А. Я. ДОРОГОВЦЕВ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

ЧАСТИНА 1

А.Я. ДОРОГОВЦЕВ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

У ДВОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 1

Затверджено Міністерством освіти України як підручник для студентів вищих навчальних закладів, що вивчають дисципліну «Математичний аналіз»

Київ
«Либідь»
1993

ББК 22.161я73
Д69

УДК 517(031)

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. М. Борок* (Харківський університет), д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Е. Лянце* (Львівський університет)

Головна редакція літератури з природничих та технічних наук

Головний редактор *Л. В. Маришева*

Редактор *О. М. Миронець*

Дороговцев А. Я.
Д69 Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 1.— К. : Либідь, 1993.— 320 с.
ISBN 5-325-00380-1.

Підручник містить стислий за викладом, але досить повний за охопленням матеріал нормативного курсу математичного аналізу. Автором враховано сучасні тенденції розвитку математики та її застосувань, модернізовано виклад ряду традиційних розділів. При викладі систематично використовуються елементи сучасної математичної символіки.

Перша частина присвячена диференціальному та інтегральному численню дійсних функцій, рядам та інтегралу Стільтьєса. У ній вміщено понад 700 прикладів і вправ, частина з яких розв'язана в тексті, інші пропонуються для самостійної роботи. Матеріал цієї книги викладається майже у всіх вузівських курсах математики.

Для студентів університетів і технічних вузів.

Д $\frac{1602070000-119}{224-93}$ БЗ-15-6-93 ББК 22.161я73

ISBN 5-325-00380-1

ЗМІСТ

Глава 6. Інтеграл Рімана

Глава 7. Ряди

Глава 8. Функціональні ряди

Глава 9. Функції обмеженої варіації та інтеграл Стільтьєса

ПЕРЕДМОВА

Курс математичного аналізу є основним у фаховій підготовці математиків і тих, хто займається застосуванням математики, вже майже 300 років (перший підручник з диференціального числення було видано в 1696 р.). З часом зміст цього курсу змінювався, що пов'язано з розвитком математики та усвідомленням її внутрішнього стану. І хоч уявлення засновників диференціального та інтегрального числення (Ньютона, Лейбніца, Ейлера та ін.) є основою курсу, плідна діяльність таких математиків, як Коші, Вейєрштрасс, Кантор, привела до корінної перебудови змісту і форми курсу. Менш суттєві зміни відбувалися постійно.

Істотних змін зазнав матеріал і методика викладання курсу за останні 30 років. Основою цих змін є перенесення уваги з вивчення широкого кола математичних фактів (навіть найважливіші з них неможливо охопити, крім того, невідомо, які з них дійсно будуть використовуватися в подальшому) до вивчення ідей курсу та їх сучасного тлумачення. При цьому істотно змінилося значення окремих розділів. Наприклад, популярна наприкінці минулого і на початку цього століття теорія невизначеного інтегрування залишилась у незначному обсязі. При створенні підручника автор намагався врахувати зазначені вище та інші тенденції розвитку математики та її застосування, модернізувати виклад ряду розділів, зокрема тем про функції кількох змінних, кратні інтеграли та інтеграли по многовидах.

Автором враховано багаторічний досвід читання лекцій з курсу математичного аналізу на механіко-математичному факультеті Київського університету. У книзі менше, ніж звичайно, приділено уваги матеріалу технічного або другорядного для розуміння основних ідей характеру, а також питанням чисто логічного обгрунтування. З педагогічних міркувань автор не прагнув доводити теореми при найбільш загальних умовах, вибираючи в кожному випадку припущення, які добре вияв-

ляють ідею теореми і в певному сенсі типові. Систематично використовуються елементи сучасної математичної символіки.

Однією з основних цілей при створенні курсу було досягнення єдиного рівня викладу, в тому числі єдиних: розумного рівня строгості викладу, рівня деталізації доведень, формалізації та ін. Робота над математичним текстом повинна спонукати до самостійного обмірковування матеріалу, викликати посильну участь читача в отриманні результатів. Тому певна частина роботи по опануванню курсу постійно залишається студенту, хоча всі принципові моменти, зокрема доведення, детально викладені. Цим же частково пояснюється лаконічність викладу, зокрема відсутність багаторазових застережень, які часто створюють додаткові перешкоди для засвоєння.

Вивчення курсу математичного аналізу, як і будь-якого математичного предмета, неможливе без систематичного самостійного розв'язання задач. Саме процес активного обмірковування матеріалу при спробах розв'язання задач допомагає виробити правильні інтуїтивні уявлення про глибокі й абстрактні поняття аналізу, для розуміння яких не досить звичайних позаматематичних уявлень. В книзі міститься понад 1500 прикладів і вправ. Частина з них детально розібрана в тексті, інші призначені для контролю засвоєння курсу. Ряд інших включають роз'яснювальні або додаткові факти. Розташування задач таке, що більша їх частина цілком посильна для самостійного розв'язання при умові засвоєння попереднього матеріалу. Крім того, пропонується ряд задач для олімпіад (вони помічені зірочкою). Істотно більший набір задач з курсу математичного аналізу міститься в навчальному посібнику автора «Математический анализ. Сборник задач» (К., 1987).

Пропонована книга має порівняно невеликий обсяг. Проте досвід роботи показує, що вона є ефективним підручником з курсу аналізу і що студенти, активно засвоївши матеріал у запропонованому обсязі, успішно володіють основними ідеями і методами математичного аналізу, можуть без особливих труднощів опанувати сучасні абстрактні курси.

Автор висловлює щиру подяку рецензентам — професорам В. М. Борок та В. Е. Лянце за суттєві зауваження.

Глава 1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН. ДІЙСНІ ЧИСЛА

§ 1. ЛОГІЧНІ ЗНАКИ

Математичний текст складається з математичних формул і власне тексту. Деякі словосполучення, які передають найбільш важливі й часто вживані в математиці відношення між об'єктами, мають спеціальні позначення і називаються ***логічними знаками***. Будемо використовувати такі логічні знаки:

$\Rightarrow$ — «випливає»;

$\Leftrightarrow$ — «тоді й тільки тоді»;

$\forall$ — «для всіх»[1], «для кожного»;

$\exists$ — «існує»[2], «існує хоча б один»;

$\exists!$ — «існує точно один»;

$:=$ — або $\overset{\text{def}}{=}$ — «дорівнює за означенням»[3].

Приклади. Твердження, записані за допомогою логічних знаків:

1. $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$;
2. $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$;
3. $\forall x\colon x^2 + x + 1 > 0$;
4. $\exists x\colon x^2 = 1$;
5. $\exists!\, x\colon 2^x = 1$;
6. $a^2 := a \cdot a$.

§ 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

2.1. ПРО ПОНЯТТЯ МНОЖИНИ

Поняття ***множини*** є одним із найважливіших вихідних (початкових) понять сучасної математики, які не підлягають визначенню. Можна казати про множину **N** всіх натуральних

---

[1] Знак являє собою перевернуту першу літеру англійського слова All — всі.

[2] Знак являє собою перевернуту першу літеру англійського слова Exist—існує. Знаки $\forall$ і $\exists$ називаються також ***кванторами загальності*** й ***існування*** відповідно.

[3] def — від англійського слова definition — означення.

чисел, про множину **Z** усіх цілих чисел, про множину **Q** усіх раціональних чисел, про множину всіх виданих до цього часу книг та ін.

Творець теорії множин Г. Кантор[1] використовував таке «означення»: множина чи сукупність — це збірка певних і різних об'єктів нашої інтуїції чи інтелекту, яка розглядається як ціле.

Як синоніми слова «множина» використовуються слова: ***сукупність***, ***сім'я***, ***клас***. Об'єкти, які складають множину, називаються його ***елементами*** або ***точками***. Множину будемо вважати означеною, якщо про кожен об'єкт, що розглядається, можна сказати, що він або належить, або не належить множині.

