния ($n=2$) в основное с испусканием фотона с длиной волны $\lambda=1{,}212\cdot10^{-7}$ м. [$\Delta L=\hbar=1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с]

**27.5.** Определить потенциал ионизации атома водорода. [13,6 В]

**27.6.** Основываясь на том, что энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ, определить второй потенциал возбуждения этого атома. [12,1 В]

**27.7.** Основываясь на том, что энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ, определить в электрон-вольтах энергию фотона, соответствующую самой длинноволновой линии серии Лаймана. [10,2 эВ]

# Глава 28
# Элементы квантовой механики

## § 213. Корпускулярно-волновой дуализм свойств вещества

Французский ученый Луи де Бройль (1892—1987), осознавая существующую в природе симметрию и развивая представления о двойственной корпускулярно-волновой природе света, выдвинул в 1923 г. гипотезу об *универсальности корпускулярно-волнового дуализма*. Де Бройль утверждал, что не только фотоны, но и электроны и любые другие частицы материи наряду с корпускулярными обладают также волновыми свойствами.

Итак, согласно де Бройлю, с *каждым микрообъектом* связываются, с одной стороны, *корпускулярные* характеристики — энергия $E$ и импульс $p$, а с другой — *волновые характеристики* — частота $\nu$ и длина волны $\lambda$. Количественные соотношения, связывающие корпускулярные и волновые свойства частиц, такие же, как для фотонов:

$$E = h\nu, \quad p = h/\lambda. \qquad (213.1)$$

Смелость гипотезы де Бройля заключалась именно в том, что соотношение (213.1) постулировалось не только для фотонов, но и для других микрочастиц, в частности для таких, которые обладают массой покоя. Таким образом, любой частице, обладающей импульсом, сопоставляют волновой процесс с длиной волны, определяемой **по формуле де Бройля:**

$$\lambda = h/p. \qquad (213.2)$$

Это соотношение справедливо для любой частицы с импульсом $p$.

Вскоре гипотеза де Бройля была подтверждена экспериментально. В 1927 г. американские физики К. Дэвиссон (1881—1958) и Л. Джермер (1896—1971) обнаружили, что пучок электронов, рассеивающийся от естественной дифракционной решетки — кристалла никеля,— дает отчетливую дифракционную картину. Дифракционные максимумы соответствовали формуле Вульфа — Брэггов (182.1), а брэгговская длина волны оказалась в точности равной длине волны, вычисленной по формуле (213.2). В дальнейшем формула де Бройля была подтверждена опытами П. С. Тартаковского и Г. Томсона, наблюдавших дифракционную картину при прохождении пучка быстрых электронов (энергия $\approx 50$ кэВ) через металлическую фольгу (толщиной $\approx 1$ мкм).

Так как дифракционная картина исследовалась для потока электронов, то необходимо было доказать, что волновые свойства присущи не только потоку большой совокупности электронов, но и каждому электрону в отдельности. Это удалось экспериментально подтвердить в 1948 г. советскому физику В. А. Фабриканту (р. 1907). Он показал, что даже в случае столь слабого электронного пучка, когда каждый электрон проходит через прибор независимо от других (промежуток времени между двумя электронами в $10^4$ раз больше времени прохождения электроном прибора), возникающая при длительной экспозиции дифракционная картина не отличается от дифракционных картин, получаемых при короткой экспозиции для потоков электронов, в десятки миллионов раз более интенсивных. Следовательно, волновые свойства частиц не являются свойством их коллектива,

а присущи каждой частице в отдельности.

Впоследствии дифракционные явления обнаружили также для нейтронов, протонов, атомных и молекулярных пучков. Это окончательно послужило доказательством наличия волновых свойств микрочастиц и позволило описывать движение микрочастиц в виде волнового процесса, характеризующегося определенной длиной волны, рассчитываемой по формуле де Бройля (213.2). Открытие волновых свойств микрочастиц привело к появлению и развитию новых методов исследования структуры веществ, таких, как электронография и нейтронография (см. § 182), а также к возникновению новой отрасли науки — электронной оптики (см. § 169).

Экспериментальное доказательство наличия волновых свойств микрочастиц привело к выводу о том, что перед нами универсальное явление, общее свойство материи. Но тогда волновые свойства должны быть присущи и макроскопическим телам. Почему же они не обнаружены экспериментально? Например, частице массой 1 г, движущейся со скоростью 1 м/с, соответствует волна де Бройля с $\lambda = 6{,}62 \cdot 10^{-31}$ м. Такая длина волны лежит за пределами доступной наблюдению области (периодических структур с периодом $d \approx 10^{-31}$ м не существует). Поэтому считается, что макроскопические тела проявляют только одну сторону своих свойств — корпускулярную — и не проявляют волновую.

Представление о двойственной корпускулярно-волновой природе частиц вещества углубляется еще тем, что на частицы вещества переносится связь между полной энергией частицы $\varepsilon$ и частотой $\nu$ волн де Бройля:

$$\varepsilon = h\nu. \qquad (213.3)$$

Это свидетельствует о том, что соотношение между энергией и частотой в формуле (213.3) имеет характер *универсального соотношения*, справедливого как для фотонов, так и для любых других микрочастиц. Справедливость же соотношения (213.3) вытекает из согласия с опытом тех теоретических результатов, которые получены с его помощью в квантовой механике, атомной и ядерной физике.

Подтвержденная экспериментально гипотеза де Бройля о корпускулярно-волновом дуализме свойств вещества коренным образом изменила представления о свойствах микрообъектов. Всем микрообъектам присущи и корпускулярные, и волновые свойства; в то же время любую из микрочастиц нельзя считать ни частицей, ни волной в классическом понимании. Современная трактовка корпускулярно-волнового дуализма может быть выражена словами советского физика-теоретика В. А. Фока (1898—1974): «Можно сказать, что для атомного объекта существует потенциальная возможность проявлять себя, в зависимости от внешних условий, либо как волна, либо как частица, либо промежуточным образом. Именно в этой *потенциальной возможности* различных проявлений свойств, присущих микрообъекту, и состоит дуализм волна — частица. Всякое иное, более буквальное, понимание этого дуализма в виде какой-нибудь модели неправильно» (в сб.: Философские вопросы современной физики.— М.: Изд-во АН СССР, 1959).

## § 214. Некоторые свойства волн де Бройля

Рассмотрим свободно движущуюся со скоростью $v$ частицу массой $m$. Вычислим для нее фазовую и групповую скорости волн де Бройля. Фазовая скорость, согласно (154.8),

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} \qquad (214.1)$$

($E = \hbar\omega$ и $p = \hbar k$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число). Так как $c > v$, то фазовая скорость волн де Бройля больше скорости света в вакууме (фазовая скорость волн может быть как меньше, так и больше $c$ в отличие от групповой скорости волн (см. § 155)).

Групповая скорость, согласно (155.1),

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}.$$

Для свободной частицы $E=\sqrt{m_0^2c^4+p^2c^2}$ (см. (40.7)) и

$$\frac{dE}{dp}=\frac{pc^2}{\sqrt{m_0^2c^4+p^2c^2}}=\frac{pc^2}{E}=\frac{mvc^2}{mc^2}=v.$$

Следовательно, групповая скорость волн де Бройля равна скорости частицы.

Групповая скорость фотона $u=\frac{pc^2}{E}=$ $=\frac{mcc^2}{mc^2}=c$, т. е. равна скорости самого фотона.

Волны де Бройля испытывают дисперсию (см. § 154). Действительно, подставив в выражение (214.1) $v_{фаз}=E/p$ формулу (40.7) $E=\sqrt{m_0^2c^4+p^2c^2}$, увидим, что скорость волн де Бройля зависит от длины волны. Это обстоятельство сыграло в свое время большую роль в развитии положений квантовой механики. После установления корпускулярно-волнового дуализма делались попытки связать корпускулярные свойства частиц с волновыми и рассматривать частицы как «узкие» волновые пакеты (см. § 155), «составленные» из волн де Бройля. Это позволяло как бы отойти от двойственности свойств частиц. Такая гипотеза соответствовала локализации частицы в данный момент времени в определенной ограниченной области пространства. Аргументом в пользу этой гипотезы являлось и то, что скорость распространения центра пакета (групповая скорость) оказалась, как показано выше, равной скорости частицы. Однако подобное представление частицы в виде волнового пакета (группы волн де Бройля) оказалось несостоятельным из-за сильной дисперсии волн де Бройля, приводящей к «быстрому расплыванию» (примерно $10^{-26}$ с!) волнового пакета или даже разделению его на несколько пакетов.

## § 215. Соотношение неопределенностей

Согласно двойственной корпускулярно-волновой природе частиц вещества, для описания микрочастиц используются то волновые, то корпускулярные представления. Поэтому приписывать им все свойства частиц и все свойства волн нельзя. Естественно, что необходимо внести некоторые ограничения в применении к объектам микромира понятий классической механики.

В классической механике всякая частица движется по определенной траектории, так что в любой момент времени точно фиксированы ее координата и импульс. Микрочастицы из-за наличия у них волновых свойств существенно отличаются от классических частиц. Одно из основных различий заключается в том, что нельзя говорить о движении микрочастицы по определенной траектории и неправомерно говорить об одновременных точных значениях ее координаты и импульса. Это следует из корпускулярно-волнового дуализма. Так, понятие «длина волны в данной точке» лишено физического смысла, а поскольку импульс выражается через длину волны (см. (213.1)), то отсюда следует, что микрочастица с определенным импульсом имеет полностью неопределенную координату. И наоборот, если микрочастица находится в состоянии с точным значением координаты, то ее импульс является полностью неопределенным.

В. Гейзенберг, учитывая волновые свойства микрочастиц и связанные с волновыми свойствами ограничения в их поведении, пришел в 1927 г. к выводу, что объект микромира невозможно одновременно с любой наперед заданной точностью характеризовать и координатой и импульсом. Согласно **соотношению неопределенностей Гейзенберга,** микрочастица (микрообъект) не может иметь одновременно и определенную координату $(x, y, z)$, и определенную соответствующую проекцию импульса $(p_x, p_y, p_z)$, причем неопределенности этих величин удовлетворяют условиям

$$\begin{cases}\Delta x\Delta p_x\geqslant h,\\ \Delta y\Delta p_y\geqslant h,\\ \Delta z\Delta p_z\geqslant h,\end{cases} \qquad (215.1)$$

т. е. произведение неопределенностей координаты и соответствующей ей проекции

импульса не может быть меньше величины порядка $h$.

Из соотношения неопределенностей (215.1) следует, что, например, если микрочастица находится в состоянии с точным значением координаты ($\Delta x=0$), то в этом состоянии соответствующая проекция ее импульса оказывается совершенно неопределенной ($\Delta p_x \to \infty$), и наоборот. Таким образом, для микрочастицы не существует состояний, в которых ее координаты и импульс имели бы одновременно точные значения. Отсюда вытекает и фактическая невозможность одновременно с любой наперед заданной точностью измерить координату и импульс микрообъекта.

Поясним, что соотношение неопределенностей действительно вытекает из волновых свойств микрочастиц. Пусть поток электронов проходит через узкую щель шириной $\Delta x$, расположенную перпендикулярно направлению их движения (рис. 295). Так как электроны обладают волновыми свойствами, то при их прохождении через щель, размер которой сравним с длиной волны де Бройля $\lambda$ электрона, наблюдается дифракция. Дифракционная картина, наблюдаемая на экране (Э), характеризуется главным максимумом, расположенным симметрично оси $Y$, и побочными максимумами по обе стороны от главного (их не рассматриваем, так как основная доля интенсивности приходится на главный максимум).

До прохождения через щель электроны двигались вдоль оси $Y$, поэтому составляющая импульса $p_x=0$, так что $\Delta p_x=0$, а координата $x$ частицы является совершенно неопределенной. В момент прохождения электронов через щель их положение в направлении оси $X$ определяется с точностью до ширины щели, т. е. с точностью $\Delta x$. В этот же момент вследствие дифракции электроны отклоняются от первоначального направления и будут двигаться в пределах угла $2\varphi$ ($\varphi$ — угол, соответствующий первому дифракционному минимуму). Следовательно, появляется неопределенность в значении составляющей импульса вдоль оси $X$, которая, как следует из рис. 295 и формулы (213.1), равна

$$\Delta p_x = p \sin\varphi = \frac{h}{\lambda}\sin\varphi. \qquad (215.2)$$

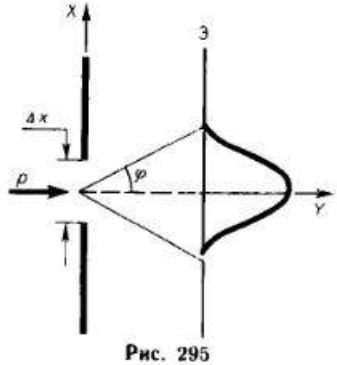


Рис. 295

Для простоты ограничимся рассмотрением только тех электронов, которые попадают на экран в пределах главного максимума. Из теории дифракции (см. § 179) известно, что первый минимум соответствует углу $\varphi$, удовлетворяющему условию

$$\Delta x \sin\varphi = \lambda, \qquad (215.3)$$

где $\Delta x$ — ширина щели, а $\lambda$ — длина волны де Бройля. Из формул (215.2) и (215.3) получим

$$\Delta x \Delta p_x = h,$$

учитывая, что для некоторой, хотя и незначительной, части электронов, попадающих за пределы главного максимума, величина $\Delta p_x \geqslant p \sin\varphi$. Следовательно, получаем выражение

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant h,$$

т. е. соотношение неопределенностей (215.1).

Невозможность одновременно точно определить координату и соответствующую составляющую импульса не связана с несовершенством методов измерения или измерительных приборов, а является следствием специфики микрообъектов, отражающей особенности их объективных свойств, а именно двойственной корпускулярно-волновой природы. Соотношение неопределенностей получено при одновременном использовании классических характеристик движения частицы (координаты, импульса) и наличия у нее волновых свойств. Так как в классической механике принимается, что измерение координаты и импульса может быть произведено с любой точностью, то *соотношение неопределенностей является, таким образом, квантовым ограничением применимости классической механики к микрообъектам.*

Соотношение неопределенностей, отражая специфику физики микрочастиц, позволяет оценить, например, в какой мере

можно применять понятия классической механики к микрочастицам, в частности с какой степенью точности можно говорить о траекториях микрочастиц. Известно, что движение по траектории характеризуется в любой момент времени определенными значениями координат и скорости. Выразим соотношение неопределенностей (215.1) в виде

$$\Delta x \Delta v_x \geqslant h/m. \qquad (215.4)$$

Из этого выражения следует, что чем больше масса частицы, тем меньше неопределенности ее координаты и скорости и, следовательно, с тем большей точностью можно применять к этой частице понятие траектории. Так, например, уже для пылинки массой $10^{-12}$ кг и линейными размерами $10^{-6}$ м, координата которой определена с точностью до 0,01 ее размеров ($\Delta x = 10^{-8}$ м), неопределенность скорости, по (215.4), $\Delta v_x = 6{,}62 \cdot 10^{-34}/(10^{-8} \cdot 10^{-12})$ м/с $= 6{,}62 \cdot 10^{-14}$ м/с, т. е. не будет сказываться при всех скоростях, с которыми пылинка может двигаться. Таким образом, для макроскопических тел их волновые свойства не играют никакой роли; координата и скорость макротел могут быть одновременно измерены достаточно точно. Это же означает, что для описания движения макротел с абсолютной достоверностью можно пользоваться законами классической механики.

Предположим, пучок электронов движется вдоль оси $x$ со скоростью $v = 10^6$ м/с, определяемой с точностью до 0,01 % ($\Delta v_x \approx 10^4$ м/с). Какова точность определения координаты электрона? По формуле (215.4),

$$\Delta x = \frac{h}{m \Delta v_x} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^4} = 7{,}27 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

т. е. положение электрона может быть определено с точностью до тысячных долей миллиметра. Такая точность достаточна, чтобы можно было говорить о движении электронов по определенной траектории, иными словами, описывать их движение законами классической механики.

Применим соотношение неопределенностей к электрону, движущемуся в атоме водорода. Допустим, что неопределенность координаты электрона $\Delta x \approx 10^{-10}$ м (порядка размеров самого атома, т. е. можно считать, что электрон принадлежит данному атому). Тогда, согласно (215.4), $\Delta v_x = 6{,}62 \cdot 10^{-34}/(9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-10}) = 7{,}27 \cdot 10^6$ м/с. Используя законы классической физики, можно показать, что при движении электрона вокруг ядра по круговой орбите радиуса $\approx 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м его скорость $v \approx 2{,}3 \cdot 10^6$ м/с. Таким образом, неопределенность скорости в несколько раз больше самой скорости. Очевидно, что в данном случае нельзя говорить о движении электрона в атоме по определенной траектории, иными словами, для описания движения электрона в атоме нельзя пользоваться законами классической физики.

В квантовой теории рассматривается также соотношение неопределенностей для энергии $E$ и времени $t$, т. е. неопределенности этих величин удовлетворяют условию

$$\Delta E \Delta t \geqslant h. \qquad (215.5)$$

Подчеркнем, что $\Delta E$ — неопределенность энергии системы в момент ее измерения, $\Delta t$ — неопределенность длительности процесса измерения. Следовательно, система, имеющая среднее время жизни $\Delta t$, не может быть охарактеризована определенным значением энергии; разброс энергии $\Delta E = h/\Delta t$ возрастает с уменьшением среднего времени жизни. Из выражения (215.5) следует, что частота излученного фотона также должна иметь неопределенность $\Delta \nu = \Delta E/h$, т. е. линии спектра должны характеризоваться частотой, равной $\nu \pm \Delta E/h$. Опыт действительно показывает, что все спектральные линии размыты; измеряя ширину спектральной линии, можно оценить порядок времени существования атома в возбужденном состоянии.

Соотношение неопределенностей неоднократно являлось предметом философских дискуссий, приводивших некоторых философов к его идеалистическому истолкованию. Например, по их мнению, соотно-

шение неопределенностей, не давая возможности одновременно точно определить координаты и импульсы (скорости) частиц, устанавливает границу познаваемости мира, с одной стороны, и существование микрообъектов вне пространства и времени — с другой. На самом деле соотношение неопределенностей не ставит какого-либо предела познанию микромира, а только указывает, насколько применимы к нему понятия классической механики.

## § 216. Волновая функция и ее статистический смысл

Экспериментальное подтверждение идеи де Бройля об универсальности корпускулярно-волнового дуализма, ограниченность применения классической механики к микрообъектам, диктуемая соотношением неопределенностей, а также противоречие целого ряда экспериментов с применяемыми в начале XX в. теориями привели к новому этапу развития квантовой теории — созданию **квантовой механики**, описывающей законы движения и взаимодействия микрочастиц с учетом их волновых свойств. Ее создание и развитие охватывает период с 1900 г. (формулировка Планком квантовой гипотезы; см. § 200) до 20-х годов XX в.; оно связано прежде всего с работами австрийского физика Э. Шредингера (1887—1961), немецкого физика В. Гейзенберга и английского физика П. Дирака (1902—1984).

На данном этапе развития возникли новые принципиальные проблемы, в частности проблема физической природы волн де Бройля. Для выяснения этой проблемы сравним дифракцию световых волн и микрочастиц. Дифракционная картина, наблюдаемая для световых волн, характеризуется тем, что в результате наложения дифрагирующих волн друг на друга в различных точках пространства происходит усиление или ослабление амплитуды колебаний. Согласно волновым представлениям о природе света, интенсивность дифракционной картины пропорциональна квадрату амплитуды световой волны. По представлениям фотонной теории, интенсивность определяется числом фотонов, попадающих в данную точку дифракционной картины. Следовательно, число фотонов в данной точке дифракционной картины задается квадратом амплитуды световой волны, в то время как для одного фотона квадрат амплитуды определяет вероятность попадания фотона в ту или иную точку.

Дифракционная картина, наблюдаемая для микрочастиц, также характеризуется неодинаковым распределением потоков микрочастиц, рассеянных или отраженных по различным направлениям,— в одних направлениях наблюдается большее число частиц, чем в других. Наличие максимумов в дифракционной картине с точки зрения волновой теории означает, что эти направления соответствуют наибольшей интенсивности волн де Бройля. С другой стороны, интенсивность волн де Бройля оказывается больше там, где имеется большее число частиц, т. е. интенсивность волн де Бройля в данной точке пространства определяет число частиц, попавших в эту точку. Таким образом, дифракционная картина для микрочастиц является проявлением статистической (вероятностной) закономерности, согласно которой частицы попадают в те места, где интенсивность волн де Бройля наибольшая.

Необходимость вероятностного подхода к описанию микрочастиц является важнейшей отличительной особенностью квантовой теории. Можно ли волны де Бройля истолковывать как волны вероятности, т. е. считать, что вероятность обнаружить микрочастицу в различных точках пространства меняется по волновому закону? Такое толкование волн де Бройля уже неверно хотя бы потому, что тогда вероятность обнаружить частицу в некоторых точках пространства может быть отрицательна, что не имеет смысла.

Чтобы устранить эти трудности, немецкий физик М. Борн (1882—1970) в 1926 г. предположил, что по волновому закону меняется не сама вероятность, а величина, названная **амплитудой вероятности** и обозначаемая $\Psi(x, y, z, t)$. Эту величину называют также **волновой функцией** (или **$\Psi$-функцией**). Амплитуда ве-

роятности может быть комплексной, и вероятность $W$ пропорциональна квадрату ее модуля:

$$W \sim |\Psi(x, y, z, t)|^2 \qquad (216.1)$$

($|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$, $\Psi^*$ — функция, комплексно сопряженная с $\Psi$). Таким образом, описание состояния микрообъекта с помощью волновой функции имеет **статистический, вероятностный характер:** квадрат модуля волновой функции (квадрат модуля амплитуды волн де Бройля) определяет вероятность нахождения частицы в момент времени $t$ в области с координатами $x$ и $x+dx$, $y$ и $y+dy$, $z$ и $z+dz$.

Итак, в квантовой механике состояние микрочастиц описывается принципиально по-новому — с помощью волновой функции, которая является *основным носителем информации* об их корпускулярных и волновых свойствах. Вероятность нахождения частицы в элементе объемом $dV$ равна

$$dW = |\Psi|^2 dV. \qquad (216.2)$$

Величина

$$|\Psi|^2 = dW/dV$$

(квадрат модуля $\Psi$-функции) имеет смысл **плотности вероятности,** т. е. определяет вероятность нахождения частицы в единичном объеме в окрестности точки с координатами $x, y, z$. Таким образом, физический смысл имеет не сама $\Psi$-функция, а квадрат ее модуля $|\Psi|^2$, которым задается интенсивность волн де Бройля.

Вероятность найти частицу в момент времени $t$ в конечном объеме $V$, согласно теореме сложения вероятностей, равна

$$W = \int_V dW = \int_V |\Psi|^2 dV.$$

Так как $|\Psi|^2 dV$ определяется как вероятность, необходимо волновую функцию $\Psi$ нормировать так, чтобы вероятность достоверного события обращалась в единицу, если за объем $V$ принять бесконечный объем всего пространства. Это означает, что при данном условии частица должна находиться где-то в пространстве. Следовательно, **условие нормировки вероятностей**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1, \qquad (216.3)$$

где данный интеграл (216.3) вычисляется по всему бесконечному пространству, т. е. по координатам $x, y, z$ от $-\infty$ до $\infty$. Таким образом, условие (216.3) говорит об объективном существовании частицы во времени и пространстве.

Чтобы волновая функция являлась объективной характеристикой состояния микрочастиц, она должна удовлетворять ряду ограничительных условий. Функция $\Psi$, характеризуя вероятность обнаружения действия микрочастицы в элементе объема, должна быть *конечной* (вероятность не может быть больше единицы), *однозначной* (вероятность не может быть неоднозначной величиной) и *непрерывной* (вероятность не может изменяться скачком).

Волновая функция удовлетворяет **принципу суперпозиции:** если система может находиться в различных состояниях, описываемых волновыми функциями $\Psi_1$, $\Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$, то она также может находиться в состоянии $\Psi$, описываемом линейной комбинацией этих функций:

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n,$$

где $C_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) — произвольные, вообще говоря, комплексные числа. Сложение *волновых функций* (амплитуд вероятностей), а не *вероятностей* (определяемых квадратами модулей волновых функций) принципиально отличает квантовую теорию от классической статистической теории, в которой для независимых событий справедлива *теорема сложения вероятностей.*

Волновая функция $\Psi$, являясь основной характеристикой состояния микрообъектов, позволяет в квантовой механике вычислять средние значения физических величин, характеризующих данный микрообъект. Например, среднее расстояние $\langle r \rangle$ электрона от ядра вычисляют по формуле

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r |\Psi|^2 dV,$$

где интегрирование производится, как и в случае (216.3).

## § 217. Общее уравнение Шредингера. Уравнение Шредингера для стационарных состояний

Статистическое толкование волн де Бройля (см. § 216) и соотношение неопределенностей Гейзенберга (см. § 215) привели к выводу, что уравнением движения в квантовой механике, описывающим движение микрочастиц в различных силовых полях, должно быть уравнение, из которого бы вытекали наблюдаемые на опыте волновые свойства частиц. Основное уравнение должно быть уравнением относительно волновой функции $\Psi(x, y, z, t)$, так как именно она, или, точнее, величина $|\Psi|^2$, определяет вероятность пребывания частицы в момент времени $t$ в объеме $dV$, т. е. в области с координатами $x$ и $x+dx$, $y$ и $y+dy$, $z$ и $z+dz$. Так как искомое уравнение должно учитывать волновые свойства частиц, то оно должно быть **волновым уравнением**, подобно уравнению, описывающему электромагнитные волны.

Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики сформулировано в 1926 г. Э. Шредингером. Уравнение Шредингера, как и все основные уравнения физики (например, уравнения Ньютона в классической механике и уравнения Максвелла для электромагнитного поля), не выводится, а постулируется. Правильность этого уравнения подтверждается согласием с опытом получаемых с его помощью результатов, что, в свою очередь, придает ему характер закона природы. Уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x, y, z, t)\,\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \qquad (217.1)$$

где $\hbar = h/(2\pi)$, $m$ — масса частицы $\Delta$ — оператор Лапласа ($\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$), $i$ — мнимая единица, $U(x, y, z, t)$ — потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором она движется, $\Psi(x, y, z, t)$ — искомая волновая функция частицы.

Уравнение (217.1) справедливо для любой частицы (со спином, равным 0; см. § 225), движущейся с малой (по сравнению со скоростью света) скоростью, т. е. со скоростью $v \ll c$. Оно дополняется условиями, накладываемыми на волновую функцию: 1) волновая функция должна быть конечной, однозначной и непрерывной (см. § 216); 2) производные $\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \frac{\partial\Psi}{\partial t}$ должны быть непрерывны; 3) функция $|\Psi|^2$ должна быть интегрируема; это условие в простейших случаях сводится к условию нормировки вероятностей (216.3).

Чтобы прийти к уравнению Шредингера, рассмотрим свободно движущуюся частицу, которой, согласно идее де Бройля, сопоставляется плоская волна. Для простоты рассмотрим одномерный случай. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси $x$, имеет вид (см. § 154)

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx),$$

или в комплексной записи

$$\xi(x, t) = A\,e^{i(\omega t - kx)}.$$

Следовательно, плоская волна де Бройля имеет вид

$$\Psi = A\,e^{-(i/\hbar)(Et - px)} \qquad (217.2)$$

(учтено, что $\omega = E/\hbar$, $k = p/\hbar$). В квантовой механике показатель экспоненты берут со знаком минус, но поскольку физический смысл имеет только $|\Psi|^2$, то это (см. (217.2)) несущественно. Тогда

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}E\Psi;$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 p^2\Psi = -\frac{1}{\hbar^2}p^2\Psi,$$

откуда

$$E = -\frac{\hbar}{i}\frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{1}{\Psi}i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t};$$

$$p^2 = -\frac{1}{\Psi}\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}. \qquad (217.3)$$

Используя взаимосвязь между энергией $E$ и импульсом $p$ ($E = p^2/(2m)$) и подставляя выраже-

ния (217.3), получим дифференциальное уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

которое совпадает с уравнением (217.1) для случая $U=0$ (мы рассматривали свободную частицу).

Если частица движется в силовом поле, характеризуемом потенциальной энергией $U$, то полная энергия $E$ складывается из кинетической и потенциальной энергий. Проводя аналогичные рассуждения и используя взаимосвязь между $E$ и $p$ для данного случая $p^2/(2m)=E-U$, придем к дифференциальному уравнению, совпадающему с (217.1).

Приведенные рассуждения не должны восприниматься как вывод уравнения Шредингера. Они лишь поясняют, как можно прийти к этому уравнению. Доказательством правильности уравнения Шредингера является согласие с опытом тех выводов, к которым оно приводит.

Уравнение (217.1) является **общим уравнением Шредингера.** Его также называют **уравнением Шредингера, зависящим от времени.** Для многих физических явлений, происходящих в микромире, уравнение (217.1) можно упростить, исключив зависимость $\Psi$ от времени, иными словами, найти уравнение Шредингера для стационарных состояний — состояний с фиксированными значениями энергии. Это возможно, если силовое поле, в котором частица движется, стационарно, т. е. функция $U=U(x, y, z)$ не зависит явно от времени и имеет смысл потенциальной энергии. В данном случае решение уравнения Шредингера может быть представлено в виде произведения двух функций, одна из которых есть функция только координат, другая — только времени, причем зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}=e^{-i(E/\hbar)t}$, так что

$$\Psi(x, y, z, t)=\psi(x, y, z)\,e^{-i(E/\hbar)t}, \quad (217.4)$$

где $E$ — полная энергия частицы, постоянная в случае стационарного поля. Подставляя (217.4) в (217.1), получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m}e^{-i(E/\hbar)t}\Delta\psi+U\psi e^{-i(E/\hbar)t}=$$
$$=i\hbar(-iE/\hbar)\psi e^{-i(E/\hbar)t};$$

откуда после деления на общий множитель $e^{-i(E/\hbar)t}$ и соответствующих преобразований придем к уравнению, определяющему функцию $\psi$:

$$\Delta\psi+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0. \quad (217.5)$$

Уравнение (217.5) называется **уравнением Шредингера для стационарных состояний.** В это уравнение в качестве параметра входит полная энергия $E$ частицы. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что подобные уравнения имеют бесчисленное множество решений, из которых посредством наложения граничных условий отбирают решения, имеющие физический смысл. Для уравнения Шредингера такими условиями являются условия регулярности волновых функций: волновые функции должны быть конечными, однозначными и непрерывными вместе со своими первыми производными. Таким образом, реальный физический смысл имеют только такие решения, которые выражаются регулярными функциями $\psi$. Но регулярные решения имеют место не при любых значениях параметра $E$, а лишь при определенном их наборе, характерном для данной задачи. Эти значения энергии называются **собственными.** Решения же, которые соответствуют **собственным** значениям энергии, называются **собственными функциями.** Собственные значения $E$ могут образовывать как непрерывный, так и дискретный ряд. В первом случае говорят о **непрерывном,** или **сплошном, спектре,** во втором — **о дискретном спектре.**

## § 218. Принцип причинности в квантовой механике

Из соотношения неопределенностей часто делают идеалистический вывод о неприменимости принципа причинности к явлениям, происходящим в микромире. При этом основываются на следующих соображениях. В классической механике, согласно **принципу причинности — принципу классического детерминизма,** по известному состоянию системы в некоторый момент времени (полностью определяется значениями координат и импульсов всех частиц

системы) и силам, приложенным к ней, можно абсолютно точно задать ее состояние в любой последующий момент. Следовательно, классическая физика основывается на следующем понимании причинности: состояние механической системы в начальный момент времени с известным законом взаимодействия частиц есть причина, а ее состояние в последующий момент — следствие.

С другой стороны, микрообъекты не могут иметь одновременно и определенную координату, и определенную соответствующую проекцию импульса (задаются соотношением неопределенностей (215.1)), поэтому и делается вывод о том, что в начальный момент времени состояние системы точно не определяется. Если же состояние системы не определено в начальный момент времени, то не могут быть предсказаны и последующие состояния, т. е. нарушается принцип причинности.

Необходимо, однако, отдавать себе отчет в том, что никакого нарушения принципа причинности применительно к микрообъектам не наблюдается, поскольку в квантовой механике понятие состояния микрообъекта приобретает совершенно иной смысл, чем в классической механике. В квантовой механике состояние микрообъекта полностью определяется волновой функцией $\Psi(x, y, z, t)$, квадрат модуля которой $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ задает плотность вероятности нахождения частицы в точке с координатами $x, y, z$.

В свою очередь, волновая функция $\Psi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера (217.1), содержащему первую производную функции $\Psi$ по времени. Это же означает, что задание функции $\Psi_0$ (для момента времени $t_0$) определяет ее значение в последующие моменты. Следовательно, в квантовой механике начальное состояние $\Psi_0$ есть причина, а состояние $\Psi$ в последующий момент — следствие. Это и есть форма принципа причинности в квантовой механике, т. е. задание функции $\Psi_0$ предопределяет ее значения для любых последующих моментов. Таким образом, состояние системы микрочастиц, определенное в квантовой механике, однозначно вытекает из предшествующего состояния, как того требует принцип причинности.

## § 219. Движение свободной частицы

При движении свободной частицы ($U(x)=0$) ее полная энергия совпадает с кинетической. Для свободной частицы, движущейся вдоль оси $x$, уравнение Шредингера (217.5) для стационарных состояний примет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0. \qquad (219.1)$$

Прямой подстановкой можно убедиться в том, что частным решением уравнения (219.1) является функция $\psi(x)=A\,e^{ikx}$, где $A=\text{const}$ и $k=\text{const}$, с собственным значением энергии

$$E=\hbar^2k^2/(2m). \qquad (219.2)$$

Функция $\psi(x)=A\,e^{ikx}=A\,e^{(i/\hbar)\sqrt{2mE}x}$ представляет собой только координатную часть волновой функции $\Psi(x, t)$. Поэтому зависящая от времени волновая функция, согласно (217.4),

$$\Psi(x, t)=A\,e^{-i\omega t+ikx}=A\,e^{-(i/\hbar)(Et-p_x x)} \qquad (219.3)$$

(здесь $\omega=E/\hbar$ и $k=p_x/\hbar$). Функция (219.3) представляет собой плоскую монохроматическую волну де Бройля (см. 217.2)).

Из выражения (219.2) следует, что зависимость энергии от импульса

$$E=\hbar^2k^2/(2m)=p_x^2/(2m)$$

оказывается обычной для нерелятивистских частиц. Следовательно, энергия свободной частицы может принимать любые значения (так как волновое число $k$ может принимать любые положительные значения), т. е. ее энергетический спектр является **непрерывным.**

Таким образом, свободная квантовая частица описывается плоской монохроматической волной де Бройля. Этому соответствует не зависящая от времени плотность вероятности обнаружения частицы

в данной точке пространства

$$|\Psi|^2=\Psi\Psi^*=|A|^2,$$

причем одинаковая в любой его точке.

## § 220. Частица в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками»

Проведем качественный анализ решений уравнения Шредингера применительно к частице в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками». Такая «яма» описывается потенциальной энергией вида (для простоты принимаем, что частица движется вдоль оси $x$)

$$U(x)=\begin{cases}\infty, & x<0,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ \infty, & x>l,\end{cases}$$

где $l$ — ширина «ямы», а энергия отсчитывается от ее дна (рис. 296).

Уравнение Шредингера (217.5) для стационарных состояний в случае одномерной задачи запишется в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0. \quad (220.1)$$

По условию задачи (бесконечно высокие «стенки»), частица не проникает за пределы «ямы», поэтому вероятность ее обнаружения (а следовательно, и волновая функция) за пределами «ямы» равна нулю. На границах «ямы» (при $x=0$ и $x=l$) непрерывная волновая функция также должна обращаться в нуль. Следовательно, граничные условия в данном случае имеют вид

$$\psi(0)=\psi(l)=0. \quad (220.2)$$

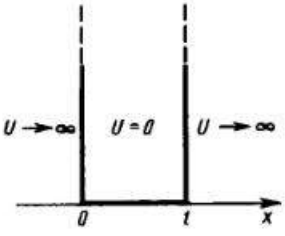



Рис. 296

В пределах «ямы» ($0\leqslant x\leqslant l$) уравнение Шредингера (220.1) сведется к уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0.$$

или

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+k^2\Psi=0, \quad (220.3)$$

где

$$k^2=2mE/\hbar^2. \quad (220.4)$$

Общее решение дифференциального уравнения (220.3):

$$\psi(x)=A\sin kx+B\cos kx.$$

Так как по (220.2) $\psi(0)=0$, то $B=0$. Тогда

$$\psi(x)=A\sin kx. \quad (220.5)$$

Условие $\psi(l)=A\sin kl=0$ (220.2) выполняется только при $kl=n\pi$, где $n$ — целые числа, т. е. необходимо, чтобы

$$k=n\pi/l. \quad (220.6)$$

Из выражений (220.4) и (220.6) следует, что

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\ (n=1, 2, 3, \ldots), \quad (220.7)$$

т. е. стационарное уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками», удовлетворяется только при собственных значениях $E_n$, зависящих от целого числа $n$. Следовательно, энергия $E_n$ частицы в «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками» принимает лишь **определенные дискретные значения,** т. е. **квантуется.** Квантованные значения энергии $E_n$ называются **уровнями энергии,** а число $n$, определяющее энергетические уровни частицы, называется **главным квантовым числом.** Таким образом, микрочастица в «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками» может находиться только на определенном энергетическом уровне $E_n$, или, как говорят, частица находится в квантовом состоянии $n$.

Подставив в (220.5) значение $k$ из (220.6), найдем собственные функции:

$$\psi(x)=A\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Постоянную интегрирования $A$ найдем из условия нормировки (216.3), которое для данного случая запишется в виде

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \, dx = 1.$$

В результате интегрирования получим $A = \sqrt{2/l}$, а собственные функции будут иметь вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{220.8}$$

Графики собственных функций (220.8), соответствующие уровням энергии (220.7) при $n = 1, 2, 3$, приведены на рис. 297, *а*. На рис. 297, *б* изображена плотность вероятности обнаружения частицы на различных расстояниях от «стенок» ямы, равная $|\psi_n(x)|^2 = \psi_n(x)\,\psi_n^*(x)$ для $n = 1, 2$ и 3. Из рисунка следует, что, например, в квантовом состоянии с $n = 2$ частица не может находиться в середине «ямы», в то время как одинаково часто может пребывать в ее левой и правой частях. Такое поведение частицы указывает на то, что представления о траекториях частицы в квантовой механике несостоятельны.

Из выражения (220.7) вытекает, что энергетический интервал между двумя соседними уровнями равен

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n =$$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(2n+1) \approx \frac{\pi^2\hbar^2}{ml^2} n. \tag{220.9}$$

Например, для электрона при размерах ямы $l = 10^{-1}$ м (свободные электроны в металле) $\Delta E_n \approx 10^{-35} n$ Дж $\approx$ $\approx 10^{-16} n$ эВ, т. е. энергетические уровни расположены столь тесно, что спектр практически можно считать непрерывным. Если же размеры ямы соизмеримы с атомными ($l \approx 10^{-10}$ м), то для электрона $\Delta E_n \approx 10^{-17} n$ Дж $\approx 10^2 n$ эВ, т. е. получаются явно дискретные значения энергии (линейчатый спектр). Таким образом, применение уравнения Шредингера к частице в «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками» приводит к квантованным значениям энергии, в то время как классическая механика на энергию этой частицы никаких ограничений не накладывает.

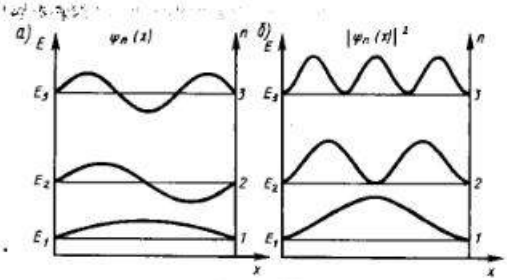



Рис. 297

Кроме того, квантово-механическое рассмотрение данной задачи приводит к выводу, что частица «в потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками» не может иметь энергию меньшую, чем минимальная энергия, равная $\pi^2\hbar^2/(2ml^2)$. Наличие отличной от нуля минимальной энергии не случайно и вытекает из соотношения неопределенностей. Неопределенность координаты $\Delta x$ частицы в «яме» шириной $l$ равна $\Delta x = l$. Тогда, согласно соотношению неопределенностей (215.1), импульс не может иметь точное, в данном случае нулевое, значение. Неопределенность импульса $\Delta p \approx h/l$. Такому разбросу значений импульса соответствует кинетическая энергия $E_{\min} \approx (\Delta p)^2/(2m) = h^2/(2ml^2)$. Все остальные уровни ($n > 1$) имеют энергию, превышающую это минимальное значение.

Из формул (220.9) и (220.7) следует, что при больших квантовых числах ($n \gg 1$) $\Delta E_n/E_n \approx 2/n \ll 1$, т. е. соседние уровни расположены тесно: тем теснее, чем больше $n$. Если $n$ очень велико, то можно говорить о практически непрерывной последовательности уровней и характерная особенность квантовых процессов — дискретность — сглаживается. Этот результат является частным случаем **принципа соответствия Бора** (1923), согласно которому законы квантовой механики должны при больших значениях квантовых чисел переходить в законы классической физики.

Более **общая трактовка принципа соответствия**, имеющего огромную роль в современной физике, заключается в следующем: всякая новая, более общая теория, являющаяся развитием классической, не отвергает ее полностью, а включает в себя классическую теорию, указывая границы ее применения, причем в определенных предельных случаях новая теория переходит в старую. Так, формулы кинематики и динамики специальной теории относительности переходят при $v \ll c$ в формулы механики Ньютона. Например, хотя гипотеза де Бройля приписывает волновые свойства всем телам, но в тех случаях, когда мы имеем дело с макроскопическими телами, их волновыми свойствами можно пренебречь, т. е. применять классическую механику Ньютона.

## § 221. Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер. Туннельный эффект

Рассмотрим потенциальный барьер простейшей прямоугольной формы (рис. 298, *а*) для одномерного (по оси $x$) движения частицы. Для потенциального барьера прямоугольной формы высоты $U$ и ширины $l$ можем записать

$$U(x)=\begin{cases}0, & x<0 \quad \text{(для области 1)},\\ U, & 0\leqslant x\leqslant l \quad \text{(для области 2)},\\ 0, & x>l \quad \text{(для области 3)}.\end{cases}$$

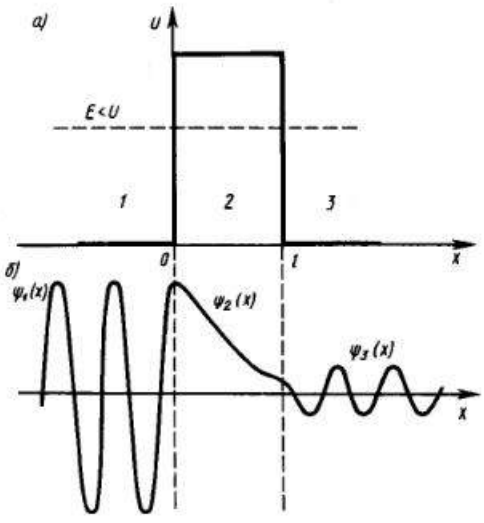



Рис. 298

При данных условиях задачи классическая частица, обладая энергией $E$, либо беспрепятственно пройдет над барьером (при $E>U$), либо отразится от него (при $E<U$) и будет двигаться в обратную сторону, т. е. она не может проникнуть сквозь барьер. Для микрочастицы же даже при $E>U$ имеется отличная от нуля вероятность, что частица отразится от барьера и будет двигаться в обратную сторону. При $E<U$ имеется также отличная от нуля вероятность, что частица окажется в области $x>l$, т. е. проникает сквозь барьер. Подобные, казалось бы, парадоксальные выводы следуют непосредственно из решения уравнения Шредингера, описывающего движение микрочастицы при условиях данной задачи.

Уравнение Шредингера (217.5) для стационарных состояний для каждой из выделенных на рис. 298, *а* области имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi_{1,3}}{\partial x^2}+k^2\psi_{1,3}=0$$

(для областей *1* и *3* $k^2=2mE/\hbar^2$),

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+q^2\psi_2=0 \qquad (221.1)$$

(для области *2* $q^2=2m\,(E-U)\,/\,\hbar^2$).

Общие решения этих дифференциальных уравнений:

$$\psi_1(x)=A_1e^{ikx}+B_1e^{-ikx} \qquad (221.2)$$

(для области *1*);

$$\psi_2(x)=A_2e^{iqx}+B_2e^{-iqx}$$

(для области *2*);

$$\psi_3(x)=A_3e^{ikx}+B_3e^{-ikx} \qquad (221.3)$$

(для области *3*).

В частности, для области *1* полная волновая функция, согласно (217.4), бу-

дет иметь вид

$$\Psi_1(x, t) = \psi_1(x)\, e^{-(i/\hbar)Et} = \\ = A_1 e^{-(i/\hbar)(Et - p_1 x)} + B_1 e^{-(i/\hbar)(Et + p_1 x)}. \quad (221.4)$$

В этом выражении первый член представляет собой плоскую волну типа (219.3), распространяющуюся в положительном направлении оси $x$ (соответствует частице, движущейся в сторону барьера), а второй — волну, распространяющуюся в противоположном направлении, т. е. отраженную от барьера (соответствует частице, движущейся от барьера налево).

Решение (221.3) содержит также волны (после умножения на временной множитель), распространяющиеся в обе стороны. Однако в области *3* имеется только волна, прошедшая сквозь барьер и распространяющаяся слева направо. Поэтому коэффициент $B_3$ в формуле (221.3) следует принять равным нулю.

В области *2* решение зависит от соотношений $E > U$ или $E < U$. Физический интерес представляет случай, когда полная энергия частицы меньше высоты потенциального барьера, поскольку при $E < U$ законы классической физики однозначно не разрешают частице проникнуть сквозь барьер. В данном случае, согласно (221.1), $q = i\beta$ — мнимое число, где

$$\beta = \sqrt{2m(U - E)}/\hbar.$$

Учитывая значение $q$ и $B_3 = 0$, получим решения уравнения Шредингера для трех областей в следующем виде:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$$

(для области *1*),

$$\psi_2(x) = A_2 e^{-\beta x} + B_2 e^{\beta x} \quad (221.5)$$

(для области *2*),

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx}$$

(для области *3*).

В области *2* функция (221.5) уже не соответствует плоским волнам, распространяющимся в обе стороны, поскольку показатели степени экспонент не мнимые, а действительные. Можно показать, что для частного случая высокого и широкого барьера, когда $\beta l \gg 1$, $B_2 \approx 0$.

Качественный вид функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и $\psi_3(x)$ показан на рис. 298, *б*. Из рисунка следует, что волновая функция не равна нулю и внутри барьера, а в области *3*, если барьер не очень широк, будет опять иметь вид волн де Бройля с тем же импульсом, т. е. с той же частотой, но с меньшей амплитудой. Следовательно, получили, что частица имеет отличную от нуля вероятность прохождения сквозь потенциальный барьер конечной ширины.

Таким образом, квантовая механика приводит к принципиально новому специфическому квантовому явлению, получившему название **туннельного эффекта,** в результате которого микрообъект может «пройти» сквозь потенциальный барьер.

Для описания туннельного эффекта используют понятие **коэффициента прозрачности** $D$ потенциального барьера, определяемого как отношение плотности потока прошедших частиц к плотности потока падающих. Можно показать, что

$$D = |A_3|^2 / |A_1|^2.$$

Для того чтобы найти отношение $|A_3/A_1|^2$, необходимо воспользоваться условиями непрерывности $\psi$ и $\psi'$ на границах барьера $x = 0$ и $x = l$ (рис. 298):

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0), \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0), \\ \psi_2(l) = \psi_3(l), \\ \psi_2'(l) = \psi_3'(l). \end{cases} \quad (221.6)$$

Эти четыре условия дают возможность выразить коэффициенты $A_2$, $A_3$, $B_1$ и $B_2$ через $A_1$. Совместное решение уравнений (221.6) для прямоугольного потенциального барьера дает (в предположении, что коэффициент прозрачности мал по сравнению с единицей)

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U - E)}\, l\right), \quad (221.7)$$

где $U$ — высота потенциального барьера, $E$ — энергия частицы, $l$ — ширина барьера, $D_0$ — постоянный множитель, который можно приравнять единице. Из вы-

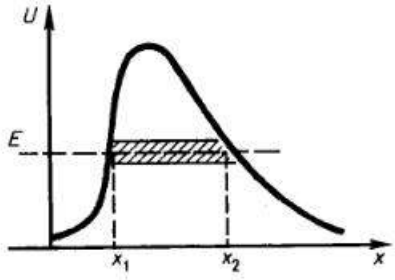


Рис. 299

ражения (221.7) следует, что $D$ сильно зависит от массы $m$ частицы, ширины $l$ барьера и от $(U-E)$; чем шире барьер, тем меньше вероятность прохождения сквозь него частицы.

Для потенциального барьера произвольной формы (рис. 299), удовлетворяющей условиям так называемого квазиклассического приближения (достаточно гладкая форма кривой), имеем

$$D=D_0\exp\left[-(2/\hbar)\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m\,(U-E)}\,dx\right],$$

где $U=U(x)$.

С классической точки зрения прохождение частицы сквозь потенциальный барьер при $E<U$ невозможно, так как частица, находясь в области барьера, должна была бы обладать отрицательной кинетической энергией. Туннельный эффект является специфическим квантовым эффектом. Прохождение частицы сквозь область, в которую, согласно законам классической механики, она не может проникнуть, можно пояснить соотношением неопределенностей. Неопределенность импульса $\Delta p$ на отрезке $\Delta x=l$ составляет $\Delta p>\hbar/l$. Связанная с этим разбросом в значениях импульса кинетическая энергия $(\Delta p)^2/(2m)$ может оказаться достаточной для того, чтобы полная энергия частицы оказалась больше потенциальной.

Основы теории туннельных переходов заложены работами Л. И. Мандельштама и М. А. Леонтовича (1903—1981). Туннельное прохождение сквозь потенциальный барьер лежит в основе многих явлений физики твердого тела (например, явления в контактном слое на границе двух полупроводников), атомной и ядерной физики (например, α-распад, протекание термоядерных реакций).

## § 222. Линейный гармонический осциллятор в квантовой механике

**Линейный гармонический осциллятор** — система, совершающая одномерное движение под действием квазиупругой силы,— является моделью, используемой во многих задачах классической и квантовой теории (см. § 142). Пружинный, физический и математический маятники — примеры классических гармонических осцилляторов.

Потенциальная энергия гармонического осциллятора (см. (141.5)) равна

$$U=m\omega_0^2x^2/2, \qquad (222.1)$$

где $\omega_0$ — собственная частота колебаний осциллятора, $m$ — масса частицы. Зависимость (222.1) имеет вид параболы (рис. 300), т. е. «потенциальная яма» в данном случае является параболической.

Амплитуда малых колебаний классического осциллятора определяется его полной энергией $E$ (см. рис. 16). В точках с координатами $\pm x_{max}$ полная энергия $E$ равна потенциальной энергии. Поэтому с классической точки зрения частица не может выйти за пределы области $(-x_{max},\ +x_{max})$. Такой выход означал бы, что ее потенциальная энергия больше полной, что абсурдно, так как приводит к выводу, что кинетическая энергия отрицательна. Таким образом, классический осциллятор находится в «потенциальной яме» с координатами $-x_{max}\leqslant x\leqslant x_{max}$ «без права выхода» из нее.

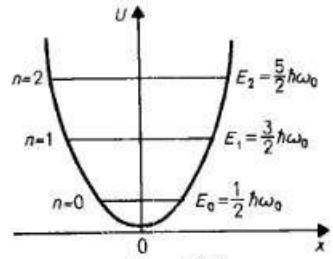


Рис. 300

Гармонический осциллятор в квантовой механике — **квантовый осциллятор** — описывается уравнением Шредингера (217.5), учитывающим выражение (222.1) для потенциальной энергии. Тогда стационарные состояния квантового осциллятора определяются уравнением Шредингера вида

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)\psi=0, \qquad (222.2)$$

где $E$ — полная энергия осциллятора. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнение (222.2) решается только при собственных значениях энергии

$$E_n=(n+{}^1/_2)\,\hbar\omega_0. \qquad (222.3)$$

Формула (222.3) показывает, что энергия квантового осциллятора может иметь лишь **дискретные значения**, т. е. **квантуется**. Энергия ограничена снизу отличным от нуля, как и для прямоугольной «ямы» с бесконечно высокими «стенками» (см. § 220), минимальным значением энергии $E_0={}^1/_2\hbar\omega_0$. Существование минимальной энергии — она называется **энергией нулевых колебаний** — является типичной для квантовых систем и представляет собой прямое следствие соотношения неопределенностей.

Наличие нулевых колебаний означает, что частица не может находиться на дне «потенциальной ямы», причем этот вывод не зависит от ее формы. В самом деле, «падение на дно ямы» связано с обращением в нуль импульса частицы, а вместе с тем и его неопределенности. Тогда неопределенность координаты становится сколь угодно большой, что противоречит, в свою очередь, пребыванию частицы в «потенциальной яме».

Вывод о наличии энергии нулевых колебаний квантового осциллятора противоречит выводам классической теории, согласно которой наименьшая энергия, которую может иметь осциллятор, равна нулю (соответствует покоящейся в положении равновесия частице). Например, классическая физика приводит к выводу, что при $T=0$ энергия колебательного движения атомов кристалла должна обращаться в нуль. Следовательно, должно исчезать и рассеяние света, обусловленное колебаниями атомов. Однако эксперимент показывает, что интенсивность рассеяния света при понижении температуры не равна нулю, а стремится к некоторому предельному значению, указывающему на то, что при $T\to 0$ колебания атомов в кристалле не прекращаются. Это является подтверждением нулевых колебаний.

Из формулы (222.3) также следует, что уровни энергии линейного гармонического осциллятора расположены на одинаковых расстояниях друг от друга (рис. 300), а именно расстояние между соседними энергетическими уровнями равно $\hbar\omega_0$, причем минимальное значение энергии $E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega_0$.

Строгое решение задачи о квантовом осцилляторе приводит еще к одному значительному отличию от классического рассмотрения. Квантово-механический расчет показывает, что частицу можно обнаружить за пределами дозволенной области $|x|\leqslant x_{max}$ (см. рис. 16) в то время как с классической точки зрения она не может выйти за пределы области $(-x_{max},\ +x_{max})$. Таким образом, имеется отличная от нуля вероятность обнаружить частицу в той области, которая является классически запрещенной. Этот результат (без его вывода) демонстрируется на рис. 301, где приводится квантовая плотность вероятности $w$ обнаружения осциллятора для состояния $n=1$. Из рисунка следует, что для квантового осциллятора действитель-

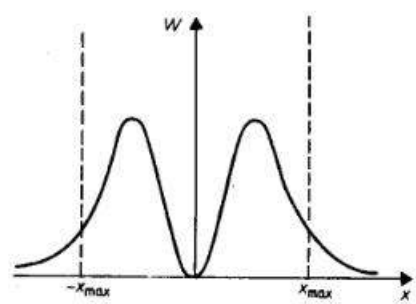



Рис. 301

но плотность вероятности $w$ имеет конечные значения за пределами классически дозволенной области $|x| \leqslant x_{max}$, т. е. имеется конечная (но небольшая) вероятность обнаружить частицу в области за пределами «потенциальной ямы». Существование отличных от нуля значений $w$ за пределами «потенциальной ямы» объясняется возможностью прохождения микрочастиц сквозь потенциальный барьер (см. § 221).

## Контрольные вопросы

- Чему равны фазовая и групповая скорости фотона?
- В каком случае и почему при условиях $\frac{\Delta v_x}{v_x} \ll 1$ и $\frac{\Delta v_x}{v_x} \approx 1$ можно говорить о движении частицы по определенной траектории?
- Как, исходя из соотношения неопределенностей, объяснить наличие естественной ширины спектральных линий?
- Что определяет квадрат модуля волновой функции?
- Почему квантовая механика является статистической теорией?
- В чем отличие понимания причинности в классической и квантовой механике?
- Как изменится коэффициент прозрачности потенциального барьера с увеличением его ширины в два раза?
- Может ли частица находиться на дне «потенциальной ямы»? Определяется ли это формой «ямы»?
- В чем отличие квантово-механического и классического описания гармонического осциллятора? В выводах этих описаний?

## Задачи

**28.1.** Свободная частица движется со скоростью $u$. Доказать, что выполняется соотношение $v_{фаз} u = c^2$.

**28.2.** Электрон движется в атоме водорода по первой боровской орбите. Принимая, что допускаемая неопределенность скорости составляет 1% от ее числового значения, определить неопределенность координаты электрона. Применительно ли в данном случае для электрона понятие траектории? [$\Delta x = 33$ нм; нет]

**28.3.** $\psi$-Функция некоторой частицы имеет вид $\psi = \frac{A}{r} e^{-r/a}$, где $r$ — расстояние этой частицы от силового центра, $a$ — постоянная. Определить среднее расстояние $<r>$ частицы от силового центра. [$<r> = a/2$]

**28.4.** Записать уравнение Шредингера для стационарных состояний электрона, находящегося в атоме водорода.

**28.5.** Электрон находится в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной $l$ с бесконечно высокими «стенками». Определить вероятность $W$ обнаружения электрона в средней трети «ямы», если электрон находится в возбужденном состоянии ($n = 2$). Пояснить физический смысл полученного результата, изобразив графически плотность вероятности обнаружения электрона в данном состоянии. [$W = 0{,}195$]

**28.6.** Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину 0,1 нм. Определить в электрон-вольтах разность энергий $U - E$, при которой вероятность прохождения электрона сквозь барьер составит 0,99. [0,1 мэВ]

# Глава 29

# Элементы современной физики атомов и молекул

## § 223. Атом водорода в квантовой механике

Решение задачи об энергетических уровнях электрона для атома водорода (а также водородоподобных систем: иона гелия $He^+$, двукратно ионизованного лития $Li^{++}$ и др.) сводится к задаче о движении электрона в кулоновском поле ядра.

Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром, обладающим зарядом $Ze$ (для атома водорода $Z=1$),

$$U(r)=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad (223.1)$$

где $r$ — расстояние между электроном и ядром. Графически функция $U(r)$ изображена жирной кривой на рис. 302, неограниченно убывающей (возрастающей по модулю) при уменьшении $r$, т. е. при приближении электрона к ядру.

Состояние электрона в атоме водорода описывается волновой функцией $\psi$, удовлетворяющей стационарному уравнению Шредингера (217.5), учитывающему значение (223.1):

$$\Delta\psi+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi=0, \qquad (223.2)$$

где $m$ — масса электрона, $E$ — полная энергия электрона в атоме. Так как поле, в котором движется электрон, является центрально-симметричным, то для решения уравнения (223.2) обычно используют сферическую систему координат: $r$, $\vartheta$, $\varphi$. Не вдаваясь в математическое решение этой задачи, ограничимся рассмотрением

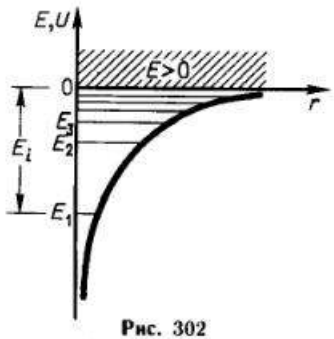



Рис. 302

важнейших результатов, которые из него следуют, пояснив их физический смысл.