Нехай A — множина. Той факт, що елемент x входить в множину A, або належить множині A, позначається одним із символів:

$$x \in A, \quad A \ni x.$$

Той факт, що елемент x не входить в множину A, позначається одним із символів:

$$x \bar{\in} A, \quad x \notin A.$$

Далі використовуються такі способи задання множин.

(i) **Задання множини за допомогою переліку її елементів.** Наприклад, множина A складається із елементів a, b, c, ..., ..., k. При цьому використовуємо позначення

$$A = \{a, b, c, \ldots, k\}.$$

Таким чином,

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\};$$

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}.$$

(ii) **Задання множини вказівкою властивості її елементів.** У кожній математичній задачі розглядають, як правило, елементи цілком означеної фіксованої множини X (інколи будемо називати її основною). Потрібні множини при цьому виділяють деякою властивістю P, такою, що кожен елемент $x \in X$, або має властивість P (будемо писати $P(x)$), або не має її. За допомогою властивості P виділяємо множину всіх

---

[1] *Кантор Георг* (1845—1918) — видатний німецький математик (народився у Петербурзі), творець теорії множин — основи сучасної математики. Його революційні математичні ідеї були зустрінуті нерозумінням і безпідставною критикою з боку багатьох ведучих вчених того часу. Роботи Кантора були гідно оцінені й визнані через кілька десятиріч після їх публікації. Вони мали виключно плідний вплив на розвиток сучасної математики.

тих елементів з X, які мають властивість P. Цю множину будемо позначати символом

$$\{x \in X \mid P(x)\} = \{x \mid P(x)\}.$$

Зручно також ввести множину, яка не містить елементів. Цю ***множину*** називають ***порожньою*** і позначають символом $\varnothing$.

Приклади

1. $\mathbf{N} = \{x \in \mathbf{Z} \mid x > 0\}$.
2. $\mathbf{Q} = \left\{x \mid \exists\, m \in \mathbf{Z}\ \exists\, n \in \mathbf{N}\colon\ x = \dfrac{m}{n}\right\}$.

Вправи

1. Перелічити елементи множини

$$\{x \in \mathbf{Z} \mid \exists\, y \in \mathbf{Z}\colon\ |x| + |y| = 2\}.$$

2. Чи правильні такі твердження:
а) $\forall\, a \in \mathbf{Z}\ \exists\, x \in \mathbf{N}\colon\ x^2 + ax = 0$;
б) $\forall\, a \in \mathbf{Z}\ \exists\, x \in \mathbf{Z}\colon\ x^2 + ax = 0$?

2.2. ДІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Означення 1. Множина A називається *підмножиною* множини B, або множина A міститься в множині B, якщо

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Позначення:

$$A \subset B,\ B \supset A.$$

Домовимося, що $\varnothing \subset A$ для будь-якої множини A.

Приклад. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Означення 2. Множини A і B ***рівні***, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$. *Позначення*: $A = B$.

Таким чином,

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ і } B \subset A.$$

Означення 3. Об'єднанням множин A і B називається множина C, яка складається з усіх тих елементів, які належать хоча б одній із множин A, B. *Позначення*: $C = A \cup B$.

Таким чином,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Означення 4. Перетином множин A і B називається множина C, яка складається з усіх тих елементів, які належать кожній із множин A, B. *Позначення*: $C = A \cap B$.

Таким чином

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Означення 5. Різницею множин A і B називається множина, що складається з усіх тих елементів множини A, які не належать множині B. *Позначення*: $A \setminus B$.

Таким чином,

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

Нехай T — деяка множина індексів і для кожного $t \in T$ задана множина A_t. ***Об'єднання*** й ***перетин*** множин A_t, $t \in T$, визначаються аналогічно означенням 3 і 4 співвідношеннями

$$\bigcup_{t \in T} A_t := \{x \mid \exists t_0 \in T: A_{t_0} \ni x\},$$

$$\bigcap_{t \in T} A_t := \{x \mid \forall t \in T: A_t \ni x\}$$

відповідно.

Нехай X — основна множина і $A \subset X$.

Означення 6. Доповненням до множини A називається множина $\overline{A} := X \setminus A$.

Таким чином,

$$\overline{A} = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

Вправи

Довести, що для довільних множин A, B і C є вірними твердження:

3. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C =: A \cup B \cup C$,
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C =: A \cap B \cap C$.

5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

6. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Правила двоїстості. Для довільних множин A і B правильні співвідношення:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Доведення першого співвідношення:

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ і } x \notin B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ і } x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in (\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Таким чином, $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Вправи

Довести твердження:

7. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$.

8. $\overline{\bigcup_{t \in T} A_t} = \bigcap_{t \in T} \bar{A}_t$, $\overline{\bigcap_{t \in T} A_t} = \bigcup_{t \in T} \bar{A}_t$.

Означення 7. Впорядкованою парою (a, b) елементів a і b називається множина $\{\{a\}, \{a,b\}\}$. Якщо $a \neq b$, то $(a, b) \neq (b, a)$. ***Декартовим добутком*** $A \times B$ ***множини*** A і B називається множина

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Аналогічно впорядкований набір із трьох елементів a, b, c

$$(a, b, c) := \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\},$$

а декартовий добуток трьох множин A, B і C визначається як,

$$A \times B \times C := \{(a, b, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\},$$

Таким же чином визначається й декартовий добуток n множин $n \in \mathbf{N}$. Далі використовується і таке позначення:

$$A^2 := A \times A,\ A^3 := A \times A \times A,$$

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ разів}},\ n \geqslant 1.$$

Вправа

9. Довести, що

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

Означення 8. Множина, яка складається із скінченного числа елементів, називається ***скінченною***. Для скінченної множини A кількість її елементів позначається $|A|$. Сукупність усіх підмножин множини A включно з $\varnothing$ і A позначається 2^A.

Вправа

10. Для скінченних множин A і B довести рівності:

а) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$;
б) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$;
в) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;
г) $|2^A| = 2^{|A|}$.

2.3. ЗАГАЛЬНЕ ПОНЯТТЯ ВІДОБРАЖЕННЯ АБО ФУНКЦІЇ

Означення 1. Нехай X і Y—дві множини. ***Відображенням*** f ***множини*** X ***у множину*** Y будемо називати припис (правило), яке кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність точно один елемент $y \in Y$. Слова ***функція, відображення, оператор, відповідність, перетворення***— синоніми.

Кожний запис

$$1)\ f: X \to Y;\quad 2)\ X \xrightarrow{f} Y;\quad 3)\ y = f(x),\ x \in X$$

означає, що f є відображення множини X у множину Y[1].

Елемент y, який відображення f ставить у відповідність елементу x, називається ***образом елемента*** x при відображенні f, або ***значенням відображення*** f ***у точці*** x і позначається символом $f(x)$. При цьому будемо писати $x \mapsto f(x)$.

Множина X називається ***множиною визначення відображення*** f і позначається символом $D(f)$.

Зауваження. Часто розглядається випадок, коли $D(f)$ — частина більш широкої множини.

Множина

$$R(f) := \{ \quad f(x) = y\}$$

називається ***множиною значень відображеня*** f. Таким чином, задання функції f припускає задання таких трьох об'єктів: $D(f)$, Y і правила, яке ставить у відповідність кожному елементу з $D(f)$ точно один елемент з Y.

Означення 2. Функції

$$f_1: X_1 \to Y_1 \text{ і } f_2: X_2 \to Y_2$$

рівні тоді й тільки тоді, коли:

---

[1] Слово «функція» — від лат. finctio — виконувати. Цей термін, а також позначення 3) ввів у математику Г. Лейбніц.

Зауважимо також, що означення 1, яке є важливим для розуміння й істотним етапом у розвитку поняття «функція», не є означенням у звичному для сучасної математики сенсі. Воно лише підміняє слово «функція» словами «припис», «правило», які ближчі до нашої інтуїції. Проте цього означення досить для нашого викладу. Про розвиток поняття функції можна прочитати в цікавій статті Г. Е. Шилова «Что такое функция?» (Математика в школе. 1964. № 1. С. 7—15). Формальне означення наведене, наприклад, у книжці *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М., 1964. 430 с.

$$1)\ X_1 = X_2 \text{ і } 2)\ \forall x \in X_1\colon f_1(x) = f_2(x).$$

Позначення $f_1 = f_2$.

Означення 3. Нехай $f\colon X \to Y$ і $X_0 \subset X$. Визначимо функцію $f_0 : X_0 \to Y$, поклавши

$$\forall x \in X_0\colon f_0(x) := f(x).$$

Функція f_0 називається ***звуженням функції*** f на X_0, а функція f — ***продовженням функції*** f_0 на X.

Вправа

11. Визначити $R(f)$ для функцій:
а) $X = Y = \mathbf{Z}$, $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbf{Z}$;
б) $X = Y = \mathbf{Z}$, $f(x) = |x| + 1$, $x \in \mathbf{Z}$;
в) $X = Y = \mathbf{Z}$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $x \in \mathbf{Z}$.

Означення 4. Нехай $f\colon X \to Y$ і $A \subset X$, $B \subset Y$.
Образом множини A ***при відображенні*** f називається множина

$$f(A) := \{y \mid \exists\, x \in A\colon f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Прообразом множини B ***при відображенні*** f називається множина

$$f^{-1}(B) := \{x \mid \exists\, y \in B\colon f(x) = y\} = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Зазначимо, що $f(A) \subset Y$, $f^{-1}(B) \subset X$.

Вправи

12. Для функцій з вправи 11 визначити множини $f(\mathbf{N})$ і $f^{-1}(\mathbf{N})$.
13. Нехай $f\colon X \to Y$. Довести що $\forall A \subset X\ \forall B \subset X$:
а) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
б) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
в) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$;
г) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$;
д) $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Для випадків б), в) і д) навести приклади строгого включення.
14. Нехай $f\colon X \to Y$. Довести, що $\forall A \subset Y\ \forall B \subset Y$:
а) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
б) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
в) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$;
г) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$;
д) $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X)$.

Означення 5. Нехай $f\colon X \to Y$. ***Графіком функції*** f називається множина

$$G(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X,\ y = f(x)\},$$

яка є підмножиною $X \times Y$.

Означення 6. Нехай $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Функція $h: X \to Z$, яка визначається формулою

$$h(x) := g(f(x)), \quad x \in X,$$

називається ***складною функцією*** або ***суперпозицією***[1] ***функцій*** f і g. *Позначення:* $h = g(f)$ або $h = g \circ f$.

Означення 7. Відображення $f: X \to Y$ називається ***відображенням*** множини X ***на*** множину Y, або ***сюр'єкцією***, якщо $f(X) = Y$.

Означення 8. Відображення $f: X \to Y$ називається ***взаємно однозначним відображенням*** множини X в множину Y або ***ін'єкцією***, якщо

$$\forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X: \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Означення 9. Відображення $f: X \to Y$, яке є сюр'єкцією і ін'єкцією, називається ***бієкцією***. У цьому випадку кажуть також, що f здійснює ***взаємно однозначну відповідність між множинами*** X і Y.

Вправи

15. Які з функцій вправи 11 є сюр'єкцією? ін'єкцією? бієкцією?

16. Довести, що суперпозиція бієкцій є бієкція.

17. Перевірити такі твердження:

а) $f: X \to Y$ сюр'єкція $\Leftrightarrow \forall y \in Y: f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$;

б) $f: X \to Y$ ін'єкція $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ множина $f^{-1}(\{y\})$ пуста або складена з одного елемента;

в) $f: X \to Y$ бієкція $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ множина $f^{-1}(\{y\})$ складена з одного елемента.

18. Довести, що

$$f \text{ ін'єкція} \Leftrightarrow \forall A \subset X: f^{-1}(f(A)) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A \subset X \ \forall B \subset X: f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A \subset X \ \forall B \subset X, \ A \supset B: f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

19. Нехай $f: X \to Y$ і $g: Y \to X$ такі, що

$$\forall x \in X: g(f(x)) = x.$$

Довести, що f — ін'єкція, а g — сюр'єкція.

20. Нехай X і Y — скінченні множини, причому $|X| = m \in \mathbf{N}$, $|Y| = n \in \mathbf{N}$. Скільки існує:

а) всіх відображень $f: X \to Y$?

б) взаємно однозначних відображень $f: X \to Y$?

в) бієкцій $f: X \to Y$?

---

[1]. Від лат. supponо — підставляти.

Означення 10. Нехай $f: X \to Y$ — бієкція. Тоді

$$\forall y \in Y \ \exists! \ x \in X: f(x) = y.$$

Покладемо

$$f^{-1}(y) := x.$$

Функція $f^{-1}: Y \to X$ називається ***оберненою*** до функції f.

Вправи

21. Довести, що якщо f — бієкція, то f^{-1} — бієкція і її обернена функція є f.

22. Довести, що для бієкції f

$$\forall x \in X: f^{-1}(f(x)) = x,$$

$$\forall y \in Y: f(f^{-1}(y)) = y.$$

23. Нехай $f: X \to Y$ і $g: Y \to X$ такі, що

$$\forall x \in X: g(f(x)) = x \text{ і } \forall y \in Y: f(g(y)) = y.$$

Довести, що f і g — бієкції і $g = f^{-1}$.

Означення 11. Відображення $f: \mathbf{N} \to X$ називається ***послідовністю елементів*** з X. Послідовність будемо позначати

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \text{ або } \{a_n: n \geqslant 1\},$$

де $a_n := f(n)$ — n-й ***член*** послідовності, $n \geqslant 1$.

2.4. ПОТУЖНІСТЬ МНОЖИН. ЗЛІЧЕННІ МНОЖИНИ

Скінченні множини порівнюються за запасом їх елементів дуже просто: треба порівняти кількість елементів у цих множинах. Для множин, які містять нескінченно багато елементів, такий спосіб не підходить. Чи однакові за запасом елементів множини **N**, **Z** і **Q**? Це питання і відповідь на нього не прості. Г. Кантор побудував природну й витончену математичну теорію, яка містить відповідь на згадане питання. Вихідним пунктом цієї теорії є таке означення:

Означення 1. Множини A і B ***рівнопотужні***, або ***мають однакову потужність***, якщо існує бієкція $f: A \to B$. Рівнопотужні множини позначаються символом

$$A \sim B.$$

Вправа

24. Нехай A і B — скінченні множини. Довести, що

$$A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|.$$

Зауваження. За допомогою означення 1 можна сформулювати точне означення скінченної множини: множина A скінченна $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N}$: $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$. При цьому $|A| = n$. У всіх інших випадках множина A називається ***нескінченною***.

Приклад 1. Множини

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\},$$

$$B = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$$

рівнопотужні, оскільки відображення

$$\mathbf{N} \ni n \mapsto 2n \in B$$

бієкція. Звернемо увагу на те, що B є частиною множини $\mathbf{N}$.

Вправа

25. Множина A скінченна тоді й тільки тоді, коли не існує множини $B \subset A$, $B \neq A$ такої, що $A \sim B$. Множина A нескінченна тоді й тільки тоді, коли існує множина $B \subset A$, $B \neq A$ і така, що $A \sim B$. Довести це.

Означення 2. Множина A зліченна, якщо $A \sim \mathbf{N}$. У цьому випадку кажуть, що елементи множини A можна ***занумерувати***.