1. **Энергия.** В теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнения типа (223.2) имеют решения, удовлетворяющие требованиям однозначности, конечности и непрерывности волновой функции $\psi$, только при собственных значениях энергии

$$E_n=-\frac{1}{n^2}\frac{Z^2me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \quad (n=1, 2, 3, \ldots), \qquad (223.3)$$

т. е. для дискретного набора отрицательных значений энергии.

Таким образом, как и в случае «потенциальной ямы» с бесконечно высокими «стенками» (см. § 220) и гармонического осциллятора (см. § 222), решение уравнения Шредингера для атома водорода приводит к появлению дискретных энергетических уровней. Возможные значения $E_1$, $E_2$, $E_3$, ... показаны на рис. 302 в виде горизонтальных прямых. Самый нижний уровень $E_1$, отвечающий минимальной возможной энергии,— **основной**, все остальные ($E_n>E_1$, $n=2, 3, \ldots$) — **возбужденные** (см. § 212). При $E<0$ движение электрона является **связанным** — он находится внутри гиперболической «потенциальной ямы». Из рисунка следует, что по мере роста главного квантового числа $n$ энергетические уровни располагаются теснее и при $n=\infty$ $E_\infty=0$. При $E>0$ движение электрона является **свободным**; область непрерывного спектра $E>0$ (заштрихована на рис. 302) соответствует **ионизованному атому**. Энергия ионизации атома водорода равна

$$E_i=-E_1=me^4/(8h^2\varepsilon_0^2)=13{,}55 \text{ эВ}.$$

Выражение (223.3) совпадает с формулой (212.3), полученной Бором для энергии атома водорода. Однако если Бору пришлось вводить дополнительные гипотезы (постулаты), то в квантовой механике дискретные значения энергии, являясь следствием самой теории, вытекают

непосредственно из решения уравнения Шредингера.

**2. Квантовые числа.** В квантовой механике доказывается, что уравнению Шредингера (223.2) удовлетворяют собственные функции $\psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi)$, определяемые тремя квантовыми числами: главным $n$, орбитальным $l$ и магнитным $m_l$.

**Главное квантовое число** $n$, согласно (223.3), определяет **энергетические уровни электрона** в атоме и может принимать любые целочисленные значения начиная с единицы:

$$n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Из решения уравнения Шредингера вытекает, что *момент импульса* (механический орбитальный момент) *электрона квантуется*, т. е. не может быть произвольным, а принимает дискретные значения, определяемые формулой

$$L_e = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \qquad (223.4)$$

где $l$ — **орбитальное квантовое число,** которое при заданном $n$ принимает значения

$$l = 0, 1, \ldots, (n-1), \qquad (223.5)$$

т. е. всего $n$ значений, и определяет **момент импульса электрона** в атоме.

Из решения уравнений Шредингера следует также, что вектор $\mathbf{L}_e$ момента импульса электрона может иметь лишь такие ориентации в пространстве, при которых его проекция $L_{ez}$ на направление $z$ внешнего магнитного поля принимает квантованные значения, кратные $\hbar$

$$L_{ez} = \hbar m_l, \qquad (223.6)$$

где $m_l$ — **магнитное квантовое число,** которое при заданном $l$ может принимать значения

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l, \qquad (223.7)$$

т. е. всего $2l+1$ значений. Таким образом, **магнитное квантовое число** $m_l$ определяет **проекцию момента импульса электрона на заданное направление,** причем вектор момента импульса электрона в атоме может иметь в пространстве $2l+1$ ориентаций.

Наличие квантового числа $m_l$ должно привести в магнитном поле к расщеплению уровня с главным квантовым числом $n$ на $2l+1$ подуровней. Соответственно в спектре атома должно наблюдаться расщепление спектральных линий. Действительно, расщепление энергетических уровней в магнитном поле было обнаружено в 1896 г. голландским физиком П. Зееманом (1865—1945) и получило название **эффекта Зеемана.** Расщепление уровней энергии во внешнем электрическом поле, тоже доказанное экспериментально, называется **эффектом Штарка** *.

Хотя энергия электрона (223.3) и зависит только от главного квантового числа $n$, но каждому собственному значению $E_n$ (кроме $E_1$) соответствует несколько собственных функций $\psi_{nlm_l}$, отличающихся значениями $l$ и $m_l$. Следовательно, атом водорода может иметь одно и то же значение энергии, находясь в нескольких различных состояниях. Так как при данном $n$ орбитальное квантовое число $l$ может изменяться от 0 до $n-1$ (см. (223.5)), а каждому значению $l$ соответствует $2l+1$ различных значений $m_l$ (223.7), то число различных состояний, соответствующих данному $n$, равно

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2. \qquad (223.8)$$

Квантовые числа и их значения являются следствием решений уравнений Шредингера и условий однозначности, непрерывности и конечности, налагаемых на волновую функцию $\psi$. Кроме того, поскольку при движении электрона в атоме существенны волновые свойства электрона, квантовая механика вообще отказывается от классического представления об электронных орбитах. Согласно квантовой механике, каждому энергетическому состоянию соответствует волновая функция, квадрат модуля которой определяет вероятность обнаружения электрона в единице объема.

Вероятность обнаружения электрона в различных частях атома различна. Электрон при своем движении как бы «размазан» по всему объему, образуя электронное

* И. Штарк (1874—1957) — немецкий физик.

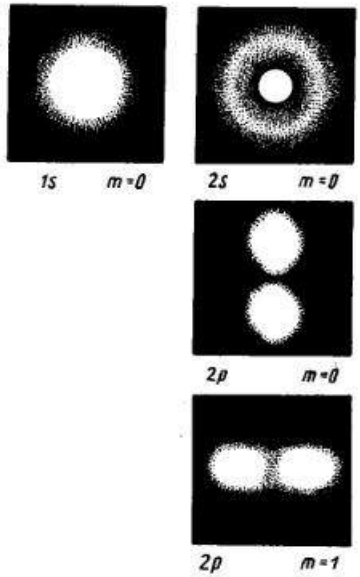



Рис. 303

облако, плотность (густота) которого характеризует вероятность нахождения электрона в различных точках объема атома. *Квантовые числа n и l характеризуют размер и форму электронного облака, а квантовое число $m_l$ характеризует ориентацию электронного облака в пространстве.*

В атомной физике, по аналогии со спектроскопией, состояние электрона, характеризующееся квантовыми числами $l=0$, называют *s*-состоянием (электрон в этом состоянии называют *s*-электроном), $l=1$ — *p*-состоянием, $l=2$ — *d*-состоянием, $l=3$ — *f*-состоянием и т. д. Значение главного квантового числа указывается перед условным обозначением орбитального квантового числа. Например, электроны в состояниях с $n=2$ и $l=0$ и 1 обозначаются соответственно символами $2s$ и $2p$.

На рис. 303 для примера приведено распределение электронной плотности (формы электронного облака) для состояний атома водорода при $n=1$ и $n=2$, определяемое $|\psi_{nlm_l}|^2$. Как видно из рисунка, оно зависит от $n$, $l$ и $m_l$. Так, при $l=0$ электронная плотность отлична от нуля в центре и не зависит от направления (сферически-симметрична), а для остальных состояний в центре равна нулю и зависит от направления.

**3. Спектр.** Квантовые числа $n$, $l$ и $m_l$ позволяют более полно описать спектр испускания (поглощения) атома водорода, полученный в теории Бора (см. рис. 294).

В квантовой механике вводятся **правила отбора,** ограничивающие число возможных переходов электронов в атоме, связанных с испусканием и поглощением света. Теоретически доказано и экспериментально подтверждено, что для дипольного излучения электрона, движущегося в центрально-симметричном поле ядра, могут осуществляться только такие переходы, для которых: 1) изменение орбитального квантового числа $\Delta l$ удовлетворяет условию

$$\Delta l = \pm 1; \qquad (223.9)$$

2) изменение магнитного квантового числа $\Delta m_l$ удовлетворяет условию

$$\Delta m_l = 0, \pm 1.$$

В оптических спектрах указанные правила отбора в основном выполняются. Однако в принципе могут наблюдаться и слабые «запрещенные» линии, например возникающие при переходах с $\Delta l = 2$. Появление этих линий объясняется тем, что строгая теория, запрещая дипольные переходы, разрешает переходы, соответствующие излучению более сложных систем зарядов, например квадруполей. Вероятность же квадрупольных переходов (переходы с $\Delta l = 2$) во много раз меньше вероятности дипольных переходов, поэтому «запрещенные» линии и являются слабыми.

Учитывая число возможных состояний, соответствующих данному $n$, и правило отбора (223.9), рассмотрим спектральные линии атома водорода (рис. 304): серии Лаймана соответствуют переходы

$$np \to 1s \quad (n=2, 3, \ldots);$$

серии Бальмера —

$$np \to 2s,\ ns \to 2p,\ nd \to 2p \quad (n=3, 4, \ldots)$$

и т. д.

Переход электрона из основного состояния в возбужденное обусловлен уве-

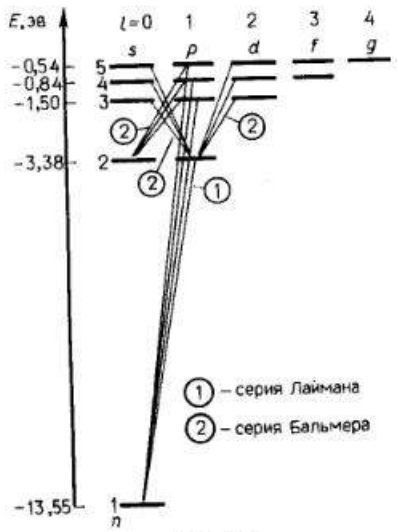



Рис. 304

личением энергии атома и может происходить только при сообщении атому энергии извне, например за счет поглощения атомом фотона. Так как поглощающий атом находится обычно в основном состоянии, то спектр атома водорода должен состоять из линий, соответствующих переходам $1s \to np$ ($n=2, 3, \ldots$), что находится в полном согласии с опытом.

## § 224. 1s-Состояние электрона в атоме водорода

1s-Состояние электрона в атоме водорода является сферически-симметричным, т. е. не зависит от углов $\theta$ и $\varphi$. Волновая функция $\psi$ электрона в этом состоянии определяется только расстоянием $r$ электрона от ядра, т. е. $\psi=\psi_{100}(r)$, где цифры 100 соответственно указывают, что $n=1$, $l=0$ и $m_l=0$. Уравнению Шредингера для 1s-состояния электрона в атоме водорода удовлетворяет функция вида

$$\psi = C\,e^{-r/a}, \qquad (224.1)$$

где, как можно показать, $a=\hbar^2 4\pi\varepsilon_0/(me^2)$ — величина, совпадающая с первым боровским радиусом $a$ (см. (212.2)) для атома водорода, $C$ — некоторая постоянная, определяемая из условия нормировки вероятностей (216.3).

Благодаря сферической симметрии $\psi$-функции вероятность обнаружения электрона на расстоянии $r$ одинакова по всем направлениям. Поэтому элемент объема $dV$, отвечающий одинаковой плотности вероятности, обычно представляют в виде объема сферического слоя радиусом $r$ и толщиной $dr$: $dV=4\pi r^2 dr$. Тогда, согласно условию нормировки вероятностей (216.3) с учетом (224.1),

$$1=\int_0^\infty |\psi|^2 dV = \int_0^\infty C^2 e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr.$$

После интегрирования получим

$$C=1/\sqrt{\pi a^3}. \qquad (224.2)$$

Подставив выражение (224.2) в формулу (224.1), определим нормированную волновую функцию, отвечающую 1s-состоянию электрона в атоме водорода:

$$\psi_{100}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\,e^{-r/a}. \qquad (224.3)$$

Вероятность обнаружить электрон в элементе объема (см. (216.2)) равна

$$dW=|\psi|^2 dV=|\psi|^2 4\pi r^2 dr.$$

Подставив в эту формулу волновую функцию (224.3), получим

$$dW=\frac{1}{\pi a^3}\,e^{-2r/a}4\pi r^2 dr.$$

Вычислим те расстояния $r_{max}$ от ядра, на которых электрон может быть обнаружен с наибольшей вероятностью. Исследуя выражения $dW/dr$ на максимум, получим, что $r_{max}=a$. Следовательно, электрон может быть обнаружен с наибольшей вероятностью на расстояниях, равных боровскому радиусу, т. е. имеется равная и наибольшая вероятность обнаружения электрона во всех точках, расположенных на сферах радиуса $a$ с центром в ядре атома. Казалось бы, квантово-механический расчет дает полное согласие с теорией Бора. Однако, согласно квантовой механике, плотность вероятности лишь при $r=a$ достигает максимума, оставаясь отличной от нуля во всем пространстве

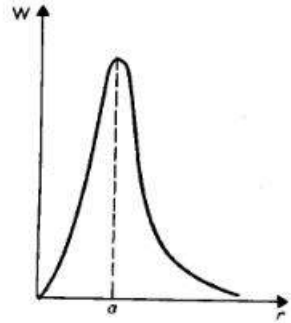



Рис. 305

(рис. 305). Таким образом, в основном состоянии атома водорода наиболее вероятным расстоянием от электрона до ядра является расстояние, равное боровскому радиусу. В этом заключается квантово-механический смысл боровского радиуса.

## § 225. Спин электрона. Спиновое квантовое число

О. Штерн и В. Герлах, проводя прямые измерения магнитных моментов (см. § 131), обнаружили в 1922 г., что узкий пучок атомов водорода, заведомо находящихся в $s$-состоянии, в неоднородном магнитном поле расщепляется на два пучка. В этом состоянии момент импульса электрона равен нулю (см. (223.4)). Магнитный момент атома, связанный с орбитальным движением электрона, пропорционален механическому моменту (см. (131.3)), поэтому он равен нулю и магнитное поле не должно оказывать влияния на движение атомов водорода в основном состоянии, т. е. расщепления быть не должно. Однако в дальнейшем при применении спектральных приборов с большой разрешающей способностью было доказано, что спектральные линии атома водорода обнаруживают тонкую структуру (являются дублетами) *даже* в отсутствие магнитного поля.

Для объяснения тонкой структуры спектральных линий, а также ряда других трудностей в атомной физике американские физики Д. Уленбек (1900—1974) и С. Гаудсмит (1902—1979) предположили, что электрон обладает **собственным неуничтожимым механическим моментом импульса**, не связанным с движением электрона в пространстве,— **спином** (см. § 131).

Спин электрона (и всех других микрочастиц) — квантовая величина, у нее нет классического аналога; это внутреннее неотъемлемое свойство электрона, подобное его заряду и массе.

Если электрону приписывается собственный механический момент импульса (спин) $\mathbf{L}_s$, то ему соответствует собственный магнитный момент $\mathbf{p}_{ms}$. Согласно общим выводам квантовой механики, *спин квантуется по закону*

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)},$$

где $s$ — **спиновое квантовое число.**

По аналогии с орбитальным моментом импульса, проекция $L_{sz}$ спина квантуется так, что вектор $\mathbf{L}_s$ может принимать $2s+1$ ориентаций. Так как в опытах Штерна и Герлаха наблюдались только две ориентации, то $2s+1=2$, откуда $s={}^1/_2$. Проекция спина на направление внешнего магнитного поля, являясь квантованной величиной, определяется выражением, аналогичным (223.6):

$$L_{sz} = \hbar m_s,$$

где $m_s$ — **магнитное спиновое квантовое число**; оно может иметь только два значения: $m_s = \pm {}^1/_2$.

Таким образом, опытные данные привели к необходимости характеризовать электроны (и микрочастицы вообще) добавочной внутренней степенью свободы. Поэтому для полного описания состояния электрона в атоме необходимо наряду с главным, орбитальным и магнитным квантовыми числами задавать еще магнитное спиновое квантовое число.

## § 226. Принцип неразличимости тождественных частиц. Фермионы и бозоны

Если перейти от рассмотрения движения одной микрочастицы (одного электрона) к многоэлектронным системам, то проявляются особые свойства, не имеющие аналога в классической физике. Пусть квантово-механическая система состоит из

одинаковых частиц, например электронов. Все электроны имеют одинаковые физические свойства — массу, электрический заряд, спин и другие внутренние характеристики (например, квантовые числа). Такие частицы называют **тождественными.**

Необычные свойства системы одинаковых тождественных частиц проявляются в *фундаментальном* принципе квантовой механики — **принципе неразличимости тождественных частиц,** согласно которому невозможно экспериментально различить тождественные частицы.

В классической механике даже одинаковые частицы можно различить по положению в пространстве и импульсам. Если частицы в какой-то момент времени пронумеровать, то в следующие моменты времени можно проследить за траекторией любой из них. Классические частицы, таким образом, обладают индивидуальностью, поэтому классическая механика систем из одинаковых частиц принципиально не отличается от классической механики систем из различных частиц.

В квантовой механике положение иное. Из соотношения неопределенностей вытекает, что для микрочастиц вообще неприменимо понятие траектории; состояние микрочастицы описывается волновой функцией, позволяющей вычислять лишь вероятность ($|\psi|^2$) нахождения микрочастицы в окрестностях той или иной точки пространства. Если же волновые функции двух тождественных частиц в пространстве перекрываются, то разговор о том, какая частица находится в данной области, вообще лишен смысла: можно лишь говорить о вероятности нахождения в данной области одной из тождественных частиц. Таким образом, в квантовой механике тождественные частицы полностью теряют свою индивидуальность и становятся неразличимыми. Следует подчеркнуть, что принцип неразличимости тождественных частиц не является просто следствием вероятностной интерпретации волновой функции, а вводится в квантовую механику как новый принцип, который, как уже указывалось, является фундаментальным.

Принимая во внимание физический смысл величины $|\psi|^2$, принцип неразличимости тождественных частиц можно записать в виде

$$|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_2, x_1)|^2, \quad (226.1)$$

где $x_1$ и $x_2$ — соответственно совокупность пространственных и спиновых координат первой и второй частиц. Из выражения (226.1) вытекает, что возможны два случая:

$$\psi(x_1, x_2) = \pm\psi(x_2, x_1),$$

т. е. принцип неразличимости тождественных частиц ведет к определенному свойству симметрии волновой функции. Если при перемене частиц местами волновая функция не меняет знака, то она называется **симметричной**, если меняет — **антисимметричной.** Изменение знака волновой функции не означает изменения состояния, так как физический смысл имеет лишь квадрат модуля волновой функции. В квантовой механике доказывается, что характер симметрии волновой функции не меняется со временем. Это же является доказательством того, что свойство симметрии или антисимметрии — признак данного типа микрочастиц.

Установлено, что симметрия или антисимметрия волновых функций определяется спином частиц. В зависимости от характера симметрии все элементарные частицы и построенные из них системы (атомы, молекулы) делятся на два класса. Частицы с полуцелым спином (например, электроны, протоны, нейтроны) описываются антисимметричными волновыми функциями и подчиняются статистике Ферми — Дирака; эти частицы называются **фермионами.** Частицы с нулевым или целочисленным спином (например, $\pi$-мезоны, фотоны) описываются симметричными волновыми функциями и подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна; эти частицы называются **бозонами.** Сложные частицы (например, атомные ядра), составленные из нечетного числа фермионов, являются фермионами (суммарный спин — полуцелый), а из четного — бозонами (суммарный спин целый).

Зависимость характера симметрии волновых функций системы тождественных частиц от спина частиц теоретически обос-

нована швейцарским физиком В. Паули (1900—1958), что явилось еще одним доказательством того, что спин является фундаментальной характеристикой микрочастиц.

## § 227. Принцип Паули. Распределение электронов в атоме по состояниям

Если тождественные частицы имеют одинаковые квантовые числа, то их волновая функция симметрична относительно перестановки частиц. Отсюда следует, что два одинаковых фермиона, входящих в одну систему, не могут находиться в одинаковых состояниях, так как для фермионов волновая функция должна быть антисимметричной. Обобщая опытные данные, В. Паули сформулировал принцип, согласно которому системы фермионов встречаются в природе только в состояниях, описываемых антисимметричными волновыми функциями (квантово-механическая формулировка **принципа Паули**).

Из этого положения вытекает более простая формулировка принципа Паули, которая и была введена им в квантовую теорию (1925) еще до построения квантовой механики: в системе одинаковых фермионов любые два из них не могут одновременно находиться в одном и том же состоянии. Отметим, что число однотипных бозонов, находящихся в одном и том же состоянии, не лимитируется.

Напомним, что состояние электрона в атоме однозначно определяется набором четырех квантовых чисел:

главного $n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$),

орбитального $l$ ($l=0, 1, 2, \ldots, n-1$),

магнитного $m_l$ ($m_l=-l, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +l$),

магнитного спинового $m_s$ ($m_s=+{}^1/_2, -{}^1/_2$).

Распределение электронов в атоме подчиняется принципу Паули, который может быть использован в его простейшей формулировке: в одном и том же атоме не может быть более одного электрона с одинаковым набором четырех квантовых чисел $n$, $l$, $m_l$ и $m_s$, т. е.

$$Z(n, l, m_l, m_s)=0 \text{ или } 1,$$

где $Z(n, l, m_l, m_s)$ — число электронов, находящихся в квантовом состоянии, описываемом набором четырех квантовых чисел: $n$, $l$, $m_l$, $m_s$. Таким образом, принцип Паули утверждает, что два электрона, связанные в одном и том же атоме, различаются значениями по крайней мере одного квантового числа.

Согласно формуле (223.8), данному $n$ соответствует $n^2$ различных состояний, отличающихся значениями $l$ и $m_l$. Квантовое число $m_s$ может принимать лишь два значения ($\pm{}^1/_2$). Поэтому максимальное

Таблица 6

| Главное квантовое число $n$ | 1 | 2 | | 3 | | | 4 | | | | 5 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Символ оболочки | $K$ | $L$ | | $M$ | | | $N$ | | | | $O$ | | | | |
| Максимальное число электронов в оболочке | 2 | 8 | | 18 | | | 32 | | | | 50 | | | | |
| Орбитальное квантовое число $l$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Символ подоболочки | $1s$ | $2s$ | $2p$ | $3s$ | $3p$ | $3d$ | $4s$ | $4p$ | $4d$ | $4f$ | $5s$ | $5p$ | $5d$ | $5f$ | $5g$ |
| Максимальное число электронов в подоболочке | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | 10 | 14 | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 |

число электронов, находящихся в состояниях, определяемых данным главным квантовым числом, равно

$$Z(n)=\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1)=2n^2.$$

Совокупность электронов в многоэлектронном атоме, имеющих одно и то же главное квантовое число $n$, называют **электронной оболочкой.** В каждой из оболочек электроны распределяются по **подоболочкам**, соответствующим данному $l$. Поскольку орбитальное квантовое число принимает значения от 0 до $n-1$, число подоболочек равно порядковому номеру $n$ оболочки. Количество электронов в подоболочке определяется магнитным и магнитным спиновым квантовыми числами: максимальное число электронов в подоболочке с данным $l$ равно $2(2l+1)$. Обозначения оболочек, а также распределение электронов по оболочкам и подоболочкам представлены в табл. 6.

## § 228. Периодическая система элементов Менделеева

Принцип Паули, лежащий в основе систематики заполнения электронных состояний в атомах, позволяет объяснить **Периодическую систему элементов Д. И. Менделеева** (1869) — *фундаментального закона* природы, являющегося основой современной химии, атомной и ядерной физики.

Д. И. Менделеев ввел понятие порядкового номера $Z$ химического элемента, равного числу протонов в ядре и соответственно общему числу электронов в электронной оболочке атома. Расположив химические элементы по мере возрастания порядковых номеров, он получил периодичность в изменении химических свойств элементов. Однако для известных в то время 64 химических элементов некоторые клетки таблицы оказались незаполненными, так как соответствующие им элементы (например, Ga, Se, Ge) тогда еще не были известны. Д. И. Менделеев, таким образом, не только правильно расположил известные элементы, но и предсказал существование новых, еще не открытых, элементов и их основные свойства. Кроме того, Д. И. Менделееву удалось уточнить атомные веса некоторых элементов. Например, атомные веса Be и U, вычисленные на основе таблицы Менделеева, оказались правильными, а полученные ранее экспериментально — ошибочными.

Так как химические и некоторые физические свойства элементов объясняются внешними (валентными) электронами в атомах, то периодичность свойств химических элементов должна быть связана с определенной периодичностью в расположении электронов в атомах. Поэтому для объяснения таблицы будем считать, что каждый последующий элемент образован из предыдущего прибавлением к ядру одного протона и соответственно прибавлением одного электрона в электронной оболочке атома. Взаимодействием электронов пренебрегаем, внося, где это необходимо, соответствующие поправки. Рассмотрим атомы химических элементов, находящиеся в основном состоянии.

Единственный электрон атома водорода находится в состоянии $1s$, характеризуемом квантовыми числами $n=1$, $l=0$, $m_l=0$ и $m_s=\pm{}^1/_2$ (ориентация его спина произвольна). Оба электрона атома He находятся в состоянии $1s$, но с антипараллельной ориентацией спина. Электронная конфигурация для атома He записывается как $1s^2$ (два $1s$-электрона). На атоме He заканчивается заполнение $K$-оболочки, что соответствует завершению I периода Периодической системы элементов Менделеева (табл. 7).

Третий электрон атома Li ($Z=3$), согласно принципу Паули, уже не может разместиться в целиком заполненной $K$-оболочке и занимает наинизшее энергетическое состояние с $n=2$ ($L$-оболочка), т. е. $2s$-состояние. Электронная конфигурация для атома Li: $1s^22s$. Атомом Li начинается II период Периодической системы элементов. Четвертым электроном Be ($Z=4$) заканчивается заполнение подоболочки $2s$. У следующих шести элементов от B ($Z=5$) до Ne ($Z=10$) идет заполнение подоболочки $2p$ (табл. 7). II период Периодической системы заканчивается неоном — инертным газом, для которого подоболочка $2p$ полностью заполнена.

Таблица 7

| Период | $Z$ | Элемент | $K$ | $L$ | | $M$ | | | $N$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $1s$ | $2s$ | $2p$ | $3s$ | $3p$ | $3d$ | $4s$ | $4p$ | $4d$ | $4f$ |
| I | 1 | H | 1 | | | | | | | | | |
| | 2 | He | 2 | | | | | | | | | |
| II | 3 | Li | 2 | 1 | | | | | | | | |
| | 4 | Be | 2 | 2 | | | | | | | | |
| | 5 | B | 2 | 2 | 1 | | | | | | | |
| | 6 | C | 2 | 2 | 2 | | | | | | | |
| | 7 | N | 2 | 2 | 3 | | | | | | | |
| | 8 | O | 2 | 2 | 4 | | | | | | | |
| | 9 | F | 2 | 2 | 5 | | | | | | | |
| | 10 | Ne | 2 | 2 | 6 | | | | | | | |
| III | 11 | Na | 2 | 2 | 6 | 1 | | | | | | |
| | 12 | Mg | 2 | 2 | 6 | 2 | | | | | | |
| | 13 | Al | 2 | 2 | 6 | 2 | 1 | | | | | |
| | 14 | Si | 2 | 2 | 6 | 2 | 2 | | | | | |
| | 15 | P | 2 | 2 | 6 | 2 | 3 | | | | | |
| | 16 | S | 2 | 2 | 6 | 2 | 4 | | | | | |
| | 17 | Cl | 2 | 2 | 6 | 2 | 5 | | | | | |
| | 18 | Ar | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | | | | | |
| IV | 19 | K | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | — | 1 | | | |
| | 20 | Ca | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | — | 2 | | | |
| | 21 | Sc | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 1 | 2 | | | |
| | 22 | Ti | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 2 | | | |
| | 23 | V | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 3 | 2 | | | |
| | 24 | Cr | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 5 | 1 | | | |
| | 25 | Mg | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 5 | 2 | | | |
| | 26 | Fe | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 6 | 2 | | | |
| | 27 | Co | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 7 | 2 | | | |
| | 28 | Ni | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 8 | 2 | | | |
| | 29 | Cu | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 10 | 1 | | | |
| | 30 | Zn | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 10 | 2 | | | |
| | 31 | Ga | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 10 | 2 | 1 | | |
| | 32 | Ge | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 10 | 2 | 2 | | |
| | 33 | As | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 10 | 2 | 3 | | |
| | 34 | Se | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 10 | 2 | 4 | | |
| | 35 | Br | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 10 | 2 | 5 | | |
| | 36 | Kr | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 10 | 2 | 6 | | |

Одиннадцатый электрон Na ($Z=11$) размещается в $M$-оболочке ($n=3$), занимая наинизшее состояние $3s$. Электронная конфигурация имеет вид $1s^2 2s^2 2p^6 3s$. $3s$-электрон (как и $2s$-электрон Li) является валентным электроном, поэтому оптические свойства Na подобны свойствам Li. С $Z=12$ идет последовательное заполнение $M$-оболочки. Ar ($Z=18$) оказывается подобным He и Ne: в его наружной оболочке все $s$- и $p$-состояния заполнены. Ar является химически инертным и завершает III период Периодической системы.

Девятнадцатый электрон K ($Z=19$) должен был бы занять $3d$-состояние в $M$-оболочке. Однако и в оптическом, и в химическом отношениях атом K схож с атомами Li и Na, которые имеют внешний валентный электрон в $s$-состоянии. Поэтому 19-й валентный электрон K должен также находиться в $s$-состоянии, но это может быть только $s$-состояние новой оболочки ($N$-оболочки), т. е. заполнение $N$-оболочки для K начинается при незаполненной $M$-оболочке. Это означает, что в результате взаимодействия электронов состояние $n=4$, $l=0$ имеет меньшую энергию, чем состояние $n=3$, $l=2$. Спектроскопические и химические свойства Ca ($Z=20$) показывают, что его 20-й электрон также находится в $4s$-состоянии $N$-оболочки. В последующих элементах происходит заполнение $M$-оболочки (от Sc ($Z=21$) до Zn ($Z=30$)). Далее $N$-оболочка заполняется до Kr ($Z=36$), у которого опять-таки, как и в случае Ne и Ar, $s$- и $p$-состояния наружной оболочки заполнены полностью. Криптоном заканчивается IV период Периодической системы.

Подобные рассуждения применимы и к остальным элементам таблицы Менделеева, однако эти данные можно найти в справочниках. Отметим лишь, что и начальные элементы последующих периодов Rb, Cs, Fr являются щелочными металлами, а их последний электрон находится в $s$-состоянии. Кроме того, атомы инертных газов (He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn) занимают в таблице особое положение — в каждом из них $s$- и $p$-состояния наружной оболочки полностью заполнены и ими завершаются очередные периоды Периодической системы.

Каждую из двух групп элементов — лантаниды (от лантана ($Z=57$) до лютеция ($Z=71$)) и актиниды (от актиния ($Z=89$) до лоуренсия ($Z=103$)) — приходит-

ся помещать в одну клетку таблицы, так как химические свойства элементов в пределах этих групп очень близки. Это объясняется тем, что для лантанидов заполнение подоболочки $4f$, которая может содержать 14 электронов, начинается лишь после того, как полностью заполнятся подоболочки $5s$, $5p$ и $6s$. Поэтому для этих элементов внешняя $P$-оболочка ($6s^2$) оказывается одинаковой. Аналогично, одинаковой для актинидов является $Q$-оболочка ($7s^2$).

Таким образом, открытая Менделеевым периодичность в химических свойствах элементов объясняется повторяемостью в структуре внешних оболочек у атомов родственных элементов. Так, инертные газы имеют одинаковые внешние оболочки из 8 электронов (заполненные $s$- и $p$-состояния); во внешней оболочке щелочных металлов (Li, Na, K, Rb, Cs, Fr) имеется лишь один $s$-электрон; во внешней оболочке щелочно-земельных металлов (Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Ra) имеется два $s$-электрона; галоиды (F, Cl, Br, I, At) имеют внешние оболочки, в которых недостает одного электрона до оболочки инертного газа, и т. д.

## § 229. Рентгеновские спектры

Большую роль в выяснении строения атома, а именно распределения электронов по оболочкам, сыграло излучение, открытое в 1895 г. немецким физиком В. Рентгеном (1845—1923) и названное **рентгеновским**. Наиболее распространенным источником рентгеновского излучения является рентгеновская трубка, в которой сильно ускоренные электрическим полем электроны бомбардируют анод (металлическая мишень из тяжелых металлов, например W или Pt), испытывая на нем резкое торможение. При этом возникает рентгеновское излучение, представляющее собой электромагнитные волны с длиной волны примерно $10^{-12}$—$10^{-8}$ м. Волновая природа рентгеновского излучения доказана опытами по его дифракции, рассмотренными в § 182.

Исследование спектрального состава рентгеновского излучения показывает, что

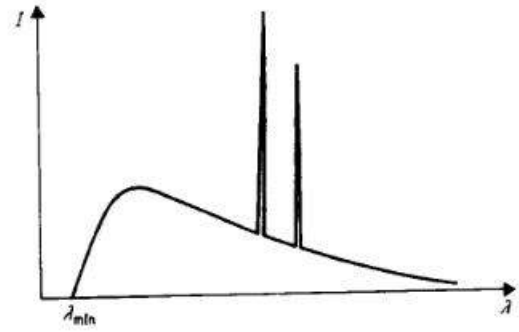



Рис. 306

его спектр имеет сложную структуру (рис. 306) и зависит как от энергии электронов, так и от материала анода. Спектр представляет собой наложение сплошного спектра, ограниченного со стороны коротких длин волн некоторой границей $\lambda_{min}$, называемой **границей сплошного спектра**, и линейчатого спектра — совокупности отдельных линий, появляющихся на фоне сплошного спектра.

Исследования показали, что характер сплошного спектра совершенно не зависит от материала анода, а определяется только энергией бомбардирующих анод электронов. Детальное исследование свойств этого излучения показало, что оно испускается бомбардирующими анод электронами в результате их торможения при взаимодействии с атомами мишени. Сплошной рентгеновский спектр поэтому называют **тормозным спектром**. Этот вывод находится в согласии с классической теорией излучения, так как при торможении движущихся зарядов должно действительно возникать излучение со сплошным спектром.

Из классической теории, однако, не вытекает существование коротковолновой границы сплошного спектра. Из опытов следует, что чем больше кинетическая энергия электронов, вызывающих тормозное рентгеновское излучение, тем меньше $\lambda_{min}$. Это обстоятельство, а также наличие самой границы объясняются квантовой теорией. Очевидно, что предельная энергия кванта соответствует такому случаю торможения, при котором вся кинетическая энергия электрона переходит в энер-

гию кванта, т. е.

$$E_{max}=h\nu_{max}=eU,$$

где $U$ — разность потенциалов, за счет которой электрону сообщается энергия $E_{max}$, $\nu_{max}$ — частота, соответствующая границе сплошного спектра. Отсюда граничная длина волны

$$\lambda_{min}=c/\nu_{max}=ch/(eU)=ch/E_{max}, \qquad (229.1)$$

что полностью соответствует экспериментальным данным. Измеряя границу рентгеновского сплошного спектра, по формуле (229.1) можно определить экспериментальное значение постоянной Планка $h$, которое наиболее точно совпадает с современными данными.

При достаточно большой энергии бомбардирующих анод электронов на фоне сплошного спектра появляются отдельные резкие линии — линейчатый спектр, определяемый материалом анода и называемый потому **характеристическим рентгеновским спектром (излучением)**.

По сравнению с оптическими спектрами характеристические рентгеновские спектры элементов совершенно однотипны и состоят из нескольких серий, обозначаемых $K$, $L$, $M$, $N$ и $O$. Каждая серия, в свою очередь, содержит небольшой набор отдельных линий, обозначаемых в порядке убывания длины волны индексами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... ($K_\alpha$, $K_\beta$, $K_\gamma$, ..., $L_\alpha$, $L_\beta$, $L_\gamma$, ...). При переходе от легких элементов к тяжелым структура характеристического спектра не изменяется, лишь весь спектр смещается в сторону коротких волн. Особенность этих спектров заключается в том, что атомы каждого химического элемента, независимо от того, находятся ли они в свободном состоянии или входят в химическое соединение, обладают определенным, присущим только данному элементу линейчатым спектром характеристического излучения. Так, если анод состоит из нескольких элементов, то и характеристическое рентгеновское излучение представляет собой наложение спектров этих элементов.

Рассмотрение структуры и особенностей характеристических рентгеновских спектров приводит к выводу, что их возникновение связано с процессами, происходящими во внутренних, застроенных электронных оболочках атомов, которые имеют сходное строение.

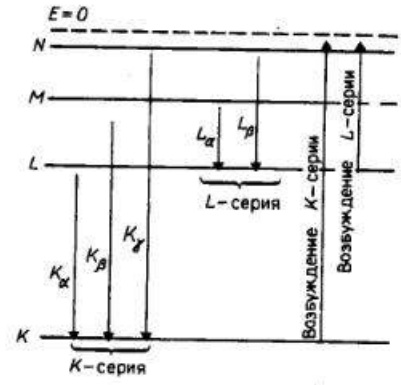



Рис. 307

Разберем механизм возникновения рентгеновских серий, который схематически показан на рис. 307. Предположим, что под влиянием внешнего электрона или высокоэнергетического фотона вырывается один из двух электронов $K$-оболочки атома. Тогда на его место может перейти электрон с более удаленных от ядра оболочек $L$, $M$, $N$, ... . Такие переходы сопровождаются испусканием рентгеновских квантов и возникновением спектральных линий $K$-серии: $K_\alpha$ ($L\to K$), $K_\beta$ ($M\to K$), $K_\gamma$ ($N\to K$) и т. д. Самой длинноволновой линией $K$-серии является линия $K_\alpha$. Частоты линий возрастают в ряду $K_\alpha\to K_\beta\to K_\gamma$, поскольку энергия, высвобождаемая при переходе электрона на $K$-оболочку с более удаленных оболочек, увеличивается. Наоборот, интенсивности линий в ряду $K_\alpha\to K_\beta\to K_\gamma$ убывают, так как вероятность переходов электронов с $L$-оболочки на $K$-оболочку больше, чем с более удаленных оболочек $M$ и $N$. $K$-серия сопровождается обязательно другими сериями, так как при испускании ее линий появляются вакансии в оболочках $L$, $M$, ..., которые будут заполняться электронами, находящимися на более высоких уровнях.

Аналогично возникают и другие серии, наблюдаемые, впрочем, только для тяжелых элементов. Рассмотренные линии характеристического излучения могут иметь тонкую структуру, поскольку уровни, опре-

деляемые главным квантовым числом, расщепляются согласно значениям орбитального и магнитного квантовых чисел.

Исследуя рентгеновские спектры элементов, английский физик Г. Мозли (1887—1915) установил в 1913 г. соотношение, называемое **законом Мозли**:

$$\nu = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right), \quad (229.2)$$

где $\nu$ — частота, соответствующая данной линии характеристического рентгеновского излучения, $R$ — постоянная Ридберга, $\sigma$ — постоянная экранирования, $m=1, 2, 3, \ldots$ (определяет рентгеновскую серию), $n$ принимает целочисленные значения с $m+1$ (определяет отдельную линию соответствующей серии). Закон Мозли (229.2) подобен обобщенной формуле Бальмера (209.3) для атома водорода.

Смысл постоянной экранирования заключается в том, что на электрон, совершающий переход, соответствующий некоторой линии, действует не весь заряд ядра $Ze$, а заряд $(Z-\sigma)e$, ослабленный экранирующим действием других электронов. Например, для $K_\alpha$-линии $\sigma=1$, и закон Мозли запишется в виде

$$\nu = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right).$$

## § 230. Молекулы: химические связи, понятие об энергетических уровнях

Молекула — наименьшая частица вещества, состоящая из одинаковых или различных атомов, соединенных между собой химическими связями, и являющаяся носителем его основных химических и физических свойств. Химические связи обусловлены взаимодействием внешних, валентных электронов атомов. Наиболее часто в молекулах встречается два типа связи: **ионная и ковалентная** (см. § 71).

Ионная связь (например, в молекулах NaCl, KBr) осуществляется электростатическим взаимодействием атомов при переходе электрона одного атома к другому, т. е. при образовании положительного и отрицательного ионов. Ковалентная связь (например, в молекулах $H_2$, $C_2$, CO) осуществляется при обобществлении валентных электронов двумя соседними атомами (спины валентных электронов должны быть антипараллельны). Ковалентная связь объясняется на основе принципа неразличимости тождественных частиц (см. § 226), например электронов в молекуле водорода. Неразличимость частиц приводит к специфическому взаимодействию между ними, называемому **обменным взаимодействием**. Это чисто квантовый эффект, не имеющий классического объяснения, но его можно себе представить так, что электрон каждого из атомов молекулы водорода проводит некоторое время у ядра другого атома и, следовательно, осуществляется связь обоих атомов, образующих молекулу. При сближении двух водородных атомов до расстояний порядка боровского радиуса возникает их взаимное притяжение и образуется устойчивая молекула водорода.

Молекула является квантовой системой; она описывается уравнением Шредингера, учитывающим движение электронов в молекуле, колебания атомов молекулы, вращение молекулы. Решение этого уравнения — очень сложная задача, которая обычно разбивается на две: для электронов и ядер.

Энергия изолированной молекулы

$$E \approx E_{эл} + E_{кол} + E_{вращ}, \quad (230.1)$$

где $E_{эл}$ — энергия движения электронов относительно ядер, $E_{кол}$ — энергия колебаний ядер (в результате которых периодически изменяется относительное положение ядер), $E_{вращ}$ — энергия вращения ядер (в результате которых периодически изменяется ориентация молекулы в пространстве). В формуле (230.1) не учтены энергия поступательного движения центра масс молекулы и энергия ядер атомов в молекуле. Первая из них не квантуется, поэтому ее изменения не могут привести к возникновению молекулярного спектра, а вторую можно не учитывать, если не рассматривать сверхтонкую структуру спектральных линий. Отношения $E_{эл}:E_{кол}:E_{вращ}=1:\sqrt{m/M}:m/M$, где $m$ —

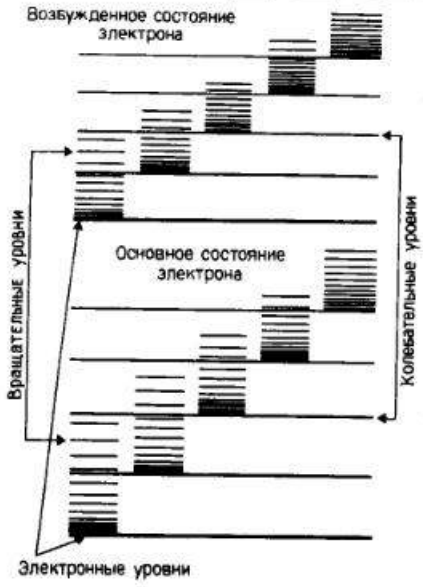



**Рис. 308**

масса электрона, $M$ — величина порядка массы ядер атомов в молекуле, $m/M \approx \approx 10^{-5} \div 10^{-3}$. Поэтому $E_{эл} \gg E_{кол} \gg E_{вращ}$. Доказано, что $E_{эл} \approx 1 \div 10$ эВ, $E_{кол} \approx \approx 10^{-2} \div 10^{-1}$ эВ, $E_{вращ} \approx 10^{-5} \div 10^{-3}$ эВ.

Каждая из входящих в выражение (230.1) энергий квантуется (ей соответствует набор дискретных уровней энергии) и определяется квантовыми числами. При переходе из одного энергетического состояния в другое поглощается или испускается энергия $\Delta E = h\nu$. При таких переходах одновременно изменяются энергии движения электронов, энергии колебаний и вращения. Из теории и эксперимента следует, что расстояние между вращательными уровнями энергии $\Delta E_{вращ}$ гораздо меньше расстояния между колебательными уровнями $\Delta E_{кол}$, которое, в свою очередь, меньше расстояния между электронными уровнями $\Delta E_{эл}$. На рис. 308 схематически представлены уровни энергии двухатомной молекулы (для примера рассмотрены только два электронных уровня — показаны жирными линиями).

Как будет показано в § 231 структура энергетических уровней молекул определяет их спектр излучения, возникающий при квантовых переходах между соответствующими энергетическими уровнями.

## § 231. Молекулярные спектры. Комбинационное рассеяние света

Строение молекул и свойства их энергетических уровней проявляются в **молекулярных спектрах** — спектрах излучения (поглощения), возникающих при квантовых переходах между уровнями энергии молекул. Спектр излучения молекулы определяется структурой ее энергетических уровней и соответствующими правилами отбора (так, например, изменение квантовых чисел, соответствующих как колебательному, так и вращательному движению, должно быть равно $\pm 1$).

Итак, при разных типах переходов между уровнями возникают различные типы молекулярных спектров. Частоты спектральных линий, испускаемых молекулами, могут соответствовать переходам с одного электронного уровня на другой **(электронные спектры)** или с одного колебательного (вращательного) уровня на другой **(колебательные (вращательные) спектры)**. Кроме того, возможны и переходы с одними значениями $E_{кол}$ и $E_{вращ}$ на уровни, имеющие другие значения всех трех компонентов, в результате чего возникают **электронно-колебательные и колебательно-вращательные спектры**. Поэтому спектр молекул довольно сложный.

Типичные молекулярные спектры — полосатые, представляющие собой совокупность более или менее узких полос в ультрафиолетовой, видимой и инфракрасной областях. Применяя спектральные приборы высокой разрешающей способности, можно видеть, что полосы представляют собой настолько тесно расположенные линии, что они с трудом разрешаются. Структура молекулярных спектров различна для разных молекул и с увеличением числа атомов в молекуле усложняется (наблюдаются лишь сплошные широкие полосы). Колебательными и вращательными спектрами обладают только многоатомные молекулы, а двухатомные их не имеют. Это объясняется тем, что двухатомные молекулы не имеют дипольных моментов (при колебательных и вращательных переходах отсутствует изменение дипольного момен-

та, что является необходимым условием отличия от нуля вероятности перехода).

В 1928 г. советские ученые Г. С. Ландсберг (1890—1957) и Л. И. Мандельштам и одновременно индийские физики Ч. Раман (1888—1970) и К. Кришнан (р. 1911) открыли явление **комбинационного рассеяния света**. Если на вещество (газ, жидкость, прозрачный кристалл) падает строго монохроматический свет, то в спектре рассеянного света помимо несмещенной спектральной линии обнаруживаются новые линии, частоты которых представляют собой суммы или разности частоты $\nu$ падающего света и частот $\nu_i$ собственных колебаний (или вращений) молекул рассеивающей среды.

Линии в спектре комбинационного рассеяния с частотами $\nu-\nu_i$, меньшими частоты $\nu$ падающего света, называются **стоксовыми (или красными) спутниками**, линии с частотами $\nu+\nu_i$, большими $\nu$,— **антистоксовыми (или фиолетовыми) спутниками**. Анализ спектров комбинационного рассеяния приводит к следующим выводам: 1) линии спутников располагаются симметрично по обе стороны от несмещенной линии; 2) частоты $\nu_i$ не зависят от частоты падающего на вещество света, а определяются только рассеивающим веществом, т. е. характеризуют его состав и структуру; 3) число спутников определяется рассеивающим веществом; 4) интенсивность антистоксовых спутников меньше интенсивности стоксовых и с повышением температуры рассеивающего вещества увеличивается, в то время как интенсивность стоксовых спутников практически от температуры не зависит.

Объяснение закономерностей комбинационного рассеяния света дает квантовая теория. Согласно этой теории, рассеяние света есть процесс, в котором один фотон поглощается и один фотон испускается молекулой. Если энергии фотонов одинаковы, то в рассеянном свете наблюдается несмещенная линия. Однако возможны процессы рассеяния, при которых энергии поглощенного и испущенного фотонов различны. Различие энергий фотонов связано с переходом молекулы из нормального состояния в возбужденное (испущенный фотон будет иметь меньшую частоту — возникает стоксов спутник) либо из возбужденного состояния в нормальное (испущенный фотон будет иметь бóльшую частоту — возникает антистоксов спутник).

Рассеяние света сопровождается переходами молекулы между различными колебательными или вращательными уровнями, в результате чего и возникает ряд симметрично расположенных спутников. Число спутников, таким образом, определяется энергетическим спектром молекул, т. е. зависит только от природы рассеивающего вещества. Так как число возбужденных молекул гораздо меньше, чем число невозбужденных, то интенсивность антистоксовых спутников меньше, чем стоксовых. С повышением температуры число возбужденных молекул растет, в результате чего возрастает и интенсивность антистоксовых спутников.

Молекулярные спектры (в том числе и спектры комбинационного рассеяния света) применяются для исследования строения и свойств молекул, используются в молекулярном спектральном анализе, лазерной спектроскопии, квантовой электронике и т. д.

## § 232. Поглощение, спонтанное и вынужденное излучения

Как отмечалось выше, атомы могут находиться лишь в квантовых состояниях с дискретными значениями энергии $E_1$, $E_2$, $E_3$, ... . Ради простоты рассмотрим только два из этих состояний (*1* и *2*) с энергиями $E_1$ и $E_2$. Если атом находится в основном состоянии *1*, то под действием внешнего излучения может осуществиться вынужденный переход в возбужденное состояние *2* (рис. 309, *а*), приводящий к поглощению излучения. Вероятность подобных переходов пропорциональна плотности излучения, вызывающего эти переходы.

Атом, находясь в возбужденном состоянии *2*, может через некоторый промежуток времени спонтанно, без каких-либо внешних воздействий, перейти в состояние с низшей энергией (в нашем случае в основное), отдавая избыточную

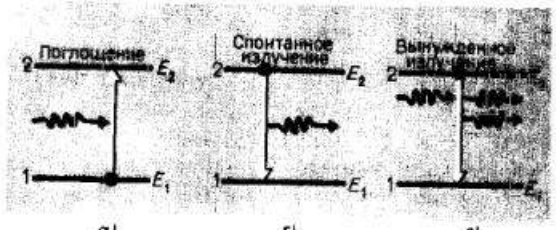



Рис. 309

энергию в виде электромагнитного излучения (испуская фотон с энергией $h\nu = E_2 - E_1$). Процесс испускания фотона возбужденным атомом (возбужденной микросистемой) без каких-либо внешних воздействий называется **спонтанным (или самопроизвольным) излучением** (рис. 309, *б*). Чем больше вероятность спонтанных переходов, тем меньше среднее время жизни атома в возбужденном состоянии. Так как спонтанные переходы взаимно не связаны, то спонтанное излучение некогерентно.

В 1916 г. А. Эйнштейн для объяснения наблюдавшегося на опыте термодинамического равновесия между веществом и испускаемым и поглощаемым им излучением постулировал, что помимо поглощения и спонтанного излучения должен существовать третий, качественно иной тип взаимодействия. Если на атом, находящийся в возбужденном состоянии 2, действует внешнее излучение с частотой, удовлетворяющей условию $h\nu = E_2 - E_1$, то возникает **вынужденный (индуцированный) переход** в основное состояние 1 с излучением фотона той же энергии $h\nu = E_2 - E_1$ (рис. 309, *в*). При подобном переходе происходит излучение атомом фотона *дополнительно* к тому фотону, под действием которого произошел переход. Возникающее в результате таких переходов излучение называется **вынужденным (индуцированным) излучением**. Таким образом, в процесс вынужденного излучения вовлечены два фотона: первичный фотон, вызывающий испускание излучения возбужденным атомом, и вторичный фотон, испущенный атомом. Существенно, что вторичные фотоны *неотличимы* от первичных, являясь *точной их копией*.

В статистической физике известен **принцип детального равновесия**, согласно которому при термодинамическом равновесии каждому процессу можно сопоставить обратный процесс, причем скорость их протекания одинакова. А. Эйнштейн применил этот принцип и закон сохранения энергии для излучения и поглощения электромагнитных волн в случае черного тела. Из условия, что при равновесии полная вероятность испускания (спонтанного и вынужденного) фотонов равна вероятности поглощения фотонов той же частоты, Эйнштейн получил выведенную ранее Планком формулу (200.3).

Эйнштейн и Дирак показали, что вынужденное излучение (вторичные фотоны) *тождественно* вынуждающему излучению (первичным фотонам): оно имеет такую же частоту, фазу, поляризацию и направление распространения, как и вынуждающее излучение. Следовательно, вынужденное излучение *строго когерентно* с вынуждающим излучением, т. е. испущенный фотон неотличим от фотона, падающего на атом.

Испущенные фотоны, двигаясь в одном направлении и встречая другие возбужденные атомы, стимулируют дальнейшие индуцированные переходы, и число фотонов растет лавинообразно. Однако наряду с вынужденным излучением возможен и конкурирующий процесс — поглощение. Поэтому для усиления падающего излучения необходимо, чтобы число актов вынужденного излучения фотонов (оно пропорционально заселенности возбужденных состояний) превышало число актов поглощения фотонов (оно пропорционально заселенности основных состояний). В системе атомов, находящейся в термодинамическом равновесии, поглощение падающего излучения будет преобладать над вынужденным, т. е. падаю-

щее излучение при прохождении через вещество будет ослабляться.

Чтобы среда усиливала падающее на нее излучение, необходимо создать *неравновесное состояние системы*, при котором число атомов в возбужденных состояниях было бы больше, чем их число в основном состоянии. Такие состояния называются **состояниями с инверсией населенностей**. Процесс создания неравновесного состояния вещества (перевод системы в состояние с инверсией населенностей) называется **накачкой**. Накачку можно осуществить оптическими, электрическими и другими способами.

В средах в инверсном состоянии вынужденное излучение может превысить поглощение, вследствие чего падающий пучок света при прохождении через эти среды будет усиливаться (эти среды называются **активными**). В данном случае явление протекает так, как если бы в законе Бугера $I=I_0e^{-\alpha x}$ (см. (187.1)) коэффициент поглощения $\alpha$, зависящий, в свою очередь, от интенсивности излучения, стал отрицательным. Активные среды поэтому можно рассматривать в качестве сред с отрицательным коэффициентом поглощения.

Впервые на возможность получения сред, в которых свет может усиливаться за счет вынужденного излучения, указал в 1939 г. советский физик В. А. Фабрикант, экспериментально обнаружив вынужденное излучение паров ртути, возбужденных при электрическом разряде. Открытие явления усиления электромагнитных волн и изобретенный способ их усиления (В. А. Фабрикант, М. М. Вудынский, Ф. А. Бутаева; авторское свидетельство 1951 г.) легли в основу квантовой электроники, разработавшей «чудо XX в.» — квантовые усилители и квантовые генераторы света.

## § 233. Оптические квантовые генераторы (лазеры)

Практически инверсное состояние среды осуществлено в *принципиально новых* источниках излучения — **оптических квантовых генераторах**, или **лазерах** (от первых букв английского названия Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation — усиление света с помощью вынужденного излучения). Лазеры генерируют в видимой, инфракрасной и ближней ультрафиолетовой областях (в оптическом диапазоне). Идея качественно нового принципа усиления и генерации электромагнитных волн, примененная в **мазерах** (генераторы и усилители, работающие в сантиметровом диапазоне радиоволн) и лазерах, принадлежит советским ученым Н. Г. Басову (р. 1922) и А. М. Прохорову (р. 1916) и американскому физику Ч. Таунсу (р. 1915), удостоенным Нобелевской премии 1964 г.

Важнейшими из существующих типов лазеров являются **твердотельные, газовые, полупроводниковые** и **жидкостные** (в основу такого деления положен тип активной среды). Более точная классификация учитывает также и методы накачки — оптические, тепловые, химические, электроионизационные и др. Кроме того, необходимо принимать во внимание и режим генерации — непрерывный или импульсный.

Лазер обязательно имеет три основных компонента: 1) *активную среду*, в которой создаются состояния с инверсией населенностей; 2) *систему накачки* (устройство для создания инверсии в активной среде); 3) *оптический резонатор* (устройство, выделяющее в пространство избирательное направление пучка фотонов и формирующее выходящий световой пучок).

Первым твердотельным лазером (1960; США), работающим в видимой области спектра (длина волны излучения 0,6943 мкм), был рубиновый лазер (Т. Мейман (р. 1927)). В нем инверсная населенность уровней осуществляется по трехуровневой схеме, предложенной в 1955 г. Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым. Кристалл рубина представляет собой оксид алюминия $Al_2O_3$, в кристаллической решетке которого некоторые из атомов Al замещены трехвалентными ионами $Cr^{3+}$ (0,03 и 0,05 % ионов хрома соответственно для розового и красного рубина). Для оптической накачки используется импульсная газоразрядная лампа. При интенсивном облучении рубина светом мощной им-

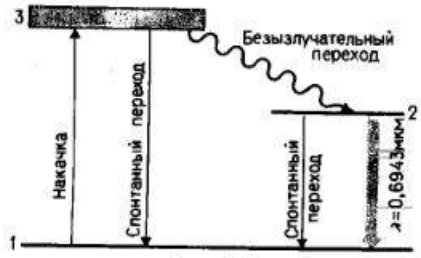



Рис. 310

пульсной лампы атомы хрома переходят с нижнего уровня *1* на уровни широкой полосы *3* (рис. 310). Так как время жизни атомов хрома в возбужденных состояниях мало (меньше $10^{-7}$ с), то осуществляются либо спонтанные переходы *3→1* (они незначительны), либо наиболее вероятные безызлучательные переходы на уровень *2* (он называется метастабильным) с передачей избытка энергии решетке кристалла рубина. Переход *2→1* запрещен правилами отбора, поэтому длительность возбужденного состояния *2* атомов хрома порядка $10^{-3}$ с, т. е. примерно на четыре порядка больше, чем для состояния *3*. Это приводит к «накоплению» атомов хрома на уровне *2*. При достаточной мощности накачки их концентрация на уровне *2* будет гораздо больше, чем на уровне *1*, т. е. возникает среда с инверсной населенностью уровня *2*.

Каждый фотон, случайно родившийся при спонтанных переходах, в принципе может инициировать (порождать) в активной среде множество вынужденных переходов *2→1*, в результате чего появляется целая лавина вторичных фотонов, являющихся копиями первичных. Таким образом и зарождается лазерная генерация. Однако спонтанные переходы носят случайный характер, и спонтанно рождающиеся фотоны испускаются в разных направлениях. Тем самым в самых разных направлениях распространяются и лавины вторичных фотонов. Следовательно, излучение, состоящее из подобных лавин, не может обладать высокими когерентными свойствами.

Для выделения направления лазерной генерации используется принципиально важный элемент лазера — **оптический резонатор**. В простейшем случае им служит пара обращенных друг к другу параллельных (или вогнутых) зеркал на общей оптической оси, между которыми помещается активная среда (кристалл или кювета с газом). Как правило, зеркала изготовляются так, что от одного из них излучение полностью отражается, а второе — полупрозрачно. Фотоны, движущиеся под углами к оси кристалла или кюветы, выходят из активной среды через ее боковую поверхность. Те же из фотонов, которые движутся вдоль оси, многократно отразятся от противоположных торцов, каждый раз вызывая вынужденное испускание вторичных фотонов, которые, в свою очередь, вызовут вынужденное излучение, и т. д. Так как фотоны, возникшие при вынужденном излучении, движутся в том же направлении, что и первичные, то поток фотонов, параллельный оси кристалла или кюветы, будет лавинообразно нарастать. Многократно усиленный поток фотонов выходит через полупрозрачное зеркало, создавая строго направленный световой пучок огромной яркости. Таким образом, оптический резонатор «выясняет» направление (вдоль оси) усиливаемого фотонного потока, формируя тем самым лазерное излучение с высокими когерентными свойствами.