Приклад 2. Множини $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ і $\mathbf{Q}$ зліченні.

Вправа

26*. Довести, що множини A і 2^A не рівнопотужні.

Вказівка. Нехай $f: A \to 2^A$—бієкція. Розглянути множину $\{x \in A \mid x \bar{\in} f(x)\}$ і одержати протиріччя.

ТЕОРЕМА 1. Нескінченна підмножина зліченної множини зліченна.

ТЕОРЕМА 2. Нескінченна множина містить зліченну підмножину.

Вправа

27*. Нехай A — нескінченна множина і $x \in A$. Довести, що $A \cup \{x\} \sim A$.

Нехай B зліченна. Довести, що $A \cup B \sim A$.

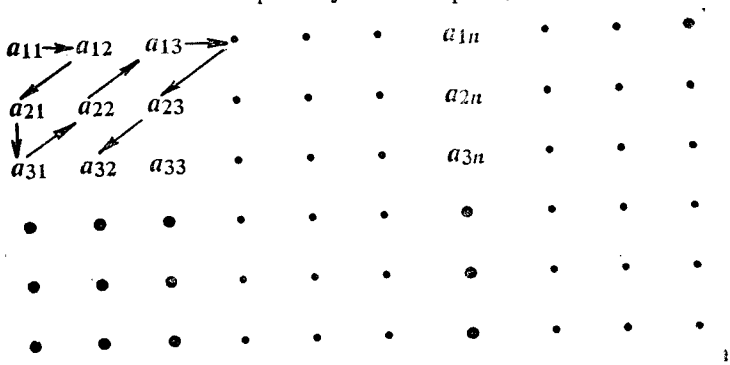
ТЕОРЕМА 3. Об'єднання зліченної сукупності зліченних множин є зліченна можина.

$\vdash$ Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — зліченні множини. Тоді для кожного $n \geqslant 1$

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}, \ldots\},$$

а об'єднання $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ є множина, що складається із всіх еле-

ментів нескінченної прямокутної матриці,



які можна занумерувати, наприклад, в порядку, вказанному стрілками. ⌋

Вправа

27. 1. Інше доведення теореми 3. Переконатися, що функція

$$f: \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \to \mathbf{N},$$

яка визначається рівністю

$$f(a_{mn}) := 2^m 3^n, \quad m \geqslant 1, \quad n \geqslant 1,$$

є ін'єкцією.

Означення 3. Множина, яка є скінченна або зліченна, називається ***не більш ніж зліченною***.

Вправа

27.2. Перевірити, що множина A, для якої існує ін'єкція $f: A \to \mathbf{N}$, є не більш ніж зліченною.

ТЕОРЕМА 4. Об'єднання не більше як зліченної сукупності не більше як зліченних множин є не більше як зліченною множиною.

⌈ Наслідок теорем 3 і 1. ⌋

ТЕОРЕМА 5. Декартів добуток двох зліченних множин є зліченна множина.

⌈ Нехай

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді $A \times B$ складається із пар

$$(a_1, b_1)(a_1, b_2) \ldots (a_1, b_n) \ldots$$
$$(a_2, b_1)(a_2, b_2) \ldots (a_2, b_n) \ldots$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \cdots$$

які можна занумерувати аналогічно нумерації у теоремі 3. ⌋

Важливим принципом, який часто використовується в математичних міркуваннях, є

Принцип математичної індукції. Нехай M — така множина, що:

1) $1 \in M$;

2) $\forall n \in \mathbf{N}$ з того, що $n \in M \Rightarrow (n+1) \in M$. Тоді $M \supset \mathbf{N}$. Зокрема, якщо $M \subset \mathbf{N}$, то $M = \mathbf{N}$. Цей принцип (іноді кажуть метод математичної індукції) є аксіомою натуральних чисел.

Вправи

28. Довести, що принцип математичної індукції рівносильний твердженню: будь-яка непорожня підмножина $\mathbf{N}$ має найменший елемент.

29. Довести нерівності:

а) $\forall \alpha > -1 \quad \forall n \in \mathbf{N}: (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ (*нерівність Я. Бернуллі*);

б) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 1$;

в) $2^n > n, \quad n \geqslant 1$.

30. Довести, що для будь-якого $n \in \mathbf{N}$ число $6^n + 7^{2n+3}$ ділиться на 43.

Нехай A — зліченна множина і для $n \in \mathbf{N}$

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

є множина впорядкованих n-членних ланцюжків. З теореми 5 і принципу математичної індукції випливає, що A^n зліченна множина при кожному $n \in \mathbf{N}$.

ТЕОРЕМА 6. Множина $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$ зліченна.

⌈ Випливає з теореми 3. ⌋

Вправа

31. Довести, що множина всіх многочленів з раціональними коефіцієнтами зліченна.

Зауваження. ***Алгебраїчним числом*** називається корінь многочлена з цілими коефіцієнтами. Раціональні числа алгебраїчні. Оскільки многочлен степені n не може мати більше як n коренів, то множина всіх алгебраїчних чисел, в силу результату вправи 31, зліченна.

ТЕОРЕМА 7. Існують незліченні множини.

⌈ Нехай A — множина всіх можливих нескінченних ланцюжків з двох символів, наприклад з 0 і 1, вигляду

$$x = (0, 1, 1, \ldots, 0, \ldots).$$

Множина A незліченна. Дійсно, припустимо, що елементи множини A занумеровано

$$x_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots),$$

$$x_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots),$$

$$\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \end{array}$$

$$x_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}, \ldots),$$

$$\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \end{array}$$

де кожне a_{ij} дорівнює 0 або 1. Але елемент

$$y = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots),$$

де $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}, \ldots, b_n \neq a_{nn}, \ldots$ і кожне b_i дорівнює 0 чи 1, належить множині A, але не збігається ні з жодним із занумерованих. Отримане протиріччя показує, що елементи множини A не можна занумеровати. $\rfloor$

Метод міркувань у цій теоремі називається ***діагональним методом Кантора***.

Вправи

32. Довести, що множина 2^N незліченна.

33*. Довести, що множина A з доведення теореми 7 і множина 2^N рівнопотужні.

§ 3. ДІЙСНІ ЧИСЛА

3.1. ВСТУП

Натуральні й додатні раціональні числа та їх основні властивості відомі близько 4000 років. Але ще у давнину математикам довелося зіткнутися з необхідністю введення чисел іншої природи. Знайдена у школі Піфагора (570—496 р. до н. е.) неспільномірність діагоналі і сторони квадрата означає, що довжина діагоналі не може бути виражена раціональним числом, якщо за одиницю довжини взяти довжину сторони квадрата. Необхідність введення чисел, відмінних від раціональних, виникає й при розв'язанні рівнянь типу $x^2 - 6 = 0$.

Вправи

1. Довести, що не існує числа $x \in Q$ такого, що:
а) $x^2 = 2$; б) $x^2 = 6$.

2*. Нехай $\alpha = r\pi$, $r \in Q$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Довести, що:

а) якщо $r \neq \frac{1}{6}$, то $\sin \alpha \bar{\in} Q$;

б) якщо $r \neq \frac{1}{4}$, то $\operatorname{tg} \alpha \bar{\in} Q$.

Далі припускаються відомими із шкільного курсу математики властивості натуральних, цілих і раціональних чисел, а також правила переведення раціонального дробу в десятковий і десяткового періодичного в раціональне число. Дійсні числа можна отримати при розгляді задачі про вимірювання відрізка. Нехай задана одиниця виміру, наприклад метр, і потрібно виміряти довжину заданого відрізка l. Припустимо, що 1 м укладається на l 13 разів і при цьому маємо залишок — частину l_1, довжина якої менше 1 м. Тоді довжина l наближено дорівнює 13 м:

$$\text{довжина } l \approx 13 \text{ м}.$$

Якщо така точність недостатня, можна розглянути $\frac{1}{10}$ одиниці виміру, тобто 1 дм, і визначити скільки разів 1 дм укладається повністю у залишку l_1. Нехай 1 дм укладається повністю у l_1 7 разів і при цьому маємо залишок l_2, довжина якого менша за 1 дм. Таким чином, приходимо до більш точного наближеного значення довжини l:

$$\text{довжина } l \approx 13{,}7 \text{ м}.$$

Продовжуючи описану процедуру знаходження більш точніших наближень довжини l, можна отримати один із двох результатів. Або на якомусь кроці, наприклад $(n+1)$-му, $\frac{1}{10^n}$ одиниці довжини відкладається на залишку l_n точно α_n разів. Тоді процес вимірювання приведе до точного значення довжини

$$\text{довжина } l = 13{,}\underbrace{7 \ldots \alpha_n}_{n \text{ цифр}}. \qquad (1)$$

Або процес вимірювання буде тривати необмежено[1] (наприклад, якщо довжина l дорівнює $\frac{4}{3}$ м) і тоді точним значен-

[1] Припущення про необмеженість процесу вимірювання є типовим прикладом математичної абстракції; для реальної процедури вимірювання на певному етапі почне позначатися дискретність речовини.

ням довжини l потрібно вважати нескінченний десятковий дріб

$$\text{довжина } l = 13{,}7 \ldots \alpha_n \ldots .$$

Вправа

3. Показати, що в результаті процесу вимірювання довжини відрізка нескінченний десятковий дріб з цифрою 9 у періоді з'явитися не може.

Зазначимо, що скінченний десятковий дріб (1) можна розглядати як нескінченний, вважаючи рівним нулеві всі знаки після n-го:

$$13{,}7 \ldots \alpha_n = 13{,}7 \ldots \alpha_n 0 \ldots 0 \ldots .$$

Розглянемо пряму з фіксованою точкою O (початком координат) і фіксованою одиницею довжини. Тоді кожній точці P, яка лежить правіше від точки O, можна поставити у відповідність десяткову дріб вигляду

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots , \tag{2}$$

яка не містить цифри 9 у періоді, як результат вимірювання довжини відрізка OP. При цьому

$$\alpha_0 \in \mathbf{N} \cup \{0\};$$

$$\forall n \geqslant 1 : \alpha_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}. \tag{3}$$

Ця відповідність між точками півпрямої і усіма нескінченними десятковими дробами вигляду (2), які задовольняють умову (3) і не містять цифру 9 у періоді, взаємно однозначна. Серед десяткових дробів будуть періодичні (в тому числі дроби вигляду (1)), вони дадуть невід'ємні раціональні числа. Всі інші являють собою ірраціональні числа [1].

3·2. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Означення 1. Невід'ємне ***дійсне число*** є нескінченна послідовність цифр з одною комою між ними, тобто нескінченний десятковий дріб вигляду

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots ,$$

де

$$\alpha_0 \in \mathbf{N} \cup \{0\};$$

$$\forall n \geqslant 1 : \alpha_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

[1] Від лат. irracionalis — нерозумний.

Невід'ємне дійсне число називається ***додатним***, якщо

$$\exists n \geqslant 0: \alpha_n > 0.$$

Від'ємне дійсне число визначається як додатне число зі знаком «—». При цьому правила дій зі знаком «—» ті ж, що й у множині **Q**. Тому у подальшому, як правило, розглядаються невід'ємні дійсні числа.

Множина всіх дійсних чисел позначається символом **R**.

Враховуючи застереження п. 3.1, можна вважати, що

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Означення 2. Числа із множини $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ називаються ***ірраціональними***.

Означення 3. Невід'ємні дійсні числа

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$

$$b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots$$

називаються ***рівними*** (***позначення***: $a = b$) в одному з двох випадків.

1) $\forall n \geqslant 0: \alpha_n = \beta_n$;

2) $\exists n \geqslant 0: \alpha_k = \beta_k, \quad 0 \leqslant k < n, \quad \alpha_n = \beta_n + 1$ і $\alpha_m = 0$, $\beta_m = 9$, $m > n$ (при $n = 0$ рівність з індексом k слід опустити).

У подальшому, розглядаючи дійсні числа, ***обмежимося нескінченними десятковими дробами, які не містять цифри 9 у періоді***

Означення 4. Нехай

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$

$$b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots$$

— невід'ємні дійсні числа. ***Число*** a ***менше числа*** b (*позначення* $a < b$), якщо

$$\exists n \geqslant 0: \alpha_k = \beta_k, \ 0 \leqslant k < n \ \text{і} \ \alpha_n < \beta_n.$$

Вправи

4. Для чисел виду (1) п. 3.1 нерівність означення 4 збігається із звичайною нерівністю в **Q**. Довести, що для періодичних нескінченних дробів ця нерівність відповідає звичайній нерівності між відповідними раціональними числами.

5. Показати, що для будь-яких двох чисел a, b виконується одне й тільки одне із співвідношень

$$a = b, \quad a < b, \quad a > b.$$

6. Довести, що $\forall \{a, b, c\} \subset \mathbf{R}$;

$$a > b \ \text{і} \ b > c \Rightarrow a > c.$$

3.3. ЧИСЛОВА ПРЯМА. ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Розглянемо пряму з фіксованою точкою O — початком координат. Нехай задана одиниця довжини. Тоді множину $\mathbf{R}$ можна поставити у взаємно однозначну відповідність із точками прямої: точці P, яка лежить праворуч від O, поставимо у відповідність число $x \in \mathbf{R}$, що дорівнює довжині відрізка OP (див. п. 3.1), точці Q, яка лежить ліворуч від O, число $-y$, де y довжина відрізка QO, а точці O — число 0. Число x, яке відповідає точці P, називається ***координатою точки*** P. ***Пряма*** з описаною відповідністю називається ***числовою***. Багатьом властивостям дійсних чисел відповідає проста їх геометрична інтерпретація на числовій прямій. Наприклад, $a < b$ рівносильно тому, що точка з координатою a лежить ліворуч від точки з координатою b. Аналогічно ця інтерпретація може бути використана для геометричного означення суми дійсних чисел (як це робили стародавні греки та їх послідовники) і т. ін.

1°. **Аксіома Архімеда**. $\forall a \in \mathbf{R}\ \exists m \in \mathbf{N} : m > a$

|‾ Нехай $a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots > 0$. Покладемо $m = \alpha_0 + 1$, $m \in \mathbf{N}$. Тоді згідно з означенням 4 п. 3.2, $a < m$. _|

Нехай $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ і $a < b$. Далі використовуються такі позначення:

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ — ***відрізок***,

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ — ***інтервал***,

числа a і b називаються *кінцями* відрізка або інтервала;

$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$ — ***півінтервал***,

$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$ — ***півінтервал***.

Крім того, покладемо

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

2°. $\forall a \in \mathbf{R}\ \forall b \in \mathbf{R},\ a < b:\ (a, b) \neq \varnothing$.

|‾ Доведемо, що $\exists r \in \mathbf{Q} : r \in (a, b)$. Нехай

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots \geqslant 0,$$

$$b = \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n \ldots,$$

причому для числа $m \geqslant 0$

$$\alpha_0 = \beta_0, \quad \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{m-1} = \beta_{m-1} \text{ і } \alpha_m < \beta_m.$$

Нехай k — мінімальний номер, більший m, для якого $\alpha_k < 9$. Покладемо

$$r := \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m \alpha_{m+1} \ldots (\alpha_k + 1).$$

Тоді $r \in \mathbf{Q}$, $a < r < b$. _|

Вправи

7. Довести, що множина $(a, b) \cap \mathbf{Q}$ зліченна.

8. Довести, що будь-яка система інтервалів з кінцями з $\mathbf{Q}$ на прямій не більше ніж зліченна.