Первым газовым лазером непрерывного действия (1961) был лазер на смеси атомов неона и гелия. Газы обладают узкими линиями поглощения, лампы же излучают свет в широком интервале длин волн; следовательно, применять их в качестве накачки невыгодно, так как используется только часть мощности лампы. Поэтому в газовых лазерах инверсная населенность уровней осуществляется электрическим разрядом, возбуждаемым в газах.

В гелий-неоновом лазере накачка происходит в два этапа: гелий служит носителем энергии возбуждения, а лазерное излучение дает неон. Электроны, образующиеся в разряде, при столкновениях возбуждают атомы гелия, которые переходят в возбужденное состояние *3* (рис. 311). При столкновениях возбужденных атомов гелия с атомами неона происходит их возбуждение и они переходят на один из верхних уровней неона,

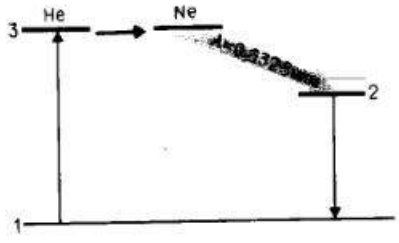



**Рис. 311**

который расположен вблизи соответствующего уровня гелия. Переход атома неона с верхнего уровня *3* на один из нижних уровней *2* приводит к лазерному излучению с $\lambda = 0{,}6328$ мкм.

Лазерное излучение обладает следующими свойствами:

1. *Временна́я и пространственная когерентность* (см. § 171). Время когерентности составляет $10^{-3}$ с, что соответствует длине когерентности порядка $10^5$ м ($l_{ког} = c\tau_{ког}$), т. е. на семь порядков выше, чем для обычных источников света.

2. *Строгая монохроматичность* ($\Delta\lambda < 10^{-11}$ м).

3. *Большая плотность потока энергии.* Если, например, рубиновый стержень при накачке получил энергию $W = 20$ Дж и высветился за $10^{-3}$ с, то поток излучения $\Phi_e = 20/10^{-3}$ Дж/с $= 2 \cdot 10^4$ Вт. Фокусируя это излучение на площади 1 мм$^2$, получим плотность потока энергии $\Phi_e/S = 2 \cdot 10^4/10^{-6}$ Вт/м$^2$ $= 2 \cdot 10^{10}$ Вт/м$^2$.

4. *Очень малое угловое расхождение в пучке.* Например, при использовании специальной фокусировки луч лазера, направленный с Земли, даст на поверхности Луны световое пятно диаметром примерно 3 км (луч прожектора осветил бы поверхность диаметром примерно 40 000 км).

К. п. д. лазеров колеблется в широких пределах — от 0,01 % (для гелий-неонового лазера) до 75 % (для лазера на стекле с неодимом), хотя у большинства лазеров к. п. д. составляет 0,1—1 %. Создан мощный $CO_2$-лазер непрерывного действия, генерирующий инфракрасное излучение ($\lambda = 10{,}6$ мкм), к. п. д. которого (30 %) превосходит к. п. д. существующих лазеров, работающих при комнатной температуре.

Необычные свойства лазерного излучения находят в настоящее время широкое применение.

Применение лазеров для обработки, резания и микросварки твердых материалов оказывается экономически более выгодным (например, пробивание калиброванных отверстий в алмазе лазерным лучом сократило время с 24 ч до 6—8 мин). Лазеры применяются для скоростного и точного обнаружения дефектов в изделиях, для тончайших операций (например, луч $CO_2$-лазера в качестве бескровного хирургического ножа), для исследования механизма химических реакций и влияния на их ход, для получения сверхчистых веществ. Широко применяется лазерное разделение изотопов, например такого важного в энергетическом отношении элемента, как уран.

Одним из важных применений лазеров является получение и исследование высокотемпературной плазмы. Эта область их применения связана с развитием нового направления — лазерного управляемого термоядерного синтеза.

Лазеры широко применяются в измерительной технике. Лазерные интерферометры (в них источником света служит лазер) используются для сверхточных дистанционных измерений линейных перемещений, коэффициентов преломления среды, давления, температуры. Например, рассмотренный выше гелий-неоновый лазер из-за излучения высокой стабильности, направленности и монохроматичности (полоса частот 1 Гц при частоте $10^{14}$ Гц) незаменим при юстировочных и нивелировочных работах. Сила лазера «прощупала» поверхность Луны и помогла советским ученым скорректировать ее карту.

Интересное применение лазеры нашли в голографии (см. § 184). Для создания систем голографической памяти с высокой степенью считывания и большой емкостью необходимы газовые лазеры видимого диапазона еще более высокой монохроматичности и направленности излучения.

Очень перспективны и интересны полупроводниковые лазеры, так как они обладают широким рабочим диапазоном (0,7—

30 мкм) и возможностью плавной перестройки частоты их излучения.

Применения лазеров в настоящее время столь обширны, что даже их перечисление в объеме настоящего курса просто невозможно.

## Контрольные вопросы

- Что характеризуют квантовые числа: главное, орбитальное и магнитное? Какие значения они могут принимать?
- Каковы возможные значения $l$ и $m_l$ для главного квантового числа $n=5$?
- Сколько различных состояний соответствует $n=4$?
- Сравните плотности вероятности обнаружения электрона в основном состоянии атома водорода согласно теории Бора и квантовой механики.
- Почему атом водорода может иметь одно и то же значение энергии, находясь в различных состояниях?
- Каковы правила квантования орбитального механического и собственного механического моментов импульса электрона? их проекций на направление внешнего магнитного поля?
- В чем суть принципа неразличимости тождественных частиц?
- Какие частицы являются бозонами? фермионами? Какие волновые функции описывают их?
- Как изменилась бы структура электронных оболочек атома, если бы электроны были не фермионами, а бозонами?
- Сколько электронов может быть в атоме, у которого в основном состоянии заполнены $K$- и $L$-оболочки, $3s$-подоболочка и два электрона в $3p$-подоболочке? Что это за атом?
- Какие квантовые числа имеет внешний (валентный) электрон в основном состоянии атома натрия?
- Записать электронную конфигурацию для атомов: 1) неона; 2) никеля; 3) германия.
- Как объяснить происхождение коротковолновой границы спектра тормозного рентгеновского излучения?
- Почему тормозное рентгеновское излучение имеет сплошной спектр, а характеристическое — линейчатый?
- В чем причина значительного различия оптического и характеристического рентгеновского спектров атома?
- Какая из трех линий характеристического рентгеновского спектра — $K_\beta$, $K_\alpha$, $L_\beta$ — самая коротковолновая? самая интенсивная?
- Какое условие необходимо для возникновения вынужденного излучения в веществе?
- Почему одним из обязательных компонентов лазера является оптический резонатор?

## Задачи

**29.1.** Определить, сколько различных волновых функций соответствует главному квантовому числу $n=5$. [25]

**29.2.** Построить и объяснить диаграмму, иллюстрирующую расщепление энергетических уровней и спектральных линий (с учетом правил отбора) при переходах между состояниями с $l=2$ и $l=1$. ($d\to p$-переход).

**29.3.** Принимая, что уравнению Шредингера для $1s$-состояния электрона в атоме водорода удовлетворяет функция $\psi=Ce^{-r/a}$ ($C$ — некоторая постоянная), показать, что $a=\hbar^2 4\pi\varepsilon_0/(me^2)$, равная первому боровскому радиусу. Учесть, что $1s$-состояние сферически-симметрично.

**29.4.** Электрон в атоме находится в $f$-состоянии. Определить: 1) момент импульса (орбитальный) $L_e$ электрона; 2) максимальное значение проекции момента импульса $L_{ez_{max}}$ на направление внешнего магнитного поля. [1) $3{,}46\hbar$; 2) $3\hbar$]

**29.5.** Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число $n=3$. Определить число электронов в этой оболочке, которые имеют одинаковые следующие квантовые числа: 1) $m_s=\frac{1}{2}$ и $l=2$; 2) $m_s=-\frac{1}{2}$ и $m_l=0$. [1) 5; 2) 3]

**29.6.** Минимальная длина волны рентгеновского излучения, полученного от трубки, работающей при напряжении 50 кВ, равна 24,8 пм. Определить по этим данным постоянную Планка. [$6{,}61\cdot10^{-34}$ Дж·с]

**29.7.** Определить самую длинноволновую линию $K$ серии характеристического рентгеновского спектра, если анод рентгеновской трубки изготовлен из платины. Постоянную экранирования принять равной единице. [20 пм]

# Глава 30
# Элементы квантовой статистики

## § 234. Квантовая статистика. Фазовое пространство. Функция распределения

**Квантовая статистика** — раздел статистической физики, исследующий системы, которые состоят из огромного числа частиц, подчиняющихся законам квантовой механики.

В отличие от исходных положений классической статистической физики, в которой тождественные частицы различимы (частицу можно отличить от всех таких же частиц), квантовая статистика основывается на принципе неразличимости тождественных частиц (см. § 226). При этом оказывается, как будет показано ниже, что коллективы частиц с целым и полуцелым спинами подчиняются разным статистикам.

Пусть система состоит из $N$ частиц. Введем в рассмотрение многомерное пространство всех координат и импульсов частиц системы. Тогда состояние системы определяется заданием $6N$ переменных, так как состояние каждой частицы определяется тройкой координат $x$, $y$, $z$ и тройкой соответствующих проекций импульса $p_x$, $p_y$, $p_z$. Соответственно число «взаимно перпендикулярных» координатных осей данного пространства равно $6N$. Это $6N$-мерное пространство называется **фазовым пространством**. Каждому микросостоянию системы отвечает точка в $6N$-мерном фазовом пространстве, так как задание точки фазового пространства означает задание координат и импульсов всех частиц системы. Разобьем фазовое пространство на малые $6N$-мерные элементарные ячейки объемом $dq\,dp=dq_1\,dq_2...dq_{3N}\,dp_1\,dp_2...dp_{3N}$, где $q$ — совокупность координат всех частиц, $p$ — совокупность проекций их импульсов. Корпускулярно-волновой дуализм свойств вещества (см. § 213) и соотношение неопределенностей Гейзенберга (см. § 215) приводят к выводу, что объем элементарной ячейки (он называется **фазовым объемом**) не может быть меньше чем $h^3$ ($h$ — постоянная Планка).

Вероятность $dW$ данного состояния системы можно представить с помощью функции распределения $f(q, p)$:

$$dW=f(q, p)\,dq\,dp. \qquad (234.1)$$

Здесь $dW$ — вероятность того, что точка фазового пространства попадет в элемент фазового объема $dq\,dp$, расположенного вблизи данной точки $q$, $p$. Иными словами, $dW$ представляет собой вероятность того, что система находится в состоянии, в котором ее координаты и импульсы заключены в интервале $q$, $q+dq$ и $p$, $p+dp$.

Согласно формуле (234.1), функция распределения есть не что иное, как плотность вероятности определенного состояния системы. Поэтому она должна быть нормирована на единицу:

$$\int f(q, p)\,dq\,dp=1,$$

где интегрирование производится по всему фазовому пространству.

Зная функцию распределения $f(q, p)$,

можно решить основную задачу квантовой статистики — определить средние значения величин, характеризующих рассматриваемую систему. Среднее значение любой функции

$$\langle L(q, p)\rangle = \int L(q, p) f(q, p)\, dq\, dp. \quad (234.2)$$

Если иметь дело не с координатами и импульсами, а с энергией, которая квантуется, то состояние системы характеризуется не непрерывной, а дискретной функцией распределения.

Явное выражение функции распределения в самом общем виде получил американский физик Д. Гиббс (1839—1903). Оно называется **каноническим распределением Гиббса**. В квантовой статистике каноническое распределение Гиббса имеет вид

$$f(E_n) = Ae^{-E_n/(kT)}, \quad (234.3)$$

где $A$ — постоянная, определяемая из условия нормировки к единице, $n$ — совокупность всех квантовых чисел, характеризующих данное состояние. Подчеркнем, что $f(E_n)$ есть именно вероятность данного состояния, а не вероятность того, что система имеет определенное значение энергии $E_n$, так как данной энергии может соответствовать не одно, а несколько различных состояний (может иметь место вырождение).

## § 235. Понятие о квантовой статистике Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака

Одним из важнейших «объектов» изучения квантовой статистики, как и классической, является идеальный газ. Это связано с тем, что во многих случаях реальную систему можно в хорошем приближении считать идеальным газом. Состояние системы невзаимодействующих частиц задается с помощью так называемых **чисел заполнения** $N_i$ — чисел, указывающих степень заполнения квантового состояния (характеризуется данным набором $i$ квантовых чисел) частицами системы, состоящей из многих тождественных частиц. Для систем частиц, образованных бозонами — частицами с нулевым или целым спином (см. § 226), числа заполнения могут принимать любые целые значения: 0, 1, 2, ... (см. § 227). Для систем частиц, образованных фермионами — частицами с полуцелым спином (см. § 226), числа заполнения могут принимать лишь два значения: 0 для свободных состояний и 1 для занятых (см. § 227). Сумма всех чисел заполнения должна быть равна числу частиц системы. Квантовая статистика позволяет подсчитать среднее число частиц в данном квантовом состоянии, т. е. определить средние числа заполнения $\langle N_i\rangle$.

Идеальный газ из бозонов — **бозе-газ** — описывается **квантовой статистикой Бозе — Эйнштейна** *. Распределение бозонов по энергиям вытекает из так называемого **большого канонического распределения Гиббса** (с переменным числом частиц) при условии, что число тождественных бозонов в данном квантовом состоянии может быть любым (см. § 227):

$$\langle N_i\rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)} - 1}. \quad (235.1)$$

Это распределение называется **распределением Бозе — Эйнштейна**. Здесь $\langle N_i\rangle$ — среднее число бозонов в квантовом состоянии с энергией $E_i$, $k$ — постоянная Больцмана, $T$ — термодинамическая температура, $\mu$ — **химический потенциал**; $\mu$ не зависит от энергии, а определяется только температурой и плотностью числа частиц. Химический потенциал находится обычно из условия, что сумма всех $\langle N_i\rangle$ равна полному числу частиц в системе. Здесь $\mu \leqslant 0$, так как иначе среднее число частиц в данном квантовом состоянии отрицательно, что не имеет физического смысла. Он определяет изменение внутренней энергии системы при добавлении к ней одной частицы при условии, что все остальные величины, от которых зависит внутренняя энергия (энтропия, объем), фиксированы.

Идеальный газ из фермионов — **ферми-газ** — описывается **квантовой статистикой Ферми — Дирака** **. Распределе-

* Д. Бозе (1858—1937) — индийский физик.

**Э. Ферми (1901—1954) — итальянский физик.

ние фермионов по энергиям имеет вид

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)}+1}, \quad (235.2)$$

где $\langle N_i \rangle$ — среднее число фермионов в квантовом состоянии с энергией $E_i$, $\mu$ — химический потенциал. В отличие от (235.1) $\mu$ может иметь положительное значение (это не приводит к отрицательным значениям чисел $\langle N_i \rangle$). Это распределение называется **распределением Ферми — Дирака.**

Если $e^{(E_i-\mu)/(kT)} \gg 1$, то распределения Бозе — Эйнштейна (235.1) и Ферми — Дирака (235.2) переходят в классическое распределение Максвелла — Больцмана:

$$\langle N_i \rangle = Ae^{-E_i/(kT)} \quad (235.3)$$

(ср. с выражением (44.4)), где

$$A = e^{\mu/(kT)}. \quad (235.4)$$

Таким образом, при высоких температурах оба «квантовых» газа ведут себя подобно классическому газу.

Система частиц называется **вырожденной**, если ее свойства существенным образом отличаются от свойств систем, подчиняющихся классической статистике. Поведение как бозе-газа, так и ферми-газа отличается от классического газа, они являются вырожденными газами. Вырождение газов становится существенным при весьма низких температурах и больших плотностях. **Параметром вырождения** называется величина $A$. При $A \ll 1$, т. е. при малой степени вырождения, распределения Бозе — Эйнштейна (235.1) и Ферми — Дирака (235.2) переходят в классическое распределение Максвелла — Больцмана (235.3).

**Температурой вырождения** $T_0$ называется температура, ниже которой отчетливо проявляются квантовые свойства идеального газа, обусловленные тождественностью частиц, т. е. $T_0$ — температура, при которой вырождение становится существенным. Если $T \gg T_0$, то поведение системы частиц (газа) описывается классическими законами.

## § 236. Вырожденный электронный газ в металлах

Распределение электронов по различным квантовым состояниям подчиняется принципу Паули (см. § 227), согласно которому в одном состоянии не может быть двух одинаковых (с одинаковым набором четырех квантовых чисел) электронов, они должны отличаться какой-то характеристикой, например направлением спина. Следовательно, по квантовой теории, электроны в металле не могут располагаться на самом низшем энергетическом уровне даже при 0 К. Принцип Паули вынуждает электроны взбираться вверх «по энергетической лестнице».

Электроны проводимости в металле можно рассматривать как идеальный газ, подчиняющийся распределению Ферми — Дирака (235.2). Если $\mu_0$ — химический потенциал электронного газа при $T = 0$ К, то, согласно (235.2), среднее число $\langle N(E) \rangle$ электронов в квантовом состоянии с энергией $E$ равно

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{(E-\mu_0)/(kT)}+1}. \quad (236.1)$$

Для фермионов (электроны являются фермионами) среднее число частиц в квантовом состоянии и вероятность заселенности квантового состояния совпадают, так как квантовое состояние либо может быть не заселено, либо в нем будет находиться одна частица. Это означает, что для фермионов $\langle N(E) \rangle = f(E)$, где $f(E)$ — функция распределения электронов по состояниям.

Из (236.1) следует, что при $T = 0$ К

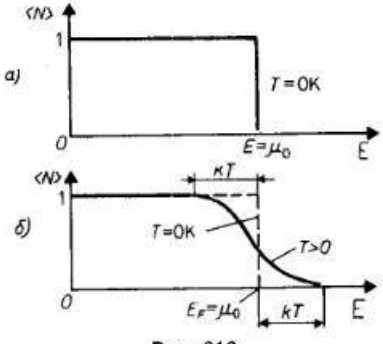



Рис. 312

функция распределения $\langle N(E)\rangle = 1$, если $E < \mu_0$, и $\langle N(E)\rangle = 0$, если $E > \mu_0$. График этой функции приведен на рис. 312, *а*. В области энергий от 0 до $\mu_0$ функция $\langle N(E)\rangle$ равна единице. При $E = \mu_0$ она скачкообразно изменяется до нуля. Это означает, что при $T = 0$ К все нижние квантовые состояния, вплоть до состояния с энергией $E = \mu_0$, заполнены электронами, а все состояния с энергией, большей $\mu_0$, свободны. Следовательно, $\mu_0$ есть не что иное, как максимальная кинетическая энергия, которую могут иметь электроны проводимости в металле при 0 К. Эта максимальная кинетическая энергия называется **энергией Ферми** и обозначается $E_F$ ($E_F = \mu_0$). Поэтому распределение Ферми — Дирака обычно записывается в виде

$$\langle N(E)\rangle = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(kT)} + 1}. \quad (236.2)$$

Наивысший энергетический уровень, занятый электронами, называется **уровнем Ферми**. Уровню Ферми соответствует энергия Ферми $E_F$, которую имеют электроны на этом уровне. Уровень Ферми, очевидно, будет тем выше, чем больше плотность электронного газа. Работу выхода электрона из металла нужно отсчитывать не от дна «потенциальной ямы», как это делалось в классической теории, а от уровня Ферми, т. е. от верхнего из занятых электронами энергетических уровней.

Для металлов при не слишком высоких температурах выполняется неравенство $kT \ll E_F$. Это означает, что электронный газ в металлах практически всегда находится в состоянии сильного вырождения. Температура $T_0$ вырождения (см. § 235) находится из условия $kT_0 = E_F$. Она определяет границу, выше которой квантовые эффекты перестают быть существенными. Соответствующие расчеты показывают, что для электронов в металле $T_0 \approx 10^4$ К, т. е. для всех температур, при которых металл может существовать в твердом состоянии, электронный газ в металле вырожден.

При температурах, отличных от 0 К, функция распределения Ферми — Дирака (236.2) плавно изменяется от 1 до 0 в узкой области (порядка $kT$) в окрестности $E_F$ (рис. 312, *б*). (Здесь же для сравнения пунктиром приведена функция распределения при $T = 0$ К.) Это объясняется тем, что при $T > 0$ небольшое число электронов с энергией, близкой к $E_F$, возбуждается за счет теплового движения и их энергия становится больше $E_F$. Вблизи границы Ферми при $E < E_F$ заполнение электронами меньше единицы, а при $E > E_F$ — больше нуля. В тепловом движении участвует лишь небольшое число электронов, например при комнатной температуре $T \approx 300$ К и температуре вырождения $T_0 = 3 \cdot 10^4$ К,— это $10^{-5}$ от общего числа электронов.

Если $(E - E_F) \gg kT$ («хвост» функции распределения), то единицей в знаменателе (236.2) можно пренебречь по сравнению с экспонентой и тогда распределение Ферми — Дирака переходит в распределение Максвелла — Больцмана. Таким образом, при $(E - E_F) \gg kT$, т. е. при больших значениях энергии, к электронам в металле применима классическая статистика, в то же время, когда $(E - E_F) \ll kT$, к ним применима только квантовая статистика Ферми — Дирака.

## § 237. Понятие о квантовой теории теплоемкости. Фононы

Квантовая статистика устранила трудности в объяснении зависимости теплоемкости газов (в частности, двухатомных) от температуры (см. § 53). Согласно квантовой механике, энергия вращательного движения молекул и энергия колебаний атомов в молекуле могут принимать лишь дискретные значения. Если энергия теплового движения значительно меньше разности энергий соседних уровней энергии ($kT \ll \Delta E$), то при столкновении молекул вращательные и колебательные степени свободы практически не возбуждаются. Поэтому при низких температурах поведение двухатомного газа подобно одноатомному.

Так как разность между соседними вращательными уровнями энергии значительно меньше, чем между колебательными, т. е. $\Delta E_{\text{вращ}} \ll \Delta E_{\text{кол}}$ (см. § 230), то

с ростом температуры возбуждаются вначале вращательные степени свободы, в результате чего теплоемкость возрастает; при дальнейшем росте температуры возбуждаются и колебательные степени свободы и происходит дальнейший рост теплоемкости (см. рис. 80).

Функции распределения Ферми — Дирака для $T=0$ и $T>0$ заметно различаются (рис. 312) лишь в узкой области энергий (порядка $kT$). Следовательно, в процессе нагревания металла участвует лишь незначительная часть всех электронов проводимости. Этим и объясняется отсутствие заметной разницы между теплоемкостями металлов и диэлектриков, что не могло быть объяснено классической теорией (см. § 103).

Как уже указывалось (см. § 73), классическая теория не смогла объяснить также зависимость теплоемкости твердых тел от температуры, а квантовая статистика решила эту задачу. Так, А. Эйнштейн, приближенно считая, что колебания атомов кристаллической решетки независимы (модель кристалла как совокупности независимых колеблющихся с одинаковой частотой гармонических осцилляторов), создал качественную квантовую теорию теплоемкости кристаллической решетки. Она впоследствии была развита П. Дебаем, который учел, что колебания атомов в кристаллической решетке не являются независимыми (рассмотрел непрерывный спектр частот гармонических осцилляторов).

Рассматривая непрерывный спектр частот осцилляторов, П. Дебай показал, что основной вклад в среднюю энергию квантового осциллятора вносят колебания низких частот, соответствующих упругим волнам. Поэтому тепловое возбуждение твердого тела можно описать в виде упругих волн, распространяющихся в кристалле. Согласно корпускулярно-волновому дуализму свойств вещества, упругим волнам в кристалле сопоставляют **фононы**, обладающие энергией $E=\hbar\omega$. Фонон есть **квант энергии звуковой волны** (так как упругие волны — волны звуковые). *Фононы являются квазичастицами* — элементарными возбуждениями, ведущими себя подобно микрочастицам. Аналогично тому как квантование электромагнитного излучения привело к представлению о фотонах, квантование упругих волн привело к представлению о фононах.

Квазичастицы, в частности фононы, сильно отличаются от обычных частиц (например, электронов, протонов, фотонов), так как они связаны с коллективным движением многих частиц системы. Квазичастицы не могут возникать в вакууме, они существуют только в кристалле. Импульс фонона обладает своеобразным свойством: при столкновении фононов в кристалле их импульс может дискретными порциями передаваться кристаллической решетке — он при этом не сохраняется. Поэтому *в случае фононов* говорят о **квазиимпульсе**.

Энергия кристаллической решетки рассматривается как энергия фононного газа, подчиняющегося статистике Бозе — Эйнштейна (см. § 235), так как фононы являются бозонами (их спин равен нулю). Фононы могут испускаться и поглощаться, но их число не сохраняется постоянным; поэтому в формуле (235.1) для фононов необходимо $\mu$ положить равным нулю.

Применение статистики Бозе — Эйнштейна к фононному газу — газу из невзаимодействующих бозе-частиц — привело П. Дебая к количественному выводу, согласно которому при высоких температурах, когда $T \gg T_D$ (классическая область), теплоемкость твердых тел описывается законом Дюлонга и Пти (см. § 73), а при низких температурах, когда $T \ll T_D$ (квантовая область), — пропорциональна кубу термодинамической температуры: $C_V \sim T^3$. В данном случае $T_D$ — **характеристическая температура Дебая**, определяемая соотношением $kT_D=\hbar\omega_D$, где $\omega_D$ — предельная частота упругих колебаний кристаллической решетки. Таким образом, теория Дебая объяснила расхождение опытных и теоретических (вычисленных на основе классической теории) значений теплоемкости твердых тел (см. § 73 и рис. 113).

Модель квазичастиц — фононов — оказалась эффективной для объяснения

открытого П. Л. Капицей явления сверхтекучести жидкого гелия (см. § 31, 75). Теория сверхтекучести, созданная (1941) Л. Д. Ландау и развитая (1947) советским ученым Н. Н. Боголюбовым (р. 1909), применена впоследствии к явлению сверхпроводимости (см. § 239).

## § 238. Выводы квантовой теории электропроводности металлов

**Квантовая теория электропроводности металлов** — теория электропроводности, основывающаяся на квантовой механике и квантовой статистике Ферми — Дирака,— пересмотрела вопрос об электропроводности металлов. Расчет электропроводности металлов, выполненный на основе этой теории, приводит к выражению для удельной электрической проводимости металла

$$\gamma=\frac{ne^2\langle l_F\rangle}{m\langle u_F\rangle}, \qquad (238.1)$$

которое по внешнему виду напоминает классическую формулу (103.2) для $\gamma$, но имеет совершенно другое физическое содержание. Здесь $n$ — концентрация электронов проводимости в металле, $\langle l_F\rangle$ — средняя длина свободного пробега электрона, имеющего энергию Ферми, $\langle u_F\rangle$ — средняя скорость теплового движения такого электрона. Выводы, получаемые на основе формулы (238.1), полностью соответствуют опытным данным. Квантовая теория электропроводности металлов, в частности, объясняет зависимость удельной проводимости от температуры: $\gamma\sim 1/T$ (классическая теория (см. § 103) дает, что $\gamma\sim 1/\sqrt{T}$), а также аномально большие величины (порядка сотен периодов решетки) средней длины свободного пробега электронов в металле (см. § 103).

Квантовая теория рассматривает движение электронов с учетом их взаимодействия с кристаллической решеткой. Согласно корпускулярно-волновому дуализму, движению электрона сопоставляют волновой процесс. Идеальная кристаллическая решетка (в ее узлах находятся *неподвижные* частицы и в ней отсутствуют нарушения периодичности) ведет себя подобно оптически однородной среде — она «электронные волны» не рассеивает. Это соответствует тому, что металл не оказывает электрическому току — упорядоченному движению электронов — никакого сопротивления. «Электронные волны», распространяясь в идеальной кристаллической решетке, как бы огибают узлы решетки и проходят значительные расстояния.

В реальной кристаллической решетке всегда имеются неоднородности, которыми могут быть, например, примеси, вакансии; неоднородности обусловливаются также тепловыми колебаниями. В реальной кристаллической решетке происходит рассеяние «электронных волн» на неоднородностях, что и является причиной электрического сопротивления металлов. Рассеяние «электронных волн» на неоднородностях, связанных с тепловыми колебаниями, можно рассматривать как столкновения электронов с фононами.

Согласно классической теории, $\langle u\rangle\sim\sqrt{T}$, поэтому она не смогла объяснить истинную зависимость $\gamma$ от температуры (см. § 103). В квантовой теории средняя скорость $\langle u_F\rangle$ от температуры практически не зависит, так как доказывается, что с изменением температуры уровень Ферми остается практически неизменным. Однако с повышением температуры рассеяние «электронных волн» на тепловых колебаниях решетки (на фононах) возрастает, что соответствует уменьшению средней длины свободного пробега электронов. В области комнатных температур $\langle l_F\rangle\sim T^{-1}$, поэтому, учитывая независимость $\langle u\rangle$ от температуры, получим, что сопротивление металлов ($R\sim 1/\gamma$) в соответствии с данными опытов растет пропорционально $T$. Таким образом, квантовая теория элекропроводности металлов устранила и эту трудность классической теории.

## § 239. Сверхпроводимость. Понятие об эффекте Джозефсона

Прежде чем на основе квантовой теории приступить к качественному объяснению явления сверхпроводимости, рассмотрим некоторые свойства сверхпроводников.

Различные опыты, поставленные с целью изучения свойств сверхпроводников, приводят к выводу, что при переходе металла в сверхпроводящее состояние не изменяется структура его кристаллической решетки, не изменяются его механические и оптические (в видимой и инфракрасной областях) свойства. Однако при таком переходе наряду со скачкообразным изменением электрических свойств качественно меняются его магнитные и тепловые свойства. Так, в отсутствие магнитного поля переход в сверхпроводящее состояние сопровождается скачкообразным изменением теплоемкости, а при переходе в сверхпроводящее состояние во внешнем магнитном поле скачком изменяются и теплопроводность, и теплоемкость (такие явления характерны для фазовых переходов II рода; см. § 75). Достаточно сильное магнитное поле (а следовательно, и сильный электрический ток, протекающий по сверхпроводнику) разрушает сверхпроводящее состояние.

Как показал немецкий физик В. Мейсснер (1882—1974), в сверхпроводящем состоянии магнитное поле в толще сверхпроводника отсутствует. Это означает, что при охлаждении сверхпроводника ниже критической температуры (см. § 98) магнитное поле из него вытесняется **(эффект Мейсснера)**.

Общность эффектов, наблюдаемых в сверхпроводящем состоянии различных металлов, их соединений и сплавов, указывает на то, что явление сверхпроводимости обусловлено физическими причинами, общими для различных веществ, т. е. должен существовать единый для всех сверхпроводников механизм этого явления.

Физическая природа сверхпроводимости была понята лишь в 1957 г. на основе теории (создана Ландау в 1941 г.) сверхтекучести гелия (см. § 237). Теория сверхпроводимости создана американскими физиками Д. Бардином (р. 1908), Л. Купером (р. 1930) и Д. Шриффером (р. 1931) и усовершенствована Н. Н. Боголюбовым.

Оказалось, что помимо внешнего сходства между сверхтекучестью (сверхтекучая жидкость протекает по узким капиллярам без трения, т. е. без сопротивления течению) и сверхпроводимостью (ток в сверхпроводнике течет без сопротивления по проводу) существует глубокая физическая аналогия: и сверхтекучесть, и сверхпроводимость — это **макроскопический квантовый эффект**.

Качественно явление сверхпроводимости можно объяснить так. Между электронами металла помимо кулоновского отталкивания, в достаточной степени ослабляемого экранирующим действием положительных ионов решетки, в результате электрон-фононного взаимодействия (взаимодействия электронов с колебаниями решетки) возникает слабое взаимное притяжение. Это взаимное притяжение при определенных условиях может преобладать над отталкиванием. В результате электроны проводимости, притягиваясь, образуют своеобразное связанное состояние, называемое **куперовской парой**. «Размеры» пары много больше (примерно на четыре порядка) среднего межатомного расстояния, т. е. между электронами, «связанными» в пару, находится много «обычных» электронов.

Чтобы куперовскую пару разрушить (оторвать один из ее электронов), надо затратить некоторую энергию, которая пойдет на преодоление сил притяжения электронов пары. Такая энергия может быть в принципе получена в результате взаимодействия с фононами. Однако пары сопротивляются своему разрушению. Это объясняется тем, что существует не одна пара, а целый ансамбль взаимодействующих друг с другом куперовских пар.

Электроны, входящие в куперовскую пару, имеют противоположно направленные спины. Поэтому спин такой пары равен нулю и она представляет собой бозон. К бозонам принцип Паули неприменим, и число бозе-частиц, находящихся в одном состоянии, не ограничено. Поэтому при

сверхнизких температурах бозоны скапливаются в основном состоянии, из которого их довольно трудно перевести в возбужденное. Система бозе-частиц — куперовских пар, обладая устойчивостью относительно возможности отрыва электрона, может под действием внешнего электрического поля двигаться без сопротивления со стороны проводника, что и приводит к сверхпроводимости.

На основе теории сверхпроводимости английский физик Б. Джозефсон (р. 1940) в 1962 г. предсказал эффект, названный его именем (Нобелевская премия 1973 г.). **Эффект Джозефсона** (обнаружен в 1963 г.) — протекание сверхпроводящего тока сквозь тонкий слой диэлектрика (пленка оксида металла толщиной $\approx 1$ нм), разделяющий два сверхпроводника (так называемый **контакт Джозефсона**). Электроны проводимости проходят сквозь диэлектрик благодаря туннельному эффекту. Если ток через контакт Джозефсона не превышает некоторое критическое значение, то падения напряжения на нем нет **(стационарный эффект)**, если превышает — возникает падение напряжения $U$ и контакт излучает электромагнитные волны **(нестационарный эффект)**. Частота $\nu$ излучения связана с $U$ на контакте соотношением $\nu = 2eU/h$ ($e$ — заряд электрона). Возникновение излучения объясняется тем, что куперовские пары (они создают сверхпроводящий ток), проходя сквозь контакт, приобретают относительно основного состояния сверхпроводника избыточную энергию. Возвращаясь в основное состояние, они излучают квант электромагнитной энергии $h\nu = 2eU$.

Эффект Джозефсона используется для точного измерения очень слабых магнитных полей (до $10^{-18}$ Тл), токов (до $10^{-10}$ А) и напряжений (до $10^{-15}$ В), а также для создания быстродействующих элементов логических устройств ЭВМ, усилителей и т. д.

## Контрольные вопросы

- В чем принципиальное отличие квантовой статистики от классической?
- Что такое фазовое пространство? фазовый объем?
- Чем отличается бозе-газ от ферми-газа?
- Запишите распределение Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака и объясните их физический смысл. Когда они переходят в классическое распределение Максвелла — Больцмана?
- При каких условиях к электронам в металле можно применять классическую статистику, а когда — только квантовую?
- Что такое энергия Ферми? уровень Ферми?
- Почему работа выхода электрона из металла отсчитывается от уровня Ферми?
- Как объясняет квантовая статистика отсутствие заметного отличия теплоемкостей металлов и диэлектрика?
- Что такое фонон? Зачем понадобилось его введение? Каковы его свойства?
- Как на основе понятий квантовой теории электропроводности металлов объяснить зависимость удельной проводимости от температуры?
- Как объяснить явление сверхпроводимости?
- Что такое эффект Джозефсона?

## Задачи

**30.1.** Показать, что при малом параметре вырождения распределения Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака переходят в распределение Максвелла — Больцмана.

**30.2.** Определить функцию распределения для электронов, находящихся на энергетическом уровне $E$, для случая $E - E_F \ll kT$, пользуясь: 1) статистикой Ферми — Дирака; 2) статистикой Максвелла — Больцмана. Объяснить физический смысл полученных результатов.

**30.3.** Определить в электрон-вольтах максимальную энергию $E$ фотона, который может возбуждаться в кристалле KCl, характеризуемом температурой Дебая $T_D = 227$ К. Фотон какой длины волны $\lambda$ обладал бы такой энергией? [$E = 0{,}02$ эВ; $\lambda = 63{,}5$ мкм]

**30.4.** Глубина потенциальной ямы металла составляет 11 эВ, а работа выхода 4 эВ. Определить полную энергию электрона на уровне Ферми. [$E = -4$ эВ]

**30.5.** Электрон с кинетической энергией 4 эВ попадает в металл, при этом его кинетическая энергия увеличивается до 7 эВ. Определить глубину потенциальной ямы. [3 эВ]

# Глава 31
# Элементы физики твердого тела

## § 240. Понятие о зонной теории твердых тел

Используя уравнение Шредингера — основное уравнение динамики в нерелятивистской квантовой механике,— в принципе можно рассмотреть задачу о кристалле, например найти возможные значения его энергии, а также соответствующие энергетические состояния. Однако как в классической, так и в квантовой механике отсутствуют методы точного решения динамической задачи для системы многих частиц. Поэтому эта задача решается приближенно сведением задачи многих частиц к одноэлектронной задаче — задаче об одном электроне, движущемся в заданном внешнем поле. Подобный путь приводит к **зонной теории твердого тела**.

В основе зонной теории лежит так называемое **адиабатическое приближение.** Квантово-механическая система разделяется на тяжелые и легкие частицы — ядра и электроны. Поскольку массы и скорости этих частиц значительно различаются, можно считать, что движение электронов происходит в поле неподвижных ядер, а медленно движущиеся ядра находятся в усредненном поле всех электронов. Считая, что ядра в узлах кристаллической решетки неподвижны, движение электрона рассматривается в *постоянном периодическом поле ядер.*

Далее используется приближение **самосогласованного поля.** Взаимодействие данного электрона со всеми другими электронами заменяется действием на него стационарного электрического поля, обладающего периодичностью кристаллической решетки. Это поле создается усредненным в пространстве зарядом всех других электронов и всех ядер. Таким образом, в рамках зонной теории многоэлектронная задача сводится к задаче о движении одного электрона во внешнем периодическом поле — усредненном и согласованном поле всех ядер и электронов.

Рассмотрим мысленно процесс образования твердого тела из изолированных атомов. Пока атомы изолированы, т. е. находятся друг от друга на макроскопических расстояниях, они имеют совпадающие схемы энергетических уровней (рис. 313). По мере «сжатия» нашей модели до кристаллической решетки, т. е. когда расстояния между атомами станут равными межатомным расстояниям в твердых телах, взаимодействие между атомами приводит к тому, что энергетические уровни атомов *смещаются, расщепляются и расширяются в зоны*, образуется так называемый **зонный энергетический спектр.**

Из рис. 313, на котором показано расщепление уровней как функция расстояния $r$ между атомами, видно, что заметно расщепляются и расширяются лишь уровни внешних, валентных электронов, наибо-

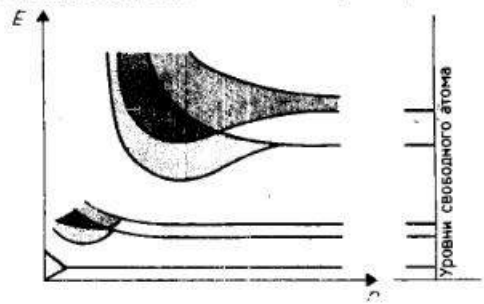



Рис. 313

лее слабо связанных с ядром и имеющих наибольшую энергию, а также более высокие уровни, которые в основном состоянии атома вообще электронами не заняты. Уровни же внутренних электронов либо совсем не расщепляются, либо расщепляются слабо. Таким образом, в твердых телах внутренние электроны ведут себя так же, как в изолированных атомах, валентные же электроны «коллективизированы» — принадлежат всему твердому телу.

Образование зонного энергетического спектра в кристалле является квантовомеханическим эффектом и вытекает из соотношения неопределенностей. В кристалле валентные электроны атомов, связанные слабее с ядрами, чем внутренние электроны, могут переходить от атома к атому сквозь потенциальные барьеры, разделяющие атомы, т. е. перемещаться без изменений полной энергии (туннельный эффект, см. § 221). Это приводит к тому, что среднее время жизни $\tau$ валентного электрона в данном атоме по сравнению с изолированным атомом существенно уменьшается и составляет примерно $10^{-15}$ с (для изолированного атома оно примерно $10^{-8}$ с). Время же жизни электрона в каком-либо состоянии связано с неопределенностью его энергии (шириной уровня) соотношением неопределенностей $\Delta E \sim h/\tau$ (см. (215.5)). Следовательно, если естественная ширина спектральных линий составляет примерно $10^{-7}$ эВ, то в кристаллах $\Delta E \approx 1 \div 10$ эВ, т. е. энергетические уровни валентных электронов расширяются в зону дозволенных значений энергии.

Энергия внешних электронов может принимать значения в пределах закрашенных на рис. 313 областей, называемых **разрешенными энергетическими зонами.** Каждая разрешенная зона «вмещает» в себя столько близлежащих дискретных уровней, сколько атомов содержит кристалл: чем больше в кристалле атомов, тем теснее расположены уровни в зоне. Расстояние между соседними энергетическими уровнями в зоне составляет приблизительно $10^{-22}$ эВ. Так как оно столь ничтожно, то зоны можно считать практически непрерывными, однако факт конечного числа уровней в зоне играет важную роль для распределения электронов по состояниям.

Разрешенные энергетические зоны разделены зонами запрещенных значений энергии, называемыми **запрещенными энергетическими зонами.** В запрещенных зонах электроны находиться не могут. Ширина зон (разрешенных и запрещенных) не зависит от размера кристалла. Разрешенные зоны тем шире, чем слабее связь валентных электронов с ядрами.

## § 241. Металлы, диэлектрики и полупроводники по зонной теории

Зонная теория твердых тел позволила с единой точки зрения истолковать существование металлов, диэлектриков и полупроводников, объясняя различие в их электрических свойствах, во-первых, неодинаковым заполнением электронами разрешенных зон и, во-вторых, шириной запрещенных зон.

Степень заполнения электронами энергетических уровней в зоне определяется заполнением соответствующего атомного уровня. Если, например, какой-то уровень атома полностью заполнен электронами в соответствии с принципом Паули, то образующаяся из него зона также полностью заполнена. В общем случае можно говорить о **валентной зоне**, которая полностью заполнена электронами и образована из энергетических уровней внутренних электронов свободных атомов, и о **зоне проводимости (свободной зоне)**, которая либо частично заполнена электронами, либо свободна и образована из энергетических уровней внешних «коллективизированных» электронов изолированных атомов.

В зависимости от степени заполнения зон электронами и ширины запрещенной зоны возможны четыре случая, изображенные на рис. 314. На рис. 314, *а* самая верхняя зона, содержащая электроны, заполнена лишь частично, т. е. в ней имеются вакантные уровни. В данном случае электрон, получив сколь угодно малую энергетическую «добавку» (например, за счет теплового движения или электриче-

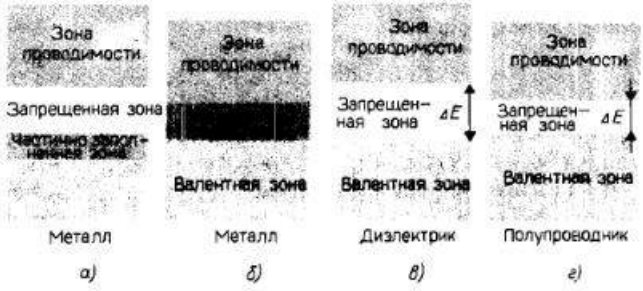



**Рис. 314**

ского поля), сможет перейти на более высокий энергетический уровень той же зоны, т. е. стать свободным и участвовать в проводимости. Внутризонный переход вполне возможен, так как, например, при 1 К энергия теплового движения $kT \approx \approx 10^{-4}$ эВ, т. е. гораздо больше разности энергий между соседними уровнями зоны (примерно $10^{-22}$ эВ). Таким образом, если в твердом теле имеется зона, лишь частично заполненная электронами, то это тело всегда будет проводником электрического тока. Именно это свойственно металлам.

Твердое тело является проводником электрического тока и в том случае, когда валентная зона перекрывается свободной зоной, что в конечном счете приводит к не полностью заполненной зоне (рис. 314, *б*). Это имеет место для щелочно-земельных элементов, образующих II группу таблицы Менделеева (Be, Mg, Ca, Zn, ...). В данном случае образуется так называемая «гибридная» зона, которая заполняется валентными электронами лишь частично. Следовательно, в данном случае металлические свойства щелочно-земельных элементов обусловлены перекрытием валентной и свободной зон.

Помимо рассмотренного выше перекрытия зон возможно также перераспределение электронов между зонами, возникающими из уровней различных атомов, которое может привести к тому, что вместо двух частично заполненных зон в кристалле окажутся одна целиком заполненная (валентная) зона и одна свободная зона (зона проводимости). Твердые тела, у которых энергетический спектр электронных состояний состоит только из валентной зоны и зоны проводимости, являются диэлектриками или полупроводниками в зависимости от ширины запрещенной зоны $\Delta E$.

Если ширина запрещенной зоны кристалла порядка нескольких электронвольт, то тепловое движение не может перебросить электроны из валентной зоны в зону проводимости и кристалл является диэлектриком, оставаясь им при всех реальных температурах (рис. 314, *в*). Если запрещенная зона достаточно узка ($\Delta E$ порядка 1 эВ), то переброс электронов из валентной зоны в зону проводимости может быть осуществлен сравнительно легко либо путем теплового возбуждения, либо за счет внешнего источника, способного передать электронам энергию $\Delta E$, и кристалл является полупроводником (рис. 314, *г*).

Различие между металлами и диэлектриками с точки зрения зонной теории состоит в том, что при 0 К в зоне проводимости металлов имеются электроны, а в зоне проводимости диэлектриков они отсутствуют. Различие же между диэлектриками и полупроводниками определяется шириной запрещенных зон: для диэлектриков она довольно широка (например, для NaCl $\Delta E = 6$ эВ), для полупроводников — достаточно узка (например, для германия $\Delta E = 0{,}72$ эВ). При температурах, близких к 0 К, полупроводники ведут себя как диэлектрики, так как переброса электронов в зону проводимости не происходит. С повышением температуры у полупроводников растет число электронов, которые вследствие теплового возбуждения переходят в зону проводимости, т. е. электрическая проводимость проводников в этом случае увеличивается.

## § 242. Собственная проводимость полупроводников

Полупроводниками являются твердые тела, которые при $T=0$ характеризуются полностью занятой электронами валентной зоной, отделенной от зоны проводимости сравнительно узкой ($\Delta E$ порядка 1 эВ) запрещенной зоной (рис. 314, *г*). Своим названием они обязаны тому, что их электропроводность меньше электропроводности металлов и больше электропроводности диэлектриков.

В природе полупроводники существуют в виде элементов (элементы IV, V и VI групп Периодической системы элементов Менделеева), например Si, Ge, As, Se, Te, и химических соединений, например оксиды, сульфиды, селениды, сплавы элементов различных групп. Различают **собственные и примесные полупроводники. Собственными полупроводниками** являются химически чистые полупроводники, а их проводимость называется **собственной проводимостью.** Примером собственных полупроводников могут служить химически чистые Ge, Se, а также многие химические соединения: InSb, GaAs, CdS и др.

При 0 К и отсутствии других внешних факторов собственные полупроводники ведут себя как диэлектрики. При повышении же температуры электроны с верхних уровней валентной зоны I могут быть переброшены на нижние уровни зоны проводимости II (рис. 315). При наложении на кристалл электрического поля они перемещаются против поля и создают электрический ток. Таким образом, зона II из-за ее частичного «укомплектования» электронами становится зоной проводимости. Проводимость собственных полупроводников, обусловленная электронами, называется **электронной проводимостью** или **проводимостью *n*-типа** (от лат. negative — отрицательный).

В результате тепловых забросов электронов из зоны I в зону II в валентной зоне возникают вакантные состояния, получившие название **дырок.** Во внешнем электрическом поле на освободившееся от электрона место — дырку — может переместиться электрон с соседнего уровня, а дырка появится в том месте, откуда ушел электрон, и т. д. Такой процесс заполнения дырок электронами равносилен перемещению дырки в направлении, противоположном движению электрона, так, как если бы дырка обладала положительным зарядом, равным по величине заряду электрона. Проводимость собственных полупроводников, обусловленная квазичастицами — дырками, называется **дырочной проводимостью** или **проводимостью *p*-типа** (от лат. positive — положительный).

Таким образом, в собственных полупроводниках наблюдаются два механизма проводимости: электронный и дырочный. Число электронов в зоне проводимости равно числу дырок в валентной зоне, так как последние соответствуют электронам, возбужденным в зону проводимости. Следовательно, если концентрации электронов проводимости и дырок обозначить соответственно $n_e$ и $n_p$, то

$$n_e = n_p. \qquad (242.1)$$

Проводимость полупроводников всегда является **возбужденной,** т. е. появляется только под действием внешних факторов (температуры, облучения, сильных электрических полей и т. д.).

В собственном полупроводнике уровень Ферми находится в середине запрещенной зоны (рис. 316). Действительно, для переброса электрона с верхнего уров-

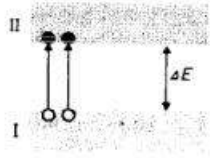


Рис. 315

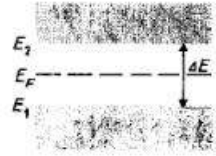


Рис. 316

ня валентной зоны на нижний уровень зоны проводимости затрачивается **энергия активации**, равная ширине запрещенной зоны $\Delta E$. При появлении же электрона в зоне проводимости в валентной зоне обязательно возникает дырка. Следовательно, энергия, затраченная на образование пары носителей тока, должна делиться на две равные части. Так как энергия, соответствующая половине ширины запрещенной зоны, идет на переброс электрона и такая же энергия затрачивается на образование дырки, то начало отсчета для каждого из этих процессов должно находиться в середине запрещенной зоны. Энергия Ферми в собственном полупроводнике представляет собой энергию, от которой происходит возбуждение электронов и дырок.

Вывод о расположении уровня Ферми в середине запрещенной зоны собственного полупроводника может быть подтвержден математическими выкладками. В физике твердого тела доказывается, что концентрация электронов в зоне проводимости

$$n_e = C_1 e^{-(E_2 - E_F)/(kT)}, \qquad (242.2)$$

где $E_2$ — энергия, соответствующая дну зоны проводимости (рис. 316), $E_F$ — энергия Ферми, $T$ — термодинамическая температура, $C_1$ — постоянная, зависящая от температуры и эффективной массы электрона проводимости. **Эффективная масса** — величина, имеющая размерность массы и характеризующая динамические свойства квазичастиц — электронов проводимости и дырок. Введение в зонную теорию эффективной массы электрона проводимости позволяет, с одной стороны, учитывать действие на электроны проводимости не только внешнего поля, но и внутреннего периодического поля кристалла, а с другой стороны, абстрагируясь от взаимодействия электронов проводимости с решеткой, рассматривать их движение во внешнем поле как движение свободных частиц.

Концентрация дырок в валентной зоне

$$n_p = C_2 e^{(E_1 - E_F)/(kT)}, \qquad (242.3)$$

где $C_2$ — постоянная, зависящая от температуры и эффективной массы дырки, $E_1$ — энергия, соответствующая верхней границе валентной зоны. Энергия возбуждения в данном случае отсчитывается вниз от уровня Ферми (рис. 316), поэтому величины в экспоненциальном множителе (242.3) имеют знак, обратный знаку экспоненциального множителя в (242.2). Так как для собственного полупроводника $n_e = n_p$ (242.1), то

$$C_1 e^{-(E_2 - E_F)/(kT)} = C_2 e^{(E_1 - E_F)/(kT)}.$$

Если эффективные массы электронов и дырок равны ($m_e^* = m_p^*$), то $C_1 = C_2$ и, следовательно,

$$-(E_2 - E_F) = E_1 - E_F,$$

откуда

$$E_F = (E_1 + E_2)/2 = \Delta E/2,$$

т. е. уровень Ферми в собственном полупроводнике действительно расположен в середине запрещенной зоны.

Так как для собственных полупроводников $\Delta E \gg kT$, то распределение Ферми — Дирака (235.2) переходит в распределение Максвелла — Больцмана. Положив в (236.2) $E - E_F \approx \Delta E/2$, получим

$$\langle N(E) \rangle \approx e^{-\Delta E/(2kT)} \qquad (242.4)$$

Количество электронов, переброшенных в зону проводимости, а следовательно, и количество образовавшихся дырок пропорциональны $\langle N(E) \rangle$. Таким образом, удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta E/(2kT)}, \qquad (242.5)$$

где $\gamma_0$ — постоянная, характерная для данного полупроводника.

Увеличение проводимости полупроводников с повышением температуры является их характерной особенностью (у металлов с повышением температуры проводимость уменьшается). С точки зрения зонной теории это обстоятельство объяснить довольно просто: с повышением температуры растет число электронов, которые вследствие теплового возбуждения переходят в зону проводимости и участвуют в проводимости. Поэтому удельная проводимость собственных полупроводников с повышением температуры растет.

Если представить зависимость $\ln \gamma$ от $1/T$, то для собственных полупроводников — это прямая (рис. 317), по на-

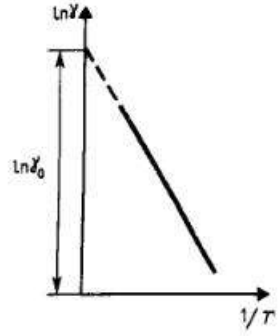



Рис. 317

клону которой можно определить ширину запрещенной зоны $\Delta E$, а по ее продолжению — $\gamma_0$ (прямая отсекает на оси ординат отрезок, равный $\ln \gamma_0$).

Одним из наиболее широко распространенных полупроводниковых элементов является германий, имеющий решетку типа алмаза, в которой каждый атом связан ковалентными связями (см. § 71) с четырьмя ближайшими соседями. Упрощенная плоская схема расположения атомов в кристалле Ge дана на рис. 318, где каждая черточка обозначает связь, осуществляемую одним электроном. В идеальном кристалле при 0 К такая структура представляет собой диэлектрик, так как все валентные электроны участвуют в образовании связей и, следовательно, не участвуют в проводимости.

При повышении температуры (или под действием других внешних факторов) тепловые колебания решетки могут привести к разрыву некоторых валентных связей, в результате чего часть электронов отщепляется и они становятся свободными. В покинутом электроном месте возникает дырка (она изображена белым кружком), заполнить которую могут электроны из соседней пары. В результате дырка, так же как и освободившийся электрон, будет двигаться по кристаллу. Движение электронов проводимости и дырок в отсутствие электрического поля является хаотическим. Если же на кристалл наложить электрическое поле, то электроны начнут двигаться против поля, дырки — по полю, что приведет к возникновению собственной проводимости германия, обусловленной как электронами, так и дырками.

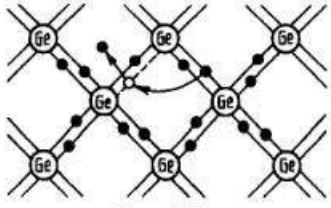


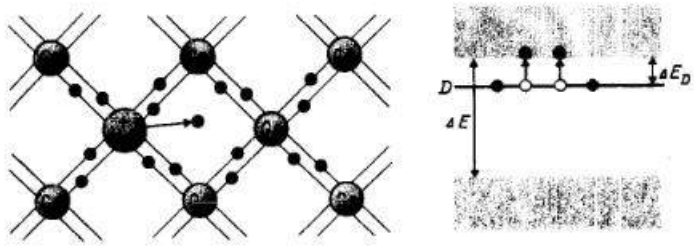

Рис. 318

В полупроводниках наряду с процессом генерации электронов и дырок идет процесс **рекомбинации**: электроны переходят из зоны проводимости в валентную зону, отдавая энергию решетке и испуская кванты электромагнитного излучения. В результате для каждой температуры устанавливается определенная равновесная концентрация электронов и дырок, изменяющаяся с температурой пропорционально выражению (242.4).

## § 243. Примесная проводимость полупроводников

Проводимость полупроводников, обусловленная примесями, называется **примесной проводимостью**, а сами полупроводники — **примесными полупроводниками.** Примесная проводимость обусловлена примесями (атомы посторонних элементов), а также дефектами типа избыточных атомов (по сравнению со стехиометрическим составом), тепловыми (пустые узлы или атомы в междоузлиях) и механическими (трещины, дислокации и т. д.) дефектами. Наличие в полупроводнике примеси существенно изменяет его проводимость. Например, при введении в кремний примерно 0,001 ат.% бора его проводимость увеличивается примерно в $10^6$ раз.

Примесную проводимость полупроводников рассмотрим на примере Ge и Si, в которые вводятся атомы с валентностью, отличной от валентности основных атомов на единицу. Например, при замещении атома германия пятивалентным атомом мышьяка (рис. 319, *а*) один электрон не может образовать ковалентной связи, он оказывается лишним и может быть легко при тепловых колебаниях решетки отщеплен от атома, т. е. стать свободным. Обра-




а) б)

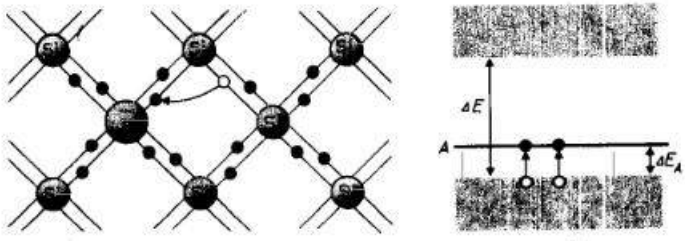
Рис. 319

зование свободного электрона не сопровождается нарушением ковалентной связи; следовательно, в отличие от случая, рассмотренного в § 242, дырка не возникает. Избыточный положительный заряд, возникающий вблизи атома примеси, связан с атомом примеси и поэтому перемещаться по решетке не может.

С точки зрения зонной теории рассмотренный процесс можно представить следующим образом (рис. 319, *б*). Введение примеси искажает поле решетки, что приводит к возникновению в запрещенной зоне энергетического уровня $D$ валентных электронов мышьяка, называемого **примесным уровнем.** В случае германия с примесью мышьяка этот уровень располагается от дна зоны проводимости на расстоянии $\Delta E_D = 0{,}013$ эВ. Так как $\Delta E_D < kT$, то уже при обычных температурах энергия теплового движения достаточна для того, чтобы перебросить электроны примесного уровня в зону проводимости; образующиеся при этом положительные заряды локализуются на неподвижных атомах мышьяка и в проводимости не участвуют.

Таким образом, в полупроводниках с примесью, валентность которой *на единицу больше валентности основных атомов, носителями тока являются электроны*; возникает **электронная примесная проводимость (проводимость *n*-типа). Полупроводники** с такой проводимостью называются **электронными** (или **полупроводниками *n*-типа).** Примеси, являющиеся источником электронов, называются **донорами**, а энергетические уровни этих примесей — **донорными уровнями.**

Предположим, что в решетку кремния введен примесный атом с тремя валентными электронами, например бор (рис. 320, *а*). Для образования связей с четырьмя ближайшими соседями у атома бора не хватает одного электрона, одна из связей остается неукомплектованной и четвертый электрон может быть захвачен от соседнего атома основного вещества, где соответственно образуется дырка. Последовательное заполнение образующихся дырок электронами эквивалентно движению дырок в полупроводнике, т. е. дырки не остаются локализованными, а перемещаются в решетке кремния как свободные положительные заряды. Избыточный же отрицательный заряд, возникающий вблизи атома примеси, связан с ато-




а) б)

Рис. 320

мом примеси и по решетке перемещаться не может.

По зонной теории, введение трехвалентной примеси в решетку кремния приводит к возникновению в запрещенной зоне примесного энергетического уровня $A$, не занятого электронами. В случае кремния с примесью бора этот уровень располагается выше верхнего края валентной зоны на расстоянии $\Delta E_A = 0{,}08$ эВ (рис. 320, *б*). Близость этих уровней к валентной зоне приводит к тому, что уже при сравнительно низких температурах электроны из валентной зоны переходят на примесные уровни и, связываясь с атомами бора, теряют способность перемещаться по решетке кремния, т. е. в проводимости не участвуют. Носителями тока являются лишь дырки, возникающие в валентной зоне.

Таким образом, в полупроводниках с примесью, *валентность которой на единицу меньше валентности основных атомов, носителями тока являются дырки*; возникает **дырочная проводимость (проводимость *p*-типа). Полупроводники** с такой проводимостью называются **дырочными (или полупроводниками *p*-типа).** Примеси, захватывающие электроны из валентной зоны полупроводника, называются **акцепторами**, а энергетические уровни этих примесей — **акцепторными уровнями**.

В отличие от собственной проводимости, осуществляющейся одновременно электронами и дырками, примесная проводимость полупроводников обусловлена в основном носителями одного знака: электронами — в случае донорной примеси, дырками — в случае акцепторной. Эти носители тока называются **основными**. Кроме основных носителей в полупроводнике имеются и неосновные носители: в полупроводниках *n*-типа — дырки, в полупроводниках *p*-типа — электроны.

Наличие примесных уровней в полупроводниках существенно изменяет положение уровня Ферми $E_F$. Расчеты показывают, что в случае полупроводников *n*-типа уровень Ферми $E_{F_0}$ при 0 К расположен посередине между дном зоны проводимости и донорным уровнем (рис. 321). С повышением температуры все большее число электронов переходит из донорных состояний в зону проводимости, но, помимо этого, возрастает и число тепловых флуктуаций, способных возбуждать электроны из валентной зоны и перебрасывать их через запрещенную зону энергий. Поэтому при высоких температурах уровень Ферми имеет тенденцию смещаться вниз (сплошная кривая) к своему предельному положению в центре запрещенной зоны, характерному для собственного полупроводника.

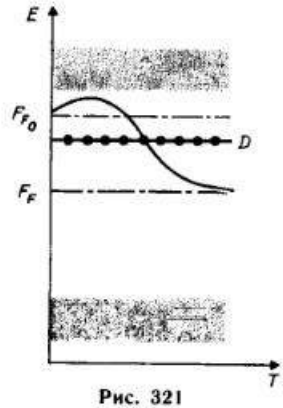


Рис. 321

Уровень Ферми в полупроводниках *p*-типа при 0 К $E_{F_0}$ располагается посередине между потолком валентной зоны и акцепторным уровнем (рис. 322). Сплошная кривая опять-таки показывает его смещение с температурой. При температурах, при которых примесные атомы

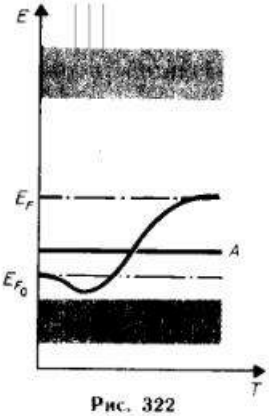


Рис. 322

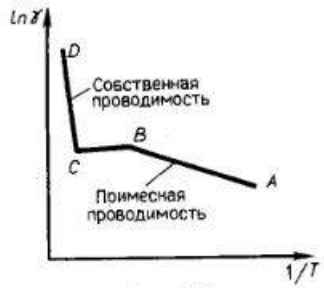



Рис. 323

оказываются полностью истощенными и увеличение концентрации носителей происходит за счет возбуждения собственных носителей, уровень Ферми располагается посередине запрещенной зоны, как в собственном полупроводнике.

Проводимость примесного полупроводника, как и проводимость любого проводника, определяется концентрацией носителей и их подвижностью. С изменением температуры подвижность носителей меняется по сравнительно слабому степенному закону, а концентрация носителей — по очень сильному экспоненциальному закону, поэтому зависимость проводимости примесных полупроводников от температуры определяется в основном температурной зависимостью концентрации носителей тока в нем. На рис. 323 дан примерный график зависимости $\ln \gamma$ от $1/T$ для примесных полупроводников. Участок $AB$ описывает примесную проводимость полупроводника. Рост примесной проводимости полупроводника с повышением температуры обусловлен в основном ростом концентрации примесных носителей. Участок $BC$ соответствует области истощения примесей (это подтверждают и эксперименты), участок $CD$ описывает собственную проводимость полупроводника.

## § 244. Фотопроводимость полупроводников

**Фотопроводимость** (см. § 202) **полупроводников** — увеличение электропроводности полупроводников под действием электромагнитного излучения — может быть связана со свойствами как основного вещества, так и содержащихся в нем примесей. В первом случае при поглощении фотонов, соответствующих собственной полосе поглощения полупроводника, т. е. когда энергия фотонов равна или больше ширины запрещенной зоны ($h\nu \geqslant \geqslant \Delta E$), могут совершаться перебросы электронов из валентной зоны в зону проводимости (рис. 324, *а*), что приведет к появлению добавочных (неравновесных) электронов (в зоне проводимости) и дырок (в валентной зоне). В результате возникает **собственная фотопроводимость**, обусловленная как электронами, так и дырками.

Если полупроводник содержит примеси, то фотопроводимость может возникать и при $h\nu < \Delta E$: для полупроводников с донорной примесью фотон должен обладать энергией $h\nu \gg \Delta E_D$, а для полупроводников с акцепторной примесью — $h\nu \gg \Delta E_A$. При поглощении света примесными центрами происходит переход электронов с донорных уровней в зону проводимости в случае полупроводника $n$-типа (рис. 324, *б*) или из валентной зоны на акцепторные уровни в случае полупроводника $p$-типа (рис. 324, *в*). В результате возникает **примесная фотопроводимость**, являющаяся чисто электронной для полупроводников $n$-типа и чисто дырочной для полупроводников $p$-типа.

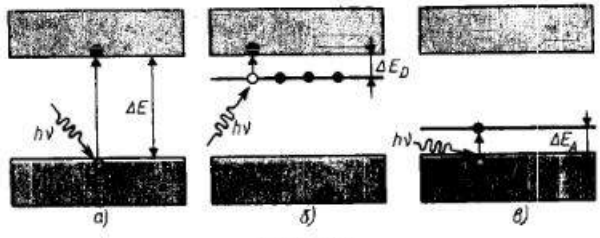



Рис. 324

Таким образом, если

$$h\nu \gg \Delta E \text{ для собственных полупроводников,}$$
$$h\nu \gg \Delta E_п \text{ для примесных полупроводников} \quad (244.1)$$

($\Delta E_п$ — в общем случае энергия активации примесных атомов), то в полупроводнике возбуждается фотопроводимость. Из (244.1) можно определить **красную границу фотопроводимости** — максимальную длину волны, при которой еще фотопроводимость возбуждается:

$$\lambda_0 = ch/\Delta E \text{ для собственных полупроводников,}$$
$$\lambda_0 = ch/\Delta E_п \text{ для примесных полупроводников.}$$

Учитывая значения $\Delta E$ и $\Delta E_п$ для конкретных полупроводников, можно показать, что красная граница фотопроводимости для собственных полупроводников приходится на видимую область спектра, для примесных же полупроводников — на инфракрасную.

На рис. 325 представлена типичная зависимость фотопроводимости $j$ и коэффициента поглощения $\varkappa$ от длины волны $\lambda$ падающего на полупроводник света. Из рисунка следует, что при $\lambda > \lambda_0$ фотопроводимость действительно не возбуждается. Спад фотопроводимости в коротковолновой части полосы поглощения объясняется большой скоростью рекомбинации в условиях сильного поглощения в тонком поверхностном слое толщиной $x \approx 1$ мкм (коэффициент поглощения $\approx 10^6$ м$^{-1}$).

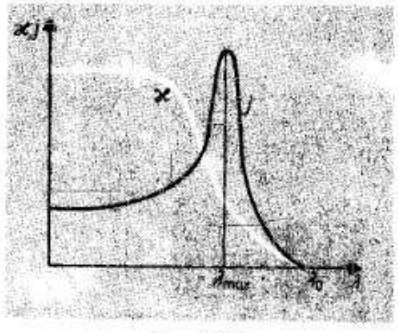


Рис. 325

Наряду с поглощением, приводящим к появлению фотопроводимости, может иметь место экситонный механизм поглощения. **Экситоны** представляют собой квазичастицы — электрически нейтральные связанные состояния электрона и дырки, образующиеся в случае возбуждения с энергией, меньшей ширины запрещенной зоны. Уровни энергии экситонов располагаются у дна зоны проводимости. Так как экситоны электрически нейтральны, то их возникновение в полупроводнике не приводит к появлению дополнительных носителей тока, вследствие чего экситонное поглощение света не сопровождается увеличением фотопроводимости.

## § 245. Люминесценция твердых тел

В природе давно известно излучение, отличное по своему характеру от всех известных видов излучения (теплового излучения, отражения, рассеяния света и т. д.). Этим излучением является люминесцентное излучение, примерами которого может служить свечение тел при облучении их видимым, ультрафиолетовым и рентгеновским излучением, $\gamma$-излучением и т. д. Вещества, способные под действием различного рода возбуждений светиться, получили название **люминофоров.**

**Люминесценция** — неравновесное излучение, избыточное при данной температуре над тепловым излучением тела и имеющее длительность, бо́льшую периода световых колебаний. Первая часть этого определения приводит к выводу, что люминесценция не является тепловым излучением (см. § 197), поскольку любое тело при температуре выше 0 К излучает электромагнитные волны, а такое излучение является тепловым. Вторая часть показывает, что люминесценция не является таким видом свечения, как отражение и рассеяние света, тормозное излучение заряженных частиц и т. д. Период световых колебаний составляет примерно $10^{-15}$ с, поэтому длительность, по которой свечение можно отнести к люминесценции, больше — примерно $10^{-10}$ с. Признак

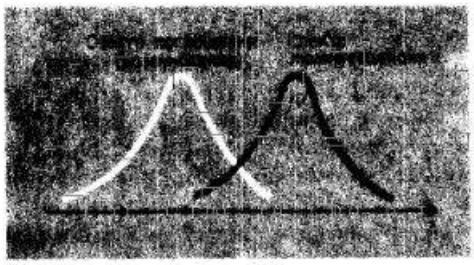


Рис. 326

длительности свечения дает возможность отличить люминесценцию от других неравновесных процессов. Так, по этому признаку удалось установить, что излучение Вавилова — Черенкова (см. § 189) нельзя отнести к люминесценции.

В зависимости от способов возбуждения различают: **фотолюминесценцию** (под действием света), **рентгенолюминесценцию** (под действием рентгеновского излучения), **катодолюминесценцию** (под действием электронов), **электролюминесценцию** (под действием электрического поля), **радиолюминесценцию** (при возбуждении ядерным излучением, например $\gamma$-излучением, нейтронами, протонами), **хемилюминесценцию** (при химических превращениях), **триболюминесценцию** (при растирании и раскалывании некоторых кристаллов, например сахара). По длительности свечения условно различают: **флуоресценцию** ($t \leqslant 10^{-8}$ с) и **фосфоресценцию** — свечение, продолжающееся заметный промежуток времени после прекращения возбуждения.

Первое количественное исследование люминесценции проведено более ста лет назад Дж. Стоксом *, сформулировавшим в 1852 г. следующее правило: длина волны люминесцентного излучения всегда больше длины волны света, возбудившего его (рис. 326). С квантовой точки зрения правило Стокса означает, что энергия $h\nu$ падающего фотона частично расходуется на какие-то неоптические процессы, т. е.

$$h\nu = h\nu_{\text{люм}} + \Delta E,$$

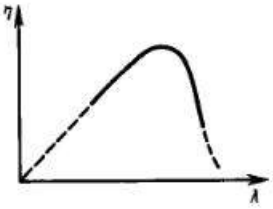



Рис. 327

откуда $\nu_{\text{люм}} < \nu$ или $\lambda_{\text{люм}} > \lambda$, что и следует из сформулированного правила.

Основной энергетической характеристикой люминесценции является **энергетический выход**, введенный С. И. Вавиловым в 1924 г.— отношение энергии, излученной люминофором при полном высвечивании, к энергии, поглощенной им. Типичная для органических люминофоров (на примере раствора флуоресцина) зависимость энергетического выхода $\eta$ от длины волны $\lambda$ возбуждающего света представлена на рис. 327. Из рисунка следует, что вначале $\eta$ растет пропорционально $\lambda$, а затем, достигая максимального значения, быстро спадает до нуля при дальнейшем увеличении $\lambda$ **(закон Вавилова)**. Величина энергетического выхода для различных люминофоров колеблется в довольно широких пределах, максимальное ее значение может достигать примерно 80 %.

Твердые тела, представляющие собой эффективно люминесцирующие искусственно приготовленные кристаллы с чужеродными примесями, получили название **кристаллофосфоров**. На примере кристаллофосфоров рассмотрим механизмы возникновения люминесценции с точки зрения зонной теории твердых тел. Между валентной зоной и зоной проводимости кристаллофосфора располагаются примесные уровни активатора (рис. 328). При

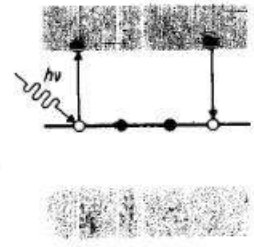



Рис. 328

* Дж. Стокс (1819—1903) — английский физик и математик.

поглощении атомом активатора фотона с энергией $h\nu$ электрон с примесного уровня переводится в зону проводимости, свободно перемещается по кристаллу до тех пор, пока не встретится с ионом активатора и не рекомбинирует с ним, перейдя вновь на примесный уровень. Рекомбинация сопровождается излучением кванта люминесцентного свечения. Время высвечивания люминофора определяется временем жизни возбужденного состояния атомов активатора, которое обычно не превышает миллиардных долей секунды. Поэтому свечение является кратковременным и исчезает почти вслед за прекращением облучения.

Для возникновения длительного свечения (фосфоресценции) кристаллофосфор должен содержать также **центры захвата**, или **ловушки** для электронов, представляющие собой незаполненные локальные уровни (например, $Л_1$ и $Л_2$), лежащие вблизи дна зоны проводимости (рис. 329). Они могут быть образованы атомами примесей, атомами в междоузлиях и т. д. Под действием света атомы активатора возбуждаются, т. е. электроны с примесного уровня переходят в зону проводимости и становятся свободными. Однако они захватываются ловушками, в результате чего теряют свою подвижность, а следовательно, и способность рекомбинировать с ионом активатора. Освобождение электрона из ловушки требует затраты определенной энергии, которую электроны могут получить, например, от тепловых колебаний решетки. Освобожденный из ловушки электрон попадает в зону проводимости и движется по кристаллу до тех пор, пока или не будет снова захвачен ловушкой, или не рекомбинирует с ионом активатора.

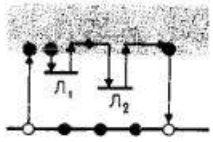



**Рис. 329**

В последнем случае возникает квант люминесцентного излучения. Длительность этого процесса определяется временем пребывания электронов в ловушках.

Явление люминесценции получило широкое применение в практике, например **люминесцентный анализ** — метод определения состава вещества по характерному его свечению. Этот метод, являясь весьма чувствительным (примерно $10^{-10}$ г/см$^3$), позволяет обнаруживать наличие ничтожных примесей и применяется при тончайших исследованиях в биологии, медицине, пищевой промышленности и т. д. **Люминесцентная дефектоскопия** позволяет обнаружить тончайшие трещины на поверхности деталей машин и других изделий (исследуемая поверхность покрывается для этого люминесцентным раствором, который после удаления остается в трещинах).

Люминофоры используются в люминесцентных лампах, являются активной средой оптических квантовых генераторов (см. § 233) и сцинтилляторов (будут рассмотрены ниже), применяются в электронно-оптических преобразователях (см. § 169), употребляются для создания аварийного и маскировочного освещения и для изготовления светящихся указателей различных приборов.

## § 246. Контакт двух металлов по зонной теории

Если два различных металла привести в соприкосновение, то между ними возникает разность потенциалов, называемая **контактной разностью потенциалов.** Итальянский физик А. Вольта (1745—1827) установил, что если металлы Al, Zn, Sn, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd привести в контакт в указанной последовательности, то каждый предыдущий при соприкосновении с одним из следующих зарядится положительно. Этот ряд называется **рядом Вольта.** Контактная разность потенциалов для различных металлов составляет от десятых до целых вольт.

**Вольта** экспериментально установил **два закона**:

1. Контактная разность потенциалов зависит лишь от химического состава

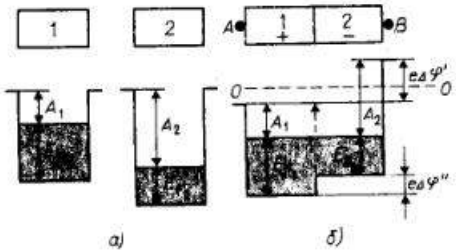



**Рис. 330**

и температуры соприкасающихся металлов.

2. Контактная разность потенциалов последовательно соединенных различных проводников, находящихся *при одинаковой температуре*, не зависит от химического состава промежуточных проводников и равна контактной разности потенциалов, возникающей при непосредственном соединении крайних проводников.

Для объяснения возникновения контактной разности потенциалов воспользуемся представлениями зонной теории. Рассмотрим контакт двух металлов с различными работами выхода $A_1$ и $A_2$, т.е. с различными положениями уровня Ферми (верхнего заполненного электронами энергетического уровня). Если $A_1 < A_2$ (этот случай изображен на рис. 330, *а*), то уровень Ферми располагается в металле *1* выше, чем в металле *2*. Следовательно, при контакте металлов электроны с более высоких уровней металла *1* будут переходить на более низкие уровни металла *2*, что приведет к тому, что металл *1* зарядится положительно, а металл *2* — отрицательно. Одновременно происходит относительное смещение энергетических уровней: в металле, заряжающемся положительно, все уровни смещаются вниз, а в металле, заряжающемся отрицательно,— вверх. Этот процесс будет происходить до тех пор, пока между соприкасающимися металлами не установится равновесие, которое, как доказывается в статистической физике, характеризуется совпадением уровней Ферми в обоих металлах (рис. 330, *б*).

Так как для соприкасающихся металлов уровни Ферми совпадают, а работы выхода $A_1$ и $A_2$ не изменяются (они являются константами металлов и не зависят от того, находятся металлы в контакте или нет), то потенциальная энергия электронов в точках, лежащих вне металлов в непосредственной близости к их поверхности (точки $A$ и $B$ на рис. 330, *б*), будет различной. Следовательно, между точками $A$ и $B$ устанавливается разность потенциалов, которая, как следует из рисунка, равна

$$\Delta\varphi' = (A_2 - A_1)/e. \qquad (246.1)$$

Разность потенциалов (246.1), обусловленная различием работ выхода контактирующих металлов, называется **внешней контактной разностью потенциалов.** Чаще говорят просто о контактной разности потенциалов, подразумевая под ней внешнюю.

Если уровни Ферми для двух контактирующих металлов не одинаковы, то между внутренними точками металлов наблюдается **внутренняя контактная разность потенциалов**, которая, как следует из рисунка, равна

$$\Delta\varphi'' = (E_{F_1} - E_{F_2})/e. \qquad (246.2)$$

В квантовой теории доказывается, что причиной возникновения внутренней контактной разности потенциалов является различие концентраций электронов в контактирующих металлах. $\Delta\varphi''$ зависит от температуры $T$ контакта металлов (поскольку наблюдается зависимость $E_F$ от $T$), обусловливая термоэлектрические явления. Как правило, $\Delta\varphi'' \ll \Delta\varphi'$.

Если, например, привести в соприкосновение три разнородных проводника, имеющих одинаковую температуру, то разность потенциалов между концами разомкнутой цепи равна алгебраической сумме скачков потенциала во всех контактах. Она, как можно показать (предоставляем это сделать читателю), не зависит от природы промежуточных проводников (второй закон Вольта).

Внутренняя контактная разность потенциалов возникает в двойном электрическом слое, образующемся в приконтактной области, называемом **контактным слоем**. Толщина контактного слоя в металлах составляет примерно $10^{-10}$ м, т. е. соизме-

рима с междоузельными расстояниями в решетке металла. Число электронов, участвующих в диффузии через контактный слой, составляет примерно 2 % от общего числа электронов, находящихся на поверхности металла. Столь незначительное изменение концентрации электронов в контактном слое, с одной стороны, и малая по сравнению с длиной свободного пробега электрона его толщина — с другой, не могут привести к заметному изменению проводимости контактного слоя по сравнению с остальной частью металла. Следовательно, электрический ток через контакт двух металлов проходит так же легко, как и через сами металлы, т. е. контактный слой проводит электрический ток в обоих направлениях ($1 \to 2$ и $2 \to 1$) одинаково и не дает эффекта выпрямления, который всегда связан с односторонней проводимостью.

## § 247. Термоэлектрические явления и их применение

Согласно второму закону Вольта, в замкнутой цепи, состоящей из нескольких металлов, находящихся при одинаковой температуре, э. д. с. не возникает, т. е. не происходит возбуждения электрического тока. Однако если температура контактов не одинакова, то в цепи возникает электрический ток, называемый **термоэлектрическим.** Явление возбуждения термоэлектрического тока **(явление Зеебека)**, а также тесно связанные с ним **явления Пельтье и Томсона** называются **термоэлектрическими явлениями.**

**1. Явление Зеебека** (1821). Немецкий физик Т. Зеебек (1770—1831) обнаружил, что в замкнутой цепи, состоящей из последовательно соединенных разнородных проводников, контакты между которыми имеют различную температуру, возникает электрический ток.

Рассмотрим замкнутую цепь, состоящую из двух металлических проводников *1* и *2* с температурами спаев $T_1$ (контакт $A$) и $T_2$ (контакт $B$), причем $T_1 > T_2$ (рис. 331).

Не вдаваясь в подробности, отметим, что в замкнутой цепи для многих пар

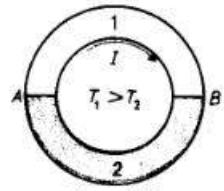


Рис. 331

металлов (например, Cu—Bi, Ag—Cu, Au—Cu) электродвижущая сила прямо пропорциональна разности температур в контактах:

$$\mathscr{E} = \alpha (T_1 - T_2).$$

Эта э. д. с. называется **термоэлектродвижущей силой.** Направление тока при $T_1 > T_2$ на рис. 331 показано стрелкой. Термоэлектродвижущая сила, например для пары металлов медь — константан, для разности температур 100 К составляет всего 4,25 мВ.

Причина возникновения термоэлектродвижущей э. д. с. ясна уже из формулы (246.2), определяющей внутреннюю контактную разность потенциалов на границе двух металлов. Дело в том, что положение уровня Ферми зависит от температуры. Поэтому если температуры контактов разные, то разными будут и внутренние контактные разности потенциалов. Таким образом, сумма скачков потенциала отлична от нуля, что и приводит к возникновению термоэлектрического тока. Отметим также, что при градиенте температуры происходит и диффузия электронов, которая тоже обусловливает термо-э. д. с.

Явление Зеебека не противоречит второму началу термодинамики, так как в данном случае внутренняя энергия преобразуется в электрическую, для чего используется два источника теплоты (два контакта). Следовательно, для поддержания постоянного тока в рассматриваемой цепи необходимо поддерживать постоянство разности температур контактов: к более нагретому контакту непрерывно подводить теплоту, а от холодного — непрерывно ее отводить.

Явление Зеебека используется для измерения температуры. Для этого применяются **термоэлементы**, или **термопары** — датчики температур, состоящие из двух соединенных между

собой разнородных металлических проводников. Если контакты (обычно спаи) проводников (проволок), образующих термопару, находятся при разных температурах, то в цепи возникает термоэлектродвижущая сила, которая зависит от разности температур контактов и природы применяемых материалов. Чувствительность термопар выше, если их соединять последовательно. Эти соединения называются **термобатареями** (или **термостолбиками**). Термопары применяются как для измерения ничтожно малых разностей температур, так и для измерения очень высоких и очень низких температур (например, внутри доменных печей или жидких газов). Точность определения температуры с помощью термопар составляет, как правило, несколько кельвин, а у некоторых термопар достигает $\approx 0{,}01$ К. Термопары обладают рядом преимуществ перед обычными термометрами: имеют бóльшую чувствительность и малую инерционность, позволяют проводить измерения в широком интервале температур и допускают дистанционные измерения.

Явление Зеебека в принципе может быть использовано для генерации электрического тока. Так, уже сейчас к. п. д. полупроводниковых термобатарей достигает $\approx 18\ \%$. Следовательно, совершенствуя полупроводниковые термоэлектрогенераторы, можно добиться эффективного прямого преобразования солнечной энергии в электрическую.

**2. Явление Пельтье** (1834). Французский физик Ж. Пельтье (1785—1845) обнаружил, что при прохождении через контакт двух различных проводников электрического тока в зависимости от его направления помимо джоулевой теплоты выделяется или поглощается дополнительная теплота. Таким образом, явление Пельтье является обратным по отношению к явлению Зеебека. В отличие от джоулевой теплоты, которая пропорциональна квадрату силы тока, теплота Пельтье пропорциональна первой степени силы тока и меняет знак при изменении направления тока.

Рассмотрим замкнутую цепь, состоящую из двух разнородных металлических проводников *1* и *2* (рис. 332), по которым пропускается ток $I'$ (его направление в данном случае выбрано совпадающим с направлением термотока (на рис. 331 при условии $T_1 > T_2$)). Согласно наблюдениям Пельтье, спай *A*, который при явлении Зеебека поддерживался бы

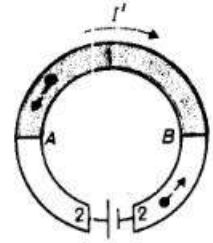


Рис. 332

при более высокой температуре, будет теперь охлаждаться, а спай *B* — нагреваться. При изменении направления тока $I'$ спай *A* будет нагреваться, спай *B* — охлаждаться.

Объяснить явление Пельтье можно следующим образом. Электроны по разную сторону спая обладают различной средней энергией (полной — кинетической плюс потенциальной). Если электроны (направление их движения задано на рис. 332 пунктирными стрелками) пройдут через спай *B* и попадут в область с меньшей энергией, то избыток своей энергии они отдадут кристаллической решетке и спай будет нагреваться. В спае *A* электроны переходят в область с большей энергией, забирая теперь недостающую энергию у кристаллической решетки, и спай будет охлаждаться.

Явление Пельтье используется в термоэлектрических полупроводниковых холодильниках, созданных впервые в 1954 г. под руководством А. Ф. Иоффе, и в некоторых электронных приборах.

**3. Явление Томсона** (1856). Вильям Томсон (Кельвин), исследуя термоэлектрические явления, пришел к заключению, подтвердив его экспериментально, что при прохождении тока по *неравномерно* нагретому проводнику должно происходить дополнительное выделение (поглощение) теплоты, аналогичной теплоте Пельтье. Это явление получило название явления Томсона. Его можно объяснить следующим образом. Так как в более нагретой части проводника электроны имеют бóльшую среднюю энергию, чем в менее нагретой, то, двигаясь в направлении убывания температуры, они отдают часть своей энергии решетке, в результате чего происходит выделение теплоты Томсона. Если

же электроны движутся в сторону возрастания температуры, то они, наоборот, пополняют свою энергию за счет энергии решетки, в результате чего происходит поглощение теплоты Томсона.

## § 248. Выпрямление на контакте металл — полупроводник

Рассмотрим некоторые особенности механизма процессов, происходящих при приведении в контакт металла с полупроводником. Для этого возьмем полупроводник $n$-типа с работой выхода $A$, меньшей работы выхода $A_м$ из металла. Соответствующие энергетические диаграммы до и после вступления в контакт показаны на рис. 333, *а, б*.

Если $A_м > A$, то при контакте электроны из полупроводника будут переходить в металл, в результате чего контактный слой полупроводника обеднится электронами и зарядится положительно, а металл — отрицательно. Этот процесс будет происходить до достижения равновесного состояния, характеризуемого, как и при контакте двух металлов, выравниванием уровней Ферми для металла и полупроводника. На контакте образуется двойной электрический слой $d$, поле которого (контактная разность потенциалов) препятствует дальнейшему переходу электронов. Вследствие малой концентрации электронов проводимости в полупроводнике (порядка $10^{15}$ см$^{-3}$ вместо $10^{22}$ см$^{-3}$ в металлах) толщина контактного слоя в полупроводнике достигает примерно $10^{-6}$ см, т. е. примерно в 10 000 раз больше, чем в металле. Контактный слой полупроводника обеднен основными носителями тока — электронами в зоне проводимости, и его сопротивление значительно больше, чем в остальном объеме полупроводника. Такой **контактный слой** называется **запирающим**.

При $d = 10^{-6}$ см и $\Delta\varphi \approx 1$ В напряженность электрического поля контактного слоя $E = \Delta\varphi/d \approx 10^8$ В/м. Такое контактное поле не может сильно повлиять на структуру спектра (например, на ширину запрещенной зоны, на энергию активации примесей и т. д.) и его действие сводится лишь к параллельному искривлению всех энергетических уровней полупроводника в области контакта (рис. 333, *б*). Так как в случае контакта уровни Ферми выравниваются, а работы выхода — величины постоянные, то при $A_м > A$ энергия электронов в контактном слое полупроводника больше, чем в остальном объеме. Поэтому в контактном слое дно зоны проводимости поднимается вверх, удаляясь от уровня Ферми. Соответственно происходит и искривление верхнего края валентной зоны, а также донорного уровня.

Помимо рассмотренного выше примера возможны еще следующие три случая контакта металла с примесными полупроводниками: а) $A_м < A$, полупроводник $n$-типа; б) $A_м > A$, полупроводник $p$-типа; в) $A_м < A$, полупроводник $p$-типа. Соответствующие зонные схемы показаны на рис. 334.

Если $A_м < A$, то при контакте металла с полупроводником $n$-типа электроны из металла переходят в полупроводник и об-

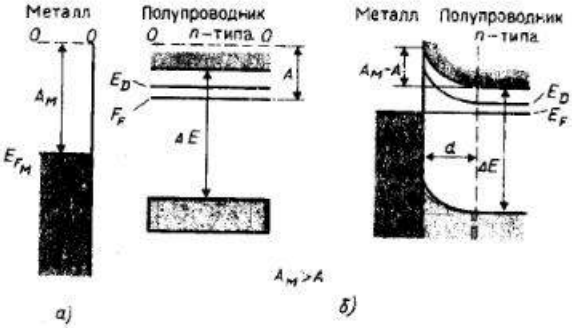



Рис. 333

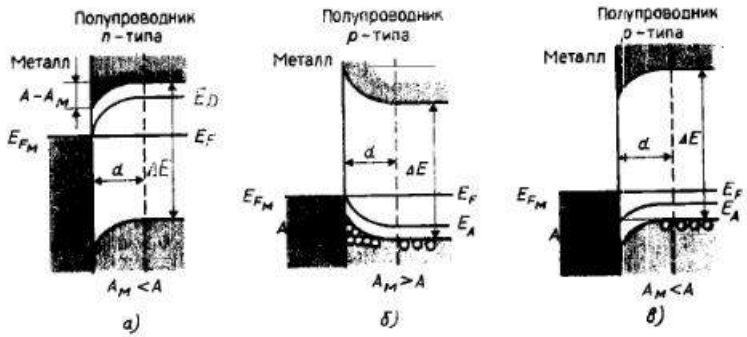



Рис. 334

разуют в контактном слое полупроводника отрицательный объемный заряд (рис. 334, *а*). Следовательно, контактный слой полупроводника обладает повышенной проводимостью, т. е. не является запирающим. Рассуждая аналогично, можно показать, что искривление энергетических уровней по сравнению с контактом металл — полупроводник *n*-типа ($A_м > A$) происходит в обратную сторону.

При контакте металла с полупроводником *p*-типа запирающий слой образуется при $A_м < A$ (рис. 334, *в*), так как в контактном слое полупроводника наблюдается избыток отрицательных ионов акцепторных примесей и недостаток основных носителей тока — дырок в валентной зоне. Если же $A_м > A$ (рис. 334, *б*), то в контактном слое полупроводника *p*-типа наблюдается избыток основных носителей тока — дырок в валентной зоне, контактный слой обладает повышенной проводимостью.

Исходя из приведенных рассуждений, видим, что запирающий контактный слой возникает при контакте донорного полупроводника с меньшей работой выхода, чем у металла (см. рис. 333, *б*), и у акцепторного — с большей работой выхода, чем у металла (рис. 333, *в*).

Запирающий контактный слой обладает **односторонней (вентильной) проводимостью**, т. е. при приложении к контакту внешнего электрического поля он пропускает ток практически только в одном направлении: либо из металла в полупроводник, либо из полупроводника в металл. Это важнейшее свойство запирающего слоя объясняется зависимостью его сопротивления от направления внешнего поля.

Если направления внешнего и контактного полей противоположны, то основные носители тока втягиваются в контактный слой из объема полупроводника; толщина контактного слоя, обедненного основными носителями тока, и его сопротивление уменьшаются. В этом направлении, называемом **пропускным**, электрический ток может проходить через контакт металл — полупроводник. Если внешнее поле совпадает по знаку с контактным, то основные носители тока будут перемещаться от границы с металлом; толщина обедненного слоя возрастает, возрастает и его сопротивление. Очевидно, что в этом случае ток через контакт отсутствует, выпрямитель заперт — это **запорное** направление. Для запирающего слоя на границе металла с полупроводником *n*-типа ($A_м > A$) пропускным является направление тока из металла в полупроводник, а для запирающего слоя на границе металла с полупроводником *p*-типа ($A_м < A$) — из полупроводника в металл.

## § 249. Контакт электронного и дырочного полупроводников (*p-n*-переход)

Граница соприкосновения двух полупроводников, один из которых имеет электронную, а другой — дырочную проводимость, называется **электронно-дырочным переходом** (или ***p-n*-переходом**). Эти переходы имеют большое практическое значение, являясь основой работы многих полу-




Рис. 335

проводниковых приборов. $p$-$n$-Переход нельзя осуществить просто механическим соединением двух полупроводников. Обычно области различной проводимости создают либо при выращивании кристаллов, либо при соответствующей обработке кристаллов. Например, на кристалл германия $n$-типа накладывается индиевая «таблетка» (рис. 335, *а*). Эта система нагревается примерно при 500 °С в вакууме или в атмосфере инертного газа; атомы индия диффундируют на некоторую глубину в германий. Затем расплав медленно охлаждают. Так как германий, содержащий индий, обладает дырочной проводимостью, то на границе закристаллизовавшегося расплава и германия $n$-типа образуется $p$-$n$-переход (рис. 335, *б*).

Рассмотрим физические процессы, происходящие в $p$-$n$-переходе (рис. 336). Пусть донорный полупроводник (работа выхода — $A_n$, уровень Ферми — $E_{F_n}$) приводится в контакт (рис. 336, *б*) с акцепторным полупроводником (работа выхода — $A_p$, уровень Ферми — $E_{F_p}$). Электроны из $n$-полупроводника, где их концентрация выше, будут диффундировать в $p$-полупроводник, где их концентрация ниже. Диффузия же дырок происходит в обратном направлении — в направлении $p \to n$.

В $n$-полупроводнике из-за ухода электронов вблизи границы остается нескомпенсированный положительный объемный заряд неподвижных ионизованных донорных атомов. В $p$-полупроводнике из-за ухода дырок вблизи границы образуется отрицательный объемный заряд неподвижных ионизованных акцепторов (рис. 336, *а*). Эти объемные заряды образуют у границы двойной электрический слой, поле которого, направленное от $n$-области к $p$-области, препятствует дальнейшему переходу электронов в направлении $n \to p$ и дырок в направлении $p \to n$. Если концентрации доноров и акцепторов в полупроводниках $n$- и $p$-типа одинаковы, то толщины слоев $d_1$ и $d_2$ (рис. 336, *в*), в которых локализуются неподвижные заряды, равны ($d_1 = d_2$).

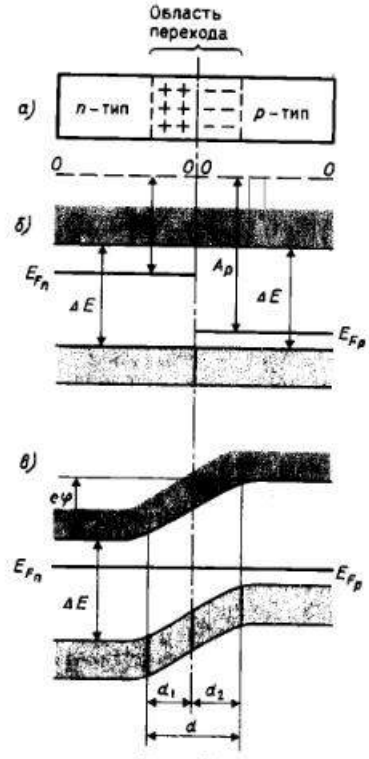



Рис. 336

При определенной толщине $p$-$n$-перехода наступает равновесное состояние, характеризуемое выравниванием уровней Ферми для обоих полупроводников (рис. 336, *в*). В области $p$-$n$-перехода энергетические зоны искривляются, в результате чего возникают потенциальные барьеры как для электронов, так и для дырок. Высота потенциального барьера $e\varphi$ определяется первоначальной разностью положений уровня Ферми в обоих полупроводниках. Все энергетические уровни

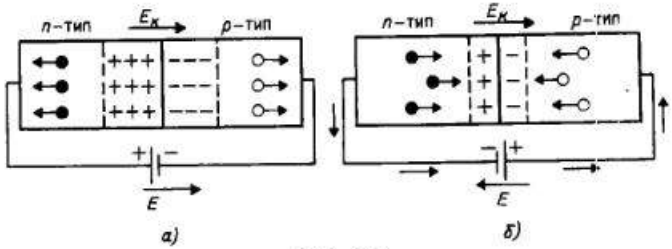



Рис. 337

акцепторного полупроводника подняты относительно уровней донорного полупроводника на высоту, равную $e\varphi$, причем подъем происходит на толщине двойного слоя $d$.

Толщина $d$ слоя $p$-$n$-перехода в полупроводниках составляет примерно $10^{-6}$ — $10^{-7}$ м, а контактная разность потенциалов — десятые доли вольт. Носители тока способны преодолеть такую разность потенциалов лишь при температуре в несколько тысяч градусов, т. е. при обычных температурах равновесный контактный слой является **запирающим** (характеризуется повышенным сопротивлением).

Сопротивление запирающего слоя можно изменить с помощью внешнего электрического поля. Если приложенное к $p$-$n$-переходу внешнее электрическое поле направлено от $n$-полупроводника к $p$-полупроводнику (рис. 337, *а*), т. е. совпадает с полем контактного слоя, то оно вызывает движение электронов в $n$-полупроводнике и дырок в $p$-полупроводнике от границы $p$-$n$-перехода в противоположные стороны. В результате запирающий слой расширится и его сопротивление возрастет. Направление внешнего поля, расширяющего запирающий слой, называется **запирающим (обратным)**. В этом направлении электрический ток через $p$-$n$-переход практически не проходит. Ток в запирающем слое в запирающем направлении образуется лишь за счет неосновных носителей тока (электронов в $p$-полупроводнике и дырок в $n$-полупроводнике).

Если приложенное к $p$-$n$-переходу внешнее электрическое поле направлено противоположно полю контактного слоя (рис. 337, *б*), то оно вызывает движение электронов в $n$-полупроводнике и дырок в $p$-полупроводнике к границе $p$-$n$-перехода навстречу друг другу. В этой области они рекомбинируют, толщина контактного слоя и его сопротивление уменьшаются. Следовательно, в этом направлении электрический ток проходит сквозь $p$-$n$-переход в направлении от $p$-полупроводника к $n$-полупроводнику; оно называется **пропускным (прямым)**.

Таким образом, $p$-$n$-переход (подобно контакту металла с полупроводником) обладает **односторонней (вентильной) проводимостью.**

На рис. 338 представлена вольт-амперная характеристика $p$-$n$-перехода. Как уже указывалось, при пропускном (прямом) напряжении внешнее электрическое поле способствует движению основных носителей тока к границе $p$-$n$-перехода (см. рис. 337, *б*). В результате толщина контактного слоя уменьшается. Соответственно уменьшается и сопротивление перехода (тем сильнее, чем больше напряжение), а сила тока становится большой (правая ветвь на рис. 338). Это направление тока называется **прямым**.

При запирающем (обратном) напряжении внешнее электрическое поле пре-

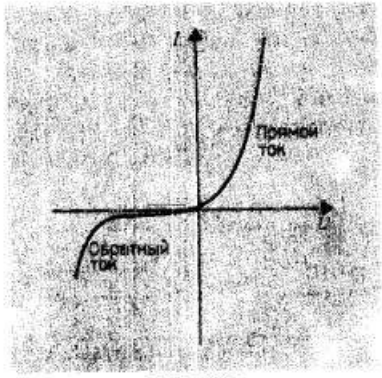



Рис. 338

пятствует движению основных носителей тока к границе $p$-$n$-перехода (см. рис. 337, *а*) и способствует движению неосновных носителей тока, концентрация которых в полупроводниках невелика. Это приводит к увеличению толщины контактного слоя, обедненного основными носителями тока. Соответственно увеличивается и сопротивление перехода. Поэтому в данном случае через $p$-$n$-переход протекает только небольшой ток (он называется **обратным**), полностью обусловленный неосновными носителями тока (левая ветвь рис. 338). Быстрое возрастание этого тока означает пробой контактного слоя и его разрушение. При включении в цепь переменного тока $p$-$n$-переходы действуют как выпрямители.

## § 250. Полупроводниковые диоды и триоды (транзисторы)

Односторонняя проводимость контактов двух полупроводников (или металла с полупроводником) используется для выпрямления и преобразования переменных токов. Если имеется один электронно-дырочный переход, то его действие аналогично действию двухэлектродной лампы — диода (см. § 105). Поэтому полупроводниковое устройство, содержащее один $p$-$n$-переход, называется **полупроводниковым (кристаллическим) диодом.** Полупроводниковые диоды по конструкции делятся на **точечные и плоскостные**.

В качестве примера рассмотрим точечный германиевый диод (рис. 339), в котором тонкая вольфрамовая проволока *1* прижимается к $n$-германию *2* острием, покрытым алюминием. Если через диод в прямом направлении пропустить кратковременный импульс тока, то при этом резко повышается диффузия Al в Ge и образуется слой германия, обогащенный

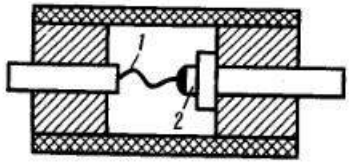



Рис. 339

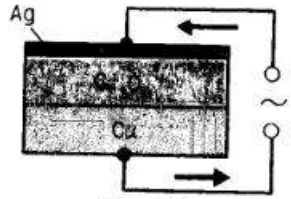



Рис. 340

алюминием и обладающий $p$-проводимостью. На границе этого слоя образуется $p$-$n$-переход, обладающий высоким коэффициентом выпрямления. Благодаря малой емкости контактного слоя точечные диоды применяются в качестве детекторов (выпрямителей) высокочастотных колебаний вплоть до сантиметрового диапазона длин волн.

Принципиальная схема плоскостного меднозакисного (купроксного) выпрямителя дана на рис. 340. На медную пластину с помощью химической обработки наращивается слой закиси меди $Cu_2O$, который покрывается слоем серебра. Серебряный электрод служит только для включения выпрямителя в цепь. Часть слоя $Cu_2O$, прилегающая к Cu и обогащенная ею, обладает электронной проводимостью, а часть слоя $Cu_2O$, прилегающая к Ag и обогащенная (в процессе изготовления выпрямителя) кислородом,— дырочной проводимостью. Таким образом, в толще закиси меди образуется запирающий слой с пропускным направлением тока от $Cu_2O$ к Cu ($p \rightarrow n$).

Технология изготовления германиевого плоскостного диода описана в § 249 (см. рис. 325). Распространенными являются также селеновые диоды и диоды на основе арсенида галлия и карбида кремния. Рассмотренные диоды обладают целым рядом преимуществ по сравнению с электронными лампами (малые габаритные размеры, высокие к. п. д. и срок службы, постоянная готовность к работе и т. д.), но они очень чувствительны к температуре, поэтому интервал их рабочих температур ограничен (от $-70$ до $+120$ °C). $p$-$n$-Переходы обладают не только прекрасными выпрямляющими свойствами, но могут быть использованы также для усиления, а если в схему ввести

обратную связь, то и для генерирования электрических колебаний. Приборы, предназначенные для этих целей, получили название **полупроводниковых триодов** или **транзисторов** (первый транзистор создан в 1949 г. американскими физиками Д. Бардином, У. Браттейном и У. Шокли; Нобелевская премия 1956 г.).

Для изготовления транзисторов используются германий и кремний, так как они характеризуются большой механической прочностью, химической устойчивостью и большей, чем в других полупроводниках, подвижностью носителей тока. Полупроводниковые триоды делятся на **точечные** и **плоскостные**. Первые значительно усиливают напряжение, но их выходные мощности малы из-за опасности перегрева (например, верхний предел рабочей температуры точечного германиевого триода лежит в пределах 50—80 °С). Плоскостные триоды являются более мощными. Они могут быть типа *p-n-p* и типа *n-p-n* в зависимости от чередования областей с различной проводимостью.

Для примера рассмотрим принцип работы плоскостного триода *p-n-p*, т. е. триода на основе *n*-полупроводника (рис. 341). Рабочие «электроды» триода, которыми являются **база** (средняя часть транзистора), **эмиттер** и **коллектор** (прилегающие к базе с обеих сторон области с иным типом проводимости), включаются в схему с помощью невыпрямляющих контактов — металлических проводников. Между эмиттером и базой прикладывается постоянное смещающее напряжение в прямом направлении, а между базой и коллектором — постоянное смещающее напряжение в обратном направлении. Усиливаемое переменное напряжение подается на входное сопротивление $R_{вх}$, а усиленное — снимается с выходного сопротивления $R_{вых}$.

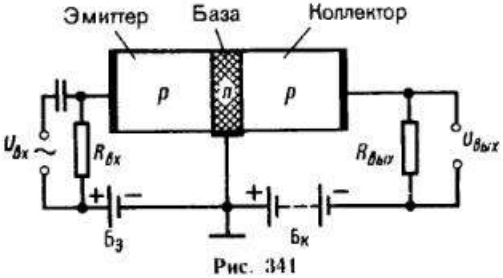


Рис. 341

Протекание тока в цепи эмиттера обусловлено в основном движением дырок (они являются основными носителями тока) и сопровождается их «впрыскиванием» — **инжекцией** — в область базы. Проникшие в базу дырки диффундируют по направлению к коллектору, причем при небольшой толщине базы значительная часть инжектированных дырок достигает коллектора. Здесь дырки захватываются полем, действующим внутри перехода (притягиваются к отрицательно заряженному коллектору), и изменяют ток коллектора. Следовательно, всякое изменение тока в цепи эмиттера вызывает изменение тока в цепи коллектора.

Прикладывая между эмиттером и базой переменное напряжение, получим в цепи коллектора переменный ток, а на выходном сопротивлении — переменное напряжение. Величина усиления зависит от свойств *p-n*-переходов, нагрузочных сопротивлений и напряжения батареи $Б_к$. Обычно $R_{вых} \gg R_{вх}$, поэтому $U_{вых}$ значительно превышает входное напряжение $U_{вх}$ (усиление может достигать 10 000). Так как мощность переменного тока, выделяемая в $R_{вых}$, может быть больше, чем расходуемая в цепи эмиттера, то транзистор дает и усиление мощности. Эта усиленная мощность появляется за счет источника тока, включенного в цепь коллектора.

Из рассмотренного следует, что транзистор, подобно электронной лампе, дает усиление и напряжения и мощности. Если в лампе анодный ток управляется напряжением на сетке, то в транзисторе ток коллектора, соответствующий анодному току лампы, управляется напряжением на базе.

Принцип работы транзистора *n-p-n*-типа аналогичен рассмотренному выше, но роль дырок играют электроны. Существуют и другие типы транзисторов, так же как и другие схемы их включения. Благодаря своим преимуществам перед электронными лампами (малые габаритные

размеры, высокие к. п. д. и срок службы, отсутствие накаливаемого катода (поэтому потребление меньшей мощности), отсутствие необходимости в вакууме и т. д.) транзистор совершил революцию в области электронных средств связи и обеспечил создание быстродействующих ЭВМ с большим объемом памяти.

## Контрольные вопросы

- В чем суть адиабатического приближения и приближения самосогласованного поля?
- Чем отличаются энергетические состояния электронов в изолированном атоме и кристалле? Что такое запрещенные и разрешенные энергетические зоны?
- Чем различаются по зонной теории полупроводники и диэлектрики? металлы и диэлектрики?
- Когда по зонной теории твердое тело является проводником электрического тока?
- Как объяснить увеличение проводимости полупроводников с повышением температуры?
- Чем обусловлена проводимость собственных полупроводников?
- Почему уровень Ферми в собственном полупроводнике расположен в середине запрещенной зоны? Доказать это положение.
- Каков механизм электронной примесной проводимости полупроводников? дырочной примесной проводимости?
- Почему при достаточно высоких температурах в примесных полупроводниках преобладает собственная проводимость?
- Каков механизм собственной фотопроводимости? примесной фотопроводимости? Что такое красная граница фотопроводимости?
- Каковы по зонной теории механизмы возникновения флуоресценции и фосфоресценции?
- В чем причины возникновения контактной разности потенциалов?
- В чем суть термоэлектрических явлений? Как объяснить их возникновение?
- Когда возникает запирающий контактный слой при контакте металла с полупроводником $n$-типа? с полупроводником $p$-типа? Объясните механизм его образования.
- Как объяснить одностороннюю проводимость $p$-$n$-перехода?
- Какова вольт-амперная характеристика $p$-$n$-перехода? Объясните возникновение прямого и обратного тока.
- Какое направление в полупроводниковом диоде является пропускным для тока?
- Почему через полупроводниковый диод проходит ток (хотя и слабый) даже при запирающем напряжении?

## Задачи

**31.1.** Германиевый образец нагревают от 0 до 17 °С. Принимая ширину запрещенной зоны кремния 0,72 эВ, определить, во сколько раз возрастет его удельная проводимость. [В 2,45 раза]

**31.2.** В чистый кремний введена небольшая примесь бора. Пользуясь Периодической системой Д. И. Менделеева, определить и объяснить тип проводимости примесного кремния.

**31.3.** Определить длину волны, при которой в примесном полупроводнике еще возбуждается фотопроводимость.

# 7 Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц

## Глава 32
## Элементы физики атомного ядра

### § 251. Размер, состав и заряд атомного ядра. Массовое и зарядовое числа

Э. Резерфорд, исследуя прохождение α-частиц с энергией в несколько мегаэлектрон-вольт через тонкие пленки золота (см. § 208), пришел к выводу о том, что атом состоит из положительно заряженного ядра и окружающих его электронов. Проанализировав эти опыты, Резерфорд также показал, что атомные ядра имеют размеры примерно $10^{-14}$—$10^{-15}$ м (линейные размеры атома примерно $10^{-10}$ м).

Атомное ядро состоит из элементарных частиц — **протонов и нейтронов** (протонно-нейтронная модель ядра была предложена советским физиком Д. Д. Иваненко (р. 1904), а впоследствии развита В. Гейзенбергом).

Протон ($p$) имеет положительный заряд, равный заряду электрона, и массу покоя $m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг $\approx 1836 m_e$, где $m_e$ — масса электрона. Нейтрон ($n$) — нейтральная частица с массой покоя $m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ кг $\approx 1839 m_e$. Протоны и нейтроны называются **нуклонами** (от лат. nucleus — ядро). Общее число нуклонов в атомном ядре называется **массовым числом** $A$.

Атомное ядро характеризуется **зарядом** $Ze$, где $e$ — заряд протона, $Z$ — **зарядовое число** ядра, равное числу протонов в ядре и совпадающее с порядковым номером химического элемента в Периодической системе элементов Менделеева. Известные в настоящее время 107 элементов таблицы Менделеева имеют зарядовые числа ядер от $Z = 1$ до $Z = 107$.

Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом: ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$, где X — символ химического элемента, $Z$ — атомный номер (число протонов в ядре), $A$ — массовое число (число нуклонов в ядре).

Сейчас протонно-нейтронная модель ядра не вызывает сомнений. Рассматривалась также гипотеза о протонно-электронном строении ядра, но она не выдержала экспериментальной проверки. Так, если придерживаться этой гипотезы, то массовое число $A$ должно представлять собой число протонов в ядре, а разность между массовым числом и числом электронов должна быть равна заряду ядра. Эта модель согласовывалась со значениями изотопных масс и зарядов, но противоречила значениям спинов и магнитных моментов ядер, энергии связи ядра и т. д. Кроме того, она оказалась несовместимой с соотношением неопределенностей (см. § 215). В результате гипотеза о протонно-электронном строении ядра была отвергнута.

Так как атом нейтрален, то заряд ядра определяет и число электронов в атоме. От числа же электронов зависит их распределение по состояниям в атоме, от которого, в свою очередь, зависят химические свойства атома. Следовательно, заряд ядра определяет специфику данного химического элемента, т. е. определяет число электронов в атоме, конфигурацию их электронных оболочек, величину и характер внутриатомного электрического поля.

Ядра с одинаковыми $Z$, но разными $A$ (т. е. с разными числами нейтронов $N =$

$A-Z$) называются **изотопами**, а ядра с одинаковыми $A$, но разными $Z$ — **изобарами**. Например, водород ($Z=1$) имеет три изотопа: ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$ — протий ($Z=1$, $N=0$), ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ — дейтерий ($Z=1$, $N=1$), ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$ — тритий ($Z=1$, $N=2$), олово — десять, и т. д. В подавляющем большинстве случаев изотопы одного и того же химического элемента обладают одинаковыми химическими и почти одинаковыми физическими свойствами (исключение составляют, например, изотопы водорода), определяющимися в основном структурой электронных оболочек, которая является одинаковой для всех изотопов данного элемента. Примером ядер-изобар могут служить ядра ${}^{10}_{4}\mathrm{Be}$, ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$, ${}^{10}_{6}\mathrm{C}$. В настоящее время известно более 2000 ядер, отличающихся либо $Z$, либо $A$, либо тем и другим.

**Радиус ядра** задается эмпирической формулой

$$R=R_0 A^{1/3}, \qquad (251.1)$$

где $R_0=(1{,}3\div 1{,}7)\,10^{-15}$ м. Однако при употреблении этого термина необходимо соблюдать осторожность (из-за его неоднозначности, например из-за размытости границы ядра). Из формулы (251.1) вытекает, что объем ядра пропорционален числу нуклонов в ядре. Следовательно, плотность ядерного вещества примерно одинакова для всех ядер ($\approx 10^{17}$ кг/м$^3$).

## § 252. Дефект массы и энергия связи ядра

Исследования показывают, что атомные ядра являются устойчивыми образованиями. Это означает, что в ядре между нуклонами существует определенная связь.

Массу ядер очень точно можно определить с помощью **масс-спектрометров** — измерительных приборов, разделяющих с помощью электрических и магнитных полей пучки заряженных частиц (обычно ионов) с разными удельными зарядами $Q/m$. Масс-спектрометрические измерения показали, что *масса ядра меньше, чем сумма масс составляющих его нуклонов*. Но так как всякому изменению массы (см. § 40) должно соответствовать изменение энергии, то, следовательно, при образовании ядра должна выделяться определенная энергия. Из закона сохранения энергии вытекает и обратное: для разделения ядра на составные части необходимо затратить такое же количество энергии, которое выделяется при его образовании. Энергия, которую необходимо затратить, чтобы расщепить ядро на отдельные нуклоны, называется **энергией связи ядра** (см. § 40).

Согласно выражению (40.9), энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{\text{св}}=[Zm_p+(A-Z)m_n-m_{\text{я}}]c^2, \qquad (252.1)$$

где $m_p$, $m_n$, $m_{\text{я}}$ — соответственно массы протона, нейтрона и ядра. В таблицах обычно приводятся не массы $m_{\text{я}}$ ядер, а массы $m$ атомов. Поэтому для энергии связи ядра пользуются формулой

$$E_{\text{св}}=[Zm_{\text{H}}+(A-Z)\,m_n-m]c^2, \qquad (252.2)$$

где $m_{\text{H}}$ — масса атома водорода. Так как $m_{\text{H}}$ больше $m_p$ на величину $m_e$, то первый член в квадратных скобках включает в себя массу $Z$ электронов. Но так как масса атома $m$ отличается от массы ядра $m_{\text{я}}$ как раз на массу $Z$ электронов, то вычисления по формулам (252.1) и (252.2) приводят к одинаковым результатам.

Величина

$$\Delta m=[Zm_p+(A-Z)\,m_n]-m_{\text{я}}$$

называется **дефектом массы** ядра. На эту величину уменьшается масса всех нуклонов при образовании из них атомного ядра.

Часто вместо энергии связи рассматривают **удельную энергию связи** $\delta E_{\text{св}}$ — энергию связи, отнесенную к одному нуклону. Она характеризует устойчивость (прочность) атомных ядер, т. е. чем больше $\delta E_{\text{св}}$, тем устойчивее ядро. Удельная энергия связи зависит от массового числа $A$ элемента (рис. 342). Для легких ядер ($A\leqslant 12$) удельная энергия связи круто возрастает до $6\div 7$ МэВ, претерпевая целый ряд скачков (например, для ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$ $\delta E_{\text{св}}=1{,}1$ МэВ, для ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ — 7,1 МэВ, для ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ — 5,3 МэВ), затем более медленно возрастает до максимальной величины

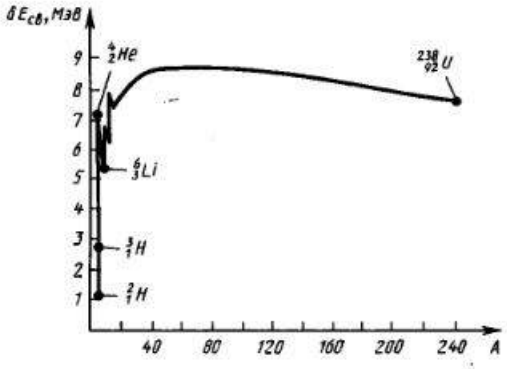



Рис. 342

8,7 МэВ у элементов с $A = 50 \div 60$, а потом постепенно уменьшается у тяжелых элементов (например, для $^{238}_{92}U$ она составляет 7,6 МэВ). Отметим для сравнения, что энергия связи валентных электронов в атомах составляет примерно 10 эВ (в $10^6$! раз меньше).