9. Довести, що будь-яка система інтервалів на прямій, які попарно не перетинаються, є не більш ніж зліченна.

10. Довести, що будь-яка система кіл у площині, координати центра і радіус яких раціональні, не більш ніж зліченна.

11. Довести, що множина $[0, 1]$ незліченна.

Означення. Множина, рівнопотужна множині $[0, 1]$ називається ***множиною***, яка має ***потужність континіум.***

Вправа

12.* Довести, що $(0,1) \sim [0,1] \sim \mathbf{R} \sim \mathbf{R}^2 \sim \mathbf{R}^3$.

3.4. ТОЧНІ МЕЖІ

Означення 1. Нехай $A \subset \mathbf{R}$. Якщо

$$\exists a \in A \quad \forall b \in A : b \leqslant a,$$

то a називається ***найбільшим*** (***максимальним***) елементом множини A і позначається одним із символів:

$$a = \max A = \max \{x \mid x \in A\} = \max_{x \in A} x.$$

Аналогічно визначається ***найменший*** (***мінімальний***) елемент множини A, який позначається символами:

$$\min A = \min \{x \mid x \in A\} = \min_{x \in A} x.$$

Вправи

13. Нехай A — скінченна підмножина чисел з $\mathbf{R}$. Довести, що $\min A$ і $\max A$ існують.

14. Якщо A нескінченна множина, то найменший і найбільший елементи можуть не існувати. Довести, що: а) $\min \mathbf{N} = 1$, а найбільшого елемента для множини $\mathbf{N}$ не існує; б) для множини $A = \{\frac{1}{n} \mid n \geqslant 1\}$ $\max A = 1$, а найменшого елемента немає. Навести приклад множини, для якої не існує ні найбільшого, ні найменшого елементів.

Означення 2. Нехай $A \subset \mathbf{R}$, якщо

$$\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall x \in A : x \leqslant c,$$

то ***множина*** A називається ***обмеженою зверху***, а число c — ***верхньою межею множини*** A. Якщо

$$\exists d \in \mathbf{R} \quad \forall x \in A : d \leqslant x,$$

то ***множина*** A називається ***обмеженою знизу***, а число d — ***нижньою межею множини*** A. ***Множина***, обмежена і зверху, і знизу, називається ***обмеженою***.

Приклади. 1. Множина $\mathbf{N}$ згідно з аксіомою Архімеда не обмежена зверху, вона обмежена знизу, нижньою межою для $\mathbf{N}$ є будь-яке недодатне число.

2. Множина $\left\{\frac{n}{n+1} \middle| n \geqslant 1\right\}$ обмежена, оскільки нижньою і верхньою межами її є, наприклад, числа $\frac{1}{2}$ і 1 відповідно.

Вправа

15. Довести, що множина $\{\sin n | n \geqslant 1\}$ обмежена.

16. Довести, що множина A обмежена тоді й тільки тоді, коли

$$\exists c \in \mathbf{R} \ \forall x \in A: \ |x| \leqslant c.$$

Означення 3. Нехай $A \subset \mathbf{R}$. Число $c^* \in \mathbf{R}$ називається ***точною верхньою межею множини*** A, якщо:

1) c^* — верхня межа множини A;

2) $\forall d$ — верхньої межі множини A: $c^* \leqslant d$. Число $c_* \in \mathbf{R}$ називається ***точною нижньою межою множини*** A, якщо

1) c_* — нижня межа для множини A;

2) $\forall d$ — нижньої межі множини A: $d \leqslant c_*$.

Для точних верхньої і нижньої меж множини A використовуються позначення:

$$c^* = \sup A = \sup\{x \mid x \in A\} = \sup_{x \in A} x,$$

$$c_* = \inf A = \inf\{x \mid x \in A\} = \inf_{x \in A} x.$$

Таким чином, точна верхня (нижня) межа є найменша (найбільша) серед усіх верхніх (нижніх) меж множини A.

Зауваження. Точна верхня (нижня) межа множини може не існувати. Наприклад, множина $\mathbf{N}$ не має точної верхньої межі, оскільки вона не має ні однієї верхньої межі.

ТЕОРЕМА 1. Число $c^* = \sup A$ тоді й тільки тоді, коли:

1) c^* — верхня межа множини A;

2) $\forall d < c^* \ \exists x \in A : x > d$.

⌈Умова 2) означає, що будь-яке число $d < c^*$ не є верхньою межею множини A, а тому c^* задовольняє обом умовам означення 3. ⌋

Приклад 3. Для множини $A = \left\{\frac{n-1}{n} \middle| n \geqslant 1\right\}$

$$\inf A = \min A = 0, \ \sup A = 1.$$

Введемо позначення.

Нехай

$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ —

додатне число. Для $n \geqslant 0$ позначимо

$$a'_n := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n,$$

$$a''_n := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots (\alpha_n + 1)$$

(другий запис умовний, якщо $\alpha_n = 9$[1]). Зазначимо, що $\forall n \geqslant 0$

$$a'_n \in \mathbf{Q}, \quad a''_n \in \mathbf{Q},$$

$$a'_n \leqslant a < a''_n.$$

Умовимося у подальшому писати:

$\sup A = +\infty$, якщо множина A не обмежена зверху;

$\inf A = -\infty$, якщо множина A не обмежена знизу.

Вправи

17. Упевнитись, що $\inf A = \min A$, якщо $\min A$ існує.

18. Довести, що для $a > 0$

$$a = \sup_{n \geqslant 0} a'_n, \quad a = \inf_{n \geqslant 0} a''_n.$$

19. Нехай

$$A = \{a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \mid \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3\}.$$

Знайти $\inf A$ і $\sup A$.

20. Множини A і B обмежені зверху, причому $A \subset B$. Показати, що $\sup A \leqslant \sup B$.

21. Множини A і B обмежені зверху. Довести, що

$$\sup (A \cup B) = \max \{\sup A, \sup B\}.$$

ТЕОРЕМА 2. (про існування точних меж). Непуста обмежена зверху множина дійсних чисел має точну верхню межу. Непуста, обмежена знизу множина дійсних чисел має точну нижню межу.

⌈Доведемо перше твердження, доведення другого може бути проведено аналогічно, або отримано з першого. Досить розглянути випадок, коли множина

$$A \subset [0, +\infty), \quad A \neq \varnothing.$$

Оскільки A обмежена зверху, то

$$\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall a \in A: a \leqslant c.$$

[1] У цьому випадку n-й знак після коми є 0, а попередній збільшено на 1.

Враховуючи аксіому Архімеда, можна вважати, що $c \in \mathbf{N}$. Нехай

$$B_0 := \{\alpha_0 \in \mathbf{N} \cup \{0\} \mid \exists a \in A : a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots\}.$$

Тоді $B_0 \neq \varnothing$ і обмежено зверху числом c. Отже, B_0 — обмежена зверху підмножина множини $\mathbf{N} \cup \{0\}$, тобто скінченна, і тому існує

$$\max B_0 =: \omega_0.$$

Покладемо

$$A_0 := \{a \in A \mid a = \omega_0, \alpha_1 \ldots\}, A_0 \subset A, A_0 \neq \varnothing.$$

Нехай далі

$$B_1 := \{\alpha_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \mid \exists a \in A_0 : a = \omega_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots\}.$$

Тоді $B_1 \neq \varnothing$ і скінченна. Позначимо

$$\omega_1 := \max B_1$$

і

$$A_1 := \{a \in A_0 \mid a = \omega_0, \omega_1 \alpha_2 \ldots\}, A_1 \subset A_0, A_1 \neq \varnothing.$$

Аналогічно

$$B := \{\alpha_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\} \mid \exists a \in A_1 : a = \omega_0, \omega_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\},$$

причому $B_2 \neq \varnothing$ і скінченна. Покладемо

$$\max B_2 =: \omega_2$$

і

$$A_2 := \{a \in A_1 \mid a = \omega_0, \omega_1 \omega_2, \alpha_3 \ldots\}, A_2 \subset A_1, A_2 \neq \varnothing$$

і т. д. В результаті отримаємо дійсне число

$$z := \omega_0, \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n \ldots .$$

Доведемо, що $z = \sup A$. Для цього перевіримо виконання умов 1) і 2) теореми 1.