Уменьшение удельной энергии связи при переходе к тяжелым элементам объясняется тем, что с возрастанием числа протонов в ядре увеличивается и энергия их *кулоновского отталкивания*. Поэтому связь между нуклонами становится менее сильной, а сами ядра менее прочными.

Наиболее устойчивыми оказываются так называемые **магические ядра**, у которых число протонов или число нейтронов равно одному из магических чисел: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Особенно стабильны **дважды магические ядра**, у которых магическими являются и число протонов, и число нейтронов (этих ядер насчитывается всего пять: $^4_2He$, $^{16}_8O$, $^{40}_{20}Ca$, $^{48}_{20}Ca$, $^{208}_{82}Pb$).

Из рис. 342 следует, что наиболее устойчивыми с энергетической точки зрения являются ядра средней части таблицы Менделеева. Тяжелые и легкие ядра менее устойчивы. Это означает, что энергетически выгодны следующие процессы: 1) деление тяжелых ядер на более легкие; 2) слияние легких ядер друг с другом в более тяжелые. При обоих процессах выделяется огромное количество энергии; эти процессы в настоящее время осуществлены практически (реакции деления и термоядерные реакции).

## § 253. Спин ядра и его магнитный момент

Использование приборов высокой разрешающей способности и специальных источников возбуждения спектра позволило обнаружить сверхтонкую структуру спектральных линий. Ее существование В. Паули объяснил (1924) наличием у атомных ядер собственного момента импульса (спина) и магнитного момента.

**Собственный момент импульса ядра — спин ядра** — складывается из спинов нуклонов и из орбитальных моментов импульса нуклонов (моментов импульса, обусловленных движением нуклонов внутри ядра). Обе эти величины являются векторами, поэтому спин ядра представляет их векторную сумму. Спин ядра *квантуется* по закону

$$L_я = \hbar \sqrt{I(I+1)},$$

где $I$ — **спиновое ядерное квантовое число** (его часто называют просто спином ядра), которое принимает целые или полуцелые значения 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, ... . Ядра с четными $A$ имеют целые $I$, с нечетными — полуцелые $I$.

Атомное ядро кроме спина обладает **магнитным моментом** $\mathbf{p}_{mя}$. Магнитный момент ядра связан со спином ядра (см. аналогичное выражение (131.5) для электрона): $\mathbf{p}_{mя} = g_я \mathbf{L}_я$, где $g_я$ — коэффициент пропорциональности, называемый **ядерным гиромагнитным отношением.**

Единицей магнитных моментов ядер служит **ядерный магнетон**

$$\mu_я = e\hbar/(2m_p) = 5{,}0508 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл}, \quad (253.1)$$

где $m_p$ — масса протона (ср. эту формулу с магнетоном Бора (§ 131)). Ядерный магнетон в $m_p/m_e \approx 1836$ раз меньше магнетона Бора, поэтому магнитные свойства атомов определяются в основном магнитными свойствами его электронов.

В случае эффекта Зеемана (см. § 223) при помещении атома в магнитное поле наблюдается расщепление энергетических уровней и спектральных линий **(тонкая структура)**, обусловленное спин-орбиталь-

ным взаимодействием электронов. Во внешнем магнитном поле также наблюдается расщепление уровней энергии атома на близко расположенные подуровни **(сверхтонкая структура)**, обусловленное взаимодействием магнитного момента ядра с магнитным полем электронов в атоме.

Магнитные моменты ядер могут, таким образом, определяться спектроскопическим методом по сверхтонкой структуре спектральных линий. Однако магнитные моменты ядер примерно на три порядка меньше магнитных моментов электронов (см. (253.1) и (§ 131)), поэтому расщепление спектральных линий, соответствующее сверхтонкой структуре, значительно меньше расщепления за счет взаимодействия между спиновым и орбитальным моментами электрона (тонкая структура). Таким образом, из-за малости эффекта, даже при использовании спектральных приборов очень большой разрешающей способности, точность этого метода невелика. Поэтому были разработаны более точные (не оптические) методы определения магнитных моментов ядер, одним из которых является **метод ядерного магнитного резонанса.**

Явление ядерного магнитного резонанса заключается в следующем: если на вещество, находящееся в сильном постоянном магнитном поле, действовать слабым переменным радиочастотным магнитным полем, то при частотах, соответствующих частотам переходов между ядерными подуровнями, возникает резкий (резонансный) максимум поглощения. Ядерный магнитный резонанс обусловлен происходящими под влиянием переменного магнитного поля квантовыми переходами между ядерными подуровнями. Точность метода задается точностью измерения напряженности постоянного магнитного поля и резонансной частоты, так как по их значениям вычисляются магнитные моменты ядер. Так как для измерения этих величин применяются прецизионные методы, то $p_{m_я}$ можно определять с высокой точностью (до шести знаков).

Метод ядерного магнитного резонанса позволяет наблюдать ядерный резонанс на ядрах, обладающих магнитным моментом порядка $0{,}1\mu_я$. Количество вещества, необходимое для измерений, должно составлять $10^{-3}$—10 г (в зависимости от значения $p_{m_я}$). Измерение значений магнитных моментов ядер часто сводится к сравнению резонансных частот исследуемых ядер с резонансной частотой протонов, что позволяет освободиться от точной калибровки магнитного поля, которая является довольно трудоемкой.

## § 254. Ядерные силы. Модели ядра

Между составляющими ядро нуклонами действуют особые, специфические для ядра силы, значительно превышающие кулоновские силы отталкивания между протонами. Они называются **ядерными силами.**

С помощью экспериментальных данных (рассеяние нуклонов на ядрах, ядерные превращения и т. д.) доказано, что ядерные силы намного превышают гравитационные, электрические и магнитные взаимодействия и не сводятся к ним. Ядерные силы относятся к классу так называемых **сильных взаимодействий.**

Перечислим основные свойства ядерных сил:

1) ядерные силы являются *силами притяжения*;

2) ядерные силы являются *короткодействующими* — их действие проявляется только на расстояниях примерно $10^{-15}$ м. При увеличении расстояния между нуклонами ядерные силы быстро уменьшаются до нуля, а при расстояниях, меньших их радиуса действия, оказываются примерно в 100 раз больше кулоновских сил, действующих между протонами на том же расстоянии;

3) ядерным силам свойственна *зарядовая независимость:* ядерные силы, действующие между двумя протонами, или двумя нейтронами, или, наконец, между протоном и нейтроном, одинаковы по величине. Отсюда следует, что ядерные силы имеют неэлектрическую природу;

4) ядерным силам свойственно *насыщение*, т. е. каждый нуклон в ядре взаимодействует только с ограниченным числом ближайших к нему нуклонов. Насыщение проявляется в том, что удельная энергия

связи нуклонов в ядре (если не учитывать легкие ядра) при увеличении числа нуклонов не растет, а остается приблизительно постоянной;

5) ядерные силы зависят от взаимной *ориентации спинов* взаимодействующих нуклонов. Например, протон и нейтрон образуют дейтрон (ядро изотопа $^{2}_{1}H$) только при условии параллельной ориентации их спинов;

6) ядерные силы *не являются центральными*, т. е. действующими по линии, соединяющей центры взаимодействующих нуклонов.

Сложный характер ядерных сил и трудность точного решения уравнений движения всех нуклонов ядра (ядро с массовым числом $A$ представляет собой систему из $A$ тел) не позволили до настоящего времени разработать единую последовательную теорию атомного ядра. Поэтому на данной стадии прибегают к рассмотрению приближенных ядерных моделей, в которых ядро заменяется некоторой модельной системой, довольно хорошо описывающей только определенные свойства ядра и допускающей более или менее простую математическую трактовку. Из большого числа моделей, каждая из которых обязательно использует подобранные произвольные параметры, согласующиеся с экспериментом, рассмотрим две: **капельную и оболочечную.**

**1. Капельная модель ядра** (1936; Н. Бор и Я. И. Френкель). Капельная модель ядра является первой моделью. Она основана на аналогии между поведением нуклонов в ядре и поведением молекул в капле жидкости. Так, в обоих случаях силы, действующие между составными частицами — молекулами в жидкости и нуклонами в ядре,— являются короткодействующими и им свойственно насыщение. Для капли жидкости при данных внешних условиях характерна постоянная плотность ее вещества. Ядра же характеризуются практически постоянной удельной энергией связи и постоянной плотностью, не зависящей от числа нуклонов в ядре. Наконец, объем капли, так же как и объем ядра (см. (251.1)), пропорционален числу частиц. Существенное отличие ядра от капли жидкости в этой модели заключается в том, что она трактует ядро как каплю электрически заряженной несжимаемой жидкости (с плотностью, равной ядерной), подчиняющуюся законам квантовой механики. Капельная модель ядра позволила получить полуэмпирическую формулу для энергии связи нуклонов в ядре, объяснила механизм ядерных реакций и особенно реакции деления ядер. Однако эта модель не смогла, например, объяснить повышенную устойчивость ядер, содержащих магические числа протонов и нейтронов.

**2. Оболочечная модель ядра** (1949—1950; американский физик М. Гепперт-Майер (1906—1975) и немецкий физик Х. Иенсен (1907—1973)). Оболочечная модель предполагает распределение нуклонов в ядре по дискретным энергетическим уровням (оболочкам), заполняемым нуклонами согласно принципу Паули, и связывает устойчивость ядер с заполнением этих уровней. Считается, что ядра с полностью заполненными оболочками являются наиболее устойчивыми. Такие особо устойчивые (магические) ядра действительно существуют (см. § 252).

Оболочечная модель ядра позволила объяснить спины и магнитные моменты ядер, различную устойчивость атомных ядер, а также периодичность изменений их свойств. Эта модель особенно хорошо применима для описания легких и средних ядер, а также для ядер, находящихся в основном (невозбужденном) состоянии.

По мере дальнейшего накопления экспериментальных данных о свойствах атомных ядер появлялись все новые факты, не укладывающиеся в рамки описанных моделей. Так возникли **обобщенная модель ядра** (синтез капельной и оболочечной моделей), **оптическая модель ядра** (объясняет взаимодействие ядер с налетающими частицами) и т. д.

## § 255. Радиоактивное излучение и его виды

Французский физик А. Беккерель (1852—1908) в 1896 г. при изучении люминесцен-

ции солей урана случайно обнаружил *самопроизвольное* испускание ими излучения неизвестной природы, которое действовало на фотопластинку, ионизировало воздух, проникало сквозь тонкие металлические пластинки, вызывало люминесценцию ряда веществ. Продолжая исследование этого явления, супруги Кюри — Мария (1867—1934) и Пьер — обнаружили, что беккерелевское излучение свойственно не только урану, но и многим другим тяжелым элементам, таким, как торий и актиний. Они показали также, что урановая смоляная обманка (руда, из которой добывается металлический уран) испускает излучение, интенсивность которого во много раз превышает интенсивность излучения урана. Таким образом удалось выделить два новых элемента — носителя беккерелевского излучения: полоний $^{210}_{84}$Po и радий $^{226}_{88}$Ra.

Обнаруженное излучение было названо **радиоактивным излучением**, а само явление — испускание радиоактивного излучения — **радиоактивностью.**

Дальнейшие опыты показали, что на характер радиоактивного излучения препарата не оказывают влияния вид химического соединения, агрегатное состояние, механическое давление, температура, электрические и магнитные поля, т. е. все те воздействия, которые могли бы привести к изменению состояния электронной оболочки атома. Следовательно, радиоактивные свойства элемента обусловлены лишь структурой его ядра.

В настоящее время под **радиоактивностью** понимают способность некоторых атомных ядер самопроизвольно (спонтанно) превращаться в другие ядра с испусканием различных видов радиоактивных излучений и элементарных частиц. Радиоактивность подразделяется на **естественную** (наблюдается у неустойчивых изотопов, существующих в природе) и **искусственную** (наблюдается у изотопов, полученных посредством ядерных реакций). Принципиального различия между этими двумя типами радиоактивности нет, так как законы радиоактивного превращения в обоих случаях одинаковы.

Радиоактивное излучение бывает трех типов: α-, β- и γ-излучение. Подробное их исследование позволило выяснить природу и основные свойства.

α-Излучение отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает высокой ионизирующей способностью и малой проникающей способностью (например, поглощаются слоем алюминия толщиной примерно 0,05 мм). α-Излучение представляет собой поток ядер гелия; заряд α-частицы равен $+2e$, а масса совпадает с массой ядра изотопа гелия $^4_2$He. По отклонению α-частиц в электрическом и магнитном полях был определен их удельный заряд $Q/m_\alpha$, значение которого подтвердило правильность представлений об их природе.

β-Излучение отклоняется электрическим и магнитным полями; его ионизирующая способность значительно меньше (примерно на два порядка), а проникающая способность гораздо больше (поглощается слоем алюминия толщиной примерно 2 мм), чем у α-частиц. β-Излучение представляет собой поток быстрых электронов (это вытекает из определения их удельного заряда).

Поглощение потока электронов с одинаковыми скоростями в однородном веществе подчиняется экспоненциальному закону $N = N_0 e^{-\mu x}$, где $N_0$ и $N$ — число электронов на входе и выходе слоя вещества толщиной $x$, $\mu$ — коэффициент поглощения. β-Излучение сильно рассеивается в веществе, поэтому $\mu$ зависит не только от вещества, но и от размеров и формы тел, на которые β-излучение падает.

γ-Излучение не отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает относительно слабой ионизирующей способностью и очень большой проникающей способностью (например, проходит через слой свинца толщиной 5 см), при прохождении через кристаллы обнаруживает дифракцию. γ-Излучение представляет собой коротковолновое электромагнитное излучение с чрезвычайно малой длиной волны $\lambda < 10^{-10}$ м и вследствие этого — ярко выраженными корпускулярными

свойствами, т. е. является потоком частиц — γ-квантов (фотонов).

## § 256. Закон радиоактивного распада. Правила смещения

Под **радиоактивным распадом**, или просто **распадом**, понимают естественное радиоактивное превращение ядер, происходящее самопроизвольно. Атомное ядро, испытывающее радиоактивный распад, называется **материнским**, возникающее ядро — **дочерним.**

Теория радиоактивного распада строится на предположении о том, что радиоактивный распад является спонтанным процессом, подчиняющимся законам статистики. Поскольку отдельные радиоактивные ядра распадаются независимо друг от друга, можно считать, что число ядер $dN$, распавшихся в среднем за интервал времени от $t$ до $t+dt$, пропорционально промежутку времени $dt$ и числу $N$ нераспавшихся ядер к моменту времени $t$:

$$dN = -\lambda N\, dt, \qquad (256.1)$$

где $\lambda$ — постоянная для данного радиоактивного вещества величина, называемая **постоянной радиоактивного распада**; знак минус указывает, что общее число радиоактивных ядер в процессе распада уменьшается.

Разделив переменные и интегрируя, т. е.

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt, \quad \int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt,$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t,$$

получим

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad (256.2)$$

где $N_0$ — начальное число *нераспавшихся* ядер (в момент времени $t=0$), $N$ — число *нераспавшихся* ядер в момент времени $t$. Формула (256.2) выражает **закон радиоактивного распада**, согласно которому число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненте.

Интенсивность процесса радиоактивного распада характеризуют две величины: период полураспада $T_{1/2}$ и среднее время жизни $\tau$ радиоактивного ядра. **Период полураспада** $T_{1/2}$ — время, за которое исходное число радиоактивных ядер в среднем уменьшается вдвое. Тогда, согласно (256.2),

$$N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}},$$

откуда

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 0{,}693/\lambda.$$

Периоды полураспада для естественно-радиоактивных элементов колеблются от десятимиллионных долей секунды до многих миллиардов лет.

Суммарная продолжительность жизни $dN$ ядер равна $t|dN| = \lambda N t\, dt$. Проинтегрировав это выражение по всем возможным $t$ (т. е. от 0 до $\infty$) и разделив на начальное число ядер $N_0$, получим **среднее время жизни** $\tau$ радиоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty \lambda N t\, dt = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty \lambda N_0 t e^{-\lambda t}\, dt =$$

$$= \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$$

(учтено (256.2)). Таким образом, среднее время жизни $\tau$ радиоактивного ядра есть величина, обратная постоянной радиоактивного распада $\lambda$.

**Активностью** $A$ **нуклида** (общее название атомных ядер, отличающихся числом протонов $Z$ и нейтронов $N$) в радиоактивном источнике называется число распадов, происходящих с ядрами образца в 1 с:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N. \qquad (256.3)$$

Единица активности в СИ — **беккерель** (Бк): 1 Бк — активность нуклида, при которой за 1 с происходит один акт распада. До сих пор в ядерной физике применяется и внесистемная единица активности нуклида в радиоактивном источнике — **кюри** (Ки): 1 Ки $= 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк.

Радиоактивный распад происходит в соответствии с так называемыми **правилами смещения**, позволяющими установить, какое ядро возникает в результате распада данного материнского ядра. Правила смещения:

для **α-распада**

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He, \qquad (256.4)$$

для **β-распада**

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e, \qquad (256.5)$$

где $^{A}_{Z}X$ — материнское ядро, Y — символ дочернего ядра, $^{4}_{2}He$ — ядро гелия (α-частица), $^{0}_{-1}e$ — символическое обозначение электрона (заряд его равен $-1$, а массовое число — нулю). Правила смещения являются ничем иным, как следствием двух законов, выполняющихся при радиоактивных распадах,— сохранения электрического заряда и сохранения массового числа: сумма зарядов (массовых чисел) возникающих ядер и частиц равна заряду (массовому числу) исходного ядра.

Возникающие в результате радиоактивного распада ядра могут быть, в свою очередь, радиоактивными. Это приводит к возникновению **цепочки, или ряда, радиоактивных превращений**, заканчивающихся стабильным элементом. Совокупность элементов, образующих такую цепочку, называется **радиоактивным семейством.**

Из правил смещения (256.4) и (256.5) вытекает, что массовое число при α-распаде уменьшается на 4, а при β-распаде не меняется. Поэтому для всех ядер одного и того же радиоактивного семейства остаток от деления массового числа на 4 одинаков. Таким образом, существует четыре различных радиоактивных семейства, для каждого из которых массовые числа задаются одной из следующих формул:

$$A = 4n,\ 4n+1,\ 4n+2,\ 4n+3,$$

где $n$ — целое положительное число. Семейства называются по наиболее долгоживущему (с наибольшим периодом полураспада) «родоначальнику»: семейства тория (от $^{232}_{90}Th$), нептуния (от $^{237}_{93}Np$), урана (от $^{238}_{92}U$) и актиния (от $^{235}_{89}Ac$). Конечными нуклидами соответственно являются $^{208}_{82}Pb$, $^{209}_{83}Bi$, $^{206}_{82}Pb$, $^{207}_{82}Pb$, т. е. единственное семейство нептуния (искусственно-радиоактивные ядра) заканчивается нуклидом Bi, а все остальные (естественно-радиоактивные ядра) — нуклидами Pb.

## § 257. Закономерности α-распада

В настоящее время известно более двухсот α-активных ядер, главным образом тяжелых ($A > 200$, $Z > 82$). Только небольшая группа α-активных ядер приходится на области с $A = 140 \div 160$ (редкие земли). β-Распад подчиняется правилу смещения (256.4). Примером α-распада служит распад изотопа урана $^{238}U$ с образованием Th:

$$^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He.$$

Скорости вылетающих при распаде α-частиц очень велики и колеблются для разных ядер в пределах от $1{,}4 \cdot 10^7$ до $2 \cdot 10^7$ м/с, что соответствует энергиям от 4 до 8,8 МэВ. Согласно современным представлениям, α-частицы образуются в момент радиоактивного распада при встрече движущихся внутри ядра двух протонов и двух нейтронов.

α-Частицы, испускаемые конкретным ядром, обладают, как правило, определенной энергией. Более тонкие измерения, однако, показали, что энергетический спектр α-частиц, испускаемых данным радиоактивным элементом, обнаруживает «тонкую структуру», т. е. испускается несколько групп α-частиц, причем в пределах каждой группы их энергии практически постоянны. Дискретный спектр α-частиц свидетельствует о том, что атомные ядра обладают дискретными энергетическими уровнями.

Для α-распада характерна сильная зависимость между периодом полураспада $T_{1/2}$ и энергией $E$ вылетающих частиц. Эта взаимосвязь определяется эмпирическим **законом Гейгера — Нэттола** (1912) *, который обычно выражают в ви-

* Д. Нэттол (1890—1958) — английский физик; Х. Гейгер (1882—1945) — немецкий физик.

де связи между **пробегом** $R_\alpha$ (расстоянием, проходимым частицей в веществе до ее полной остановки) $\alpha$-частиц в воздухе и постоянной радиоактивного распада $\lambda$:

$$\ln \lambda = A + B \ln R_\alpha, \qquad (257.1)$$

где $A$ и $B$ — эмпирические константы, $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}$. Согласно (257.1), чем меньше период полураспада радиоактивного элемента, тем больше пробег, а следовательно, и энергия испускаемых им $\alpha$-частиц. Пробег $\alpha$-частиц в воздухе (при нормальных условиях) составляет несколько сантиметров, в более плотных средах он гораздо меньше, составляя сотые доли миллиметра ($\alpha$-частицы можно задержать обычным листом бумаги).

Опыты Резерфорда по рассеянию $\alpha$-частиц на ядрах урана показали, что $\alpha$-частицы вплоть до энергии 8,8 МэВ испытывают на ядрах резерфордовское рассеяние, т. е. силы, действующие на $\alpha$-частицы со стороны ядер, описываются законом Кулона. Подобный характер рассеяния $\alpha$-частиц указывает на то, что они еще не вступают в область действия ядерных сил, т. е. можно сделать вывод, что ядро окружено потенциальным барьером, высота которого не меньше 8,8 МэВ. С другой стороны, $\alpha$-частицы, испускаемые ураном, имеют энергию 4,2 МэВ. Следовательно, $\alpha$-частицы вылетают из $\alpha$-радиоактивного ядра с энергией, заметно меньшей высоты потенциального барьера. Классическая механика этот результат объяснить не могла.

Объяснение $\alpha$-распада дано квантовой механикой, согласно которой вылет $\alpha$-частицы из ядра возможен благодаря туннельному эффекту (см. § 221) — проникновению $\alpha$-частицы сквозь потенциальный барьер. Всегда имеется отличная от нуля вероятность того, что частица с энергией, меньшей высоты потенциального барьера, пройдет сквозь него, т. е., действительно, из $\alpha$-радиоактивного ядра $\alpha$-частицы могут вылетать с энергией, меньшей высоты потенциального барьера. Этот эффект целиком обусловлен волновой природой $\alpha$-частиц.

Вероятность прохождения $\alpha$-частицы сквозь потенциальный барьер определяется его формой и вычисляется на основе уравнения Шредингера. В простейшем случае потенциального барьера с прямоугольными вертикальными стенками (см. рис. 298, *а*) коэффициент прозрачности, определяющий вероятность прохождения сквозь него, определяется рассмотренной ранее формулой (221.7):

$$D = D_0 \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha (U-E)}\,l\right].$$

Анализируя это выражение, видим, что коэффициент прозрачности $D$ тем больше (следовательно, тем меньше период полураспада), чем меньший по высоте ($U$) и ширине ($l$) барьер находится на пути $\alpha$-частицы. Кроме того, при одной и той же потенциальной кривой барьер на пути частицы тем меньше, чем больше ее энергия $E$. Таким образом качественно подтверждается закон Гейгера — Нэттола (см. (257.1)).

## § 258. $\beta$-Распад. Нейтрино

Явление $\beta^-$-распада (в дальнейшем будет показано, что существует и $\beta^+$-распад) подчиняется правилу смещения (256.5)

$$^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_{-1} e$$

и связано с выбросом электрона. Пришлось преодолеть целый ряд трудностей с трактовкой $\beta^-$-распада.

Во-первых, необходимо было обосновать происхождение электронов, выбрасываемых в процессе $\beta^-$-распада. Протонно-нейтронное строение ядра исключает возможность вылета электрона из ядра, поскольку в ядре электронов нет. Предположение же, что электроны вылетают не из ядра, а из электронной оболочки, несостоятельно, поскольку тогда должно было бы наблюдаться оптическое или рентгеновское излучение, что не подтверждают эксперименты.

Во-вторых, необходимо было объяснить непрерывность энергетического спектра испускаемых электронов (типичная для всех изотопов кривая распределения $\beta^-$-частиц по энергиям приведена на рис. 343). Каким же образом $\beta^-$-активные ядра, обладающие до и после распада

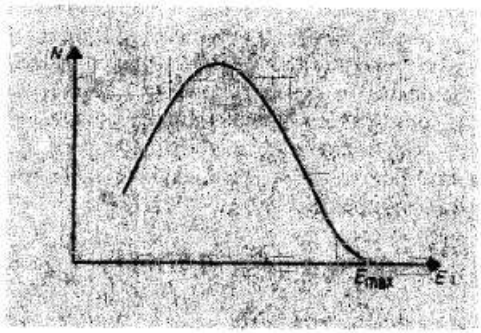



Рис. 343

вполне определенными энергиями, могут выбрасывать электроны со значениями энергии от нуля до некоторого максимального $E_{max}$? Т. е. энергетический спектр испускаемых электронов является непрерывным? Гипотеза о том, что при $\beta^-$-распаде электроны покидают ядро со строго определенными энергиями, но в результате каких-то вторичных взаимодействий теряют ту или иную долю своей энергии, так что их первоначальный дискретный спектр превращается в непрерывный, была опровергнута прямыми калориметрическими опытами. Так как максимальная энергия $E_{max}$ определяется разностью масс материнского и дочернего ядер, то распады, при которых энергия электрона $E < E_{max}$, как бы протекают с нарушением закона сохранения энергии. Н. Бор даже пытался обосновать это нарушение, высказывая предположение, что закон сохранения энергии носит статистический характер и выполняется лишь в среднем для большого числа элементарных процессов. Отсюда видно, насколько принципиально важно было разрешить это затруднение.

В-третьих, необходимо было разобраться с несохранением спина при $\beta^-$-распаде. При $\beta^-$-распаде число нуклонов в ядре не изменяется (так как не изменяется массовое число $A$), поэтому не должен изменяться и спин ядра, который равен целому числу $\hbar$ при четном $A$ и полуцелому $\hbar$ при нечетном $A$. Однако выброс электрона, имеющего спин $\hbar/2$, должен изменить спин ядра на величину $\hbar/2$.

Последние два затруднения привели В. Паули к гипотезе (1931) о том, что при $\beta^-$-распаде вместе с электроном испускается еще одна нейтральная частица — **нейтрино**. Нейтрино имеет нулевой заряд, спин $\hbar/2$ и нулевую (а скорее $< 10^{-4} m_e$) массу покоя; обозначается ${}^0_0\nu_e$. Впоследствии оказалось, что при $\beta^-$-распаде испускается не нейтрино, а **антинейтрино** (античастица по отношению к нейтрино; обозначается ${}^0_0\bar{\nu}_e$).

Гипотеза о существовании нейтрино позволила Э. Ферми создать теорию $\beta^-$-распада (1934), которая в основном сохранила свое значение и в настоящее время, хотя экспериментально существование нейтрино было доказано более чем через 20 лет (1956). Столь длительные «поиски» нейтрино сопряжены с большими трудностями, обусловленными отсутствием у нейтрино электрического заряда и массы. Нейтрино — единственная частица, не участвующая ни в сильных, ни в электромагнитных взаимодействиях; единственный вид взаимодействий, в котором может принимать участие нейтрино,— *слабое взаимодействие*. Поэтому прямое наблюдение нейтрино весьма затруднительно. Ионизирующая способность нейтрино столь мала, что один акт ионизации в воздухе приходится на 500 км пути. Проникающая же способность нейтрино столь огромна (пробег нейтрино с энергией 1 МэВ в свинце составляет порядка $10^{15}$ м!), что затрудняет удержание этих частиц в приборах.

Для экспериментального выявления нейтрино (антинейтрино) применялся поэтому косвенный метод, основанный на том, что в реакциях (в том числе и с участием нейтрино) выполняется закон сохранения импульса. Таким образом, нейтрино было обнаружено при изучении отдачи атомных ядер при $\beta^-$-распаде. Если при $\beta^-$-распаде ядра вместе с электроном выбрасывается и антинейтрино, то векторная сумма трех импульсов — ядра отдачи, электрона и антинейтрино — должна быть равна нулю. Это действительно подтвердилось на опыте. Непосредственное обнаружение нейтрино стало возможным лишь значительно позднее, после появления

мощных реакторов, позволяющих получать интенсивные потоки нейтрино.

Введение нейтрино (антинейтрино) позволило не только объяснить кажущееся несохранение спина, но и разобраться с вопросом непрерывности энергетического спектра выбрасываемых электронов. Сплошной спектр $\beta^-$-частиц обязан распределению энергии между электронами и антинейтрино, причем сумма энергий обеих частиц равна $E_{max}$. В одних актах распада бо́льшую энергию получает антинейтрино, в других — электрон; в граничной точке кривой на рис. 343, где энергия электрона равна $E_{max}$, вся энергия распада уносится электроном, а энергия антинейтрино равна нулю.

Наконец, рассмотрим вопрос о происхождении электронов при $\beta^-$-распаде. Поскольку электрон не вылетает из ядра и не вырывается из оболочки атома, было сделано предположение, что *β-электрон рождается в результате процессов, происходящих внутри ядра.* Так как при $\beta^-$-распаде число нуклонов в ядре не изменяется, а $Z$ увеличивается на единицу (см. (256.5)), то единственной возможностью одновременного осуществления этих условий является превращение одного из нейтронов $\beta^-$-активного ядра в протон с одновременным образованием электрона и вылетом антинейтрино:

$$ {}^1_0n \rightarrow {}^1_1p + {}^0_{-1}e + {}^0_0\tilde{\nu}_e. \qquad (258.1) $$

Этот процесс сопровождается выполнением законов сохранения электрических зарядов, импульса и массовых чисел. Кроме того, данное превращение энергетически возможно, так как масса покоя нейтрона превышает массу атома водорода, т. е. протона и электрона вместе взятых. Данной разности в массах соответствует энергия, равная 0,782 МэВ. За счет этой энергии может происходить самопроизвольное превращение нейтрона в протон; энергия распределяется между электроном и антинейтрино.

Если превращение нейтрона в протон энергетически выгодно и вообще возможно, то должен наблюдаться радиоактивный распад свободных нейтронов (т. е. нейтронов вне ядра). Обнаружение этого явления было бы подтверждением изложенной теории $\beta^-$-распада. Действительно, в 1950 г. в потоках нейтронов большой интенсивности, возникающих в ядерных реакторах, был обнаружен радиоактивный распад свободных нейтронов, происходящий по схеме (258.1). Энергетический спектр возникающих при этом электронов соответствовал приведенному на рис. 343, а верхняя граница $E_{max}$ энергии электронов оказалась равной рассчитанной выше (0,782 МэВ).

## § 259. Гамма-излучение и его свойства

Экспериментально установлено, что γ-излучение (см. § 255) не является самостоятельным видом радиоактивности, а только сопровождает α- и β-распады и также возникает при ядерных реакциях, при торможении заряженных частиц, их распаде и т. д. γ-Спектр является линейчатым. γ-Спектр — это распределение числа γ-квантов по энергиям (такое же толкование β-спектра дано в § 258). Дискретность γ-спектра имеет принципиальное значение, так как является доказательством дискретности энергетических состояний атомных ядер.

В настоящее время твердо установлено, что γ-излучение испускается дочерним (а не материнским) ядром. Дочернее ядро в момент своего образования, оказываясь возбужденным, за время примерно $10^{-13}$—$10^{-14}$ с, значительно меньшее времени жизни возбужденного атома (примерно $10^{-8}$ с), переходит в основное состояние с испусканием γ-излучения. Возвращаясь в основное состояние, возбужденное ядро может пройти через ряд промежуточных состояний, поэтому γ-излучение одного и того же радиоактивного изотопа может содержать несколько групп γ-квантов, отличающихся одна от другой своей энергией.

При γ-излучении $A$ и $Z$ ядра не изменяются, поэтому оно не описывается никакими правилами смещения. γ-Излучение большинства ядер является столь коротковолновым, что его волновые свойства проявляются весьма слабо. Здесь на первый план выступают корпускулярные свойства,

поэтому γ-излучение рассматривают как поток частиц — γ-квантов. При радиоактивных распадах различных ядер γ-кванты имеют энергии от 10 кэВ до 5 МэВ.

Ядро, находящееся в возбужденном состоянии, может перейти в основное состояние не только при испускании γ-кванта, но и при непосредственной передаче энергии возбуждения (без предварительного испускания γ-кванта) одному из электронов того же атома. При этом испускается так называемый **электрон конверсии.** Само явление называется **внутренней конверсией.** Внутренняя конверсия — процесс, конкурирующий с γ-излучением.

Электронам конверсии соответствуют дискретные значения энергии, зависящей от работы выхода электрона из оболочки, из которой электрон вырывается, и от энергии $E$, отдаваемой ядром при переходе из возбужденного состояния в основное. Если вся энергия $E$ выделяется в виде γ-кванта, то частота излучения ν определяется из известного соотношения $E=h\nu$. Если же испускаются электроны внутренней конверсии, то их энергии равны $E-A_K$, $E-A_L$, ..., где $A_K$, $A_L$, ... — работа выхода электрона из $K$- и $L$-оболочек. Моноэнергетичность электронов конверсии позволяет отличить их от β-электронов, спектр которых непрерывен (см. § 258). Возникшее в результате вылета электрона вакантное место на внутренней оболочке атома будет заполняться электронами с вышележащих оболочек. Поэтому внутренняя конверсия всегда сопровождается характеристическим рентгеновским излучением.

γ-Кванты, обладая нулевой массой покоя, не могут замедляться в среде, поэтому при прохождении γ-излучения сквозь вещество они либо поглощаются, либо рассеиваются им. γ-Кванты не несут электрического заряда и тем самым не испытывают влияния кулоновских сил. При прохождении пучка γ-квантов сквозь вещество их энергия не меняется, но в результате столкновений ослабляется интенсивность, изменение которой описывается экспоненциальным законом $I=I_0e^{-\mu x}$ ($I_0$ и $I$ — интенсивности γ-излучения на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной $x$, μ — коэффициент поглощения). Так как γ-излучение — самое проникающее излучение, то μ для многих веществ — очень малая величина; μ зависит от свойств вещества и от энергии γ-квантов.

γ-Кванты, проходя сквозь вещество, могут взаимодействовать как с электронной оболочкой атомов вещества, так и с их ядрами. В квантовой электродинамике доказывается, что основными процессами, сопровождающими прохождение γ-излучения через вещество, являются фотоэффект, комптон-эффект (комптоновское рассеяние) и образование электронно-позитронных пар.

Фотоэффект, или **фотоэлектрическое поглощение γ-излучения,** — это процесс, при котором атом поглощает γ-квант и испускает электрон. Так как электрон выбивается из одной из внутренних оболочек атома, то освободившееся место заполняется электронами из вышележащих оболочек, и фотоэффект сопровождается характеристическим рентгеновским излучением. Фотоэффект является преобладающим механизмом поглощения в области малых энергий γ-квантов ($E_\gamma \leqslant 100$ кэВ). Фотоэффект может идти только на связанных электронах, так как свободный электрон не может поглотить γ-квант, при этом одновременно не удовлетворяются законы сохранения энергии и импульса.

По мере увеличения энергии γ-квантов ($E_\gamma \approx 0{,}5$ МэВ) вероятность фотоэффекта очень мала и основным механизмом взаимодействия γ-квантов с веществом является **комптоновское рассеяние** (см. § 206).

При $E_\gamma > 1{,}02$ МэВ $= 2m_ec^2$ ($m_e$ — масса покоя электрона) становится возможным процесс образования электронно-позитронных пар в электрических полях ядер. Вероятность этого процесса пропорциональна $Z^2$ и увеличивается с ростом $E_\gamma$. Поэтому при $E_\gamma \approx 10$ МэВ основным процессом взаимодействия γ-излучения в любом веществе является **образование электронно-позитронных пар.**

Если энергия γ-кванта превышает энергию связи нуклонов в ядре (7—8 МэВ), то в результате поглощения γ-кванта может наблюдаться **ядерный фо-**

**тоэффект** — выброс из ядра одного из нуклонов, чаще всего нейтрона.

Большая проникающая способность γ-излучения используется в **гамма-дефектоскопии** — методе дефектоскопии, основанном на различном поглощении γ-излучения при распространении его на одинаковое расстояние в разных средах. Местоположение и размеры дефектов (раковины, трещины и т. д.) определяются по различию в интенсивностях излучения, прошедшего через разные участки просвечиваемого изделия.

Воздействие γ-излучения (а также других видов ионизирующего излучения) на вещество характеризуют **дозой ионизирующего излучения**. Различаются:

**Поглощенная доза излучения** — физическая величина, равная отношению энергии излучения к массе облучаемого вещества.

Единица поглощенной дозы излучения — **грей** (Гр) *: 1 Гр = 1 Дж/кг — доза излучения, при которой облученному веществу массой 1 кг передается энергия любого ионизирующего излучения 1 Дж.

**Экспозиционная доза излучения** — физическая величина, равная отношению суммы электрических зарядов всех ионов одного знака, созданных электронами, освобожденными в облученном воздухе (при условии полного использования ионизирующей способности электронов), к массе этого воздуха.

Единица экспозиционной дозы излучения — кулон на килограмм (Кл/кг); внесистемной единицей является **рентген** (Р): $1\ Р = 2{,}58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг.

**Биологическая доза** — величина, определяющая воздействие излучения на организм.

Единица биологической дозы — **биологический эквивалент рентгена** (бэр): 1 бэр — доза любого вида ионизирующего излучения, производящая такое же биологическое действие, как и доза рентгеновского или γ-излучения в 1 Р ($1\ \text{бэр} = 10^{-2}$ Дж/кг).

**Мощность дозы излучения** — величина, равная отношению дозы излучения к времени облучения. Различают: 1) **мощность поглощенной дозы** (единица — грей на секунду (Гр/с)); 2) **мощность экспозиционной дозы** (единица — ампер на килограмм (А/кг)).

## § 260. Резонансное поглощение γ-излучения (эффект Мёссбауэра *)

Как уже указывалось, дискретный спектр γ-излучения обусловлен дискретностью энергетических уровней ядер атомов. Однако, как следует из соотношения неопределенностей (215.5), энергия возбужденных состояний ядра принимает значения в пределах $\Delta E \approx h/\Delta t$, где $\Delta t$ — время жизни ядра в возбужденном состоянии. Следовательно, чем меньше $\Delta t$, тем больше неопределенность энергии $\Delta E$ возбужденного состояния. $\Delta E = 0$ только для основного состояния стабильного ядра (для него $\Delta t \to \infty$). Неопределенность энергии квантово-механической системы (например, атома), обладающей дискретными уровнями энергии, определяет **естественную ширину энергетического уровня** ($\Gamma$). Например, при времени жизни возбужденного состояния, равного $10^{-13}$ с, естественная ширина энергетического уровня примерно $10^{-2}$ эВ.

Неопределенность энергии возбужденного состояния, обусловливаемая конечным временем жизни возбужденных состояний ядра, приводит к немонохроматичности γ-излучения, испускаемого при переходе ядра из возбужденного состояния в основное. Эта немонохроматичность называется **естественной шириной линии** γ-излучения.

При прохождении γ-излучения в веществе помимо описанных выше (см. § 259) процессов (фотоэффект, комптоновское рассеяние, образование электронно-позитронных пар) должны в принципе

* С. Грей (1666—1736) — английский физик.

* Р. Мёссбауэр (р. 1929) — немецкий физик.

наблюдаться также резонансные эффекты. Если ядро облучить γ-квантами с энергией, равной разности одного из возбужденных и основного энергетических состояний ядра, то может иметь место **резонансное поглощение γ-излучения ядрами:** ядро поглощает γ-квант той же частоты, что и частота излучаемого ядром γ-кванта при переходе ядра из данного возбужденного состояния в основное.

Наблюдение резонансного поглощения γ-квантов ядрами считалось долгое время невозможным, так как при переходе ядра из возбужденного состояния с энергией $E$ в основное (его энергия принята равной нулю) излучаемый γ-квант имеет энергию $E_\gamma$ несколько меньшую, чем $E$, из-за отдачи ядра в процессе излучения:

$$E_\gamma = E - E_я,$$

где $E_я$ — кинетическая энергия отдачи ядра. При возбуждении же ядра и переходе его из основного состояния в возбужденное с энергией $E$ γ-квант должен иметь энергию $E'_\gamma$ несколько большую, чем $E$, т. е.

$$E'_\gamma = E + E_я,$$

где $E_я$ — энергия отдачи, которую γ-квант должен передать поглощающему ядру.

Таким образом, максимумы линий излучения и поглощения сдвинуты друг относительно друга на величину $2E_я$ (рис. 344). Используя закон сохранения импульса, согласно которому в рассмотренных процессах излучения и поглощения импульсы γ-кванта и ядра должны быть равны, получим

$$E_я = \frac{p_я^2}{2m_я} = \frac{p_\gamma^2}{2m_я} = \frac{E_\gamma^2}{2m_я c^2} \approx \frac{E^2}{2m_я c^2}. \qquad (260.1)$$

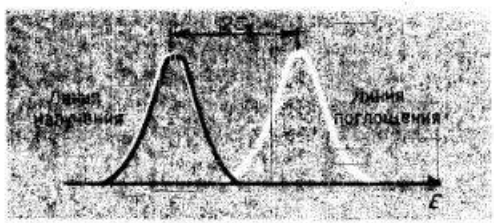



Рис. 344

Например, возбужденное состояние изотопа иридия $^{191}_{77}Ir$ имеет энергию 129 кэВ, а время его жизни порядка $10^{-10}$ с, так что ширина уровня $\Gamma \approx 4 \cdot 10^{-5}$ эВ. Энергия же отдачи при излучении с этого уровня, согласно (260.1), приблизительно равна $5 \cdot 10^{-2}$ эВ, т. е. на три порядка больше ширины уровня. Естественно, что никакое резонансное поглощение в таких условиях невозможно (для наблюдения резонансного поглощения линия поглощения должна совпадать с линией излучения). Из опытов также следовало, что на свободных ядрах резонансное поглощение не наблюдается.

Резонансное поглощение γ-излучения в принципе может быть получено только *при компенсации потери энергии на отдачу ядра.* Эту задачу решил в 1958 г. Р. Мёссбауэр (Нобелевская премия 1961 г.). Он исследовал излучение и поглощение γ-излучения в ядрах, находящихся в кристаллической решетке, т. е. в связанном состоянии (опыты проводились при низкой температуре). В данном случае импульс и энергия отдачи передаются не одному ядру, излучающему (поглощающему) γ-квант, а всей кристаллической решетке в целом. Так как кристалл обладает гораздо большей массой по сравнению с массой отдельного ядра, то в соответствии с формулой (260.1) потери энергии на отдачу становятся исчезающе малыми. Поэтому процессы излучения и поглощения γ-излучения происходят практически без потерь энергии (идеально упруго).

Явление упругого испускания (поглощения) γ-квантов атомными ядрами, связанными в твердом теле, не сопровождающееся изменением внутренней энергии тела, называется **эффектом Мёссбауэра.** При рассмотренных условиях линии излучения и поглощения γ-излучения практически совпадают и имеют весьма малую ширину, равную естественной ширине $\Gamma$. Эффект Мёссбауэра был открыт на глубоко охлажденном $^{191}_{77}Ir$ (с понижением температуры колебания решетки «замораживаются»), а впоследствии обнаружен более

чем на 20 стабильных изотопах (например, $^{57}Fe$, $^{67}Zn$ и т. д.).

Мёссбауэр вооружил экспериментальную физику новым методом измерений невиданной прежде точности. Эффект Мёссбауэра позволяет измерять энергии (частоты) излучения с относительной точностью $\Gamma/E = 10^{-15} \div 10^{-17}$, поэтому во многих областях науки и техники может служить тончайшим «инструментом» различного рода измерений. Появилась возможность измерять тончайшие детали $\gamma$-линий, внутренние магнитные и электрические поля в твердых телах и т. д.

Внешнее воздействие (например, зеемановское расщепление ядерных уровней или смещение энергии фотонов при движении в поле тяжести) может привести к очень малому смещению либо линии поглощения, либо линии излучения, иными словами, привести к ослаблению или исчезновению эффекта Мёссбауэра. Это смещение, следовательно, может быть зафиксировано. Подобным образом в лабораторных условиях был обнаружен (1960) такой тончайший эффект, как «гравитационное красное смещение», предсказанный общей теорией относительности Эйнштейна.

## § 261. Методы наблюдения и регистрации радиоактивных излучений и частиц

Практически все методы наблюдения и регистрации радиоактивных излучений ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) и частиц основаны на их способности производить ионизацию и возбуждение атомов среды. Заряженные частицы вызывают эти процессы непосредственно, а $\gamma$-кванты и нейтроны обнаруживаются по ионизации, вызываемой возникающими в результате их взаимодействия с электронами и ядрами атомов среды быстрыми заряженными частицами. Вторичные эффекты, сопровождающие рассмотренные процессы, такие, как вспышка света, электрический ток, потемнение фотопластинки, позволяют регистрировать пролетающие частицы, считать их, отличать друг от друга и измерять их энергию.

Приборы, применяемые для регистрации радиоактивных излучений и частиц, делятся на две группы:

1) приборы, позволяющие регистрировать прохождение частицы через определенный участок пространства и в некоторых случаях определять ее характеристики, например энергию (сцинтилляционный счетчик, черенковский счетчик, импульсная ионизационная камера, газоразрядный счетчик, полупроводниковый счетчик);

2) приборы, позволяющие наблюдать, например фотографировать, следы (треки) частиц в веществе (камера Вильсона, диффузионная камера, пузырьковая камера, ядерные фотоэмульсии).

**1. Сцинтилляционный счетчик.** Наблюдение **сцинтилляций** — вспышек света при попадании быстрых частиц на флуоресцирующий экран — первый метод, позволивший У. Круксу * и Э. Резерфорду на заре ядерной физики (1903) визуально регистрировать $\alpha$-частицы. Сцинтилляционный счетчик — детектор ядерных частиц, основными элементами которого являются сцинтиллятор (кристаллофосфор) (см. § 245) и фотоэлектронный умножитель (см. § 105), позволяющий преобразовывать слабые световые вспышки в электрические импульсы, регистрируемые электронной аппаратурой. Обычно в качестве сцинтилляторов используют кристаллы некоторых неорганических (ZnS для $\alpha$-частиц; NaI-Tl, CsI-Tl — для $\beta$-частиц и $\gamma$-квантов) или органических (антрацен, пластмассы — для $\gamma$-квантов) веществ.

Сцинтилляционные счетчики обладают высоким разрешением по времени ($10^{-10}$—$10^{-5}$ с), определяемым родом регистрируемых частиц, сцинтиллятором и разрешающим временем используемой электронной аппаратуры (оно доведено сейчас до $10^{-9}$—$10^{-10}$ с). Для этого типа счетчиков эффективность регистрации — отношение числа зарегистрированных частиц к полному числу частиц, пролетевших в счетчике, примерно 100 % для заряженных частиц и 30 % для $\gamma$-квантов. Так как для многих сцинтилляторов (NaI-Tl, CsI-Tl, антрацен, стильбен)

* У. Крукс (1832—1919) — английский физик и химик.

интенсивность световой вспышки в широком интервале энергий пропорциональна энергии первичной частицы, то счетчики на данных сцинтилляторах применяются для измерения энергии регистрируемых частиц.

**2. Черенковский счетчик.** Принцип его работы и свойства излучения Вавилова — Черенкова, лежащие в основе работы счетчика, рассмотрены в § 189. Назначение черенковских счетчиков — это измерение энергии частиц, движущихся в веществе со скоростью, превышающей фазовую скорость света в данной среде, и разделение этих частиц по массам. Зная угол испускания излучения (см. (189.1)), можно определить скорость частицы, что при известной массе частицы равносильно определению ее энергии. С другой стороны, если масса частицы не известна, то она может быть определена по независимому измерению энергии частицы. Кроме того, при наличии двух пучков частиц с разными скоростями будут различными и углы испускания излучений, по которым можно искомые частицы определить. Для черенковских счетчиков разрешение по скоростям (иными словами, по энергиям) составляет $10^{-3}$—$10^{-5}$. Это позволяет отделять элементарные частицы друг от друга при энергиях порядка 10 ГэВ, когда углы испускания излучения различаются очень мало. Время разрешения счетчиков достигает $10^{-9}$ с. Счетчики Черенкова устанавливаются на космических кораблях для исследования космического излучения.

**3. Импульсная ионизационная камера** — это детектор частиц, действие которого основано на способности заряженных частиц вызывать ионизацию газа. Ионизационная камера представляет собой электрический конденсатор, заполненный газом, к электродам которого подается постоянное напряжение. Регистрируемая частица, попадая в пространство между электродами, ионизует газ. Напряжение подбирается так, чтобы все образовавшиеся ионы, с одной стороны, доходили до электродов, не успев рекомбинировать, а с другой — не разгонялись настолько сильно, чтобы производить вторичную ионизацию. Следовательно, в ионизационной камере на ее электродах непосредственно собираются ионы, возникшие под действием заряженных частиц. Ионизационные камеры бывают двух типов: **интегрирующие** (в них измеряется суммарный ионизационный ток) и **импульсные**, являющиеся, по существу, счетчиками (в них регистрируется прохождение одиночной частицы и измеряется ее энергия, правда, с довольно низкой точностью, обусловленной малостью выходного импульса).

**4. Газоразрядный счетчик.** Газоразрядный счетчик обычно выполняется в виде наполненного газом металлического цилиндра (катод) с тонкой проволокой (анод), натянутой по его оси. Хотя газоразрядные счетчики конструктивно похожи на ионизационную камеру, однако в них основную роль играет вторичная ионизация, обусловленная столкновениями первичных ионов с атомами и молекулами газа и стенок. Можно говорить о двух типах газоразрядных счетчиков: **пропорциональных** (в них газовый разряд несамостоятельный (см. § 106), т. е. гаснет при прекращении действия внешнего ионизатора) и **счетчиках Гейгера — Мюллера** * (в них разряд самостоятельный (см. § 107), т. е. поддерживается после прекращения действия внешнего ионизатора).

В пропорциональных счетчиках рабочее напряжение выбирается так, чтобы они работали в области вольт-амперной характеристики, соответствующей несамостоятельному разряду, в которой выходной импульс пропорционален первичной ионизации, т. е. энергии влетевшей в счетчик частицы. Поэтому они не только регистрируют частицу, но и измеряют ее энергию. В пропорциональных счетчиках импульсы, вызываемые отдельными частицами, усиливаются в $10^3$—$10^4$ раз (иногда и в $10^6$ раз).

Счетчик Гейгера — Мюллера по конструкции и принципу действия существен-

* Э. Мюллер (1911—1977) — немецкий физик.

но не отличается от пропорционального счетчика, но работает в области вольт-амперной характеристики, соответствующей самостоятельному разряду (см. § 107), когда выходной импульс не зависит от первичной ионизации. Счетчики Гейгера — Мюллера регистрируют частицу без измерения ее энергии. Коэффициент усиления этих счетчиков составляет $10^8$. Для регистрации раздельных импульсов возникший разряд следует гасить. Для этого, например, последовательно с нитью включается такое сопротивление, чтобы возникший в счетчике разряд вызывал на сопротивлении падение напряжения, достаточное для прерывания разряда. Временно́е разрешение счетчиков Гейгера — Мюллера составляет $10^{-3}$—$10^{-7}$ с. Для газоразрядных счетчиков эффективность регистрации равна примерно 100 % для заряженных частиц и примерно 5 % для $\gamma$-квантов.

**5. Полупроводниковый счетчик** — это детектор частиц, основным элементом которого является полупроводниковый диод (см. § 250). Время разрешения составляет примерно $10^{-9}$ с. Полупроводниковые счетчики обладают высокой надежностью, могут работать в магнитных полях. Малая толщина рабочей области (порядка сотни микрометров) полупроводниковых счетчиков не позволяет применять их для измерения высокоэнергетических частиц.

**6. Камера Вильсона*** (1912) — это старейший и на протяжении многих десятилетий (вплоть до 50—60-х годов) единственный тип трекового детектора. Выполняется обычно в виде стеклянного цилиндра с плотно прилегающим поршнем. Цилиндр наполняется нейтральным газом (обычно гелием или аргоном), насыщенным парами воды или спирта. При резком, т. е. адиабатическом, расширении газа пар становится пересыщенным и на траекториях частиц, пролетевших через камеру, образуются треки из тумана. Образовавшиеся треки для воспроизводства их пространственного расположения фотографируются стереоскопически, т. е. под разными углами. По характеру и геометрии треков можно судить о типе прошедших через камеру частиц (например, $\alpha$-частица оставляет сплошной жирный след, $\beta$-частица — тонкий), об энергии частиц (по величине пробега), о плотности ионизации (по количеству капель на единицу длины трека), о количестве участвующих в реакции частиц.

Советский ученый Д. В. Скобельцын (1892—1988) значительно расширил возможности камеры Вильсона, поместив ее в сильное магнитное поле (1927). По искривлению траектории заряженных частиц в магнитном поле, т. е. по кривизне трека, можно судить о знаке заряда, а если известен тип частицы (ее заряд и масса), то по радиусу кривизны трека можно определить энергию и массу частицы даже в том случае, если весь трек в камере не умещается (для реакций при высоких энергиях вплоть до сотен мегаэлектрон-вольт). Недостаток камеры Вильсона — ее малое рабочее время, составляющее примерно 1 % от времени, затрачиваемого для подготовки камеры к последующему расширению (выравнивание температуры и давления, рассасывание остатков треков, насыщение паров), а также трудоемкость обработки результатов.

**7. Диффузионная камера** (1936) — это разновидность камеры Вильсона. В ней рабочим веществом также является пересыщенный пар, но состояние пересыщения создается диффузией паров спирта от нагретой (до 10 °С) крышки ко дну, охлаждаемому (до —60 °С) твердой углекислотой. Вблизи дна возникает слой пересыщенного пара толщиной примерно 5 см, в котором проходящие заряженные частицы создают треки. В отличие от вильсоновской диффузионная камера работает непрерывно. Кроме того, из-за отсутствия поршня в ней могут создаваться давления до 4 МПа, что значительно увеличивает ее эффективный объем.

**8. Пузырьковая камера** (1952; американский физик Д. Глезер (р. 1926)). В пузырьковой камере рабочим веществом является перегретая (находящаяся под давлением) прозрачная жидкость (жидкие

* Ч. Вильсон (1869—1959) — английский физик.

водород, пропан, ксенон). Запускается камера, так же как и камера Вильсона, резким сбросом давления, переводящим жидкость в неустойчивое перегретое состояние. Пролетающая в это время через камеру заряженная частица вызывает резкое вскипание жидкости, и траектория частицы оказывается обозначенной цепочкой пузырьков пара — образуется трек, который, как и в камере Вильсона, фотографируется. Пузырьковая камера работает циклами. Размеры пузырьковых камер примерно такие же, как камеры Вильсона (от десятков сантиметров до 2 м), но их эффективный объем на 2—3 порядка больше, так как жидкости гораздо плотнее газов. Это позволяет использовать пузырьковые камеры для исследования длинных цепей рождений и распадов частиц высоких энергий.

**9. Ядерные фотоэмульсии** (1927; советский физик Л. В. Мысовский (1888—1939)) — это простейший трековый детектор заряженных частиц. Прохождение заряженной частицы в эмульсии вызывает ионизацию, приводящую к образованию центров скрытого изображения. После проявления следы заряженных частиц обнаруживаются в виде цепочки зерен металлического серебра. Так как эмульсия — среда более плотная, чем газ или жидкость, используемые в вильсоновской и пузырьковой камерах, то при прочих равных условиях длина трека в эмульсии более короткая. Так, трек длиной 0,05 см в эмульсии эквивалентен треку в 1 м в камере Вильсона. Поэтому фотоэмульсии применяются для изучения реакций, вызываемых частицами в ускорителях сверхвысоких энергий и в космических лучах. В практике исследований высокоэнергетических частиц используются также так называемые **стопы** — большое число маркированных фотоэмульсионных пластинок, помещаемых на пути частиц и после проявления промеряемых под микроскопом.

В настоящее время методы наблюдения и регистрации заряженных частиц и излучений настолько разнообразны, что их детальное описание просто невозможно.

Большое значение начинают играть сравнительно новые (1957) приборы — **искровые камеры**, использующие преимущества *счетчиков* (быстрота регистрации) и *трековых детекторов* (полнота информации о треках). Говоря образно, искровая камера — это набор большого числа очень мелких счетчиков. Поэтому она близка к счетчикам, так как информация в ней выдается немедленно, без последующей обработки, и в то же время обладает свойствами трекового детектора, так как по действию многих счетчиков можно установить треки частиц.

## § 262. Ядерные реакции и их основные типы

**Ядерные реакции** — это превращения атомных ядер при взаимодействии с элементарными частицами (в том числе и с $\gamma$-квантами) или друг с другом. Наиболее распространенным видом ядерной реакции является реакция, записываемая символически следующим образом:

$$X + a \to Y + b, \text{ или } X(a,b)Y,$$

где X и Y — исходное и конечное ядра, $a$ и $b$ — бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы.

В ядерной физике эффективность взаимодействия характеризуют **эффективным сечением** $\sigma$. С каждым видом взаимодействия частицы с ядром связывают свое эффективное сечение: эффективное сечение рассеяния определяет процессы рассеяния, эффективное сечение поглощения — процессы поглощения. Эффективное сечение ядерной реакции

$$\sigma = \frac{dN}{nN\,dx},$$

где $N$ — число частиц, падающих за единицу времени на единицу площади поперечного сечения вещества, имеющего в единице объема $n$ ядер, $dN$ — число этих частиц, вступающих в ядерную реакцию в слое толщиной $dx$. Эффективное сечение $\sigma$ имеет размерность площади и характеризует вероятность того, что при падении пучка частиц на вещество произойдет реакция.

Единица эффективного сечения ядер-

ных процессов — **барн** (1 барн $= 10^{-28}$ м$^2$).

В любой ядерной реакции выполняются *законы сохранения электрических зарядов и массовых чисел:* сумма зарядов (массовых чисел) ядер и частиц, вступающих в ядерную реакцию, равна сумме зарядов (массовых чисел) конечных продуктов (ядер и частиц) реакции. Выполняются также *законы сохранения энергии, импульса и момента импульса.*

В отличие от радиоактивного распада, который протекает всегда с выделением энергии, ядерные реакции могут быть как **экзотермическими** (с выделением энергии), так и **эндотермическими** (с поглощением энергии).

Важную роль в объяснении механизма многих ядерных реакций сыграло предположение Н. Бора (1936) о том, что ядерные реакции протекают в две стадии по следующей схеме:

$$X + a \rightarrow C \rightarrow Y + b. \qquad (262.1)$$

Первая стадия — это захват ядром X частицы $a$, приблизившейся к нему на расстояние действия ядерных сил (примерно $2 \cdot 10^{-15}$ м), и образование промежуточного ядра C, называемого **составным** (или **компаунд-ядром**). Энергия влетевшей в ядро частицы быстро распределяется между нуклонами составного ядра, в результате чего оно оказывается в возбужденном состоянии. При столкновении нуклонов составного ядра один из нуклонов (или их комбинация, например дейтрон — ядро тяжелого изотопа водорода — дейтерия, содержащее один протон и один нейтрон) или $\alpha$-частица может получить энергию, достаточную для вылета из ядра. В результате возможна вторая стадия ядерной реакции — распад составного ядра на ядро Y и частицу $b$.

В ядерной физике вводится **характерное ядерное время** — время, необходимое для пролета частицей расстояния порядка величины, равной диаметру ядра ($d \approx \approx 10^{-15}$ м). Так, для частицы с энергией 1 МэВ (что соответствует ее скорости $v \approx \approx 10^7$ м/с) характерное ядерное время $\tau = 10^{-15}$ м$/10^7$ м/с $= 10^{-22}$ с. С другой стороны, доказано, что время жизни составного ядра равно $10^{-16} - 10^{-12}$ с, т. е. составляет $(10^6 - 10^{10})\tau$. Это же означает, что за время жизни составного ядра может произойти очень много столкновений нуклонов между собой, т. е. перераспределение энергии между нуклонами действительно возможно. Следовательно, составное ядро живет настолько долго, что полностью «забывает», каким образом оно образовалось. Поэтому характер распада составного ядра (испускание им частицы $b$) — вторая стадия ядерной реакции — не зависит от способа образования составного ядра — первой стадии.

Если испущенная частица тождественна с захваченной ($b \equiv a$), то схема (262.1) описывает **рассеяние** частицы: **упругое** — при $E_b = E_a$, **неупругое** — при $E_b \neq E_a$. Если же испущенная частица не тождественна с захваченной ($b \neq a$), то имеем дело с ядерной реакцией в прямом смысле слова.

Некоторые реакции протекают без образования составного ядра, они называются **прямыми ядерными взаимодействиями** (например, реакции, вызываемые быстрыми нуклонами и дейтронами).

Ядерные реакции классифицируются по следующим признакам:

1) *по роду участвующих в них частиц* — реакции под действием нейтронов; реакции под действием заряженных частиц (например, протонов, дейтронов, $\alpha$-частиц); реакции под действием $\gamma$-квантов;

2) *по энергии вызывающих их частиц* — реакции при малых энергиях (порядка электрон-вольт), происходящие в основном с участием нейтронов; реакции при средних энергиях (до нескольких мегаэлектрон-вольт), происходящие с участием $\gamma$-квантов и заряженных частиц (протоны, $\alpha$-частицы); реакции при высоких энергиях (сотни и тысячи мегаэлектрон-вольт), приводящие к рождению отсутствующих в свободном состоянии элементарных частиц и имеющие большое значение для их изучения;

3) *по роду участвующих в них ядер* — реакции на легких ядрах ($A < 50$); реакции на средних ядрах ($50 < A < 100$); реакции на тяжелых ядрах ($A > 100$);

4) *по характеру происходящих ядерных превращений* — реакции с испусканием нейтронов; реакции с испусканием заряженных частиц; реакции захвата (в случае этих реакций составное ядро не испускает никаких частиц, а переходит в основное состояние, излучая один или несколько $\gamma$-квантов).

Первая в истории ядерная реакция осуществлена Э. Резерфордом (1919) при бомбардировке ядра азота $\alpha$-частицами, испускаемыми радиоактивным источником:

$$^{14}_{7}\mathrm{N}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{18}_{9}\mathrm{F}\rightarrow{}^{17}_{8}\mathrm{O}+{}^{1}_{1}p.$$

## § 263. Позитрон. $\beta^+$-Распад. Электронный захват

П. Дираком было получено (1928) релятивистское волновое уравнение для электрона, которое позволило объяснить все основные свойства электрона, в том числе наличие у него спина и магнитного момента. Замечательной особенностью уравнения Дирака оказалось то, что из него для полной энергии свободного электрона получались не только положительные, но и отрицательные значения. Этот результат мог быть объяснен лишь предположением о существовании античастицы электрона — **позитрона.**

Гипотеза Дирака, недоверчиво воспринимавшаяся большинством физиков, была блестяще подтверждена в 1932 г. К. Андерсоном (американский физик (р. 1905); Нобелевская премия 1936 г.), обнаружившим позитрон в составе космического излучения. Существование позитронов было доказано наблюдением их треков в камере Вильсона, помещенной в магнитном поле. Эти частицы в камере отклонялись так, как отклоняется движущийся положительный заряд. Опыты показали, что позитрон ${}^{0}_{+1}e$ — частица с массой покоя, в точности равной массе покоя электрона, и спином $\hbar/2$, несущая положительный электрический заряд $+e$.

Жолио-Кюри — Фредерик (1900—1958) и Ирен (1897—1956),— бомбардируя различные ядра $\alpha$-частицами (1934), обнаружили искусственно-радиоактивные ядра (см. § 255), испытывающие $\beta^-$-распад, а реакции на B, Al и Mg привели к искусственно-радиоактивным ядрам, претерпевающим **$\beta^+$-распад, или позитронный распад:**

$$^{10}_{5}\mathrm{B}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{14}_{7}\mathrm{N}\rightarrow{}^{13}_{7}\mathrm{N}+{}^{1}_{0}n,$$

$$^{13}_{7}\mathrm{N}\rightarrow{}^{13}_{6}\mathrm{C}+{}^{0}_{+1}e+{}^{0}_{0}\nu_e;$$

$$^{27}_{13}\mathrm{Al}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{31}_{15}\mathrm{P}\rightarrow{}^{30}_{15}\mathrm{P}+{}^{1}_{0}n,$$

$$^{30}_{15}\mathrm{P}\rightarrow{}^{30}_{14}\mathrm{Si}+{}^{0}_{+1}e+{}^{0}_{0}\nu_e;$$

$$^{24}_{12}\mathrm{Mg}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{28}_{14}\mathrm{Si}\rightarrow{}^{27}_{14}\mathrm{Si}+{}^{1}_{0}n,$$

$$^{27}_{14}\mathrm{Si}\rightarrow{}^{27}_{13}\mathrm{Al}+{}^{0}_{+1}e+{}^{0}_{0}\nu_e$$

(Нобелевская премия 1956 г.) Наличие в этих реакциях позитронов доказано при изучении их треков в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле.

Таким образом, в экспериментах Жолио-Кюри, с одной стороны, открыта искусственная радиоактивность, а с другой — впервые обнаружен позитронный радиоактивный распад.

Энергетический $\beta^+$-спектр, как и $\beta^-$-спектр (см. § 258), непрерывен. $\beta^+$-Распад подчиняется следующему правилу смещения:

$$^{A}_{Z}\mathrm{X}\rightarrow{}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y}+{}^{0}_{+1}e.$$

Процесс $\beta^+$-распада протекает так, как если бы один из протонов ядра превратился в нейтрон, испустив при этом позитрон и нейтрино:

$$^{1}_{1}p\rightarrow{}^{1}_{0}n+{}^{0}_{+1}e+{}^{0}_{0}\nu_e, \qquad (263.1)$$

причем одновременный выброс нейтрино вытекает из тех же соображений, которые излагались при обсуждении $\beta^-$-распада (см. § 258). Так как масса покоя протона меньше, чем у нейтрона, то реакция (263.1) для свободного протона наблюдаться не может. Однако для протона, связанного в ядре благодаря ядерному взаимодействию частиц, эта реакция оказывается энергетически возможной.

Вскоре после опытов К. Андерсона, а также обоснования $\beta^+$-распада было установлено, что позитроны могут рождаться при взаимодействии $\gamma$-квантов

большой энергии ($E_\gamma > 1{,}02$ МэВ $= 2m_e c^2$) с веществом (см. также § 259). Этот процесс идет по схеме

$$\gamma \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e. \qquad (263.2)$$

Электронно-позитронные пары были действительно обнаружены в помещенной в магнитное поле камере Вильсона, в которой электрон и позитрон, имеющие противоположные по знаку заряды, отклонялись в противоположные стороны.

Для выполнения соотношения (263.2) помимо выполнения законов сохранения энергии и импульса необходимо, чтобы фотон обладал целым спином, равным 0 или 1, поскольку спины электрона и позитрона равны $^1/_2$. Ряд экспериментов и теоретических выкладок привели к выводу, что спин фотона действительно равен 1 (в единицах $\hbar$).

При столкновении позитрона с электроном происходит их **аннигиляция:**

$${}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e \rightarrow 2\gamma; \qquad (263.3)$$

в ее процессе электронно-позитронная пара превращается в два $\gamma$-кванта, причем энергия пары переходит в энергию фотонов. Появление в этом процессе двух $\gamma$-квантов следует из закона сохранения импульса и энергии. Реакция (263.3) подтверждена прямыми экспериментами под руководством советского ученого Л. А. Арцимовича (1909—1973). Процессы (263.2) и (263.3) — процессы возникновения и превращения электронно-позитронных пар — являются примером *взаимосвязи различных форм материи*: в этих процессах материя в форме вещества превращается в материю в форме электромагнитного поля и наоборот.

Для многих ядер превращение протона в нейтрон, помимо описанного процесса (263.1), происходит посредством **электронного захвата,** или ***e*-захвата**, при котором ядро спонтанно захватывает электрон с одной из внутренних оболочек атома ($K$, $L$ и т. д.), испуская нейтрино:

$${}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{0}\nu_e.$$

Необходимость появления нейтрино вытекает из закона сохранения спина. Схема *e*-захвата:

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{0}\nu_e,$$

т. е. один из протонов ядра превращается в нейтрон, заряд ядра убывает на единицу и оно смещается влево так же, как и при позитронном распаде.

Электронный захват обнаруживается по сопровождающему его характеристическому рентгеновскому излучению, возникающему при заполнении образовавшихся вакансий в электронной оболочке атома (именно так *e*-захват и был открыт в 1937 г.). При *e*-захвате, кроме нейтрино, никакие другие частицы не вылетают, т. е. вся энергия распада уносится нейтрино. В этом *e*-захват (часто его называют **третьим видом β-распада**) существенно отличается от $\beta^{\pm}$-распадов, при которых вылетают две частицы, между которыми и распределяется энергия распада. Примером электронного захвата может служить превращение радиоактивного ядра бериллия ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$ в стабильное ядро ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$:

$${}^{7}_{4}\mathrm{Be} + {}^{0}_{-1}e \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{0}_{0}\nu_e.$$

## § 264. Открытие нейтрона. Ядерные реакции под действием нейтронов

Нейтроны, являясь электрически нейтральными частицами, не испытывают кулоновского отталкивания и поэтому легко проникают в ядра и вызывают разнообразные ядерные превращения. Ядерные реакции под действием нейтронов не только сыграли огромную роль в развитии ядерной физики, но и привели к появлению ядерных реакторов (см. § 267).

Краткая история открытия нейтрона такова. Немецкие физики В. Боте (1891—1957) и Г. Беккер в 1930 г., облучая ряд элементов, в частности ядра бериллия, $\alpha$-частицами, обнаружили возникновение излучения очень большой проникающей способности. Так как сильно проникающими могут быть только нейтральные частицы, то было высказано предположение, что обнаруженное излучение — жесткие $\gamma$-лучи с энергией примерно 7 МэВ (энергия рассчитана по поглощению). Дальнейшие

эксперименты (Ирен и Фредерик Жолио-Кюри, 1931 г.) показали, что обнаруженное излучение, взаимодействуя с водородосодержащими соединениями, например парафином, выбивает протоны с пробегами примерно 26 см. Из расчетов следовало, что для получения протонов с такими пробегами предполагаемые γ-кванты должны были обладать фантастической по тем временам энергией 50 МэВ вместо расчетных 7 МэВ!

Пытаясь найти объяснение описанным экспериментам, английский физик Д. Чэдвик (1891—1974) предположил (1932), а впоследствии доказал, что новое проникающее излучение представляет собой не γ-кванты, а поток тяжелых нейтральных частиц, названных им **нейтронами**. Таким образом, нейтроны были обнаружены в следующей ядерной реакции:

$$^{9}_{4}\mathrm{Be}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{12}_{6}\mathrm{C}+{}^{1}_{0}n.$$

Эта реакция не является единственной, ведущей к выбрасыванию из ядер нейтронов (например, нейтроны возникают в реакциях $^{7}_{3}\mathrm{Li}\,(\alpha, n)\,{}^{10}_{5}\mathrm{B}$ и $^{11}_{5}\mathrm{B}\,(\alpha, n)\,{}^{14}_{7}\mathrm{N}$).

Характер ядерных реакций под действием нейтронов зависит от их скорости (энергии). В зависимости от энергии нейтроны условно делят на две группы: **медленные** и **быстрые**. Область энергий медленных нейтронов включает в себя область **ультрахолодных** (с энергией до $10^{-7}$ эВ), **очень холодных** ($10^{-7}-10^{-4}$ эВ), **холодных** ($10^{-4}-10^{-3}$ эВ), **тепловых** ($10^{-3}$—0,5 эВ) и **резонансных** (0,5—$10^{4}$ эВ) нейтронов. Ко второй группе можно отнести **быстрые** ($10^{4}-10^{8}$ эВ), **высокоэнергетичные** ($10^{8}-10^{10}$ эВ) и **релятивистские** ($\geqslant 10^{10}$ эВ) нейтроны.

Замедлить нейтроны можно пропуская их через какое-либо вещество, содержащее водород (например, парафин, вода). Проходя через такие вещества, быстрые нейтроны испытывают рассеяние на ядрах и замедляются до тех пор, пока их энергия не станет равной, например, энергии теплового движения атомов вещества-замедлителя, т. е. равной приблизительно $kT$.

Медленные нейтроны эффективны для возбуждения ядерных реакций, так как они относительно долго находятся вблизи атомного ядра. Благодаря этому вероятность захвата нейтрона ядром становится довольно большой. Однако энергия медленных нейтронов мала, потому они не могут вызывать, например, неупругое рассеяние. Для медленных нейтронов характерны упругое рассеяние на ядрах (реакция типа $(n, n)$) и радиационный захват (реакция типа $(n, \gamma)$). Реакция $(n, \gamma)$ приводит к образованию нового изотопа исходного вещества:

$$^{A}_{Z}\mathrm{X}+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{A+1}_{Z}\mathrm{Y}+\gamma,$$

например

$$^{113}_{48}\mathrm{Cd}+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{114}_{48}\mathrm{Cd}+\gamma.$$

Часто в результате $(n, \gamma)$-реакции образуются искусственные радиоактивные изотопы, дающие, как правило, $\beta^{-}$-распад. Например, в результате реакции

$$^{31}_{15}\mathrm{P}+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{32}_{15}\mathrm{P}+\gamma$$

образуется радиоактивный изотоп $^{32}_{15}\mathrm{P}$, претерпевающий $\beta^{-}$-распад с образованием стабильного изотопа серы:

$$^{32}_{15}\mathrm{P}\rightarrow{}^{32}_{16}\mathrm{S}+{}^{0}_{-1}e.$$

Под действием медленных нейтронов на некоторых легких ядрах наблюдаются также реакции захвата нейтронов с испусканием заряженных частиц — протонов и α-частиц (под действием тепловых нейтронов):

$$^{3}_{2}\mathrm{He}+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{3}_{1}\mathrm{H}+{}^{1}_{1}p,$$

$$^{10}_{5}\mathrm{B}+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{7}_{3}\mathrm{Li}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

(используется для обнаружения нейтронов) или

$$^{6}_{3}\mathrm{Li}+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{3}_{1}\mathrm{H}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

(используется для получения трития, в частности в термоядерных взрывах; см. § 268).

Реакции типа $(n, p)$ и $(n, \alpha)$, т. е. реакции с образованием заряженных частиц, происходят в основном под действием быстрых нейтронов, так как в случае медленных нейтронов энергии атомного ядра недостаточно для преодоления потенциального барьера, препятствующего вылету

протонов и α-частиц. Эти реакции, как и реакции радиационного захвата, часто ведут к образованию $\beta^-$-активных ядер.

Для быстрых нейтронов наблюдается неупругое их рассеяние, совершающееся по схеме

$$^{A}_{Z}X + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{A}_{Z}X^{*} + {}^{1}_{0}n',$$

где вылетающий из ядра нейтрон обозначен как ${}^{1}_{0}n'$, поскольку это не тот нейтрон, который проник в ядро; ${}^{1}_{0}n'$ имеет энергию, меньшую энергии ${}^{1}_{0}n$, а остающееся после вылета нейтрона ядро находится в возбужденном состоянии (отмечено звездочкой), поэтому его переход в нормальное состояние сопровождается испусканием γ-кванта.

Когда энергия нейтронов достигает значений 10 МэВ, становятся возможными реакции типа $(n, 2n)$. Например, в результате реакции

$$^{238}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{237}_{92}U + 2{}^{1}_{0}n$$

образуется $\beta^-$-активный изотоп ${}^{237}_{92}U$, претерпевающий распад по схеме

$$^{237}_{92}U \rightarrow {}^{237}_{93}Np + {}^{0}_{-1}e.$$

## § 265. Реакция деления ядра

К началу 40-х годов работами многих ученых — Э. Ферми (Италия), О. Гана (1879—1968), Ф. Штрассмана (1902—1980) (ФРГ), О. Фриша (1904—1979) (Великобритания), Л. Мейтнер (1878—1968) (Австрия), Г. Н. Флерова (р. 1913), К. Н. Петржака (СССР) — было доказано, что при облучении урана нейтронами образуются элементы из середины периодической системы — лантан и барий. Этот результат положил начало ядерным реакциям совершенно нового типа — **реакциям деления ядра,** заключающимся в том, что тяжелое ядро под действием нейтронов, а как впоследствии оказалось, и других частиц делится на несколько более легких ядер (осколков), чаще всего на два ядра, близких по массе.

Замечательной особенностью деления ядер является то, что оно сопровождается испусканием двух-трех вторичных нейтронов, называемых **нейтронами деления.** Так как для средних ядер число нейтронов примерно равно числу протонов ($N/Z \approx 1$), а для тяжелых ядер число нейтронов значительно превышает число протонов ($N/Z \approx 1{,}6$), то образовавшиеся осколки деления перегружены нейтронами, в результате чего они и выделяют нейтроны деления. Однако испускание нейтронов деления не устраняет полностью перегрузку ядер-осколков нейтронами. Это приводит к тому, что осколки оказываются радиоактивными. Они могут претерпеть ряд $\beta^-$-превращений, сопровождаемых испусканием γ-квантов. Так как $\beta^-$-распад сопровождается превращением нейтрона в протон (см. (258.1)), то после цепочки $\beta^-$-превращений соотношение между нейтронами и протонами в осколке достигнет величины, соответствующей стабильному изотопу. Например, при делении ядра урана ${}^{235}_{92}U$

$$^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{139}_{54}Xe + {}^{95}_{38}Sr + 2{}^{1}_{0}n \quad (265.1)$$

осколок деления ${}^{139}_{54}Xe$ в результате трех актов $\beta^-$-распада превращается в стабильный изотоп лантана ${}^{139}_{57}La$:

$$^{139}_{54}Xe \xrightarrow{\beta^-} {}^{139}_{55}Cs \xrightarrow{\beta^-} {}^{139}_{56}Ba \xrightarrow{\beta^-} {}^{139}_{57}La.$$

Осколки деления могут быть разнообразными, поэтому реакция (265.1) не единственная, приводящая к делению ${}^{235}_{92}U$. Возможна, например, реакция

$$^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{139}_{56}Ba + {}^{94}_{36}Kr + 3{}^{1}_{0}n.$$

Большинство нейтронов при делении испускается практически мгновенно ($t \leqslant 10^{-14}$ с), а часть (около 0,7 %) испускается осколками деления спустя некоторое время после деления (0,05 с $\leqslant t \leqslant$ $\leqslant$ 60 с). Первые из них называются **мгновенными,** вторые — **запаздывающими.** В среднем на каждый акт деления приходится 2,5 испущенных нейтронов. Они имеют сравнительно широкий энергетический спектр в пределах от 0 до 7 МэВ, причем на один нейтрон в среднем приходится энергия около 2 МэВ.

Расчеты показывают, что деление ядер должно сопровождаться также выделени-

ем большого количества энергии. В самом деле, удельная энергия связи для ядер средней массы составляет примерно 8,7 МэВ, в то время как для тяжелых ядер она равна 7,6 МэВ (см. § 252). Следовательно, при делении тяжелого ядра на два осколка должна освобождаться энергия, равная примерно 1,1 МэВ на один нуклон.

Эксперименты подтверждают, что при каждом акте деления действительно выделяется огромная энергия, которая распределяется между осколками (основная доля), нейтронами деления, а также между продуктами последующего распада осколков деления.

В основу теории деления атомных ядер (Н. Бор, Я. И. Френкель) положена капельная модель ядра (см. § 254). Ядро рассматривается как капля электрически заряженной несжимаемой жидкости (с плотностью, равной ядерной, и подчиняющейся законам квантовой механики), частицы которой при попадании нейтрона в ядро приходят в колебательное движение, в результате чего ядро разрывается на две части, разлетающиеся с огромной энергией.

Вероятность деления ядер определяется энергией нейтронов. Например, если высокоэнергетичные нейтроны (см. § 264) вызывают деление практически всех ядер, то нейтроны с энергией в несколько мегаэлектрон-вольт — только тяжелых ядер ($A > 210$). Нейтроны, обладающие **энергией активации** (минимальной энергией, необходимой для осуществления реакции деления ядра) порядка 1 МэВ, вызывают деление ядер урана $^{238}_{92}U$, тория $^{232}_{90}Th$, протактиния $^{231}_{91}Pa$ и плутония $^{239}_{94}Pu$. Тепловыми нейтронами делятся ядра $^{235}_{92}U$, $^{239}_{94}Pu$ и $^{233}_{92}U$, $^{230}_{90}Th$ (два последних изотопа в природе не встречаются, они получаются искусственным путем). Например, изотоп $^{233}_{92}U$ получается в результате радиационного захвата (реакции $(n, \gamma)$, см. § 264) нейтронов ядром $^{232}_{90}Th$:

$$^{232}_{90}Th + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{233}_{90}Th \xrightarrow{\beta^-} ^{233}_{91}Pa \xrightarrow{\beta^-} ^{233}_{92}U \qquad (264.2)$$

## § 266. Цепная реакция деления

Испускаемые при делении ядер вторичные нейтроны могут вызвать новые акты деления, что делает возможным осуществление **цепной реакции деления** — ядерной реакции, в которой частицы, вызывающие реакцию, образуются как продукты этой реакции. Цепная реакция деления характеризуется **коэффициентом размножения** $k$ нейтронов, который равен отношению числа нейтронов в данном поколении к их числу в предыдущем поколении. *Необходимым условием* для развития цепной реакции деления является *требование* $k \geqslant 1$.

Оказывается, что не все образующиеся вторичные нейтроны вызывают последующее деление ядер, что приводит к уменьшению коэффициента размножения. Во-первых, из-за конечных размеров **активной зоны** (пространство, где происходит цепная реакция) и большой проникающей способности нейтронов часть из них покинет активную зону раньше, чем будет захвачена каким-либо ядром. Во-вторых, часть нейтронов захватывается ядрами неделящихся примесей, всегда присутствующих в активной зоне. Кроме того, наряду с делением могут иметь место конкурирующие процессы радиационного захвата и неупругого рассеяния.

Коэффициент размножения зависит от природы делящегося вещества, а для данного изотопа — от его количества, а также размеров и формы активной зоны. Минимальные размеры активной зоны, при которых возможно осуществление цепной реакции, называются **критическими размерами.** Минимальная масса делящегося вещества, находящегося в системе критических размеров, необходимая для осуществления **цепной реакции,** называется **критической массой.**

Скорость развития цепных реакций различна. Пусть $T$ — среднее время жизни одного поколения, а $N$ — число нейтронов в данном поколении. В следующем поколении их число равно $kN$, т. е. прирост числа нейтронов за одно поколение $dN = kN - N = N(k-1)$. Прирост же числа нейтронов за единицу времени, т. е. скорость

нарастания цепной реакции,

$$\frac{dN}{dt}=\frac{N(k-1)}{T}. \qquad (266.1)$$

Интегрируя (266.1), получим

$$N=N_0e^{(k-1)t/T},$$

где $N_0$ — число нейтронов в начальный момент времени, а $N$ — их число в момент времени $t$. $N$ определяется знаком $(k-1)$. При $k>1$ идет **развивающаяся реакция,** число делений непрерывно растет и реакция может стать взрывной. При $k=1$ идет **самоподдерживающаяся реакция,** при которой число нейтронов с течением времени не изменяется. При $k<1$ идет **затухающая реакция.**

Цепные реакции делятся на **управляемые** и **неуправляемые.** Взрыв атомной бомбы, например, является неуправляемой реакцией. Чтобы атомная бомба при хранении не взорвалась, в ней $^{235}_{92}U$ (или $^{239}_{94}Pu$) делится на две удаленные друг от друга части с массами ниже критических. Затем с помощью обычного взрыва эти массы сближаются, общая масса делящегося вещества становится больше критической и возникает взрывная цепная реакция, сопровождающаяся мгновенным выделением огромного количества энергии и большими разрушениями. Взрывная реакция начинается за счет имеющихся нейтронов спонтанного деления или нейтронов космического излучения. Управляемые цепные реакции осуществляются в ядерных реакторах (см. § 267).

В природе имеется три изотопа, которые могут служить ядерным топливом ($^{235}_{92}U$: в естественном уране его содержится примерно 0,7 %) или сырьем для его получения ($^{232}_{90}Th$ и $^{238}_{92}U$: в естественном уране его содержится примерно 99,3 %). $^{232}_{90}Th$ служит исходным продуктом для получения искусственного ядерного топлива $^{233}_{92}U$ (см. реакцию (265.2)), а $^{238}_{92}U$, поглощая нейтроны, посредством двух последовательных $\beta^-$-распадов — для превращения в ядро $^{239}_{94}Pu$:

$$^{238}_{92}U+{}^1_0n\rightarrow{}^{239}_{92}U\xrightarrow{\beta^-}{}^{239}_{93}Np\xrightarrow{\beta^-}{}^{239}_{94}Pu. \qquad (266.2)$$

Реакции (266.2) и (265.2), таким образом, открывают реальную возможность воспроизводства ядерного горючего в процессе цепной реакции деления.

## § 267. Понятие о ядерной энергетике

Большое значение в ядерной энергетике приобретает не только осуществление цепной реакции деления, но и управление ею. Устройства, в которых осуществляется и поддерживается управляемая цепная реакция деления, называются **ядерными реакторами.** Пуск первого реактора в мире осуществлен в Чикагском университете (1942) под руководством Э. Ферми, в СССР (и в Европе) — в Москве (1946) под руководством И. В. Курчатова.

Для пояснения работы реактора рассмотрим принцип действия реактора на тепловых нейтронах (рис. 345). В активной зоне реактора расположены тепловыделяющие элементы *1* и замедлитель *2*, в котором нейтроны замедляются до тепловых скоростей. Тепловыделяющие элементы (твэлы) представляют собой блоки из делящегося материала, заключенные в герметическую оболочку, слабо поглощающую нейтроны. За счет энергии, выделяющейся при делении ядер, твэлы разогреваются, а поэтому для охлаждения они помещаются в поток теплоносителя (*3* — канал для протока теплоносителя). Активная зона окружается отражателем *4*, уменьшающим утечку нейтронов.

Управление цепной реакцией осуществляется специальными управляющими стержнями *5* из материалов, сильно по-

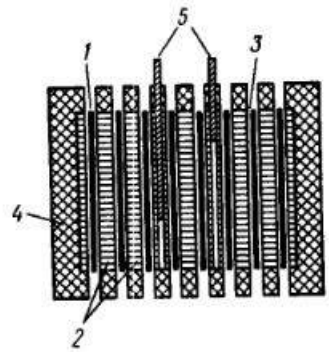



Рис. 345

глощающих нейтроны (например, B, Cd). Параметры реактора рассчитываются так, что при полностью вставленных стержнях реакция заведомо не идет, при постепенном вынимании стержней коэффициент размножения нейтронов растет и при некотором их положении доходит до единицы. В этот момент реактор начинает работать. По мере его работы количество делящегося материала в активной зоне уменьшается и происходит ее загрязнение осколками деления, среди которых могут быть сильные поглотители нейтронов. Чтобы реакция не прекратилась, из активной зоны с помощью автоматического устройства постепенно извлекаются управляющие (а часто специальные компенсирующие) стержни. Подобное управление реакцией возможно благодаря существованию запаздывающих нейтронов (см. § 265), испускаемых делящимися ядрами с запаздыванием до 1 мин. Когда ядерное топливо выгорает, реакция прекращается. До нового запуска реактора выгоревшее ядерное топливо извлекают и загружают новое. В реакторе имеются также аварийные стержни, введение которых при внезапном увеличении интенсивности реакции немедленно ее обрывает.

Ядерный реактор является мощным источником проникающей радиации (нейтроны, $\gamma$-излучение), примерно в $10^{11}$ раз превышающей санитарные нормы. Поэтому любой реактор имеет биологическую защиту — систему экранов из защитных материалов (например, бетон, свинец, вода), располагающуюся за его отражателем, и пульт дистанционного управления.

Ядерные реакторы различаются:

1) *по характеру основных материалов, находящихся в активной зоне* (ядерное топливо, замедлитель, теплоноситель); в качестве делящихся и сырьевых веществ используются $^{235}_{92}U$, $^{239}_{94}Pu$, $^{233}_{92}U$, $^{238}_{92}U$, $^{232}_{90}Th$, в качестве замедлителей — вода (обычная и тяжелая), графит, бериллий, органические жидкости и т. д., в качестве теплоносителей — воздух, вода, водяной пар, He, $CO_2$ и т. д.;

2) *по характеру размещения ядерного топлива и замедлителя в активной зоне*: **гомогенные** (оба вещества равномерно смешаны друг с другом) и **гетерогенные** (оба вещества располагаются порознь в виде блоков);

3) *по энергии нейтронов* (реакторы **на тепловых и быстрых нейтронах;** в последних используются нейтроны деления и замедлитель вообще отсутствует);

4) *по типу режима* (непрерывные и импульсные);

5) *по назначению* (энергетические, исследовательские, реакторы по производству новых делящихся материалов, радиоактивных изотопов и т. д.).

В соответствии с рассмотренными признаками и образовались такие названия, как уран-графитовые, водо-водяные, графито-газовые и т. д.

Среди ядерных реакторов особое место занимают энергетические **реакторы-размножители.** В них наряду с выработкой электроэнергии идет процесс воспроизводства ядерного горючего за счет реакции (265.2) или (266.2). Это означает, что в реакторе на естественном или слабообогащенном уране используется не только изотоп $^{235}_{92}U$, но и изотоп $^{238}_{92}U$. В настоящее время основой ядерной энергетики с воспроизводством горючего являются реакторы на быстрых нейтронах.

Впервые ядерная энергия для мирных целей использована в СССР. В Обнинске под руководством И. В. Курчатова введена в эксплуатацию (1954) первая атомная электростанция мощностью 5 МВт. Принцип работы атомной электростанции на водо-водяном реакторе приведен на рис. 346. Урановые блоки *1* погружены в воду *2*, которая служит одновременно и замедлителем, и теплоносителем. Горя-

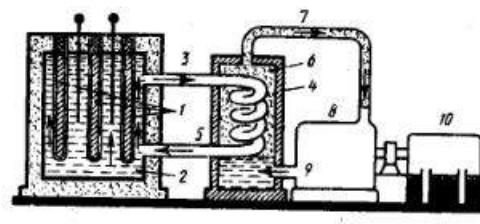



Рис. 346

чая вода (она находится под давлением и нагревается до 300 °С) из верхней части активной зоны реактора поступает через трубопровод *3* в парогенератор *4*, где она испаряется и охлаждается, и возвращается через трубопровод *5* в реактор. Насыщенный пар *6* через трубопровод *7* поступает в паровую турбину *8*, возвращаясь после отработки через трубопровод *9* в парогенератор. Турбина вращает электрический генератор *10*, ток от которого поступает в электрическую сеть.

Создание ядерных реакторов привело к промышленному применению ядерной энергии. Энергетические запасы ядерного горючего в рудах примерно на два порядка превышают запасы химических видов топлива. Поэтому, если, как предполагается, основная доля электроэнергии будет вырабатываться на АЭС, то это, с одной стороны, снизит стоимость электроэнергии, которая сейчас сравнима с вырабатываемой на тепловых электростанциях, а с другой — решит энергетическую проблему на несколько столетий и позволит использовать сжигаемые сейчас нефть и газ в качестве ценного сырья для химической промышленности.

В СССР помимо создания мощных АЭС (например, Нововоронежской общей мощностью примерно 1500 МВт, первой очереди Ленинградской им. В. И. Ленина с двумя реакторами по 1000 МВт) большое внимание уделяется созданию небольших АЭС (750—1500 кВт), удобных для эксплуатации в специфических условиях, а также решению задач малой ядерной энергетики. Так, построены первые в мире передвижные АЭС, создан первый в мире реактор («Ромашка»), в котором с помощью полупроводников происходит непосредственное преобразование тепловой энергии в электрическую (в активной зоне содержится 49 кг $^{235}_{92}U$, тепловая мощность реактора 40 кВт, электрическая — 0,8 кВт), и т. д.

Огромные возможности для развития атомной энергетики открываются с созданием реакторов-размножителей на быстрых нейтронах **(бридеров)**, в которых выработка энергии сопровождается производством вторичного горючего — плутония, что позволит кардинально решить проблему обеспечения ядерным горючим. Как показывают оценки, 1 т гранита содержит примерно 3 г $^{238}_{92}U$ и 12 г $^{232}_{90}Th$ (именно они используются в качестве сырья в реакторах-размножителях), т. е. при потреблении энергии $5 \cdot 10^8$ МВт (на два порядка выше, чем сейчас) запасов урана и тория в граните хватит на $10^9$ лет при перспективной стоимости 1 кВт·ч энергии 0,2 коп.

Техника реакторов на быстрых нейтронах находится в стадии поисков наилучших инженерных решений. Первая опытно-промышленная станция такого типа мощностью 350 МВт построена в г. Шевченко на берегу Каспийского моря. Она используется для производства электроэнергии и опреснения морской воды, обеспечивая водой город и прилегающий район нефтедобычи с населением порядка 150 000 человек. Шевченковская АЭС положила начало новой «атомной отрасли» — опреснению соленых вод, которая в связи с дефицитом пресноводных ресурсов во многих районах может иметь большое значение.

## § 268. Реакция синтеза атомных ядер. Проблема управляемых термоядерных реакций

Колоссальным источником энергии может служить **реакция синтеза атомных ядер** — образование из легких ядер более тяжелых. Удельная энергия связи ядер (см. рис. 342) резко увеличивается при переходе от ядер тяжелого водорода (дейтерия $^2_1H$ и трития $^3H$) к литию $^6_3Li$ и особенно к гелию $^4_2He$, т. е. реакции синтеза легких ядер в более тяжелые должны сопровождаться выделением большого количества энергии, что действительно подтверждается расчетами. В качестве примеров рассмотрим реакции синтеза:

$$^2_1H + {}^2_1H \to {}^3_1H + {}^1_1p \quad (Q = 4{,}0 \text{ МэВ}),$$

$$^2_1H + {}^2_1H \to {}^3_2He + {}^1_0n \quad (Q = 3{,}3 \text{ МэВ}),$$

$$^2_1H + {}^3_1H \to {}^4_2He + {}^1_0n \quad (Q = 17{,}6 \text{ МэВ}), \qquad (268.1)$$

$$^6_3Li + {}^2_1H \to {}^4_2He + {}^4_2He \quad (Q = 22{,}4 \text{ МэВ}),$$

где $Q$ — энерговыделение.

Реакции синтеза атомных ядер обладают той особенностью, что в них энергия, выделяемая на один нуклон, значительно больше, чем в реакциях деления тяжелых ядер. В самом деле, если при делении ядра $^{238}_{92}U$ выделяется энергия примерно 200 МэВ, что составляет на один нуклон примерно 0,84 МэВ, то в реакции (268.1)

эта величина равна 17,6/5 МэВ $\approx$ $\approx$3,5 МэВ.

Оценим на примере реакции синтеза ядер дейтерия ${}^2_1H$ температуру ее протекания. Для соединения ядер дейтерия их надо сблизить до расстояния $2\cdot10^{-15}$ м, равного радиусу действия ядерных сил, преодолевая при этом потенциальную энергию отталкивания $e^2/(4\pi\varepsilon_0 r)\approx$ $\approx$0,7 МэВ. Так как на долю каждого сталкивающегося ядра приходится половина указанной энергии, то средней энергии теплового движения, равной 0,35 МэВ, соответствует температура, приблизительно равная $2{,}6\cdot10^9$ К. Следовательно, реакция синтеза ядер дейтерия может происходить лишь при температуре, на два порядка превышающей температуру центральных областей Солнца (примерно $1{,}3\cdot10^7$ К).

Однако оказывается, что для протекания реакции синтеза атомных ядер достаточно температуры порядка $10^7$ К. Это связано с двумя факторами: 1) при температурах, характерных для реакций синтеза атомных ядер, любое вещество находится в состоянии плазмы, распределение частиц которой подчиняется закону Максвелла; поэтому всегда имеется некоторое число ядер, энергия которых значительно превышает среднее значение; 2) синтез ядер может происходить вследствие туннельного эффекта (см. § 221).

Реакции синтеза легких атомных ядер в более тяжелые, происходящие при сверхвысоких температурах (примерно $10^7$ К и выше), называются **термоядерными реакциями**.

Термоядерные реакции являются, по-видимому, одним из источников энергии Солнца и звезд. В принципе высказаны два предположения о возможных способах протекания термоядерных реакций на Солнце:

1) **протонно-протонный, или водородный, цикл,** характерный для температур (примерно $10^7$ К):

$$ {}^1_1p+{}^1_1p\to{}^2_1H+{}^0_{+1}e+{}^0_0\nu_e,$$

$$ {}^2_1H+{}^1_1p\to{}^3_2He+\gamma,$$

$$ {}^3_2He+{}^3_2He\to{}^4_2He+2{}^1_1p.$$

2) **углеродно-азотный, или углеродный, цикл,** характерный для более высоких температур (примерно $2\cdot10^7$ К):

$$ {}^{12}_6C+{}^1_1p\to{}^{13}_7N+\gamma,$$

$$ {}^{13}_7N\to{}^{13}_6C+{}^0_{+1}e+{}^0_0\nu_e,$$

$$ {}^{13}_6C+{}^1_1p\to{}^{14}_7N+\gamma,$$

$$ {}^{14}_7N+{}^1_1p\to{}^{15}_8O+\gamma,$$

$$ {}^{15}_8O\to{}^{15}_7N+{}^0_{+1}e+{}^0_0\nu_e,$$

$$ {}^{15}_7N+{}^1_1p\to{}^{12}_6C+{}^4_2He.$$

В результате этого цикла четыре протона превращаются в ядро гелия и выделяется энергия, равная 26,7 МэВ. Ядра же углерода, число которых остается неизменным, участвуют в реакции в роли катализатора.

Термоядерные реакции дают наибольший выход энергии на единицу массы «горючего», чем любые другие превращения, в том числе и деление тяжелых ядер. Например, количество дейтерия в стакане простой воды энергетически эквивалентно примерно 60 л бензина. Поэтому заманчива перспектива осуществления термоядерных реакций искусственным путем.

Впервые искусственная термоядерная реакция осуществлена в СССР (1953), а затем (через полгода) в США в виде взрыва водородной (термоядерной) бомбы, являющегося неуправляемой реакцией. Взрывчатым веществом, в котором происходила реакция (268.1), является смесь дейтерия и трития, а запалом — «обычная» атомная бомба, при взрыве которой возникает необходимая для протекания термоядерной реакции температура.

Особый интерес представляет осуществление управляемой термоядерной реакции, для обеспечения которой необходимо создание и поддерживание в ограниченном объеме температуры порядка $10^8$ К. Так как при данной температуре термоядерное рабочее вещество представляет собой полностью ионизованную плазму (см. § 108), возникает проблема ее эффективной термоизоляции от стенок рабочего объема. На данном этапе развития

считается, что основной путь в этом направлении — это удержание плазмы в ограниченном объеме сильными магнитными полями специальной формы.

Начало широкого международного сотрудничества в области физики высокотемпературной плазмы и управляемого термоядерного синтеза положено в знаменитом докладе И. В. Курчатова в Харуэле в 1956 г.

Хотя проблема управляемого термоядерного синтеза не решена до сих пор, но за последнее десятилетие в этом направлении достигнут значительный прогресс. Под руководством Л. А. Арцимовича коллектив ученых Института атомной энергии (ИАЭ) им. И. В. Курчатова осуществил широкий круг исследований, результатом которых явился пуск летом 1975 г. в ИЭА крупнейшей в мире термоядерной установки «Токамак-10» (Т-10).

В Т-10, как и во всех установках этого типа, плазма создается в тороидальной камере, находящейся в магнитном поле, а само плазменное образование — плазменный шнур — также имеет форму тора. В Т-10 плазма с температурой примерно $(7 \div 8) \cdot 10^6$ К и плотностью примерно $10^{14}$ частиц/см$^3$ создается в объеме, приблизительно равном 5 м$^3$, на время около 1 с. Однако следует отметить, что до осуществления **критерия Лоусона*** — условия, необходимого для начала самоподдерживающейся термоядерной реакции,— еще остается значительный «путь»: примерно 20 раз по $n\tau$ (произведение плотности частиц на время удержания плазмы) и примерно 10 раз по температуре. Результаты, полученные на Т-10, вместе с результатами, ожидаемыми на создаваемых установках (например, Т-20), по мере решения разного рода инженерно-технологических проблем служат базой для создания термоядерного реактора «Токамака».

Управляемый термоядерный синтез открывает человечеству доступ к неисчерпаемой «кладовой» ядерной энергии, заключенной в легких элементах. Наиболее заманчивой в этом смысле является возможность извлечения энергии из дейтерия, содержащегося в обычной воде. В самом деле, количество дейтерия в океанской воде составляет примерно $4 \cdot 10^{13}$ т, чему соответствует энергетический запас $10^{17}$ МВт·год. Другими словами, эти ресурсы неограниченны. Остается только надеяться, что решение этих проблем — дело недалекого будущего.

---

* Дж. Лоусон (р. 1923) — английский физик.

## Контрольные вопросы

- Какие частицы образуют ядро атома цинка? Сколько их?
- Атомное ядро «составили» из $N$ свободных нуклонов (масса каждого нуклона равна $m$). Чему равны масса и удельная энергия связи этого ядра?
- Чем отличаются изобары и изотопы?
- Почему прочность ядер уменьшается при переходе к тяжелым элементам?
- Как объясняется сверхтонкая структура спектральных линий?
- Как и во сколько раз изменится число ядер радиоактивного вещества за время, равное трем периодам полураспада?
- Как (по какому закону) изменяется со временем активность нуклида?
- Как изменится положение химического элемента в таблице Менделеева после двух $\alpha$-распадов ядер его атомов? после последовательных одного $\alpha$-распада и двух $\beta^-$-распадов?
- Как объясняется $\alpha$-распад на основе представлений квантовой теории?
- Как объясняется непрерывность энергетического спектра $\beta$-частиц?
- Изменится ли химическая природа элемента при испускании его ядром $\gamma$-кванта?
- Какие явления сопровождают прохождение $\gamma$-излучения через вещество и в чем их суть?
- В чем суть эффекта Мёссбауэра? Каковы его возможные применения?
- Запишите схему $e$-захвата. Что сопровождает $e$-захват? В чем его отличие от $\beta^{\pm}$-распадов?
- Чем объяснить выброс нейтрино (антинейтрино) при $\beta^{\pm}$-распадах?
- По каким признакам можно классифицировать ядерные реакции?
- Под действием каких частиц ($\alpha$-частиц, нейтронов) ядерные реакции более эффективны? Почему?
- Что представляет собой реакция деления ядер? Приведите примеры.
- Охарактеризуйте нейтроны деления. Какие они бывают?
- В результате какой реакции происходит превращение ядер $^{238}_{92}U$ в ядра $^{239}_{94}Pu$? Каковы ее перспективы?

- Что можно сказать о характере цепной реакции деления, если: 1) $k>1$; 2) $k=1$; 3) $k<1$?
- По каким признакам можно классифицировать ядерные реакторы?
- Почему деление тяжелых ядер и синтез атомных ядер сопровождаются выделением большого количества энергии? Когда на один нуклон выделяется бо́льшая энергия? Почему?

## Задачи

**32.1.** Определить удельную энергию связи для ядра $^{12}_{6}C$, если масса его нейтрального атома равна $19{,}9272\cdot10^{-27}$ кг. [7,7 МэВ/нуклон]

**32.2.** Определить, какая часть (в процентах) начального количества ядер радиоактивного изотопа останется нераспавшейся по истечении времени $t$, равного трем средним временам жизни $\tau$ радиоактивного ядра. [5%]

**32.3.** Период полураспада радиоактивного изотопа составляет 24 ч. Определить время, за которое распадется $\frac{1}{4}$ начального количества ядер. [10,5 ч]

**32.4.** Определить, поглощается или выделяется энергия при ядерной реакции $^{2}_{1}H+^{3}_{2}He\rightarrow{}^{1}_{1}H+{}^{4}_{2}He$. Определить эту энергию. [18,4 МэВ]

**32.5.** В процессе осуществления реакции $\gamma\rightarrow{}^{0}_{-1}e+{}^{0}_{+1}e$ энергия фотона была равна 2,02 МэВ. Определить полную кинетическую энергию позитрона и электрона в момент их возникновения. [1 МэВ]

**32.6.** В ядерном реакторе на тепловых нейтронах среднее время жизни одного поколения нейтронов составляет $T=90$ мс. Принимая коэффициент размножения нейтронов $k=1{,}003$, определить период $\tau$ реактора, т. е. время, в течение которого поток тепловых нейтронов увеличится в $e$ раз. [$\tau=T/(k-1)=30$ с]

# Глава 33
# Элементы физики элементарных частиц

## § 269. Космическое излучение

Развитие физики элементарных частиц тесно связано с изучением космического излучения — излучения, приходящего на Землю практически изотропно со всех направлений космического пространства. Измерения интенсивности космического излучения, проводимые методами, аналогичными методам регистрации радиоактивных излучений и частиц (см. § 261), приводят к выводу, что его интенсивность быстро растет с высотой, достигает максимума, затем уменьшается и с $h\approx50$ км остается практически постоянной (рис. 347).

Различают **первичное и вторичное** космические излучения. Излучение, приходящее непосредственно из космоса, называют **первичным космическим излучением.** Исследование его состава показало, что первичное излучение представляет собой поток элементарных частиц высокой энергии, причем более 90% из них составляют протоны с энергией примерно $10^{9}$—$10^{13}$ эВ, около 7% — $\alpha$-частицы и лишь небольшая доля (около 1%) приходится на ядра более тяжелых элементов ($Z>20$). По современным представлениям, основанным на данных астрофизики и радиоастрономии, считается, что первичное космическое излучение имеет в основном галактическое происхождение. Считается,

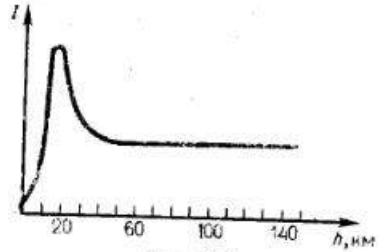



Рис. 347

что ускорение частиц до столь высоких энергий может происходить при столкновении с движущимися межзвездными магнитными полями. При $h \geqslant 50$ км (рис. 347) интенсивность космического излучения постоянна; на этих высотах наблюдается лишь первичное излучение.

С приближением к Земле интенсивность космического излучения возрастает, что свидетельствует о появлении **вторичного космического излучения**, которое образуется в результате взаимодействия первичного космического излучения с ядрами атомов земной атмосферы. Во вторичном космическом излучении встречаются практически все известные элементарные частицы. При $h < 20$ км космическое излучение является вторичным; с уменьшением $h$ его интенсивность понижается, поскольку вторичные частицы по мере продвижения к поверхности Земли испытывают поглощение.

В составе вторичного космического излучения можно выделить два компонента: **мягкий** (сильно поглощается свинцом) и **жесткий** (обладает в свинце большой проникающей способностью). Происхождение мягкого компонента объясняется следующим образом. В космическом пространстве всегда имеются $\gamma$-кванты с энергией $E > 2m_e c^2$, которые в поле атомных ядер превращаются в электронно-позитронные пары (см. § 263). Образовавшиеся таким образом электроны и позитроны, тормозясь, в свою очередь, создают $\gamma$-кванты, энергия которых еще достаточна для образования новых электронно-позитронных пар и т. д. до тех пор, пока энергия $\gamma$-квантов не будет меньше $2m_e c^2$ (рис. 348). Описанный процесс называется **электронно-позитронно-фотонным** (или **каскадным**) **ливнем**. Хотя первичные частицы, приводящие к образованию этих ливней, и обладают огромными энергиями, но ливневые частицы являются «мягкими» — не проходят через большие толщи вещества. Таким образом, ливневые частицы — электроны, позитроны и $\gamma$-кванты — и представляют собой мягкий компонент вторичного космического излучения. Природа

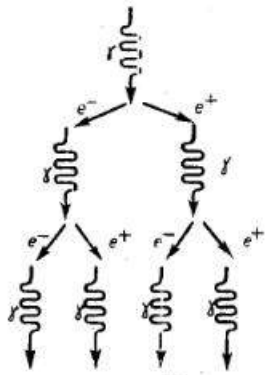


Рис. 348

жесткого компонента будет рассмотрена в дальнейшем (см. § 270).

Исследование космического излучения, с одной стороны, позволило на заре развития физики элементарных частиц получить основные экспериментальные данные, на которых базировалась эта область науки, а с другой — дало возможность и сейчас изучать процессы с частицами сверхвысоких энергий вплоть до $10^{21}$ эВ, которые еще не получены искусственным путем. Правда, с начала 50-х годов для исследования элементарных частиц стали применять ускорители (позволяют ускорить частицы до сотен гигаэлектрон-вольт; см. § 116), в связи с чем космическое излучение утратило свою исключительность при их изучении, оставаясь лишь основным «источником» частиц в области сверхвысоких энергий.

## § 270. Мюоны и их свойства

Японский физик Х. Юкава (1907—1981), изучая природу ядерных сил (см. § 254) и развивая идеи советских ученых И. Е. Тамма и Д. Д. Иваненко об их обменном характере, выдвинул в 1935 г. гипотезу о существовании частиц с массой, в 200—300 раз превышающей массу электрона. Эти частицы должны, согласно Юкаве, выполнять роль носителей ядерного взаимодействия, подобно тому, как фотоны являются носителями электромагнитного взаимодействия.

К. Андерсон и С. Неддермейер, изучая поглощение жесткого компонента вторичного космического излучения в свинцо-

вых фильтрах с помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле, действительно обнаружили (1936) частицы массой, близкой к ожидаемой (207 $m_e$). Они были названы впоследствии **мюонами**. Доказано, что жесткий компонент вторичного космического излучения состоит в основном из мюонов, которые, как будет показано ниже, образуются вследствие распада более тяжелых заряженных частиц ($\pi$- и $K$-мезонов). Так как масса мюонов большая, то радиационные потери для них пренебрежимо малы, а поэтому жесткий компонент вторичного излучения обладает большой проникающей способностью.

Существуют положительный ($\mu^+$) и отрицательный ($\mu^-$) мюоны; заряд мюонов равен элементарному заряду $e$. Масса мюонов (оценивается по производимому ими ионизационному действию) равна 206,8 $m_e$, время жизни $\mu^+$- и $\mu^-$-мюонов одинаково и равно $2{,}2\cdot10^{-6}$ с. Исследования изменения интенсивности жесткого компонента вторичного космического излучения с высотой показали, что на меньших высотах потоки мюонов менее интенсивны. Это говорит о том, что мюоны претерпевают самопроизвольный распад, являясь, таким образом, нестабильными частицами.

Распад мюонов происходит по следующим схемам:

$$\mu^+ \to {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu_e + {}^{0}_{0}\tilde{\nu}_\mu, \qquad (270.1)$$

$$\mu^- \to {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\tilde{\nu}_e + {}^{0}_{0}\nu_\mu, \qquad (270.2)$$

где ${}^{0}_{0}\nu_\mu$ и ${}^{0}_{0}\tilde{\nu}_\mu$ — соответственно **«мюонные» нейтрино и антинейтрино,** которые, как предположил советский физик Б. М. Понтекорво (р. 1913 г.) и экспериментально доказал (1962) американский физик Л. Ледерман (р. 1922), отличаются от ${}^{0}_{0}\nu_e$ и ${}^{0}_{0}\tilde{\nu}_e$ — **«электронных» нейтрино и антинейтрино,** сопутствующих испусканию позитрона и электрона соответственно (см. § 263, 258). Существование ${}^{0}_{0}\nu_\mu$ и ${}^{0}_{0}\tilde{\nu}_\mu$ следует из законов сохранения энергии и спина.

Из схем распада (270.1) и (270.2) следует, что спины мюонов, как и электрона, должны быть равны 1/2 (в единицах $\hbar$), так как спины нейтрино (1/2) и антинейтрино (—1/2) взаимно компенсируются.

Дальнейшие эксперименты привели к выводу, что мюоны не взаимодействуют или взаимодействуют весьма слабо с атомными ядрами, иными словами, являются **ядерно-неактивными частицами.** Мюоны, с одной стороны, из-за ядерной пассивности не могут рождаться при взаимодействии первичного компонента космического излучения с ядрами атомов атмосферы, а с другой — из-за нестабильности не могут находиться в составе первичного космического излучения. Следовательно, отождествить мюоны с частицами, которые, согласно Х. Юкаве, являлись бы носителями ядерного взаимодействия, не удалось, так как такие частицы должны интенсивно взаимодействовать с ядрами. Эти рассуждения и накопленный впоследствии экспериментальный материал привели к выводу о том, что должны существовать какие-то **ядерно-активные частицы,** распад которых и приводит к образованию мюонов. Действительно, в 1947 г. была обнаружена частица, обладающая свойствами, предсказанными Юкавой, которая распадается на мюон и нейтрино. Этой частицей оказался $\pi$-мезон.

## § 271. Мезоны и их свойства

С. Пауэлл (1903—1969; английский физик) с сотрудниками, подвергая на большой высоте ядерные фотоэмульсии действию космических лучей (1947), обнаружили ядерно-активные частицы — так называемые **$\pi$-мезоны** (от греч. «мезос» — средний), или **пионы.** В этом же году пионы были получены искусственно в лабораторных условиях при бомбардировке мишеней из Be, C и Cu $\alpha$-частицами, ускоренными в синхроциклотроне до 300 МэВ. $\pi$-Мезоны сильно взаимодействуют с нуклонами и атомными ядрами и, по современным представлениям, обусловливают существование ядерных сил.

Существуют положительный ($\pi^+$), отрицательный ($\pi^-$) (их заряд равен элементарному заряду $e$) и нейтральный ($\pi^0$) мезоны. Масса $\pi^+$- и $\pi^-$-мезонов одинако-

ва и равна $273{,}1m_e$, масса $\pi^0$-мезона равна $264{,}1m_e$. Все пионы нестабильны: время жизни соответственно для заряженных и нейтрального $\pi$-мезонов составляет $2{,}6\cdot10^{-8}$ и $0{,}8\cdot10^{-16}$ с.

Распад заряженных пионов происходит в основном по схемам

$$\pi^+\to\mu^+ + {}^0_0\nu_\mu, \qquad (271.1)$$

$$\pi^-\to\mu^- + {}^0_0\tilde{\nu}_\mu, \qquad (271.2)$$

где мюоны испытывают дальнейший распад по рассмотренным выше схемам (270.1) и (270.2). Из схем распада (271.1) и (271.2) следует, что спины заряженных $\pi$-мезонов должны быть либо целыми (в единицах $\hbar$), либо равны нулю. Спины заряженных $\pi$-мезонов, по ряду других экспериментальных данных, оказались равными нулю.

Нейтральный пион распадается на два $\gamma$-кванта:

$$\pi^0\to 2\gamma.$$

Спин $\pi^0$-мезона, так же как и спин $\pi^+$-мезона, равен нулю.

Исследования в космических лучах по методу фотоэмульсий (1949) и изучение реакций с участием частиц высоких энергий, полученных на ускорителях, привели к открытию *K*-**мезонов**, или **каонов**,— частиц с нулевым спином и с массами, приблизительно равными $970\,m_e$. В настоящее время известно четыре типа каонов: положительно заряженный ($K^+$), отрицательно заряженный ($K^-$) и два нейтральных ($K^0$ и $\tilde{K}^0$). Время жизни *K*-мезонов лежит в пределах $10^{-8}$ — $10^{-10}$ с в зависимости от их типа.

Существует несколько схем распада *K*-мезонов. Распад заряженных *K*-мезонов происходит преимущественно по схемам

$$\begin{cases} K^+\to\mu^+ + \nu_\mu & (K^-\to\mu^- + \tilde{\nu}_\mu),\\ K^+\to\pi^+ + \pi^0 & (K^-\to\pi^- + \pi^0),\\ K^+\to e^+ + \pi^0 + \nu_e & (K^-\to e^- + \pi^0 + \tilde{\nu}_e). \end{cases}$$

Распад нейтральных *K*-мезонов в основном происходит по следующим схемам (в порядке убывания вероятности распада):

для короткоживущих ($K^0_s$)

$$\begin{cases} K^0_s\to\pi^+ + \pi^-,\\ K^0_s\to\pi^0 + \pi^0; \end{cases}$$

для долгоживущих ($K^0_L$)

$$K^0_L\to\pi^+ + e^- + \tilde{\nu}_e,$$
$$K^0_L\to\pi^- + e^+ + \nu_e,$$
$$K^0_L\to\pi^+ + \mu^- + \tilde{\nu}_\mu,$$
$$K^0_L\to\pi^- + \mu^+ + \nu_\mu,$$
$$K^0_L\to\pi^0 + \pi^0 + \pi^0,$$
$$K^0_L\to\pi^+ + \pi^- + \pi^0.$$

## § 272. Типы взаимодействий элементарных частиц

Согласно современным представлениям, в природе осуществляется *четыре типа фундаментальных взаимодействий:* **сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное.**

**Сильное, или ядерное, взаимодействие** обусловливает связь протонов и нейтронов в ядрах атомов и обеспечивает исключительную прочность этих образований, лежащую в основе стабильности вещества в земных условиях.

**Электромагнитное взаимодействие** характеризуется как взаимодействие, в основе которого лежит связь с электромагнитным полем. Оно характерно для всех элементарных частиц, за исключением нейтрино, антинейтрино и фотона. Электромагнитное взаимодействие, в частности, ответственно за существование атомов и молекул, обусловливая взаимодействие в них положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов.

**Слабое взаимодействие** — наиболее медленное из всех взаимодействий, протекающих в микромире. Оно ответственно за взаимодействие частиц, происходящих с участием нейтрино или антинейтрино (например, β-распад, μ-распад), а также за безнейтринные процессы распада, характеризующиеся довольно большим временем жизни распадающейся частицы ($\tau\gtrsim10^{-10}$ с).