I. Згідно з означенням ω_0

$$\forall a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots \in A$$

виконується нерівність $\alpha_0 \leqslant \omega_0$. Якщо при цьому $\alpha_0 < \omega_0$, то $a < z$. Якщо ж $\alpha_0 = \omega_0$, то

$$a = \omega_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots \in A_0,$$

і за означенням ω_1 маємо $\alpha_1 \leqslant \omega_1$. Якщо трапиться, що $\alpha_1 < \omega_1$, то $a < z$. При $\alpha_1 = \omega_1$

$$a = \omega_0, \omega_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \in A_1,$$

і за означенням ω_2 маємо $\alpha_2 \leqslant \omega_2$ і т. д.

Таким чином, маємо два випадки:

(i) $\exists n > 0$: $\alpha_0 = \omega_0$, $\alpha_1 = \omega_1$, ..., $\alpha_{n-1} = \omega_{n-1}$, $\alpha_n < \omega_n$, при цьому $a < z$;

(ii) $\forall n \geqslant 0$: $\alpha_n = \omega_n$, при цьому $a = z$. Отже, завжди $a \leqslant z$.

II. Розглянемо тепер будь-яке число $d = \delta_0, \delta_1\delta_2 \ldots \ldots \delta_n \ldots < z$. Згідно з означенням нерівності $d < z$

$$\exists n \geqslant 0: \ \delta_0 = \omega_0, \delta_1 = \omega_1, \ldots, \delta_{n-1} = \omega_{n-1}, \delta_n < \omega_n,$$

тому

$$\forall x \in A_n \subset A: \ x > d. \qquad \text{—|}$$

Зауваження 1. Побудоване з допомогою певного процесу число z може мати в періоді цифру 9.

2. Число $z = \sup A$ може як належати, так і не належати множині A.

Вправа

22. Повторити процес доведення теореми 2 для множин $A_1 = [0, 1)$, $A_2 = [0; 0{,}147]$. При цьому $\sup A_1 = 1 \notin A$. Чи справедлива теорема в $\mathbf{Q}$, тобто чи має непуста обмежена множина раціональних чисел точну верхню межу, яка належить $\mathbf{Q}$?

3.5. ДІЇ НАД ЧИСЛАМИ

Арифметичні дії над числами з $\mathbf{Q}$, зокрема над скінченними десятковими дробами, вважаються відомими. Нехай $a > 0$, $b > 0$.

Означення. Покладемо

$$a + b := \sup_{n \geqslant 0} (a'_n + b'_n),$$

$$a \cdot b := \sup_{n \geqslant 0} (a'_n \cdot b'_n),$$

$$\frac{a}{b} := \sup_{n \geqslant 0} \frac{a'_n}{b''_n}$$

і при $a > b$

$$a - b := \sup_{n \geqslant 0} (a'_n - b''_n),$$

$$a^0 := 1,$$

$$\forall n \in \mathbf{N}: \ a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}$$

Зауваження. Множина сум $\{a''_n + b''_n \mid n \geqslant 0\}$ обмежена зверху числом $a''_0 + b''_0$ і згідно з теоремою про існування точної верхньої межі сума чисел a і b визначена. Аналогічне зауваження стосується щодо усіх останніх дій.

Усі відомі із шкільного курсу математики властивості арифметичних операцій справедливі для чисел із **R**. Причому ці властивості треба доводити. Тут ці доведення не приводяться.

Вправа

23. Використовуючи означення операцій над числами, довести, що:
а) $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$, $a + a = 2 \cdot a$;
б) $a + b = \inf\limits_{n \geqslant 0} (a''_n + b''_n)$, $a > 0$, $b > 0$.

Для числа $a \in \mathbf{R}$ покладемо

$$|a| := \begin{cases} a, & a \geqslant 0; \\ -a, & a < 0; \end{cases}$$

$[a]$ — найбільше ціле число, яке перевищує a;
$\{a\} = a - [a]$.

Вправи

24. Довести, що $\forall a \in \mathbf{R}$ $\forall b \in \mathbf{R}$:
а) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$;
б) $|a - b| \geqslant ||a| - |b||$.
Вказівка. а) Прийняти до уваги, що $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$, $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$; б) використати а).

25. Довести, що $\forall \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$[1] $\subset \mathbf{R}$

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

26. Нехай A і B — обмежені зверху множини чисел із **R**. Покладемо

$$A + B := \{x + y \mid x \in A, y \in B\}.$$

Довести, що

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

27. Нехай $a > 0$, $b > -a$ і $n \in \mathbf{N}$. Довести, що
$(a + b)^n \geqslant a^n + na^{n-1}b$ (***нерівність Я. Бернуллі***), причому знак «=» може бути тоді й тільки тоді, коли $n = 1$ або $b = 0$.
Вказівка. Використати принцип математичної індукції.

28. Нехай $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$ і $0 < b < \frac{a}{2n}$. Довести, що

$$(a + b)^n \leqslant a^n + 2na^{n-1}b.$$

Вказівка. Використати принцип математичної індукції.

[1] Тут і в подальшому в аналогічних випадках не припускається, що елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ різні.

3.6. ВИЗНАЧЕННЯ КОРЕНЯ НАТУРАЛЬНОГО СТЕПЕНЯ ІЗ ДОДАТНОГО ЧИСЛА

ТЕОРЕМА. Нехай $a > 0$ і $n \in \mathbf{N}$. Тоді

$$\exists! x > 0: \quad x^n = a.$$

Досить розглянути випадок, коли $a \neq 1$ і $n > 1$. Нехай

$$A := \{y > 0 \mid y^n < a\}.$$

Множина $A \neq \varnothing$. Дійсно, якщо $a < 1$, то $a^n < a$ і тому $a \in A$. Якщо ж $a > 1$, то $1^n = 1 < a$ і $1 \in A$.

Множина A обмежена зверху числом $c := \max\{1, a\}$. Дійсно, якщо $y \in A$ і $y \leqslant 1$, то $y \leqslant c$. Якщо ж $y \in A$ і $y > 1$, то $y < y^n < a$ і знову $y \leqslant c$.

До множини A застосуємо теорему про існування точної верхньої межі. Нехай

$$x := \sup A,$$

причому $x > 0$. Оскільки $\{x^n, a\} \subset \mathbf{R}$, то може бути один із трьох випадків:

$$\text{(i) } x^n > a, \ \text{(ii) } x^n < a, \text{(iii) } x^n = a.$$

Припустимо спочатку, що правильне співвідношення (i) $x^n > a$. Тоді $\Delta := x^n - a > 0$. Нехай $m \in \mathbf{N}$ таке, що $x > \frac{1}{m} \Leftrightarrow m > \frac{1}{x}$. Згідно з нерівністю Бернуллі (див. вправу 27), маємо

$$\left(x - \frac{1}{m}\right)^n > x^n - \frac{nx^{n-1}}{m}.$$

Накладемо на число m додаткову умову

$$\frac{nx^{n-1}}{m} < \Delta \Leftrightarrow m > \frac{nx^{n-1}}{\Delta},$$

тобто m потрібно взяти таким, щоб

$$m > \max\left\{\frac{1}{x}, \frac{nx^{n-1}}{\Delta}\right\}.$$

Тоді

$$\left(x - \frac{1}{m}\right)^n > x^n - \Delta = a;$$

отже, $x - \frac{1}{m} \notin A$. Тому

$$\forall z > x - \frac{1}{m}: \ z \notin A;$$

звідки $x = \sup A \leqslant x - \frac{1}{m}$, що суперечить означенню числа x.