**Гравитационное взаимодействие** присуще всем без исключения частицам, однако из-за малости масс элементарных частиц оно пренебрежимо мало и, по-видимому, в процессах микромира несущественно.

Сильное взаимодействие примерно в 100 раз превосходит электромагнитное и в $10^{14}$ раз — слабое. Чем сильнее взаимодействие, тем с большей интенсивностью протекают процессы. Так, время жизни частиц, называемых **резонансами,** распад которых описывается сильным взаимодействием, составляет примерно $10^{-23}$ с; время жизни $\pi^0$-мезона, за распад которого ответственно электромагнитное взаимодействие, составляет $10^{-16}$ с; для распадов, за которые ответственно слабое взаимодействие, характерны времена жизни $10^{-10}$—$10^{-8}$ с. Как сильное, так и слабое взаимодействия — короткодействующие. Радиус действия сильного взаимодействия составляет примерно $10^{-15}$ м, слабого — не превышает $10^{-19}$ м. Радиус действия электромагнитного взаимодействия практически не ограничен.

Элементарные частицы принято делить на три группы:

1) **фотоны** — эта группа состоит всего лишь из одной частицы — фотона — кванта электромагнитного излучения;

2) **лептоны** (от греч. «лептос» — легкий), участвующие только в электромагнитном и слабом взаимодействиях. К лептонам относятся электронное и мюонное нейтрино, электрон, мюон и открытый в 1975 г. тяжелый лептон — τ-лептон, или таон, с массой примерно 3487 $m_e$, а также соответствующие им античастицы. Название лептонов связано с тем, что массы первых известных лептонов были меньше масс всех других частиц (кроме фотона). К лептонам относится также таонное нейтрино, существование которого в последнее время также установлено;

3) **адроны** (от греч. «адрос» — крупный, сильный). Адроны обладают сильным взаимодействием наряду с электромагнитным и слабым. Из рассмотренных выше частиц к ним относятся протон, нейтрон, пионы и каоны.

Для всех типов взаимодействия элементарных частиц выполняются законы сохранения энергии, импульса, момента импульса и электрического заряда.

Характерным признаком сильных взаимодействий является зарядовая независимость ядерных сил. Как уже указывалось (см. § 254), ядерные силы, действующие между парами $p-p$, $n-n$ или $p-n$, одинаковы. Поэтому если бы в ядре осуществлялось только сильное взаимодействие, то зарядовая независимость ядерных сил привела бы к одинаковым значениям масс нуклонов (протонов и нейтронов) и всех π-мезонов. Различие в массах нуклонов и соответственно π-мезонов обусловлено электромагнитным взаимодействием: энергии взаимодействующих заряженных и нейтральных частиц различны, поэтому и массы заряженных и нейтральных частиц оказываются неодинаковыми.

Зарядовая независимость в сильных взаимодействиях позволяет близкие по массе частицы рассматривать как различные зарядовые состояния одной и той же частицы. Так, нуклон образует дублет (нейтрон, протон), π-мезоны — триплет ($\pi^+$, $\pi^-$, $\pi^0$) и т. д. Подобные группы «похожих» элементарных частиц, одинаковым образом участвующих в сильном взаимодействии, имеющие близкие массы и отличающиеся зарядами, называют **изотопическими мультиплетами.** Каждый изотопический мультиплет характеризуют **изотопическим спином (изоспином)** — одной из внутренних характеристик адронов, определяющей число ($n$) частиц в изотопическом мультиплете: $n=2I+1$. Тогда изоспин нуклона $I={}^1/_2$ (число членов в изотопическом мультиплете нуклона равно двум), изоспин пиона $I=1$ (в пионном мультиплете $n=3$) и т. д. Изотопический спин характеризует только число членов в изотопическом мультиплете и никакого отношения к рассматриваемому ранее спину не имеет.

Исследования показали, что во всех процессах, связанных с превращениями элементарных частиц, обусловленных зарядово-независимыми сильными взаимодействиями, выполняется **закон сохранения изотопического спина.** Для электро-

магнитных и слабых взаимодействий этот закон не выполняется. Так как электрон, позитрон, фотон, мюоны и нейтрино и антинейтрино в сильных взаимодействиях участия не принимают, то им изотопический спин не приписывается.

## § 273. Частицы и античастицы

Впервые гипотеза об античастице возникла в 1928 г., когда П. Дирак на основе релятивистского волнового уравнения предсказал существование позитрона (см. § 263), обнаруженного спустя четыре года К. Андерсоном в составе космического излучения. Электрон и позитрон не являются единственной парой частица — античастица. Выводы релятивистской квантовой теории привели к заключению, что для каждой элементарной частицы должна существовать античастица **(принцип зарядового сопряжения).** Эксперименты показывают, что за немногим исключением (например, фотона и $\pi^0$-мезона), действительно, каждой частице соответствует античастица.

Из общих принципов квантовой теории следует, что частицы и античастицы должны иметь одинаковые массы, одинаковые времена жизни в вакууме, одинаковые по модулю, но противоположные по знаку электрические заряды (и магнитные моменты), одинаковые спины и изотопические спины, а также одинаковые остальные квантовые числа, приписываемые элементарным частицам для описания закономерностей их взаимодействия (лептонное число (см. § 275), барионное число (см. § 275), странность (см. § 274), очарование (см. § 275) и т. д.). До 1956 г. считалось, что имеется полная симметрия между частицами и античастицами, т. е. если какой-то процесс идет между частицами, то должен существовать точно такой же (с теми же характеристиками) процесс между античастицами. Однако в 1956 г. доказано, что подобная симметрия характерна только для сильного и электромагнитного взаимодействий и нарушается для слабого.

Согласно теории Дирака, столкновение частицы и античастицы должно приводить к их взаимной аннигиляции, в результате которой возникают другие элементарные частицы или фотоны. Примером тому является рассмотренная реакция (263.3) аннигиляции пары электрон — позитрон ($^0_{-1}e + {}^0_{+1}e \to 2\gamma$).

После того как предсказанное теоретически существование позитрона было подтверждено экспериментально, возник вопрос о существовании антипротона и антинейтрона. Расчеты показывают, что для создания пары частица — античастица надо затратить энергию, превышающую удвоенную энергию покоя пары, поскольку частицам необходимо сообщить весьма значительную кинетическую энергию. Для создания $p-\tilde{p}$-пары необходима энергия примерно 4,4 ГэВ. Антипротон был действительно обнаружен экспериментально (1955) при рассеянии протонов (ускоренных на крупнейшем в то время синхрофазотроне Калифорнийского университета) на нуклонах ядер мишени (мишенью служила медь), в результате которого рождалась пара $p-\tilde{p}$.

Антипротон отличается от протона знаками электрического заряда и собственного магнитного момента. Антипротон может аннигилировать не только с протоном, но и с нейтроном:

$$\tilde{p}+p \to \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^0, \quad (273.1)$$

$$\tilde{p}+p \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^0 + \pi^0, \quad (273.2)$$

$$\tilde{p}+n \to \pi^+ + \pi^- + \pi^- + \pi^0 + \pi^0 \quad (273.3)$$

Годом позже (1956) на том же ускорителе удалось получить антинейтрон ($\tilde{n}$) и осуществить его аннигиляцию. Антинейтроны возникали в результате перезарядки антипротонов при их движении через вещество. Реакция перезарядки $\tilde{p}$ состоит в обмене зарядов между нуклоном и антинуклоном и может протекать по схемам

$$\tilde{p}+p \to \tilde{n}+n, \quad (273.4)$$

$$\tilde{p}+p \to \tilde{n}+n+\pi^-. \quad (273.5)$$

$\tilde{n}$ отличается от $n$ знаком собственного магнитного момента. Если антипротоны — стабильные частицы, то свободный анти-

нейтрон, если он не испытывает аннигиляции, в конце концов претерпевает распад по схеме

$$ {}^{1}_{0}\tilde{n} \rightarrow {}^{1}_{-1}\tilde{p} + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu_e $$

(ср. с (258.1)).

Античастицы были найдены также для $\pi^+$-мезона, каонов и гиперонов (см. § 274). Однако существуют частицы, которые античастиц не имеют,— это так называемые **истинно нейтральные частицы.** К ним относятся фотон, $\pi^0$-мезон и $\eta$-мезон (его масса равна 1074 $m_e$, время жизни $7 \cdot 10^{-19}$ с; распадается с образованием $\pi$-мезонов и $\gamma$-квантов). Истинно нейтральные частицы не способны к аннигиляции, но испытывают взаимные превращения, являющиеся фундаментальным свойством всех элементарных частиц. Можно сказать, что каждая из истинно нейтральных частиц тождественна со своей античастицей.

Большой интерес и серьезные трудности представляли доказательство существования антинейтрино и ответ на вопрос, являются ли нейтрино и антинейтрино тождественными или различными частицами. Используя мощные потоки антинейтрино, получаемые в реакторах (осколки деления тяжелых ядер испытывают $\beta$-распад и, согласно (258.1), испускают антинейтрино), американские физики Ф. Рейнес и К. Коуэн (1956) надежно зафиксировали реакцию захвата электронного антинейтрино протоном:

$$ {}^{0}_{0}\tilde{\nu}_e + {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{+1}e. \qquad (273.6) $$

Аналогично зафиксирована реакция захвата электронного нейтрино нейтроном:

$$ {}^{0}_{0}\nu_e + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e. \qquad (273.7) $$

Таким образом, реакции (273.6) и (273.7) явились, с одной стороны, бесспорным доказательством того, что $\nu_e$ и $\tilde{\nu}_e$ — реальные частицы, а не фиктивные понятия, введенные лишь для объяснения $\beta$-распада, а с другой — подтвердили вывод о том, что $\nu_e$ и $\tilde{\nu}_e$ — различные частицы.

В дальнейшем эксперименты по рождению и поглощению мюонных нейтрино показали, что и $\nu_\mu$ и $\tilde{\nu}_\mu$ — различные частицы. Также доказано, что пара $\nu_e$, $\nu_\mu$ — различные частицы, а пара $\nu_e$, $\tilde{\nu}_e$ не тождественна паре $\nu_\mu$, $\tilde{\nu}_\mu$. Согласно идее Б. М. Понтекорво (см. § 271), осуществлялась реакция захвата мюонного нейтрино (получались при распаде $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ (271.1)) нейтронами и наблюдались возникающие частицы. Оказалось, что реакция (273.7) не идет, а захват происходит по схеме

$$ {}^{0}_{0}\nu_\mu + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}p + \mu^-, $$

т. е. вместо электронов в реакции рождались $\mu^-$-мюоны. Это и подтверждало различие между $\nu_e$ и $\nu_\mu$.

По современным представлениям, нейтрино и антинейтрино отличаются друг от друга одной из квантовых характеристик состояния элементарной частицы — **спиральностью,** определяемой как проекция спина частицы на направление ее движения (на импульс). Для объяснения экспериментальных данных предполагают, что у нейтрино спин **s** ориентирован антипараллельно импульсу **p**, т. е. направления **p** и **s** образуют левый винт и нейтрино обладает **левой спиральностью** (рис. 349, *а*). У антинейтрино направления **p** и **s** образуют правый винт, т. е. антинейтрино обладает **правой спиральностью** (рис. 349, *б*). Это свойство справедливо в равной мере как для электронного, так и для мюонного нейтрино (антинейтрино).

Для того чтобы спиральность могла быть использована в качестве характеристики нейтрино (антинейтрино), масса нейтрино должна приниматься равной нулю. Введение спиральности позволило объяснить, например, нарушение закона сохранения четности (см. § 274) при сла-

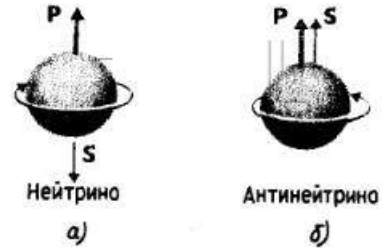



Рис. 349

бых взаимодействиях, вызывающих распад элементарных частиц и β-распад. Так, $\mu^-$-мюону приписывают правую спиральность, $\mu^+$-мюону — левую.

После открытия столь большого числа античастиц на повестку дня встала новая задача — найти антиядра, иными словами, доказать существование антивещества, которое построено из античастиц, так же как вещество из частиц. Антиядра действительно были обнаружены. Первое антиядро — антидейтрон (связанное состояние $\bar{p}$ и $\bar{n}$) — было получено в 1965 г. группой американских физиков под руководством Л. Ледермана. Впоследствии на Серпуховском ускорителе были синтезированы ядра антигелия (1970) и антитрития (1973).

Следует, однако, отметить, что возможность аннигиляции при встрече с частицами не позволяет античастицам длительное время существовать среди частиц. Поэтому для устойчивого состояния антивещества оно должно быть от вещества изолировано. Если бы вблизи известной нам части Вселенной существовало скопление антивещества, то должно было бы наблюдаться мощное аннигиляционное излучение (колоссальные взрывы с выделением огромных количеств энергии). Однако пока астрофизики ничего подобного не зарегистрировали. Исследования, проводимые для поиска антиядер (в конечном счете антиматерии), и достигнутые в этом направлении первые успехи имеют фундаментальное значение для дальнейшего познания строения вещества.

## § 274. Гипероны. Странность и четность элементарных частиц

В ядерных фотоэмульсиях (конец 40-х годов) и на ускорителях заряженных частиц (50-е годы) обнаружены тяжелые нестабильные элементарные частицы массой, большей массы нуклона, названные **гиперонами** (от греч. **hyper** — сверх, выше). Известно несколько типов гиперонов: лямбда ($\Lambda^0$), сигма ($\Sigma^0$, $\Sigma^+$, $\Sigma^-$), кси ($\Xi^+$, $\Xi^-$) и омега ($\Omega^-$). Существование $\Omega^-$-гиперона следовало из предложенной (1961) М. Гелл-Манном (р. 1929) (американский физик; Нобелевская премия 1969 г.) схемы для классификации сильно взаимодействующих элементарных частиц. Все известные в то время частицы укладывались в эту схему, но в ней оставалось одно незаполненное место, которое должна была занять отрицательно заряженная частица массой, равной примерно 3284 $m_e$. В результате специально поставленного эксперимента был действительно обнаружен $\Omega^-$-гиперон массой $3273m_e$.

Гипероны имеют массы в пределах $(2183—3273)m_e$, их спин равен $^1/_2$ (только спин $\Omega^-$-гиперона равен $^3/_2$), время жизни приблизительно $10^{-10}$ с (для $\Sigma^0$-гиперона время жизни равно приблизительно $10^{-20}$ с). Они участвуют в сильных взаимодействиях, т. е. принадлежат к группе адронов. Гипероны распадаются на нуклоны и легкие частицы (π-мезоны, электроны, нейтрино и γ-кванты).

Детальное исследование рождения и превращения гиперонов привело к установлению новой квантовой характеристики элементарных частиц — так называемой **странности.** Ее введение оказалось необходимым для объяснения ряда парадоксальных (с точки зрения существовавших представлений) свойств этих частиц. Дело в том, что гипероны должны были, как представлялось, обладать временем жизни примерно $10^{-23}$ с, что в $10^{13}$ раз (!) меньше установленного на опыте. Подобные времена жизни можно объяснить лишь тем, что распад гиперонов происходит за счет слабого взаимодействия. Кроме того, оказалось, что всякий раз гиперон рождается в паре с $K$-мезоном. Например, в реакции

$$p+\pi^- \to \Lambda^0 + K^0 \qquad (274.1)$$

с $\Lambda^0$-гипероном всегда рождается $K^0$-мезон, в поведении которого обнаруживаются те же особенности, что и у гиперона. Распад же $\Lambda^0$-гиперона происходит по схеме

$$\Lambda^0 \to \pi^- + p. \qquad (274.2)$$

Особенности поведения гиперонов и $K$-мезонов были объяснены в 1955 г. М. Гелл-Манном с помощью квантового

числа — **странности** $S$, которая сохраняется в процессах сильного и электромагнитного взаимодействий. Если приписать каонам $S=1$, а $\Lambda^0$- и $\Sigma$-гиперонам $S=-1$ и считать, что у нуклонов и $\pi$-мезонов $S=0$, то сохранение суммарной странности частиц в сильном взаимодействии объясняет как совместное рождение $\Lambda^0$-гиперона с $K^0$-мезоном, так и невозможность распада частиц с не равной нулю странностью за счет сильного взаимодействия на частицы, странность которых равна нулю. Реакция (274.2) идет с нарушением странности, поэтому она не может происходить за счет сильного взаимодействия. $\Xi$-Гиперонам, которые рождаются совместно с двумя каонами, приписывают $S=-2$; $\Omega$-гиперонам — $S=-3$.

Из закона сохранения странности следовало существование частиц, таких, как $\bar{K}^0$-мезон, $\Sigma^0$-, $\Xi^0$-гипероны, которые впоследствии были обнаружены экспериментально. Каждый гиперон имеет свою античастицу.

Элементарным частицам приписывают еще одну квантово-механическую величину — **четность** $P$ — квантовое число, характеризующее симметрию волновой функции элементарной частицы (или системы элементарных частиц) относительно зеркального отражения. Если при зеркальном отражении волновая функция частицы не меняет знака, то четность частицы $P=+1$ (четность положительная), если меняет знак, то четность частицы $P=-1$ (отрицательная).

Из квантовой механики вытекает **закон сохранения четности,** согласно которому при всех превращениях, претерпеваемых системой частиц, четность состояния не изменяется. Сохранение четности связано со свойством зеркальной симметрии пространства и указывает на инвариантность законов природы по отношению к замене правого левым, и наоборот. Однако исследования распадов $K$-мезонов привели американских физиков Т. Ли и Ч. Янга (1956 г.; Нобелевская премия 1957 г.) к выводу о том, что в слабых взаимодействиях закон сохранения четности может нарушаться. Целый ряд опытов подтвердили это предсказание. Таким образом, *закон сохранения четности,* как и закон *сохранения странности, выполняется только при сильных и электромагнитных взаимодействиях.*

## § 275. Классификация элементарных частиц. Кварки

В многообразии элементарных частиц, известных к настоящему времени, обнаруживается более или менее стройная система классификации. Для ее пояснения в табл. 8 представлены рассмотренные выше элементарные частицы, для которых приводятся основные характеристики. Характеристики для античастиц не приводятся, поскольку, как указывалось в § 273, модули зарядов и странности, массы, спины, изотопические спины и время жизни частиц и их античастиц одинаковы, они различаются лишь знаками зарядов и странности, а также знаками других величин, характеризующих их электрические (а следовательно, и магнитные) свойства. В таблице нет также античастиц фотона и $\pi^0$- и $\eta^0$-мезонов, так как антифотон и антипи-ноль- и антиэта-ноль-мезоны тождественны с фотоном и $\pi^0$- и $\eta^0$-мезонами.

В табл. 8 элементарные частицы объединены в три группы (см. § 272): фотоны, лептоны и адроны. Элементарные частицы, отнесенные к каждой из этих групп, обладают общими свойствами и характеристиками, которые отличают их от частиц другой группы.

К группе **фотонов** относится единственная частица — фотон, который переносит электромагнитное взаимодействие. В электромагнитном взаимодействии участвуют в той или иной степени все частицы, как заряженные, так и нейтральные (кроме нейтрино).

К группе **лептонов** относятся электрон, мюон, таон, соответствующие им нейтрино, а также их античастицы. Все лептоны имеют спин, равный 1/2, и, следовательно, являются фермионами (см. § 226), подчиняясь статистике Ферми — Дирака (см. § 235). Поскольку лептоны в сильных взаимодействиях не участвуют, изотопиче-

ский спин им не приписывается. Странность лептонов равна нулю.

Элементарным частицам, относящимся к группе лептонов, приписывают так называемое **лептонное число (лептонный заряд)** $L$. Обычно принимают, что $L=+1$ для лептонов ($e^-$, $\mu^-$, $\tau^-$, $\nu_e$, $\nu_\mu$, $\nu_\tau$), $L=-1$ для антилептонов ($e^+$, $\mu^+$, $\tau^+$, $\tilde{\nu}_e$, $\tilde{\nu}_\mu$, $\tilde{\nu}_\tau$) и $L=0$ для всех остальных элементарных частиц. Введение $L$ позволяет сформулировать **закон сохранения лептонного числа**: в замкнутой системе при *всех без исключения процессах* взаимопревращаемости элементарных частиц лептонное число сохраняется.

Теперь понятно, почему при распаде (258.1) нейтральная частица названа антинейтрино, а при распаде (263.1) — нейтрино. Так как у электрона и нейтрино $L=+1$, а у позитрона и антинейтрино $L=-1$, то закон сохранения лептонного числа выполняется лишь при условии, что антинейтрино возникает вместе с электроном, а нейтрино — с позитроном.

Основную часть элементарных частиц составляют адроны. К группе **адронов** относятся пионы, каоны, $\eta$-мезон, нуклоны, гипероны, а также их античастицы (в табл. 8 приведены не все адроны).

Адронам приписывают **барионное число (барионный заряд)** $B$. Адроны с $B=0$ образуют подгруппу **мезонов** (пионы,

Таблица 8

| Группа | | Название частицы | Символ частицы | Символ античастицы | Заряд, ед. $e$ | Масса покоя, ед. $m_e$ | Спин, ед. $\hbar$ | Изоспин $I$ | Лептонное число $L$ | Барионное число $B$ | Странность $S$ | Приблизительное время жизни, с |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Фотоны | | Фотон | $\gamma$ | | 0 | 0 | 1 | — | 0 | 0 | 0 | Стабилен |
| Лептоны | | Электрон | $e^-$ | $e^+$ | 1 | 1 | $^1/_2$ | — | +1 | 0 | 0 | Стабилен |
| | | Электронное нейтрино | $\nu_e$ | $\tilde{\nu}_e$ | 0 | 0 | $^1/_2$ | — | +1 | 0 | 0 | Стабильно |
| | | Мюон | $\mu^-$ | $\mu^+$ | 1 | 206,8 | $^1/_2$ | — | +1 | 0 | 0 | $\approx 10^{-6}$ |
| | | Мюонное нейтрино | $\nu_\mu$ | $\tilde{\nu}_\mu$ | 0 | 0 | $^1/_2$ | — | +1 | 0 | 0 | Стабильно |
| | | Таон | $\tau^-$ | $\tau^+$ | 1 | 3487 | $^1/_2$ | — | +1 | 0 | 0 | $\approx 10^{-12}$ |
| | | Таонное нейтрино | $\nu_\tau$ | $\tilde{\nu}_\tau$ | 0 | 0 | $^1/_2$ | — | +1 | 0 | 0 | ? |
| Адроны | Мезоны | Пионы | $\pi^0$ | | 0 | 264,1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\approx 10^{-16}$ |
| | | | $\pi^+$ | $\pi^-$ | 1 | 273,1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\approx 10^{-8}$ |
| | | Каоны | $K^0$ | $\tilde{K}^0$ | 0 | 974,0 | 0 | $^1/_2$ | 0 | 0 | +1 | $10^{-10}$—$10^{-8}$ |
| | | | $K^+$ | $K^-$ | 1 | 966,2 | 0 | $^1/_2$ | 0 | 0 | +1 | $\approx 10^{-8}$ |
| | | Эта-мезон | $\eta^0$ | | 0 | 1074 | 0 | — | 0 | 0 | 0 | $\approx 10^{-19}$ |
| | Барионы | Протон | $p$ | $\tilde{p}$ | 1 | 1836,2 | $^1/_2$ | $^1/_2$ | 0 | +1 | 0 | Стабилен |
| | | Нейтрон | $n$ | $\tilde{n}$ | 0 | 1838,7 | $^1/_2$ | $^1/_2$ | 0 | +1 | 0 | $\approx 10^3$ |
| | | Гипероны: лямбда | $\Lambda^0$ | $\tilde{\Lambda}^0$ | 0 | 2183 | $^1/_2$ | 0 | 0 | +1 | −1 | $\approx 10^{-10}$ |
| | | сигма | $\Sigma^0$ | $\tilde{\Sigma}^0$ | 0 | 2334 | $^1/_2$ | 1 | 0 | +1 | −1 | $\approx 10^{-20}$ |
| | | | $\Sigma^+$ | $\tilde{\Sigma}^+$ | 1 | 2328 | $^1/_2$ | 1 | 0 | +1 | −1 | $\approx 10^{-10}$ |
| | | | $\Sigma^-$ | $\tilde{\Sigma}^-$ | 1 | 2343 | $^1/_2$ | 1 | 0 | +1 | −1 | $\approx 10^{-10}$ |
| | | кси | $\Xi^0$ | $\tilde{\Xi}^0$ | 0 | 2573 | $^1/_2$ | $^1/_2$ | 0 | +1 | −2 | $\approx 10^{-10}$ |
| | | | $\Xi^-$ | $\tilde{\Xi}^-$ | 1 | 2586 | $^1/_2$ | $^1/_2$ | 0 | +1 | −2 | $\approx 10^{-10}$ |
| | | омега | $\Omega^-$ | $\tilde{\Omega}^-$ | 1 | 3273 | $^3/_2$ | 0 | 0 | +1 | −3 | $\approx 10^{-10}$ |

каоны, η-мезон), а адроны с $B=+1$ образуют подгруппу **барионов** (от греч. «барис» — тяжелый; сюда относятся нуклоны и гипероны). Для лептонов и фотона $B=0$. Если принять для барионов $B=+1$, для антибарионов (антинуклоны, антигипероны) $B=-1$, а для всех остальных частиц $B=0$, то можно сформулировать **закон сохранения барионного числа:** в замкнутой системе *при всех процессах* взаимопревращаемости элементарных частиц барионное число сохраняется.

Из закона сохранения барионного числа следует, что при распаде бариона наряду с другими частицами обязательно образуется барион. Примерами сохранения барионного числа являются реакции (273.1)—(273.5). Барионы имеют спин, равный 1/2 (только спин $\Omega^-$-гиперона равен 3/2), т. е. барионы, как и лептоны, являются фермионами.

Странность $S$ для различных частиц подгруппы барионов имеет разные значения (см. табл. 8).

Мезоны имеют спин, равный нулю, и, следовательно, являются бозонами (см. § 226), подчиняясь статистике Бозе — Эйнштейна (см. § 235). Для мезонов лептонные и барионные числа равны нулю. Из подгруппы мезонов только каоны обладают $S=+1$, а пионы и η-мезон имеют нулевую странность.

Подчеркнем еще раз, что *для процессов взаимопревращаемости элементарных частиц*, обусловленных *сильными взаимодействиями*, выполняются *все законы сохранения* (энергии, импульса, момента импульса, зарядов (электрического, лептонного и барионного), изоспина, странности и четности). В процессах, обусловленных *слабыми взаимодействиями, не сохраняются только изоспин, странность и четность.*

В последние годы увеличение числа элементарных частиц происходит в основном за счет расширения группы адронов.

Поэтому развитие работ по их классификации все время сопровождалось поисками новых, более фундаментальных частиц, которые могли бы служить базисом для построения всех адронов. Гипотеза о существовании таких частиц, названных **кварками,** была высказана независимо друг от друга (1964) австрийским физиком Дж. Цвейгом (р. 1937) и Гелл-Манном. Название «кварк» заимствовано из романа ирландского писателя Дж. Джойса «Поминки по Финнегану» (герою снится сон, в котором чайки кричат: «Три кварка для мастера Марка»).

Согласно модели Гелл-Манна — Цвейга, все известные в то время адроны можно было построить, постулировав существование трех типов кварков ($u$, $d$, $s$) и соответствующих антикварков ($\tilde{u}$, $\tilde{d}$, $\tilde{s}$), если им приписать характеристики, указанные в табл. 9 (в том числе дробные! электрические и барионные заряды). Самое удивительное (почти невероятное) свойство кварков связано с их электрическим зарядом, поскольку еще никто не находил частицы с дробным значением элементарного электрического заряда. Спин кварка равен $^1/_2$, поскольку только из фермионов можно «сконструировать» как фермионы (нечетное число фермионов), так и бозоны (четное число фермионов).

Адроны строятся из кварков следующим образом: мезоны состоят из пары кварк — антикварк, барионы — их трех кварков (антибарион — из трех антикварков). Так, например, пион $\pi^+$ имеет кварковую структуру $u\tilde{d}$, пион $\pi^- — \tilde{u}d$, каон $K^+ — d\tilde{s}$, протон — $uud$, нейтрон — $udd$, $\Sigma^+$-гиперон — $uus$, $\Sigma^0$-гиперон — $uds$ и т. д.

Во избежание трудностей со статистикой (некоторые барионы, например $\Omega^-$-гиперон, состоят из трех одинаковых кварков ($sss$), что запрещено принципом

Таблица 9

| Кварк (антикварк) | Электрический заряд, ед. $e$ | Барионное число $B$ | Спин, ед. $\hbar$ | Странность $S$ |
|---|---|---|---|---|
| $u$ ($\tilde{u}$) | $+^2/_3(-^2/_3)$ | $+^1/_3(-^1/_3)$ | $^1/_2$ | 0 |
| $d$ ($\tilde{d}$) | $-^1/_3(+^1/_3)$ | $+^1/_3(-^1/_3)$ | $^1/_2$ | 0 |
| $s$ ($\tilde{s}$) | $-^1/_3(+^1/_3)$ | $+^1/_3(-^1/_3)$ | $^1/_2$ | $-1(+1)$ |
| $c$ ($\tilde{c}$) | $+^2/_3(-^2/_3)$ | $+^1/_3(-^1/_3)$ | $^1/_2$ | $-1(+1)$ |

Паули; см. § 227) на данном этапе предполагают, что каждый кварк (антикварк) обладает специфической квантовой характеристикой — **цветом**: «желтым», «синим» и «красным». Тогда, если кварки имеют неодинаковую «окраску», принцип Паули не нарушается.

Углубленное изучение модели Гелл-Манна — Цвейга, а также открытие в 1974 г. истинно нейтрального джей-пси-мезона ($J/\Psi$) массой около 6000 $m_e$, временем жизни примерно $10^{-20}$ с и спином, равным единице, привело к введению нового кварка — так называемого $c$-кварка и новой сохраняющейся величины — **«очарования»** (от англ. charm). Подобно странности и четности, *очарование сохраняется в сильных и электромагнитных взаимодействиях, но не сохраняется в слабых.* Закон сохранения очарования объясняет относительно долгое время жизни $J/\Psi$-мезона. Основные характеристики $c$-кварка приведены в табл. 9.

Частице $J/\Psi$ приписывается кварковая структура $c\bar{c}$. Структура $c\bar{c}$ называется **чармонием** — атомоподобная система, напоминающая **позитроний** (связанная водородоподобная система, состоящая из электрона и позитрона, движущихся вокруг общего центра масс).

Кварковая модель оказалась весьма плодотворной, она позволила определить почти все основные квантовые числа адронов. Например, из этой модели, поскольку спин кварков равен $^1/_2$, следует целочисленный (нулевой) спин для мезонов и полуцелый — для барионов в полном соответствии с экспериментом. Кроме того, эта модель позволила предсказать также и новые частицы, например $\Omega^-$-гиперон. Однако при использовании этой модели возникают и трудности. Кварковая модель не позволяет, например, определить массу адронов, поскольку для этого необходимо знание динамики взаимодействия кварков и их масс, которые пока неизвестны.

В настоящее время существует точка зрения, что между лептонами и кварками существует симметрия: число лептонов должно быть равно числу типов кварков. В 1977 г. был открыт сверхтяжелый мезон массой около 20 000$m_e$, который представляет собой структуру из кварка и антикварка нового типа — $b$-кварка (является носителем сохраняющейся в сильных взаимодействиях величины, названной **«прелестью»** (от англ. beauty)). Заряд $b$-кварка равен $-^1/_3$. Предполагается, что существует и шестой кварк $t$ с зарядом $+^2/_3$, который уже решено назвать **истинным** (от англ. truth — истина), подобно тому как $c$-кварк называют очарованным, $b$-кварк — прелестным. В физике элементарных частиц введен «аромат» — характеристика типа кварка ($u$, $d$, $s$, $c$, $b$, $t$?), объединяющая совокупность квантовых чисел (странность, очарование, прелесть и др.), отличающих один тип кварка от другого, кроме цвета. Аромат сохраняется в сильных и электромагнитных взаимодействиях. Является ли схема из шести лептонов и шести кварков окончательной или же число лептонов (кварков) будет расти, покажут дальнейшие исследования.

## Контрольные вопросы

- Какова природа первичного и вторичного космического излучения? Назовите их свойства.
- Приведите схемы распада мюонов. Чем объясняется выброс мюонного нейтрино (антинейтрино)?
- Приведите схемы распада $\pi$-мезонов. Дайте характеристику $\pi$-мезонам.
- Какие фундаментальные типы взаимодействий осуществляются в природе и как их можно охарактеризовать? Какой из них является универсальным?
- Какие законы сохранения выполняются для всех типов взаимодействий элементарных частиц?
- Что является фундаментальным свойством всех элементарных частиц?
- Назовите свойства нейтрино и антинейтрино. В чем их сходство и различие?
- Какие характеристики являются для частиц и античастиц одинаковыми? Какие — разными?

- Что такое странность и четность элементарных частиц? Для чего они вводятся? Всегда ли выполняются законы их сохранения?
- Почему магнитный момент протона имеет то же направление, что и спин, а у электрона направления этих векторов противоположны?
- Какие имеются группы элементарных частиц? Каковы критерии, по которым элементарные частицы относятся к той или иной группе?
- Какие законы сохранения выполняются при сильных взаимодействиях элементарных частиц? при слабых взаимодействиях?
- Каким элементарным частицам и почему приписывают лептонное число? барионное число? В чем заключаются законы их сохранения?
- Зачем нужна гипотеза о существовании кварков? Что объясняется с ее помощью? В чем ее трудность?
- Почему потребовалось введение таких характеристик кварков, как цвет и очарование?

## Задачи

**33.1.** Принимая, что энергия релятивистских мюонов в космическом излучении составляет 3 ГэВ, определить расстояние, проходимое мюонами за время их жизни, если собственное время жизни мюона 2,2 мкс, а энергия покоя 100 МэВ. [19,8 км]

**33.2.** Нейтральный пион распадается на два $\gamma$-кванта: $\pi^0 \to 2\gamma$. Принимая массу покоя пиона равной 264,1 $m_e$, определить энергию каждого из возникших $\gamma$-квантов. [67,7 МэВ]

**33.3.** При столкновении нейтрона и антинейтрона происходит их аннигиляция, в результате чего возникают два $\gamma$-кванта, а энергия частиц переходит в энергию $\gamma$-квантов. Определить энергию каждого из возникших $\gamma$-квантов, принимая, что кинетическая энергия нейтрона и позитрона до их столкновения пренебрежимо мала. [942 МэВ]

**33.4.** Определить, какие из приведенных ниже процессов запрещены законом сохранения лептонного числа: 1) $K^- \to \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$; 2) $K^+ \to e^+ + \pi^0 + \nu_e$.

**33.5.** Определить, какие из приведенных ниже процессов разрешены законом сохранения странности: 1) $p + \pi^- \to \Sigma + K^-$; 2) $p + \pi^- \to K^- + K^+ + n$.

**33.6.** Определить, какие законы сохранения нарушаются в приведенных ниже запрещенных способах распада: 1) $\pi^- + n \to \Lambda^0 + K^-$; 2) $p + p \to p + \pi^+$.

# Заключение

Итак, изложение курса физики закончено. Начав его детальное изучение с физических основ механики, мы последовательно рассмотрели основы молекулярной физики и термодинамики, учение об электричестве и электромагнетизме, колебания и волны, оптику, элементы квантовой физики и физики твердого тела, физики ядра и элементарных частиц. Приведенный перечень разделов, изложенных в курсе, позволяет проследить логику развития физики и эволюцию ее идей, а также представить основные периоды и этапы ее становления.

Со времени выхода в свет труда И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» (1687), в котором он сформулировал три основных закона механики и закон всемирного тяготения, прошло более трехсот лет. За это время физика прошла путь от макроскопического уровня изучения явлений до исследования материи на уровне элементарных частиц.

Однако, несмотря на огромные успехи, которых физика достигла за это время и особенно в XX столетии, современная физика и астрофизика стоят перед целым рядом нерешенных проблем.

Например, проблемы физики плазмы — разработка методов разогрева плазмы до примерно $10^9$ К и ее удержание в течение времени, достаточного для протекания термоядерной реакции; квантовой электроники — существенное повышение к. п. д. лазеров, расширение диапазона длин волн лазерного излучения с плавной перестройкой по частоте и т. д.; физики твердого тела — получение материалов с наперед заданными свойствами и, в частности, с экстремальными параметрами по большому «спектру» характеристик, создание высокотемпературных сверхпроводников и т. д.; физики атомного ядра — осуществление управляемого термоядерного синтеза, поиск долгоживущих элементов с $Z = 114 \div 126$, предсказанных теорией, построение теории сильных взаимодействий и т. д.; физики элементарных частиц — доказательство реальности существования кварков и глюонов (частиц, осуществляющих взаимодействие между кварками), построение квантовой теории тяготения и т. д.; астрофизики — природа квазаров (мощных внегалактических источников электромагнитного излучения), причины вспышек сверхновых звезд, состояние материи при огромных плотностях и давлениях внутри нейтронных звезд и т. д.

В настоящее время с особой силой подчеркивается практическая важность фундаментальных исследований. Это в первую очередь относится к исследованиям к области современной физики. Решение стоящих перед ней проблем является важнейшим условием ускорения научно-технического прогресса.

### 1. Физические основы механики

Средняя скорость

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Мгновенная скорость

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Среднее ускорение

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Мгновенное ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{r}.$$

Полное ускорение

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n;$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Кинематические уравнения равнопеременного поступательного движения

$$\begin{cases} v = v_0 \pm at, \\ s = v_0 t \pm \dfrac{at^2}{2}. \end{cases}$$

Угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Кинематические уравнения равнопеременного вращательного движения

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \\ \varphi = \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2}. \end{cases}$$

Связь между линейными и угловыми величинами при вращательном движении

$$s = R\varphi; \quad v = R\omega;$$

$$a_\tau = R\varepsilon; \quad a_n = \omega^2 R.$$

Импульс (количество движения)

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Второй закон Ньютона

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Сила трения скольжения

$$F_{тр} = fN.$$

Закон сохранения импульса (для замкнутой системы)

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i = \text{const}.$$

Работа переменной силы на участке траектории *1—2*

$$A = \int_1^2 F \cos \alpha \, ds.$$

Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v}.$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли,

$$\Pi = mgh.$$

Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}.$$

Полная механическая энергия системы

$$E = T + \Pi.$$

Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы)

$$T + \Pi = E = \text{const}.$$

Скорость шаров массами $m_1$ и $m_2$ после абсолютно упругого центрального удара

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)\, v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Скорость шаров после абсолютно неупругого удара

$$\mathbf{v} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Момент инерции системы (тела)

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Моменты инерции полого и сплошного цилиндров (или диска) относительно оси симметрии

$$J = mR^2; \quad J = \frac{1}{2} mR^2.$$

Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр шара,

$$J = \frac{2}{5} mR^2.$$

Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину,

$$J = \frac{1}{12} ml^2.$$

Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец,

$$J = \frac{1}{3} ml^2.$$

Теорема Штейнера

$$J = J_C + ma^2.$$

Кинетическая энергия вращающегося тела относительно неподвижной оси

$$T_{\text{вр}} = \frac{J_z \omega^2}{2}.$$

Момент силы относительно неподвижной точки

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}].$$

Момент силы относительно неподвижной оси

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}]_z.$$

Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки

$$\mathbf{L} = [\mathbf{rp}] = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}].$$

Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i = J_z \omega.$$

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$$M_z = J_z \varepsilon; \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

Закон сохранения момента импульса

$$\mathbf{L} = \text{const}.$$

Закон всемирного тяготения

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Сила тяжести

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}.$$

Напряженность поля тяготения

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}/m.$$

Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \frac{\Pi}{m} = -G \frac{M}{R}.$$

Взаимосвязь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью

$$\mathbf{g} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Уравнение неразрывности

$$Sv = \text{const}.$$

Уравнение Бернулли

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}.$$

Релятивистское замедление хода часов

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Релятивистское (лоренцево) сокращение длины стержня

$$l_0' = \frac{l}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Релятивистский закон сложения скоростей

$$u = \frac{u'+v}{1+vu'/c^2}; \quad u' = \frac{u-v}{1-vu/c^2}.$$

Масса релятивистской частицы

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Релятивистский импульс

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\mathbf{v}.$$

Закон взаимосвязи массы и энергии

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}.$$

### 2. Основы молекулярной физики и термодинамики

Закон Бойля—Мариотта

$$pV = \text{const} \quad \text{при} \quad T,\ m = \text{const}.$$

Законы Гей-Люссака

$$V = V_0(1+\alpha t) \quad \text{при} \quad p,\ m = \text{const},$$

$$p = p_0(1+\alpha t) \quad \text{при} \quad V,\ m = \text{const}.$$

Закон Дальтона

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n.$$

Уравнение Клапейрона—Менделеева для произвольной массы газа

$$pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT.$$

Основное уравнение молекулярно-кинетической энергии

$$p = \frac{1}{3}nm_0\langle v_{кв}\rangle^2.$$

Средняя квадратичная скорость молекулы

$$\langle v_{кв}\rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Средняя арифметическая скорость молекулы

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Наиболее вероятная скорость молекулы

$$v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Барометрическая формула

$$p = p_0e^{-Mgh/(RT)}.$$

Средняя длина свободного пробега молекул

$$\langle l\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle z\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 n}.$$

Среднее число столкновений молекулы за 1 с

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\,\pi d^2 n\,\langle v\rangle.$$

Закон теплопроводности Фурье

$$j_{(E)} = -\lambda\frac{dT}{dx}.$$

Теплопроводность (коэффициент)

$$\lambda = \frac{1}{3}c_V\rho\,\langle v\rangle\langle l\rangle.$$

Закон диффузии Фика

$$j_m = -D\frac{d\rho}{dx}.$$

Диффузия (коэффициент)

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle.$$

Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости)

$$j_{(p)} = -\eta\frac{dv}{dx}.$$

Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\,\langle v\rangle\langle l\rangle.$$

Средняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT.$$

Внутренняя энергия произвольной массы газа

$$U = \nu\frac{i}{2}RT = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT.$$

Первое начало термодинамики

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A.$$

Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме

$$C_V = \frac{i}{2} R.$$

Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении

$$C_p = \frac{i+2}{2} R.$$

Работа газа при изменении его объема

$$\delta A = p\,\mathrm{d}V.$$

Работа газа при изобарном расширении

$$A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1).$$

Работа газа при изотермическом расширении

$$A = Q = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} =$$

$$= \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Уравнения адиабатического процесса (уравнение Пуассона)

$$pV^{\gamma} = \text{const},$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const},$$

$$T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const}.$$

Работа газа при адиабатическом расширении

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) =$$

$$= \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Термический к. п. д. цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса для моля реального газа

$$\left( p + \frac{a}{V_m^2} \right)(V_m - b) = RT.$$

### 3. Электричество и электромагнетизм

Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2}.$$

Напряженность электростатического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_0.$$

Поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность $S$

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_S E_n\,\mathrm{d}S.$$

Принцип суперпозиции

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i.$$

Электрический момент диполя

$$\mathbf{p} = |Q|\,\mathbf{l}.$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

$$\oint_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_S E_n\,\mathrm{d}S =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\,\mathrm{d}V.$$

Объемная, поверхностная и линейная плотности заряда

$$\rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}; \quad \sigma = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S}; \quad \tau = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}.$$

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r \geqslant R),$$

$$E=0 \quad (r<R).$$

Напряженность поля, создаваемого объемно заряженным шаром,

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad (r\geqslant R),$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r' \quad (r'\leqslant R).$$

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным бесконечным цилиндром,

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau}{r} \quad (r\geqslant R),$$

$$E=0 \quad (r<R).$$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура $L$

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l}=\oint_L E_l\,dl=0.$$

Потенциал электростатического поля

$$\varphi=\frac{U}{Q_0}=\frac{A_\infty}{Q_0}.$$

Связь между потенциалом электростатического поля и его напряженностью

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi; \quad \mathbf{E}=-\nabla\varphi.$$

Поляризованность

$$\mathbf{P}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}_i}{V}.$$

Связь между векторами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$

$$\mathbf{P}=\varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}.$$

Связь между $\varepsilon$ и $\varkappa$

$$\varepsilon=1+\varkappa.$$

Связь между векторами электрического смещения и напряженностью электростатического поля

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}.$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

$$\oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S}=\oint_S D_n\,dS=\sum_{i=1}^{n}Q_i.$$

Электрическая емкость уединенного проводника

$$C=\frac{Q}{\varphi}.$$

Электрическая емкость шара

$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Электрическая емкость плоского конденсатора

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}.$$

Электрическая емкость цилиндрического конденсатора

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Электрическая емкость сферического конденсатора

$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{r_1r_2}{r_2-r_1}.$$

Электрическая емкость параллельно соединенных конденсаторов

$$C=\sum_{i=1}^{n}C_i.$$

Электрическая емкость последовательно соединенных конденсаторов

$$\frac{1}{C}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}.$$

Энергия заряженного уединенного проводника

$$W=\frac{C\varphi^2}{2}=\frac{Q\varphi}{2}=\frac{Q^2}{2C}.$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W=\frac{C(\Delta\varphi)^2}{2}=\frac{Q\Delta\varphi}{2}=\frac{Q^2}{2C}.$$

Объемная плотность энергии электростатического поля

$$w=\frac{W}{V}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}=\frac{ED}{2}.$$

Сила тока

$$I=\frac{dQ}{dt}.$$

Плотность тока

$$j=I/S.$$

Электродвижущая сила, действующая в цепи,

$$\mathscr{E} = A/Q_0; \quad \mathscr{E} = \oint \mathbf{E}_{ст}\, d\mathbf{l}.$$

Закон Ома для однородного участка цепи

$$I = U/R.$$

Закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}.$$

Мощность тока

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2R = U^2/R.$$

Закон Джоуля—Ленца

$$dQ = IU\, dt = I^2R\, dt = \frac{U^2}{R}\, dt.$$

Закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме

$$w = jE = \gamma E^2.$$

Закон Ома для неоднородного участка цепи (обобщенный закон Ома)

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}}{R}.$$

Правила Кирхгофа

$$\sum_k I_k = 0; \quad \sum_i I_i R_i = \sum_k \mathscr{E}_k.$$

Коэффициент вторичной электронной эмиссии

$$\delta = n_2/n_1.$$

Магнитный момент рамки с током

$$\mathbf{p}_m = I S \mathbf{n}.$$

Вращательный момент, действующий на рамку с током в магнитном поле,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}].$$

Связь между индукцией и напряженностью магнитного поля

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}.$$

Закон Био—Савара—Лапласа для элемента проводника с током

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I\,[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Магнитная индукция поля прямого тока

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R}.$$

Магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}.$$

Закон Ампера

$$d\mathbf{F} = I\,[d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

Магнитное поле свободно движущегося заряда

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q\,[\mathbf{vr}]}{r^3}.$$

Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = Q\,[\mathbf{vB}].$$

Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} = R \frac{IB}{d}.$$

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора $\mathbf{B}$)

$$\oint_L \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \oint_L B_l\, dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k.$$

Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме), имеющего $N$ витков,

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}.$$

Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) через произвольную поверхность

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = \int_S B_n\, dS.$$

Теорема Гаусса для поля с магнитной индукцией $\mathbf{B}$

$$\oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = \oint_S B_n\, dS = 0.$$

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$dA = I\, d\Phi.$$

Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$dA = I\, d\Phi'.$$

Закон Фарадея

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Э. д. с. самоиндукции

$$\mathscr{E}_s = -L\frac{dI}{dt}.$$

Индуктивность бесконечно длинного соленоида, имеющего $N$ витков,

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2S}{l}.$$

Ток при размыкании цепи

$$I = I_0 e^{-t/\tau}.$$

Ток при замыкании цепи

$$I = I_0(1 - e^{-t/\tau}).$$

Энергия магнитного поля, связанного с контуром,

$$W = LI^2/2.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

Намагниченность

$$\mathbf{J} = \frac{\sum \mathbf{p}_a}{V}.$$

Связь между векторами $\mathbf{J}$ и $\mathbf{H}$

$$\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}.$$

Связь между $\mu$ и $\chi$

$$\mu = 1 + \chi.$$

Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора $\mathbf{B}$)

$$\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \oint_L B_l\,dl = \mu_0(I + I').$$

Теорема о циркуляции вектора $\mathbf{H}$

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = I.$$

Плотность тока смещения

$$\mathbf{j}_{см} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

Полная система уравнений Максвелла:
в интегральной форме

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S};\quad \oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S} = \int_V \rho\,dV,$$

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)d\mathbf{S};\quad \oint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = 0,$$

в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};\quad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};\quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

### 4. Колебания и волны

Уравнение гармонического колебания

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi);\quad \omega_0 = 2\pi/T = 2\pi\nu.$$

Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний величины $s$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0.$$

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{J/(mgl)} = 2\pi\sqrt{L/g}.$$

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

Формула Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний величины $s$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0.$$

Логарифмический декремент затухания

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний величины $s$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = x_0\cos\omega t.$$

Индуктивное сопротивление

$$R_L = \omega L.$$

Емкостное сопротивление

$$R_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Длина волны

$$\lambda = vT.$$

Уравнение плоской волны

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Уравнение сферической волны

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0).$$

Фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Волновое уравнение

$$\Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Групповая скорость

$$u = \frac{d\omega}{dk}.$$

Уравнение стоячей волны

$$\xi = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t.$$

Эффект Доплера в акустике

$$\nu = \frac{(v \pm v_{пр})\,\nu_0}{v \mp v_{ист}}.$$

Вектор Умова—Пойнтинга

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}].$$

Скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

### 5. Оптика. Квантовая природа излучения

Закон отражения света

$$i_1' = i_1.$$

Закон преломления света

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21}.$$

Формула тонкой линзы

$$(N-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Поток излучения

$$\Phi_e = \frac{W}{t}.$$

Энергетическая светимость

$$R_e = \frac{\Phi_e}{S}.$$

Энергетическая сила света

$$I_e = \Phi_e/\omega.$$

Энергетическая яркость

$$B_e = \frac{\Delta I_e}{\Delta S}.$$

Показатель преломления среды

$$n = \frac{v}{c}.$$

Оптическая длина пути

$$L = ns.$$

Оптическая разность хода

$$\Delta = L_2 - L_1.$$

Условие интерференционных максимумов

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Условие интерференционных минимумов

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Оптическая разность хода в тонких пленках в отраженном свете

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

Радиусы зон Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}.$$

Условие дифракционных максимумов от одной щели

$$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Условие дифракционных минимумов от одной щели

$$a\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Условие главных максимумов дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Условие дополнительных минимумов дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = \pm\frac{m'\lambda}{N} \quad (m' \neq 0, N, 2N, \ldots).$$

Формула Вульфа—Брэггов

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Разрешающая способность спектрального прибора

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}.$$

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = mN.$$

Закон Бугера

$$I = I_0 e^{-\alpha x}.$$

Продольный эффект Доплера

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}}.$$

Поперечный эффект Доплера

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Степень поляризации

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha.$$

Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21}.$$

Оптическая разность хода в эффекте Керра

$$\Delta = l(n_o - n_e) = k_2 l E^2.$$

Угол вращения плоскости поляризации в кристаллах и растворах

$$\varphi = \alpha d; \quad \varphi = [\alpha] Cd.$$

Закон Кирхгофа для теплового излучения

$$r_{\nu, T} = \frac{R_{\nu, T}}{A_{\nu, T}}.$$

Энергетическая светимость черного тела

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu, T} \, d\nu.$$

Закон Стефана—Больцмана

$$R_e = \sigma T^4.$$

Закон смещения Вина

$$\lambda_{\max} = b/T.$$

Формула Рэлея—Джинса

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT.$$

Формула Планка

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}.$$

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{m v_{\max}^2}{2}.$$

Энергия фотона

$$\mathscr{E}_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Масса фотона

$$m_\gamma = \frac{\mathscr{E}_0}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Импульс фотона

$$p_\gamma = \frac{\mathscr{E}_0}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

Давление света при нормальном падении на поверхность

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho).$$

Изменение длины волны при эффекте Комптона

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

### 6. Элементы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел

Обобщенная формула Бальмера

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Первый постулат Бора

$$m_e v_n r_n = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Второй постулат Бора (правило частот)

$$h\nu = E_n - E_m.$$

Энергия электрона в водородоподобном атоме

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{Z^2 m_e e^4}{8\hbar^2 \varepsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Длина волны де Бройля

$$\lambda=\frac{h}{p}.$$

Соотношение неопределенностей

$$\begin{cases}\Delta x\Delta p_x\geqslant h,\\ \Delta y\Delta p_y\geqslant h,\\ \Delta z\Delta p_z\geqslant h,\end{cases}\quad \Delta E\Delta t\geqslant h.$$

Вероятность нахождения частицы в элементе объема $dV$

$$dW=|\Psi|^2\,dV.$$

Условие нормировки вероятностей

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Psi|^2\,dV=1.$$

Общее уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+U(x,y,z,t)\Psi=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta\psi+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0.$$

Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками»,

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x\quad(n=1,2,3,\ldots).$$

Собственные значения энергии частицы в «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками»

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\quad(n=1,2,3,\ldots).$$

Коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера

$$D=D_0\exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}l\right].$$

Энергия квантового осциллятора

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0.$$

Уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода

$$\Delta\psi+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi=0.$$

Нормированная волновая функция, отвечающая 1s-состоянию электрона в атоме водорода,

$$\psi_{100}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}.$$

Закон Мозли

$$\nu=R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right).$$

Распределение Бозе—Эйнштейна

$$\langle N_i\rangle=\frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)}-1}.$$

Распределение Ферми—Дирака

$$\langle N_i\rangle=\frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)}+1}.$$

Уровень Ферми в собственном полупроводнике

$$E_F=\frac{E_1+E_2}{2}=\frac{\Delta E}{2}.$$

Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma=\gamma_0 e^{-\Delta E/(2kT)}.$$

Правило Стокса для люминесцентного излучения

$$h\nu=h\nu_{\text{люм}}+\Delta E.$$

### 7. Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц

Радиус ядра

$$R=R_0A^{1/3}.$$

Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{\text{св}}=[Zm_p+(A-Z)m_n-m_{\text{я}}]c^2.$$

Дефект массы ядра

$$\Delta m=[Zm_p+(A-Z)m_n]-m_{\text{я}}.$$

Магнетон Бора

$$\mu_B=\frac{e\hbar}{2m_e}.$$

Ядерный магнетон

$$\mu_{\text{я}}=\frac{e\hbar}{2m_p}.$$

Закон радиоактивного распада

$$N=N_0e^{-\lambda t}.$$

Период полураспада

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Среднее время жизни радиоактивного ядра

$$\tau=\frac{1}{\lambda}.$$

Активность нуклида

$$A=\left|\frac{dN}{dt}\right|=\lambda N.$$

Правило смещения для $\alpha$-распада

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y+{}^{4}_{2}He.$$

Правило смещения для $\beta^-$-распада

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y+{}^{0}_{-1}e.$$

Правило смещения для $\beta^+$-распада

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y+{}^{0}_{+1}e.$$

Символическая запись ядерной реакции

$$X+a \rightarrow Y+b; \quad X\,(a, b)\,Y.$$

Аберрации (погрешности) оптических систем 266
— астигматизм 267
— дисторсия 267
— кома 266
— сферическая 266
— хроматическая 267
Автоколебания 231
Адиабата 95
Адроны 440, 445, 446
Активность нуклида 413
Акустоэлектроника 252
Акцепторы 392
Альфа-распад 414
Ампер (единица силы тока) 5, 155
Амплитуда вероятности 346
— волны 245
— колебаний гармонических 219
— — затухающих 230
Анализ гармонический 227
— люминесцентный 396
— минералогический 312
— рентгеноструктурный 295
— спектральный абсорбционный 303
Анализатор 308
Анастигматы 267
Анизотропия оптическая искусственная 314
Анизотропность 116
Аннигиляция 427
Антикварк 447
Антинейтрино 416, 438
Антинейтрон 441
Антипротон 441
Античастицы 441
Антиядра 443
Апланаты 267
Апохроматы 267
Атом водорода в квантовой механике 358
— — — теории Бора 338
Ахроматы 267

База 405
Барионы 446
Барн 425
Барьер потенциальный 27, 353
Беккерель (единица активности) 413
Бел 250
Бета-распад 415—417, 426
Бетатрон 186
Биения 226
Бипризма Френеля 277
Бозе-газ 378
Бозоны 363
Бридер 433
Бэр 419

Вакуум 85
Ватт (единица мощности) 22
Вебер (единица магнитного потока) 189
Вектор магнитной индукции 177
— магнитного момента рамки с током 177
— напряженности магнитного поля 178
— — электростатического поля 130
— перемещения 9
— плотности потока энергии 244
— — — — электромагнитной 257
— скорости мгновенной 9
— — средней 9
— Умова 244
— Умова — Пойнтинга 257
— ускорения 19
— электрического смещения 143
Векторы аксиальные (псевдовекторы) 12
Вероятность термодинамическая 98
Вес тела 43
Весы крутильные 42, 129
Вещества оптически активные 315
— лево- и правовращающие 315
— поверхностно - активные 113
Взаимодействие гравитационное 440
— обменное 369
— проводников с токами 180
— сильное 439
— слабое 439
— электромагнитное 439
Волна бегущая 244
— гармоническая 243
— де Бройля 342
— монохроматическая 274
— опорная 297
— плоская 244
— предметная 297
— стоячая 247
— сферическая 244
— упругая поперечная 243
— — продольная 243
— электромагнитная 243, 257
— —, поперечность 256
Волны звуковые (акустические) 249
— когерентные 247
— упругие (или механические) 243
— электромагнитные 217
Вольт (единица потенциала) 138
Восприимчивость вещества диэлектрическая 142, 301
— — магнитная 207
Вращение плоскости поляризации 315
— удельное 315
Время жизни радиоактивного ядра среднее 413
— когерентности 275
— реверберации 250
— релаксации 198, 230
Высотомер (альтиметр) 80
Высота звука 250
Выход энергетический 395
Вязкость 55
— динамическая 55
— кинематическая 56

Газ идеальный 73,
— реальный 74, 104
— ультраразреженный 85
Гамма-дефектоскопия 419
Гамма-излучение 417
Гармоники периодического колебания 227
Генератор 195
— оптический квантовый 373
— электростатический 148
Генри (единица индуктивности) 197
Герц (единица частоты) 220
Гидроаэромеханика 51
Гипероны 443
Гипотеза 5
— квантовая Планка 320
Гироскоп 37
Глюоны 449
Голограмма 297
Голография 296
Градиент скаляра 23
— скорости 55
Градус Цельсия 73
Граница красная фотоэффекта 325
Грей 419
Громкость звука 249
Группа пространственная 117

Давление 51
— внутреннее 105
— гидростатическое 52, 53, 115
— динамическое 53
— критическое 106
— молекулярное 112
— парциальное 75
— полное 53
— света 329
— статическое 53
Двигатель вечный первого рода 90
— — второго рода 100
— тепловой 96, 100
Движение апериодическое 231
— броуновское 82
— заряженной частицы в магнитном поле 183
— вращательное 8
— поступательное 8
— неравномерное 10
— — плоское 10
— — равномерное 10
Двойственность корпускулярно-волновая света 274
— — — частиц вещества 341
Декремент затухания 230
— — логарифмический 230
Детандер 111
Дефект массы 408
Дефекты в кристаллах 121
Дефектоскопия люминесцентная 396
— ультразвуковая 252
Деформация 38, 39
— относительная 39
— пластическая (остаточная) 39
— сдвига 40
— упругая 38
Децибел 250
Джоуль (единица работы, энергии) 22, 90
Диаграмма направленности излучения диполя 258
— напряжений 39
— состояния 125
Диамагнетики 205
Диамагнетизм 205
Диаметр молекулы эффективный 81
Динамика 7
Диод вакуумный 167
— полупроводниковый 404
— плоскостной 404
— точечный 404
Диоптрия 265
Диполь электрический 132, 258
Дислокации 121
Дисперсия аномальная и нормальная 300
— вещества 300
— волн 245
— света 299, 301
— ,электромагнитная теория 301
Диссипация (рассеяние) энергии 26
Дифракционная решетка одномерная 291
— — трехмерная (пространственная) 293
Дифракция на пространственной решетке 294
— рентгеновского излучения 294
— света 285
— Френеля на диске 289
— — на круглом отверстии 288
— Фраунгофера (в параллельных лучах) 290
Диффузия 84
Дихроизм 312
Диэлектрик изотропный 152
Диэлектрики 129, 140
Длина волны 244
— когерентности 275
— приведенная физического маятника 223
— пути 9
— пути оптическая 276
— свободного пробега молекул 81
— — — средняя 81
— тел в разных системах отсчета 65
Длительность событий 64
Добротность колебательной системы 230
Доза биологическая 419
— излучения поглощенная 419
— — экспозиционная 419
Домены 145, 211
Доноры 391
Дросселирование адиабатическое 109
Дроссель 109
Дуант 185
Дырка 388

Единица физической величины 5
— — — основная 5
— — — производная 5
Емкость электрическая 148
— — конденсатора 149
— — — плоского 150
— — — сферического 150
— — — цилиндрического 150
— — уединенного проводника 148
— — — шара 149

Жесткость 24, 222
Жидкость, свойства 111
— несжимаемая 51
— перегретая 107, 108
— переохлажденная 124
— сжимаемая 51
— сплошная 51

Зависимость сопротивления температурная 165
Закон Авогадро 75
— Амонтона — Кулона 17
— Ампера 181
— Архимеда 52
— Био — Савара — Лапласа 178
— Бойля — Мариотта 74

— Больцмана 89
— Брюстера 308
— Бугера 302
— Вавилова 395
— взаимосвязи массы и энергии 69
— Видемана — Франца 165
— всемирного тяготения 42
— Галилея обобщенный 43
— Гейгера — Нэттола 414
— Гей-Люссака 74
— Гука 39
— Дальтона 75
— движения центра масс 19
— Джоуля — Ленца 158, 159, 165
— динамики основной для неинерциальных систем отсчета 49
— для распределения молекул идеального газа по скоростям 78
— — — — — — — энергиям теплового движения 79
— Дюлонга и Пти 122
— инерции 14
— Кеплера первый 42
— — второй 42
— — третий 42
— Кирхгофа 318
— Кулона 129
— Малюса 307
— Мозли 369
— независимости световых пучков 261
— Ньютона (для внутреннего трения) 84
— первый 14
— — второй 15
— — третий 16
— тяготения 44
— Ома 164
— — для замкнутой цепи 159
— — — участка цепи 157, 159
— — обобщенный 159
— отражения света 261
— Паскаля 51
— полного тока для магнитного поля в вакууме 187
— — — — — в веществе 207
— постоянства углов 116
— преломления света 261
— прямолинейного распространения света 261
— радиоактивного распада 413
— релятивистской динамики основной 68
— — — релятивистский 65
— смещения Вина 319, 321
— сохранения заряда 128
— — барионного числа 446
— — лептонного числа 445
— — изоспина 440
— — импульса 19
— — момента импульса 35
— — странности 444
— — четности 444
— — энергии 25, 69
— — — механической 25
— Стефана — Больцмана 319
— Столетова 325
— трения скольжения 17, 18
— трех вторых 168
— Фарадея 194
— Фика 84
— Фурье 83
Законы физические 5
— Вольта 396, 397
Замедление хода времени релятивистское 64
Заряд атомного ядра 407
— электрический 128
— — точечный 129, 137
— — ядра атома 407
Заряды индуцированные 147
— связанные 142
Захват электронный 427
Защита электростатическая 148
Зеркала Френеля 277
Значение тока действующее (эффективное) 240
— напряжение действующее 240
— энергии дискретное 351
— — собственное 349
Зона активная 430
— диполя волновая 258
— энергетическая 386
— — валентная 386
— — запрещенная 386
— — проводимости 386
— — разрешенная 386
Зоны Френеля 286—288

Излучатель массовый 255
Излучение Вавилова — Черенкова (эффект) 304
— вынужденное (индуцированное) 372
— космическое вторичное 436
— — жесткое 437
— — мягкое 437
— — первичное 436
— лазерное 374, 375
— радиоактивное 412
— рентгеновское 367
— спонтанное 372
— тепловое (температурное) 317
— — равновесное 317
Изобара 74, 93
Изобары 408
Изображение стигматическое 264
Изомультиплеты 440
Изопроцессы 93
— изобарный 93
— изотермический 94
— изохорный 93
Изотерма 74, 94
— критическая 106
Изотермы Ван-дер-Ваальса 106
Изотопы 408
Изохора 74, 93
Импульс материальной точки 15
— релятивистский 68
— системы 18
— фотона 329, 332
Инверсия населенностей 373
Индуктивность взаимная 199
— контура 197
Индукция взаимная 199
— магнитная 177
— электростатическая 147
Инжекция 405
Интенсивность звука 249
Интерференция волн 247
— многолучевая 282
— света 276
Интерферометр 283
— лазерный 375
— Майкельсона 61, 283
Ионизатор 169
Ионизация атома 339
— ударная 171
Испарение (парообразование) 123
Испускание (излучение) самопроизвольное 412
Источник света пространственно-когерентный 275
— — тепловой 323
— тока 155

Камера Вильсона 423, 427
— диффузионная 423

— ионизационная импульсная 422
— — интегрирующая 422
— искровая 424
— пузырьковая 423
Кандела (единица силы света) 6, 268
Каоны (К-мезоны) 439
Капилляр 115
Капиллярность 115
Катодолюминесценция 172
Качество крыла 58
Квазиимпульс 381
Квант 274, 321
— энергии звуковой волны 381
Кварки 444
— истинные 447
Кельвин (единица температуры) 6
Килограмм 5
Кинематика 7
Когерентность 246, 276
— временна́я 275
— пространственная 275
Колебания 219
— механические 232
— электромагнитные 232
— гармонические 219
— затухающие 229
— колебательного контура свободные затухающие 231
— линейно поляризованные 228
— пружинного маятника свободные затухающие 230
— эллиптически поляризованные 227
— свободные 219
— циркулярно поляризованные 229
Количество вещества 76
— движения 15
— теплоты (теплота) 90
— — приведенное 97
Коллектор 169, 405
Кольца Ньютона 281
Компаунд-ядро 425
Комптон-эффект 418
Конверсия внутренняя 418
Конденсатор 149
— плоский 149
— сферический 149
— цилиндрический 149
Конденсация 123
Контур колебательный 224, 254
Концентрация молекул 76
Катодолюминесценция 395
Коэффициент восстановления 28
— вторичной электронной эмиссии 168
— диффузии 84
— затухания 229
— мощности 240
— поглощения 302
— полезного действия для кругового процесса 96
— — — цикла Карно 101
— прозрачности 354
— Пуассона 39
— размножения нейтронов 430
— сопротивления 157, 231
— трансформации 201
— трения скольжения 17
— упругости 24, 39, 222
Кривая дисперсии 300
— инверсии 110
— потенциальная 26
Кривые резонансные 234
— фазового равновесия 125
Кристаллофосфоры 395
Кристаллы 117
— атомные 118
— дихроичные 312
— двухосные 309
— ионные 118
— металлические 118
— молекулярные 119
— одноосные 309
— — отрицательные 310
— — положительные 310
Кристаллизация 123
Критерий Лоусона 435
— Рэлея 295
Кюри (единица активности нуклида) 413
Кулон (единица электрического заряда) 129

**Л**азер 373
— газовый 373
— жидкостный 373
— полупроводниковый 373
— твердотельный 373
Лептоны 440, 444
Ливень электронно-позитронно-фотонный 437
Линза 263
— конденсорная 270
— магнитная 269
— проекционная 270
— рассеивающая 263, 265
— собирающая 263, 265
— тонкая 263
— электронная 269
— электростатическая 269
Линии напряженности 44
— — электростатического поля 130
— магнитной индукции 177
— электрического смещения 143
Линия тока 52
Ловушки неохлаждаемые 86
— охлаждаемые 86
Луч необыкновенный 309
— обыкновенный 309
Лучепреломление двойное 309
Лучи каналовые (положительные) 172
— катодные 172
— параксиальные (приосевые) 264
Люкс (единица освещенности) 269
Люмен (единица светового потока) 268
Люминесценция 394
Люминофоры 394

**М**агнетон Бора 204
— ядерный 409
Магнит постоянный 210
Магнитострикция 211
Магнетик 205
Мазер 373
Максимум дифракционный 290
— интерференционный 247
Манометр 54
— радиометрический 87
Масса критическая 430
— молярная 76
— покоя 68
— тела 14
— фотона 329
— эффективная 389
— инертная 14
— гравитационная 14
Масс-спектрометр 408
Материал вязкий 40
— хрупкий 40
Машина Линде 110
— холодильная 96, 100
Маятник математический 223
— пружинный 222
— физический 222
МГД-генератор 175
Мезоны 438, 439, 446, 447
Мениск 115
Метод вакуумного сферического конденсатора 326

— вращающегося вектора амплитуды (векторных диаграмм) 220
— зон Френеля 286
— избирательного травления 121
— исследования статистический 72
— — термодинамический 72
— порошковых фигур 211
— Пуазейля 57
— Стокса 56
— Юнга 277
— ядерного магнитного резонанса 410
Метр 5
Механика 7
— квантовая 7, 346
— классическая 7
— релятивистская 7
Микроинтерферометр 283
Микроскоп поляризационный 312
— электронный 269
Минимум дифракционный 290
— — дополнительный 292
— —, условия 292
— интерференционный 290
Модель атома ядерная (планетарная) 335
— идеального газа 73
— кварковая 447
— ядра капельная 411
— — оболочечная 411
— — обобщенная 411
— — оптическая 411
Модуль Юнга 39
Молекулы неполярные 141
— полярные 141
Моль 6
Момент атома магнитный 362
— диполя электрический 132
— импульса электрона 359, 362
— — относительно неподвижной оси 35
— — твердого тела 35
— — относительно неподвижной точки 34
— — собственный механический (спин) 204
— инерции системы (тела) 31
— механический орбитальный 204
— магнитный 203, 409
— — собственный 204
— молекулы дипольный 141
— силы относительно неподвижной оси 33
— — — — точки 33
Монокристалл 116
Мост Уитстона 161
— — реохордный 161
Мощность 22
— дозы излучения 419
— — поглощенной 419
— — экспозиционной 419
— — тепловая удельная 158
Мультиплеты изотопические 440
Мюоны 438

Нагреватель 100
Намагниченность 206
Накачка 373
Направление тока запирающее (обратное) 403
— — запорное 401
— — пропускное 401
— — прямое 403
Напряжение 39
— задерживающее 325
— нормальное 39
— пробивное 150
— пробоя 171
— тангенциальное 39
— электрическое 156
Напряженность поля тяготения (гравитационного) 44
— — магнитного 178
— — электростатического 130
Напыление катодное 172
Насос вакуумный 85
— водоструйный 54
— диффузионный 85
Насосы тепловые 101
Насыщение магнитное 209
Натяжение поверхностное 113
Начало термодинамики второе 98
— — первое 90
— — третье 99
Невесомость 43
Нейтрино 416, 417
— мюонное 438
— таонное 445
— электронное 438
Нейтронография 295
Нейтроны 407, 428
— быстрые 428
— высокоэнергетичные 428
— деления 429
— запаздывающие 429
— очень холодные 428
— мгновенные 429
— медленные 428
— резонансные 428
— релятивистские 428
— тепловые 428
— ультрахолодные 428
— холодные 428
Неравенство Клаузиуса 97
Несмачивание полное 114
Ноль Кельвина 73
Носители тока 155
Нуклон 407
Ньютон (единица силы) 15

Обкладки конденсатора 149
Область слышимости 249
— текучести (область пластических деформаций) 40
Обогащение флотационное 114
Оболочки электронные в атоме 365
Образование электронно-позитронных пар 418
Объектив 270
Объем критический 106
— молярный 76
— удельный 73
— фазовый (объем элементарной ячейки) 377
Одновременность событий 64
Однородность времени 69
— пространства 19, 68
Ом (единица сопротивления) 157
Оператор Гамильтона (набла-оператор) 24
— Лапласа 245
Оптика 261
— волоконная 263
— геометрическая 263
— электронная 269
Опыт 5
— Ламмерт 82
— Лебедева 330
— Майкельсона — Морли 61
— Рикке 163
— Штерна 82
Опыты Резерфорда 334
— Франка и Герца 337
— Штерна и Герлаха 362
Освещенность 268
— энергетическая (облученность) 268
Осциллятор гармонический 222
— квантовый 356
Ось вращения 8
— инерции главная 36
— оптическая 307

— свободная (свободного вращения) 36
Отклонение статическое 234
Отношение гиромагнитное орбитальных моментов 204
— — спиновых моментов 204
— — ядерное 409
Отношения пространственно-временные 67
Отражение полное 262
Оценка средней длины свободного пробега электронов в металлах 166
Очарование 447

Пакет волновой 246
Пар насыщенный 107, 123
— пересыщенный 107
Парадокс часов (близнецов) 64
Парамагнетизм 206
Парамагнетики 205
Параметр вырождения 379
Параметры состояния системы термодинамические 73
— элементарной ячейки 117
Пары куперовские 383
Паскаль (единица давления) 51
Переход фазовый I рода 125
— — II рода 125
— электронно-дырочный (*p*-*n*-переход) 401, 403
Период вращения 12
— колебаний 219
— полураспада 413
Переход вынужденный (индуцированный) 372
Петля гистерезиса 210
Пирометр оптический 322
Пирометрия оптическая 322
Пироэлектрики 146
Плавление 123
Плазма 174
— высокотемпературная 174
— газоразрядная 174
—, дебаевский радиус экранирования 174
— изотермическая 174
— ионизованная 174
— неизотермическая 174
—, свойства 174
—, степень ионизации 174
Пластинка зонная 288
— в полволны 313
— — четверть волны 313
Плечо диполя 132
Плоскость главная кристалла 309
— поляризации 306
— фокальная 265
Плотность вероятности 347
— дислокаций 121
— линейная 136
— объемная 135
— —энергии электростатического поля 152
— — магнитного поля 202
— поверхностная 134
— потока импульса 84
— — массы 84
— теплового потока 83
— тока 155
— — поляризации 215
— — смещения 214
— — — в вакууме 215
— энергетической светимости и спектральная (излучательность) 317
— — — черного тела 318
Поверхность волновая 244
— разрыва 217
— эквипотенциальная 45, 139
Поглощение света (абсорбция) 302
Подоболочки 365
Позитрон 426
Позитроний 447
Показатель адиабаты 95
— преломления относительный 261
— — абсолютный 262
Поле вихревое 187
— магнитное 176
— — движущегося заряда 182
— — соленоида 188
— — тороида 188
— — кругового тока 179
— — прямого тока 179
— потенциальное 23, 137
— — электростатическое 136
— самосогласованное 385
— силовое 130
— тяготения (гравитационное) 44
— — однородное 44
— — центральное 44
— электромагнитное 217
— электростатическое 130
— — потенциальное 187
Поликристалл 116
Полимеры 124
Полосы интерференционные равного наклона 280
— — равной толщины 280
— поглощения света 302
Полупроводники 129
— дырочные (*p*-типа) 392
— собственные 388
— примесные 388
— электронные (*n*-типа) 391
Поляризатор 307, 308
Поляризация диэлектрика 141
— — электронная (деформационная) 141
— — ионная 141
— — ориентационная (дипольная) 141
Поляризованность 141
— остаточная 146
Поляриметрия (сахариметрия) 315
Полароиды 312
Порог болевого ощущения 249
Порог слышимости 249
Порядок в расположении частиц ближний 111
— — — дальний 111
— интерференционного максимума 247
— — минимума 247
Постоянная Авогадро 75, 83
— аддитивная 97
— Больцмана 76
— гравитационная 42
— магнитная 181
— молярная газовая 76
— дифракционной решетки 291
— Планка 321
— радиоактивного распада 413
— Ридберга 335
— Стефана — Больцмана 319
— Холла 186
— электрическая 129
Постулат Бора второй (правило частот) 337
— — первый (постулат стационарных состояний) 336
Потенциал поля тяготения 45
— — электростатического 138
— химический 378
Поток вектора напряженности 131
— — магнитной индукции (магнитный поток) 189
— световой 268
Потокосцепление 189
Правила Кирхгофа 160

— отбора 360
— смещения для альфа-распада 414
— — — бета-распада 414
Правило правого винта 12
— левой руки 180, 182
— Ленца 194
— сложения скоростей в классической механике 61
— Стокса 395
Предел пропорциональности 40
— текучести 40
— упругости 40
Прелесть 447
Преобразования Галилея 60, 63
— Лоренца 63
Преобразователь электронно-оптический 270
Прецессия 205
Приближение адиабатическое 385
Приемник излучения 268
— — селективный 268
Призма двоякопреломляющая 311
— Николя (николь) 311
— поляризационная 311
Примесь внедрения 121
— замещения 121
Принцип автофазировки 185
— возрастания энтропии 98
— Гюйгенса 272, 285, 305
— Гюйгенса — Френеля 286
— детального равновесия 372
— инвариантности скорости света (постулаты Эйнштейна) 62
— независимости действия сил 16
— неразличимости тождественных частиц 363
— относительности Галилея 62
— — механический 60
— — Эйнштейна 218
— Паули 364
— причинности 349
— соответствия 63
— — Бора 352, 353
— суперпозиции (наложения) волн 246, 347
— — полей магнитных 179
— — — электромагнитных 179
— — — электростатических 131
— Ферма 264
— эквивалентности гравитационных сил и сил инерции (Эйнштейна) 49
Природа света 274
Пробой 150
Проводимость контактного слоя односторонняя 401
— полупроводника примесная 390
— — — дырочная (*p*-типа) 392
— — — электронная (*n*-типа) 388, 391
— — собственная 388
— *p-n*-перехода односторонняя (вентильная) 403
— электрическая 157
— — удельная 157
Проводник уединенный 148
Проводники первого рода 128
— второго рода 129
Проницаемость среды диэлектрическая 143
— — магнитная 178
Пространство катодное темное 172
— фазовое 377
— фарадеево темное 172
Просветление оптики 281
Протон 128, 407
Процесс волновой (волна) 243
— адиабатический 94
— изобарный 74
— изохорный 74
— изотермический 74
— изоэнтропийный 98
— круговой (цикл) 96
— политропный 95
— рекомбинации 170
— термодинамический 73
— — необратимый 96
— — обратимый 96
— электронно-позитронно-фотонный (каскадный) 437
Процессы апериодические 231
— периодические 219
— равновесные 91
Псевдовекторы 12
Пси-функция 346
Пучность стоячей волны 248
Пьезоэлектрики 146
Пьезоэффект обратный 146
— прямой 146

Работа выхода электрона из металла 166
— силы 21
— — элементарная 22
Равновесие динамическое 123
— неустойчивое 27
— устойчивое 27
— термодинамическое 73
Радиан 6
Радиоактивность 412
— естественная 412
— искусственная 412
Радиолюминесценция 395
Радиус боровский первый 338
— когерентности (длина пространственной когерентности) 275
— молекулярного действия 111
Радиус-вектор точки 8
Радиус ядра 408
Размерность физической величины 6
— угловой скорости 12
Размеры активной зоны критические 430
Разность потенциалов 138
— — контактная 396
— — — внешняя 397
— — — внутренняя 397
— хода волн 247
— — оптическая 276
Разряд газовый 170
— — несамостоятельный 171
— — самостоятельный 171
— — — дуговой 173
— — — искровой 172
— — — коронный 173
— — — тлеющий 171
Распад радиоактивный 413
Распределение Бозе — Эйнштейна 378
— Гиббса 378
— Ферми — Дирака 379
Рассеяние света в мутной среде 293
— — молекулярное 293
— частиц 425
Расстояние линзы фокусное 265
Расширение адиабатическое 95
— изотермическое 95
Реактор ядерный 431
— — гетерогенный 432
— — гомогенный 432
— — на тепловых и быстрых нейтронах 432
Реакторы-размножители 432
Реакции термоядерные 434
— ядерные 425

— —, классификация 424—426
— — экзотермические 425
— — эндотермические 425
Реакция деления 429
— — развивающаяся 431
— — самоподдерживающаяся 431
— — цепная 430
— — — неуправляемая 431
— — — управляемая 431
— синтеза атомных ядер 433
Реверберация звука 250
Резонанс 440
— механический 234
— напряжений 239
— токов 240
— электрический 234
Резонатор оптический 373
Рекомбинация 390
Рентген (единица экспозиционной дозы) 419
Рентгенолюминесценция 395
Рефрактометр 263, 283
Решетка гексагональная 119
— дифракционная 291
— — одномерная 291
— — двумерная 293
— — трехмерная (пространственная) 293
— кристаллическая 116, 382
— пространственная (Бравэ) 117
Ряд Вольта 396
— радиоактивных превращений 414

Самоиндукция 197
Сверхпроводимость 158, 383
Сверхтекучесть 125
Свет естественный 306
— линейно поляризованный 306
— циркулярно поляризованный 306
— частично поляризованный 306
— эллиптически поляризованный 306
Светимость энергетическая (излучательность) 268
— — интегральная 317
— — черного тела 319
Световоды (светопроводы) 263
Светофильтр 303
Свечение катодное 172
— тлеющее 172
Свойство взаимозаменяемости 223
Связь ионная 118, 369
— ковалентная 118, 369
Сдвиг абсолютный 40
Сегнетоэлектрики 145
Секунда 5
Семейства радиоактивные 414
Серия Бальмера 336, 340
— Брекета 336, 340
— Лаймана 336, 339
— Пашена 336, 340
— Пфунда 336, 340
— Хэмфри 336, 340
Сетки дислокаций 121
— плоские 121
— пространственные 121
Сжижение газа 110
Сила 15
— внутреннего трения 55
— выталкивающая 52
— гравитационная (всемирного тяготения) 42
— диссипативная 23
— инерции 46
— консервативная 23
— — кориолисова 48
— — коэрцитивная 146, 210
— — центробежная 48
— кулоновская 129
— линзы оптическая 265
— — отрицательная 265
— — положительная 265
— Лоренца 183
— механическая (пондеромоторная) 152
— нормальная 16
— натяжения 112
— поверхностного натяжения 112, 113
— подъемная 58
— равнодействующая (результирующая) 16
— реактивная 20
— света энергетическая (сила излучения) 268
— тангенциальная 16
— тока 155
— трения 17
— — качения 18
— тяжести 43
— упругости 24
— электродвижущая 156
— — электромагнитной индукции 194
Силы Ван-дер-Ваальса 119
— внешние 18
— внутренние 18
— гироскопические 38
— кулоновские 129
— межмолекулярного взаимодействия 108
— обменные 212
— отталкивания 104
— притяжения 104
— сторонние 155
— электростатические 136
— ядерные 410
Симметрия кристаллической решетки 117
Синхротрон 185
Синхрофазотрон 185
Система водородоподобная 338
— вырожденная 379
— декартова 8
— диссипативная 25
— единиц 5
— консервативная 25
— кристаллографическая 117
— линейная 229
— механическая 18
— — замкнутая (изолированная) 18
— отсчета 8, 46
— — инерциальная 14
— — неинерциальная 46
— термодинамическая 73
— элементов Периодическая 334, 365
Система гелиоцентрическая 42
— птолемеева геоцентрическая 42
— накачки 373
Скачок потенциала поверхностный 166
Скин-эффект (поверхностный эффект) 197
Скорость волн групповая 246, 342
— — фазовая 245, 342
— космическая первая (круговая) 46
— — вторая (параболическая) 46
— — третья 46
— наиболее вероятная 79
— обтекания 58
— средняя квадратичная 77
— средняя молекул 79
— точки 9
— — мгновенная 9
— — средняя 9, 10
— угловая 12

Сложение гармонических колебаний взаимно перпендикулярных 227
— — — одного направления 225
Слой контактный запирающий 400
— — пропускной 401, 403
Смачивание 113
Смерть Вселенной тепловая 99
Смещение красное 304
— фиолетовое 304
— электрическое 143
Соединение конденсаторов 150
Сокращение лоренцево 65
Соленоид 187
Соотношения неопределенностей Гейзенберга 343
Сопротивление лобовое 58
— полное 238
— реактивное 236, 237
— — емкостное 237
— — индуктивное 236
— электрическое критическое 157
— — удельное 157
Состояние критическое 106
— метастабильное 107
Состояние системы с инверсией населенностей 373
— — энергетическое 339
— электрона в атоме водорода 361
Сосуд Дьюара 86
Соударения молекул абсолютно упругие 76
Спектр акустический 250
— — линейчатый 250
— — сплошной 250
Спектр 360
— атома водорода 335
— дискретный 349
— дифракционный 291
— молекулярный 370
— — колебательный 370
— — колебательно-вращательный 370
— — электронно-колебательный 370
— — электронный 370
— — — поглощения 340
— линейчатый 302
— сплошной 302, 349
— призматический 300
— рентгеновский 367
— — характеристический 368
— тормозной 367
— энергетический 350
— — зонный 385
Спектрограф призменный 300
Спектроскопия интерференционная 281
— рентгеновская 295
Спин изотопический 440
— электрона 362
— ядра атома 409
Спиральность 442
Способность поглощательная 323
— разрешающая дифракционной решетки 296
— — объектива 295
— — спектрального прибора 296
— — спектральная поглощательная 318
Спутники стоксовы 371
— антистоксовы 371
Среда активная 373
— диспергирующая 245
— сплошная 243
Статика 7
Статистика квантовая 377
— — Бозе — Эйнштейна 378
— — Ферми — Дирака 378
Степень ионизации плазмы 174
— поляризации 308
— свободы колебательного движения 89, 122
Стерадиан 6
Столб ионизованного газа 172
Стопа 309
Странность 443
Стримеры 173
Сублимация (возгонка) 123
Сфера молекулярного действия 111
Сцинтилляции 421
Счетчик газоразрядный 422
— — Гейгера — Мюллера 422
— — пропорциональный 422
— полупроводниковый 423
— сцинтилляционный 421
— черенковский 422

Тело абсолютно твердое 8, 116
— аморфное 124
— неупругое 28
— отсчета 8
— серое 318
— упругое 28
— черное 318
Тембр звука 250
Температура 72
— вырождения 379
— Дебая характеристическая 381
— инверсии 110
— критическая 106
— радиационная 322
— термодинамическая 78, 157
— цветовая 322
— яркостная 323
Теорема Гаусса 134, 144
— — для магнитного поля 189
— — — электростатического поля в вакууме 134
— — — — — — диэлектрика 143
— Карно 100
— Нернста — Планка 99
— о циркуляции вектора магнитной индукции 187
— — — — напряженности магнитного поля 208
— — — — — электростатического поля 137
— Штейнера 32
Теория близкодействия 131
— Бора 340
— дальнодействия 131
— жидкости 111
— Максвелла электромагнитная 330
— относительности общая 49, 67
— — специальная (релятивистская) 7, 61
— проводимости 163
— релятивистская 62
— света 272
— — волновая 272
— — корпускулярная 272
— электромагнитная 273
— — электронная 273
— твердых тел зонная 385
Теория электропроводности металлов квантовая 382
— теплоемкости квантовая 380
Теплоемкость 91
— металлов 166
— молярная 91, 122
— удельная 91
Теплопроводность 83
Теплота плавления удельная 123
— фазового перехода 125

Термобатарея (термостолбики) 399
Термодинамика 72
Термистор 158
Термометр сопротивления 158
Термостат 100
Термоэлементы 398
Тесла (единица магнитной индукции) 181
Течение 52
— ламинарное (слоистое) 56
— турбулентное (вихревое) 56
— установившееся (стационарное) 52
Ток индукционный 193
— квазистационарный 235
— конвекционный 155
— насыщения 168
— переменный 235
— постоянный 155
— проводимости 154
— смещения 214
— термоэлектрический 398
— электрический 154
Токи вихревые (Фуко) 196
Тороид 188
Точка критическая 106
— Кюри 145, 210, 212
— материальная 8
— тройная 73, 126
Точки реперные 73
Траектория 9
Трансформатор 200
— автотрансформатор 201
— повышающий 201
— понижающий 201
Трение граничное 17
— гидродинамическое 17
— верчения 17
— внешнее 17
— внутреннее 17, 84
— качения 17
— покоя 17
— скольжения 17
Триболюминесценция 395
Триод полупроводниковый (транзистор) 405
— — плоскостной 405
— — точечный 405
Турбодетандер 111
Трубка Пито — Прандтля 54
— тока 52

Увеличение линзы 266
Угол атаки 58
— Брюстера 308
— краевой 114
— предельный 262
— скольжения 294
Удар (соударение) 27
— абсолютно неупругий 29
— — упругий 28
— центральный 28
Узел стоячей волны 248
— электрической цепи 160
Узлы кристаллической решетки 116, 122
Ультразвук 252
Умножитель фотоэлектронный 169, 328
Упаковка шаров 119
— двухслойная 120
— плотная 119
— трехслойная 120
Уравнение адиабаты 96
— Бернулли 53
— Ван-дер-Ваальса 105
— волновое 245, 348
— волны бегущей 244
— — стоячей 248
— движения материальной точки 15
— — тела переменной массы 20
— изобары 96
— изотермы 96
— изохоры 96
— Клапейрона 76
— Клапейрона — Менделеева 76
— Клапейрона — Клаузиуса 126
— колебаний гармонических 220
— вынужденных 232
— — свободных затухающих 229
— Майера 92
— Максвелла для электромагнитного поля 216, 217
— неразрывности 52
— основное молекулярно-кинетической теории идеальных газов 77
— Пуассона 95
— состояния 75
— — идеального газа 76
— Шредингера 348
— Эйнштейна для внешнего фоэтоэффекта 326
Уравнения движения точки кинематические 8
Уровень громкости 250
— интенсивности звука 250
— энергетический основной 339
— — возбужденный 339
Уровни акцепторные 392
— энергетические 358, 359
— — возбужденные 358
— — донорные 391
— — основные 358
— — примесные 391
— энергии 351
Ускорение 10
— мгновенное 10
—, нормальная составляющая 11
— полное 11
— среднее 10
—, тангенциальная составляющая 10
— угловое 12
— центростремительное 11
ускорители заряженных частиц 184
— — — индукционные 184
— — — импульсные 184
— — — линейные 184
— — — — резонансные 184
— — — непрерывные 184
— — — циклические 184
Условие интерференционного максимума 276
— — минимума 276
— нормировки вероятностей 347
Установка Штерна 82
Участок цепи неоднородный 159

Фаза (в термодинамике) 124
— волны плоской 245
— колебаний 219
— — начальная 245
Фазотрон 185
Фарад (единица электрической емкости) 149
Ферми-газ 378
Фермионы 363
Ферриты 212
Ферромагнетики 209, 210
Фигуры Лиссажу 229
Физика молекулярная 72
— квантовая 321
Флуоресценция 395
Фокус линзы 265
Фон 250
Фононы 381
Формула барометрическая 80
— Бальмера обобщенная 336
— Вульфа — Брэггов 294

— де Бройля 341
— Лапласа 115
— Лоренца 183
— Планка 321
— Ричардсона — Дэшмана 168
— Рэлея — Джинса 320
— Томсона 225
— Торричелли 55
— Френеля 309
— Циолковского 20
Фосфоресценция 395
Фотолюминесценция 395
Фотометрия 267
Фотон 274, 326, 329, 440, 444
Фотопроводимость 324
— полупроводников 393
— примесная 393
— собственная 393
Фотоэлемент 328
— вакуумный 328
— вентильный 328, 329
— полупроводниковый 328
Фотоэмульсии ядерные 424
Фотоэффект 324, 418
—, безынерционность 325
— вентильный 324
— внешний 324
— внутренний 324
— многофотонный 327
— ядерный 419
Фронт волновой 244
Функция волновая 346
— — антисимметричная 363
— — симметричная 363
— Кирхгофа 318
— распределения Максвелла 78
— — Больцмана 81
— — молекул по скоростям 78
— — — по энергиям теплового движения 79

Характеристика вольт-амперная 167
— — фотоэффекта 324
Хемилюминесценция 395
Холодильник 100

Цвет 447
Центр захвата 396
— качания физического маятника 223
— кристаллизации 124
— линзы оптический 264
— масс (инерции) системы 19
Цепь переменного тока 237
Цикл обратный 96
— прямой 96
— Карно обратный 101
— — прямой 101
— термоядерной реакции 434
— — — протонно-протонный 434
— — — углеродно-азотный 434
Циклотрон 184
Циркуляция вектора магнитной индукции 186
— — напряженности электростатического поля 137
— — — поля сторонних сил 156
Цуг волновой 275

Чармоний 447
Частицы истинно нейтральные 442
— тождественные 363
— элементарные, классификация 444
Частота вращения 12
— колебаний 220
— контура собственная 225
— резонансная 234, 238
— собственная 229
Четность 444
Числа заполнения 378
Число барионное 445
— волновое 245
— зарядовое ядра 407
— квантовое 351, 359
— — главное 339, 359
— — магнитное 359
— — — орбитальное 359
— — спиновое ядерное 409
— координационное 119
— лептонное 445
— Лошмидта 76
— Рейнольдса 56
— столкновений среднее 81
— степеней свободы молекул 88
— — — точки 9

Ширина интерференционной полосы 278
— энергетического уровня естественная 419
Шкала температурная 73
— — международная практическая 73
— — термодинамическая 73

Экситоны 394
Экстратоки самоиндукции 198
Электреты 146
Электризация тел 128
Электродинамика 154
Электродвигатель 196
Электролюминесценция 395
Электрон 128, 334
Электрон-вольт 167
Электронография 295
Эмиссия автоэлектронная 169
— термоэлектронная 167
— фотоэлектронная 168
— электронная 167
Эмиттер 169, 405
Энергия 21
— активации 389, 430
— внутренняя 88
— заряженного конденсатора 152
— — уединенного проводника 151
— ионизации 170
— кинетическая 22
— — гармонических колебаний 221
— механическая 21
— — полная 24
— нулевых колебаний 356
— поверхностная 112
— покоя 69
— полная 221
— поля магнитного 201
— — электростатического 152
— потенциальная 23, 221
— — гармонических колебаний 221
— — молекулярного взаимодействия 103
— — упругодеформированного тела 24
— — ядра 408
— связи системы 70
— системы неподвижных точечных зарядов 151
— удельная 408
— Ферми 380
— электромагнитных волн 21
Энтальпия 109
Энтропия 97
Эффект гироскопический 38
— Джозефсона 384
— — нестационарный 384
— — стационарный 384
— Джоуля — Томсона 109
— диамагнитный 205
— Доплера в акустике 251, 303
— — для электромагнитных волн 303
— — поперечный 304

— — продольный 304
— Зеемана 359
— Керра 314
— Комптона 330
— Мейсснера 383
— Мёссбауэра 420
— парамагнитный 206
— радиометрический 87
— релятивистский 61
— туннельный 354
— Фарадея 315
— Холла 186
— Штарка 359

Явление Зеебека 398
— Пельтье 399
— Томсона 399
— электромагнитной индукции 193
Явления переноса 83
— гистерезиса электрического 146
— — магнитного 210
Ядро атома дочернее 413
— — материнское 413
Яма потенциальная 27
Яркость энергетическая 268
Ячейка Керра 314
— элементарная 117

# Оглавление


Предисловие . . . . . 3

Введение . . . . . 4
Предмет физики и ее связь с другими науками . . . . . 4
Единицы физических величин . . . . 5

## 1
## Физические основы механики

*Глава 1. Элементы кинематики* . . . . 8

§ 1. Модели в механике. Система отсчета. Траектория, длина пути, вектор перемещения . . . . . 8
§ 2. Скорость . . . . . 9
§ 3. Ускорение и его составляющие . . 10
§ 4. Угловая скорость и угловое ускорение . . . . . 12
Контрольные вопросы . . . . . 13
Задачи . . . . . 13

*Глава 2. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела* . . . . . 14

§ 5. Первый закон Ньютона. Масса. Сила . . . . . 14
§ 6. Второй закон Ньютона . . . . . 15
§ 7. Третий закон Ньютона . . . . . 16
§ 8. Силы трения . . . . . 16
§ 9. Закон сохранения импульса. Центр масс . . . . . 18
§ 10. Уравнение движения тела переменной массы . . . . . 19
Контрольные вопросы . . . . . 20
Задачи . . . . . 21

*Глава 3. Работа и энергия* . . . . . 21

§ 11. Энергия, работа, мощность . . . 21
§ 12. Кинетическая и потенциальная энергии . . . . . 22
§ 13. Закон сохранения энергии . . . . 24
§ 14. Графическое представление энергии . . . . . 26
§ 15. Удар абсолютно упругих и неупругих тел . . . . . 27
Контрольные вопросы . . . . . 30
Задачи . . . . . 31

*Глава 4. Механика твердого тела* . . . 31

§ 16. Момент инерции . . . . . 31
§ 17. Кинетическая энергия вращения 32
§ 18. Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела . . . . . 33
§ 19. Момент импульса и закон его сохранения . . . . . 34
§ 20. Свободные оси. Гироскоп . . . . 36
§ 21. Деформации твердого тела . . . 38
Контрольные вопросы . . . . . 41
Задачи . . . . . 41

*Глава 5. Тяготение. Элементы теории поля* . . . . . 42

§ 22. Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения . . . . . 42
§ 23. Сила тяжести и вес. Невесомость 43
§ 24. Поле тяготения и его напряженность . . . . . 44
§ 25. Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения . . . . . 44
§ 26. Космические скорости . . . . . 46
§ 27. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции . . . . . 46
Контрольные вопросы . . . . . 50
Задачи . . . . . 50

*Глава 6. Элементы механики жидкостей* 51

§ 28. Давление в жидкости и газе . . . 51
§ 29. Уравнение неразрывности . . . . 52
§ 30. Уравнение Бернулли и следствия из него . . . . . 52
§ 31. Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей . . . . . 55
§ 32. Методы определения вязкости 56
§ 33. Движение тел в жидкостях и газах 57
Контрольные вопросы . . . . . 59
Задачи . . . . . 59

*Глава 7. Элементы специальной (частной) теории относительности* . . . . . 60

§ 34. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности 60
§ 35. Постулаты специальной (частной) теории относительности . . . . 61
§ 36. Преобразования Лоренца . . . . 62
§ 37. Следствия из преобразований Лоренца . . . . . 63

§ 38. Интервал между событиями . . . 66
§ 39. Основной закон релятивистской динамики материальной точки . . . 67
§ 40. Закон взаимосвязи массы и энергии . . . . . 68
Контрольные вопросы . . . . . 71
Задачи . . . . . 71

## 2

## Основы молекулярной физики и термодинамики

*Глава 8. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов* . . . . . 73

§ 41. Опытные законы идеального газа . . . . . 73
§ 42. Уравнение Клапейрона — Менделеева . . . . . 75
§ 43. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов . . . . . 76
§ 44. Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения . . . . . 78
§ 45. Барометрическая формула. Распределение Больцмана . . . . . 80
§ 46. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул . . . . . 81
§ 47. Опытное обоснование молекулярно-кинетической теории . . . . 82
§ 48. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах 83
§ 49. Вакуум и методы его получения. Свойства ультраразреженных газов . . . . . 85
Контрольные вопросы . . . . . 87
Задачи . . . . . 88

*Глава 9. Основы термодинамики* . . . 88

§ 50. Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул . . . . . 88
§ 51. Первое начало термодинамики 89
§ 52. Работа газа при изменении его объема . . . . . 90
§ 53. Теплоемкость . . . . . 91
§ 54. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам . . . . 93
§ 55. Адиабатический процесс. Политропный процесс . . . . . 94
§ 56. Круговой процесс (цикл). Обратимые и необратимые процессы . . . 96
§ 57. Энтропия, ее статистическое толкование и связь с термодинамической вероятностью . . . . . 97
§ 58. Второе начало термодинамики 98
§ 59. Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно и его к. п. д. для идеального газа . . . 100
Контрольные вопросы . . . . . 102
Задачи . . . . . 103

*Глава 10. Реальные газы, жидкости и твердые тела* . . . . . 103

§ 60. Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия 103
§ 61. Уравнение Ван-дер-Ваальса . . . 105
§ 62. Изотермы Ван-дер-Ваальса и их анализ . . . . . 106
§ 63. Внутренняя энергия реального газа . . . . . 108
§ 64. Эффект Джоуля — Томсона . . . 108
§ 65. Сжижение газов . . . . . 110
§ 66. Свойства жидкостей. Поверхностное натяжение . . . . . 111
§ 67. Смачивание . . . . . 113
§ 68. Давление под искривленной поверхностью жидкости . . . . . 114
§ 69. Капиллярные явления . . . . . 115
§ 70. Твердые тела. Моно- и поликристаллы . . . . . 116
§ 71. Типы кристаллических твердых тел . . . . . 117
§ 72. Дефекты в кристаллах . . . . 121
§ 73. Теплоемкость твердых тел . . . 122
§ 74. Испарение, сублимация, плавление и кристаллизация. Аморфные тела 123
§ 75. Фазовые переходы I и II рода 124
§ 76. Диаграмма состояния. Тройная точка . . . . . 125
Контрольные вопросы . . . . . 127
Задачи . . . . . 127

## 3

## Электричество и электромагнетизм

*Глава 11. Электростатика* . . . . . 128

§ 77. Закон сохранения электрического заряда . . . . . 128
§ 78. Закон Кулона . . . . . .
§ 79. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля . . . . . 130
§ 80. Принцип суперпозиции электростатических полей. Поле диполя 131
§ 81. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме . . . . 133
§ 82. Применение теоремы Гаусса к расчету некоторых электростатических полей в вакууме . . . . . 134
§ 83. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля . . 136
§ 84. Потенциал электростатического поля . . . . . 137

§ 85. Напряженность как градиент потенциала. Эквипотенциальные поверхности . . . . . 138
§ 86. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля . . . . 139
§ 87. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков . . . . . 140
§ 88. Поляризованность. Напряженность поля в диэлектрике . . . . 141
§ 89. Электрическое смещение. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике . . . . . 143
§ 90. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред . . . . . 144
§ 91. Сегнетоэлектрики . . . . . 145
§ 92. Проводники в электростатическом поле . . . . . 146
§ 93. Электрическая емкость уединенного проводника . . . . . 148
§ 94. Конденсаторы . . . . . 149
§ 95. Энергия системы зарядов, заряженного уединенного проводника и заряженного конденсатора. Энергия электростатического поля 151
Контрольные вопросы . . . . . 153
Задачи . . . . . 153

*Глава 12. Постоянный электрический ток* . . . . . 154
§ 96. Электрический ток, сила и плотность тока . . . . . 154
§ 97. Сторонние силы. Электродвижущая сила и напряжение . . . 155
§ 98. Закон Ома. Сопротивление проводников . . . . . 156
§ 99. Работа и мощность тока. Закон Джоуля—Ленца . . . . . 158
§ 100. Закон Ома для неоднородного участка цепи . . . . . 159
§ 101. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей . . . . . 160
Контрольные вопросы . . . . . 162
Задачи . . . . . 162

*Глава 13. Электрические токи в металлах, вакууме и газах* . . . . . 163
§ 102. Элементарная классическая теория электропроводности металлов 163
§ 103. Вывод основных законов электрического тока из классической теории электропроводности металлов 164
§ 104. Работа выхода электронов из металла . . . . . 166
§ 105. Эмиссионные явления и их применение . . . . . 167
§ 106. Ионизация газов. Несамостоятельный газовый разряд . . . . . 169
§ 107. Самостоятельный газовый разряд и его типы . . . . . 171
§ 108. Плазма и ее свойства . . . . . 174
Контрольные вопросы . . . . . 175
Задачи . . . . . 176

*Глава 14. Магнитное поле* . . . . . 176
§ 109. Магнитное поле и его характеристики . . . . . 176
§ 110. Закон Био—Савара—Лапласа и его применение к расчету магнитного поля . . . . . 178
§ 111. Закон Ампера. Взаимодействие параллельных токов . . . . . 180
§ 112. Магнитная постоянная. Единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля . . . . 181
§ 113. Магнитное поле движущегося заряда . . . . . 181
§ 114. Действие магнитного поля на движущийся заряд . . . . . 182
§ 115. Движение заряженных частиц в магнитном поле . . . . . 183
§ 116. Ускорители заряженных частиц 184
§ 117. Эффект Холла . . . . . 186
§ 118. Циркуляция вектора **B** для магнитного поля в вакууме . . . . 186
§ 119. Магнитное поле соленоида и тороида . . . . . 187
§ 120. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для поля **B** 189
§ 121. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле . . . . . 189
Контрольные вопросы . . . . . 191
Задачи . . . . . 191

*Глава 15. Электромагнитная индукция* 193
§ 122. Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея) . . . . 193
§ 123. Закон Фарадея и его вывод из закона сохранения энергии . . . 193
§ 124. Вращение рамки в магнитном поле . . . . . 195
§ 125. Вихревые токи (токи Фуко) . . . 196
§ 126. Индуктивность контура. Самоиндукция . . . . . 197
§ 127. Токи при размыкании и замыкании цепи . . . . . 198
§ 128. Взаимная индукция . . . . . 199
§ 129. Трансформаторы . . . . . 200
§ 130. Энергия магнитного поля . . . 201
Контрольные вопросы . . . . . 202
Задачи . . . . . 203

*Глава 16. Магнитные свойства вещества* 203
§ 131. Магнитные моменты электронов и атомов . . . . . 203
§ 132. Диа- и парамагнетизм . . . . 205
§ 133. Намагниченность. Магнитное поле в веществе . . . . . 206
§ 134. Условия на границе раздела двух магнетиков . . . . . 208
§ 135. Ферромагнетики и их свойства 209
§ 136. Природа ферромагнетизма . . . 211
Контрольные вопросы . . . . . 212
Задачи . . . . . 213

*Глава 17. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля* . . . . . 213
§ 137. Вихревое электрическое поле . . 213
§ 138. Ток смещения . . . . . 214
§ 139. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля . . . . . 216
Контрольные вопросы . . . . . 218

# 4
# Колебания и волны

*Глава 18. Механические и электромагнитные колебания* . . . . . 219
§ 140. Гармонические колебания и их характеристики . . . . . 219
§ 141. Механические гармонические колебания . . . . . 221
§ 142. Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники . . . . . 222
§ 143. Свободные гармонические колебания в колебательном контуре 223
§ 144. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения . . . . 225
§ 145. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний . . . . . 227
§ 146. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний (механических и электромагнитных) и его решение. Автоколебания 229
§ 147. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (механических и электромагнитных) и его решение . . . . . 232
§ 148. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний (механических и электромагнитных). Резонанс . . . 234
§ 149. Переменный ток . . . . . 235
§ 150. Резонанс напряжений . . . . . 238
§ 151. Резонанс токов . . . . . 239
§ 152. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока . . . . . 240
Контрольные вопросы . . . . . 241
Задачи . . . . . 242

*Глава 19. Упругие волны* . . . . . 243
§ 153. Волновые процессы. Продольные и поперечные волны . . . . . 243
§ 154. Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость. Волновое уравнение . 244
§ 155. Принцип суперпозиции. Групповая скорость . . . . . 246
§ 156. Интерференция волн . . . . . 246
§ 157. Стоячие волны . . . . . 247
§ 158. Характеристика звуковых волн 249
§ 159. Эффект Доплера в акустике . . . 251
§ 160. Ультразвук и его применение 252
Контрольные вопросы . . . . . 252
Задачи . . . . . 253

*Глава 20. Электромагнитные волны* . . . 254
§ 161. Экспериментальное получение электромагнитных волн . . . . 254
§ 162. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны . . . . 256
§ 163. Энергия электромагнитных волн Импульс электромагнитного поля 257
§ 164. Излучение диполя. Применение электромагнитных волн . . . . 258
Контрольные вопросы . . . . . 259
Задачи . . . . . 260

# 5
# Оптика. Квантовая природа излучения

*Глава 21. Элементы геометрической и электронной оптики* . . . . . 261
§ 165. Основные законы оптики. Полное отражение . . . . . 261
§ 166. Тонкие линзы. Изображение предметов с помощью линз . . . . . 263
§ 167. Аберрации (погрешности) оптических систем . . . . . 266
§ 168. Основные фотометрические величины и их единицы . . . . . 267
§ 169. Элементы электронной оптики . . 269
Контрольные вопросы . . . . . 271
Задачи . . . . . 271

*Глава 22. Интерференция света* . . . . 271
§ 170. Развитие представлений о природе света . . . . . 271
§ 171. Когерентность и монохроматичность световых волн . . . . . 274
§ 172. Интерференция света . . . . . 276
§ 173. Методы наблюдения интерференции света . . . . . 277
§ 174. Интерференция света в тонких пленках . . . . . 279
§ 175. Применение интерференции света 281
Контрольные вопросы . . . . . 284
Задачи . . . . . 284

*Глава 23. Дифракция света* . . . . . 285
§ 176. Принцип Гюйгенса—Френеля . . 285
§ 177. Метод зон Френеля. Прямолинейное распространение света . . . 286
§ 178. Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске . . . . . 288
§ 179. Дифракция Фраунгофера на одной щели . . . . . 290
§ 180. Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке . . . . . 291
§ 181. Пространственная решетка. Рассеяние света . . . . . 293
§ 182. Дифракция на пространственной решетке. Формула Вульфа—Брэггов . . . . . 294

§ 183. Разрешающая способность оптических приборов . . . . . 295
§ 184. Понятие о голографии . . . . . 296
Контрольные вопросы . . . . . 298
Задачи . . . . . 298

*Глава 24. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом* . . . . . 299
§ 185. Дисперсия света . . . . . 299
§ 186. Электронная теория дисперсии света . . . . . 300
§ 187. Поглощение (абсорбция) света 302
§ 188. Эффект Доплера . . . . . 303
§ 189. Излучение Вавилова — Черенкова 304
Контрольные вопросы . . . . . 305
Задачи . . . . . 305

*Глава 25. Поляризация света* . . . . 306
§ 190. Естественный и поляризованный свет . . . . . 306
§ 191. Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков . . . . . 308
§ 192. Двойное лучепреломление . . . 309
§ 193. Поляризационные призмы и поляроиды . . . . . 311
§ 194. Анализ поляризованного света . . 312
§ 195. Искусственная оптическая анизотропия . . . . . 314
§ 196. Вращение плоскости поляризации 315
Контрольные вопросы . . . . . 316
Задачи . . . . . 316

*Глава 26. Квантовая природа излучения* 317
§ 197. Тепловое излучение и его характеристики . . . . . 317
§ 198. Закон Кирхгофа . . . . . 318
§ 199. Законы Стефана—Больцмана и смещения Вина . . . . . 319
§ 200. Формулы Рэлея—Джинса и Планка . . . . . 320
§ 201. Оптическая пирометрия. Тепловые источники света . . . . . 322
§ 202. Виды фотоэлектрического эффекта. Законы внешнего фотоэффекта 324
§ 203. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Экспериментальное подтверждение квантовых свойств света . . . . . 326
§ 204. Применение фотоэффекта . . . 328
§ 205. Масса и импульс фотона. Давление света . . . . . 329
§ 206. Эффект Комптона и его элементарная теория . . . . . 330
§ 207. Диалектическое единство корпускулярных и волновых свойств электромагнитного излучения . . . 331
Контрольные вопросы . . . . . 332
Задачи . . . . . 333

# 6
# Элементы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел

*Глава 27. Теория атома водорода по Бору* . . . . . 334
§ 208. Модели атома Томсона и Резерфорда . . . . . 334
§ 209. Линейчатый спектр атома водорода . . . . . 335
§ 210. Постулаты Бора . . . . . 336
§ 211. Опыты Франка и Герца . . . . 337
§ 212. Спектр атома водорода по Бору 338
Контрольные вопросы . . . . . 340
Задачи . . . . . 340

*Глава 28. Элементы квантовой механики* 341
§ 213. Корпускулярно-волновой дуализм свойств веществ . . . . . 341
§ 214. Некоторые свойства волн де Бройля . . . . . 342
§ 215. Соотношение неопределенностей 343
§ 216. Волновая функция и ее статистический смысл . . . . . 346
§ 217. Общее уравнение Шредингера. Уравнение Шредингера для стационарных состояний . . . . . 348
§ 218. Принцип причинности в квантовой механике . . . . . 349
§ 219. Движение свободной частицы . . 350
§ 220. Частица в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками» . . 351
§ 221. Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер. Туннельный эффект . . . . . 353
§ 222. Линейный гармонический осциллятор в квантовой механике . . . 355
Контрольные вопросы . . . . . 357
Задачи . . . . . 357

*Глава 29. Элементы современной физики атомов и молекул* . . . . . 358
§ 223. Атом водорода в квантовой механике . . . . . 358
§ 224. 1s-состояние электрона в атоме водорода . . . . . 361
§ 225. Спин электрона. Спиновое квантовое число . . . . . 362
§ 226. Принцип неразличимости тождественных частиц. Фермионы и бозоны . . . . . 362
§ 227. Принцип Паули. Распределение электронов в атоме по состояниям 364
§ 228. Периодическая система элементов Менделеева . . . . . 365
§ 229. Рентгеновские спектры . . . . 367
§ 230. Молекулы: химические связи, понятие об энергетических уровнях 369

§ 231. Молекулярные спектры. Комбинационное рассеяние света . . . . 370
§ 232. Поглощение, спонтанное и вынужденное излучения . . . . . 371
§ 233. Оптические квантовые генераторы (лазеры) . . . . . 373
Контрольные вопросы . . . . . 376
Задачи . . . . . 376

*Глава 30. Элементы квантовой статистики* 377

§ 234. Квантовая статистика. Фазовое пространство. Функция распределения . . . . . 377
§ 235. Понятие о квантовых статистиках Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака . . . . . 378
§ 236. Вырожденный электронный газ в металлах . . . . . 379
§ 237. Понятие о квантовой теории теплоемкости. Фононы . . . . . 380
§ 238. Выводы квантовой теории электропроводности металлов . . . . . 382
§ 239. Сверхпроводимость. Понятие об эффекте Джозефсона . . . . . 383
Контрольные вопросы . . . . . 384
Задачи . . . . . 384

*Глава 31. Элементы физики твердого тела* 385

§ 240. Понятие о зонной теории твердых тел . . . . . 385
§ 241. Металлы, диэлектрики и полупроводники по зонной теории . . . 386
§ 242. Собственная проводимость полупроводников . . . . . 388
§ 243. Примесная проводимость полупроводников . . . . . 390
§ 244. Фотопроводимость полупроводников . . . . . 393
§ 245. Люминесценция твердых тел . . 394
§ 246. Контакт двух металлов по зонной теории . . . . . 396
§ 247. Термоэлектрические явления и их применение . . . . . 398
§ 248. Выпрямление на контакте металл — полупроводник . . . . 400
§ 249. Контакт электронного и дырочного полупроводников ($p$-$n$-переход) . 401
§ 250. Полупроводниковые диоды и триоды (транзисторы) . . . . . 404
Контрольные вопросы . . . . . 406
Задачи . . . . . 406

# 7
# Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц

*Глава 32. Элементы физики атомного ядра* . . . . . 407

§ 251. Размер, состав и заряд атомного ядра. Массовое и зарядовое числа 407
§ 252. Дефект массы и энергия связи ядра . . . . . 408
§ 253. Спин ядра и его магнитный момент 409
§ 254. Ядерные силы. Модели ядра 410
§ 255. Радиоактивное излучение и его виды . . . . . 411
§ 256. Закон радиоактивного распада. Правила смещения . . . . . 413
§ 257. Закономерности $\alpha$-распада . . . 414
§ 258. $\beta^-$-Распад. Нейтрино . . . . . 415
§ 259. Гамма-излучение и его свойства 417
§ 260. Резонансное поглощение $\gamma$-излучения (эффект Мёссбауэра) . . . 419
§ 261. Методы наблюдения и регистрации радиоактивных излучений и частиц . . . . . 421
§ 262. Ядерные реакции и их основные типы . . . . . 424
§ 263. Позитрон. $\beta^+$-Распад. Электронный захват . . . . . 426
§ 264. Открытие нейтрона. Ядерные реакции под действием нейтронов 427
§ 265. Реакция деления ядра . . . . . 429
§ 266. Цепная реакция деления . . . . 430
§ 267. Понятие о ядерной энергетике 431
§ 268. Реакция синтеза атомных ядер. Проблема управляемых термоядерных реакций . . . . . 433
Контрольные вопросы . . . . . 435
Задачи . . . . . 436

*Глава 33. Элементы физики элементарных частиц* . . . . . 436

§ 269. Космическое излучение . . . . 436
§ 270. Мюоны и их свойства . . . . . 437
§ 271. Мезоны и их свойства . . . . 438
§ 272. Типы взаимодействий элементарных частиц . . . . . 439
§ 273. Частицы и античастицы . . . 441
§ 274. Гипероны. Странность и четность элементарных частиц . . . . 443
§ 275. Классификация элементарных частиц. Кварки . . . . . 444
Контрольные вопросы . . . . . 447
Задачи . . . . . 448

Заключение . . . . . 449

Основные законы и формулы . . . . . 450
1. Физические основы механики . . . 450
2. Основы молекулярной физики и термодинамики . . . . . 452
3. Электричество и электромагнетизм 453
4. Колебания и волны . . . . . 456
5. Оптика. Квантовая природа излучения . . . . . 457
6. Элементы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел . . . . . 458
7. Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц . . . . . 459

Предметный указатель . . . . . 461

*Учебное издание*

**Трофимова** Таисия Ивановна

**КУРС ФИЗИКИ**

Зав. редакцией
Е. С. Гридасова

Редактор
Л. С. Куликова

Младший редактор
Н. П. Майкова

Художественный редактор
В. И. Пономаренко

Художник
Ю. Д. Федичкин

Технический редактор
Г. А. Фетисова

Корректор
Г. И. Кострикова

ИБ № 8563

Изд. № ФМ—14. Сдано в набор 17.08.89. Подп. в печать 03.05.90. Формат 70×100$^1/_{16}$. Бум. офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Объем 39,00 усл. печ. л. 78,00 усл. кр.-отт. 40,26 уч.-изд. л. Тираж 100 000 экз. Зак. № 298. Цена 1 р. 70 к.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, Неглинная ул., д. 29/14.

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького при Госкомпечати СССР. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.