Розглянемо випадок (ii) $x^n < a$. При цьому $\delta := a - x^n > 0$. Для $m \in \mathbf{N}$ такого, що

$$\frac{1}{m} < \frac{x}{2n} \Leftrightarrow m > \frac{2n}{x},$$

згідно з нерівністю вправи 28 маємо

$$\left(x + \frac{1}{m}\right)^n < x^n + \frac{2nx^{n-1}}{m}.$$

Якщо тепер $m \in \mathbf{N}$ таке, що

$$m > \max\left\{\frac{2n}{x}, \frac{2nx^{n-1}}{\delta}\right\},$$

то $\left(x + \frac{1}{m}\right)^n < x^n + \delta = a$.

Отже, число $x + \frac{1}{m} \in A$ і $x + \frac{1}{m} > x$, що неможливо за означенням числа x. Знову маємо суперечність.

Таким чином, випадки (i) і (ii) приводять до суперечності і тому справедлива рівність $x^n = a$, причому число x, яке задовольняє цю рівність, єдине. ⌋

Означення 1. Нехай $a > 0$ і $n \in \mathbf{N}$. ***Коренем*** n-го ***степеня*** з додатного числа a називається єдине додатне число x, для якого виконується рівність $x^n = a$.

Позначення: $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Якщо $a > 0$, а $r \in \mathbf{Q}$ і $r > 0$, то

$$a^r := (a^m)^{\frac{1}{n}}, \text{ де } r = \frac{m}{n}, \ \{m, n\} \subset \mathbf{N}.$$

Означення 2. Нехай $a > 1$, $b > 0$. Покладемо

$$a^b := \sup_{n \geqslant 0} a^{b_n'}.$$

Ця операція піднесення до степеня має всі відомі з шкільного курсу математики властивості. Домовимося також вважати, що для $n \in \mathbf{N}$ $\sqrt[n]{0} := 0$.

Вправи

29*. Перевірити коректність означення 2. Розглянути випадок $0 < a < 1$. Довести, що при $a > 1$

$$a^b = \sup_{n \geqslant 0} (a'_n)^{b'_n}.$$

30. Числа, які не є алгебраїчними, називаються *трансцендентними* [1]. Довести, що множина цих чисел має потужність континуум.

31. Довести, що $\sup\limits_{n \geqslant 1} \{\sqrt{n}\} = 1$.

31*. Довести що

$$\inf_{n \geqslant 0} \sin n = -1, \quad \sup_{n \geqslant 0} \sin n = 1.$$

Вказівка. Використати без доведення те, що $\pi \in \mathbf{Q}$.

3.7. ЛЕМА ПРО ВКЛАДЕНІ ВІДРІЗКИ

ТЕОРЕМА. Нехай $\{[a_n, b_n] : n \geqslant 1\}$ — послідовність відрізків, для яких виконані умови:

1) $\forall n \geqslant 1 : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbf{N} : b_n - a_n < \varepsilon$.

Тоді

$$\exists! x \in \mathbf{R} \ \forall n \geqslant 1 : x \in [a_n, b_n],$$

тобто

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

$\vdash$ Оскільки

$$[a, b] \subset [c, d] \Leftrightarrow c \leqslant a < b \leqslant d,$$

то за умовою 1)

$$\forall n \geqslant 1 : a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n < b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_1.$$

Розглянемо множину $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ і доведемо, що при будь-якому $m \in \mathbf{N}$ число b_m — верхня межа для множини A. Дійсно, якщо $n \leqslant m$ то за умовою 1)

$[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n] \Leftrightarrow a_n \leqslant a_m < b_m \leqslant b_n$, звідки $a_n < b_m$.

Якщо ж $n > m$, то за цією умовою

$[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \Leftrightarrow a_m \leqslant a_n < b_n \leqslant b_m$ і знову $a_n < b_m$.

За теоремою про існування точної верхньої межі

$$\exists x \in \mathbf{R} : x = \sup A,$$

[1] Від лат. — transcendo — такий, що виходить за межі.

причому згідно з означенням точної верхньої межі

$$\forall n \in \mathbf{N}: \ a_n \leqslant x$$

і

$$\forall m \in \mathbf{N}: \ x \leqslant b_m.$$

Тому

$$\forall n \in \mathbf{N}: \ x \in [a_n, b_n].$$

Нехай $y \in \mathbf{R}$ таке число, що

$$\forall n \in \mathbf{N}: \ y \in [a_n, b_n].$$

Припустимо, що $y \geqslant x$. З умови 2) випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbf{N}: 0 \leqslant y - x \leqslant b_n - a_n < \varepsilon,$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0: \ 0 \leqslant y - x < \varepsilon,$$

звідки $y = x$ (якщо $y > x$, то досить взяти $\varepsilon = \frac{1}{2}(y - x)$, щоб одержати суперечність). —|

Вправи.

33. Довести, що теорема не має місця, якщо замість відрізків розглядати інтервали або півінтервали. Розглянути послідовність $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right] : n \geqslant 1\right\}$.

34. Як зміниться твердження теореми, якщо випустити умову 2)?

35*. Прийнявши твердження теореми за аксіому, довести теорему про існування точних меж.

36. (**Теорема Хеллі**). Будь-яка система відрізків, кожні два з яких мають спільну точку, має непустий перетин.

§ 4. НЕРІВНОСТІ КОШІ[1]

4.1. ПОЗНАЧЕННЯ. ПЕРША НЕРІВНІСТЬ

Для суми й добутку дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ введемо такі позначення:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n =: \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n =: \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

[1] *Коші Огюстен Луї* (1789—1857)—видатний французький математик. Багато уваги приділяв логічній побудові математичного аналізу. Автор ряду фундаментальних понять і результатів в математичному аналізі, теорії аналітичних функцій, геометрії, математичній фізиці. Написав понад 800 наукових праць.

Вправа

1. Довести що:

а) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i$;

б) $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k$;

в) $\sum_{k=1}^{2m} a_k = \sum_{i=1}^{m} a_{2i} + \sum_{i=1}^{m} a_{2i-1}$;

г) $\sum_{k=1}^{n} (ca_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad c \in \mathbf{R}$;

д) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$.

ТЕОРЕМА. (Нерівність Коші). Нехай для $n \in \mathbf{N}$

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbf{R}.$$

Тоді

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

причому знак рівності може бути тоді й тільки тоді, коли

$$\exists \lambda \in \mathbf{R}\ \exists \mu \in \mathbf{R}, |\lambda| + |\mu| \neq 0\ \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}:$$

$$\lambda a_k = \mu b_k.$$

— Покладемо

$$A := \sum_{k=1}^{n} a_k^2; \quad B := \sum_{k=1}^{n} b_k^2; \quad C := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Якщо $A = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}: a_k = 0$, то бажана нерівність виконується зі знаком рівності і в умові можна покласти $\lambda = 1$, $\mu = 0$.

Якщо $A > 0$, то квадратний тричлен

$$p(x) := \sum_{k=1}^{n} (xa_k + b_k)^2 = Ax^2 + 2Cx + B \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

а тому $C^2 - A \cdot B \leqslant 0$, причому знак рівності може бути тоді й тільки тоді, коли

$$\exists x_0 \in \mathbf{R}: \ p(x_0) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}: \ x_0 a_k + b_k = 0.$$

В умові можна покласти $\lambda = x_0$, $\mu = -1$. ⌋

Вправи

2. Довести, що

$$\forall \{a, b\} \subset \mathbf{R}: \ |ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

причому знак рівності може бути тоді й тільки тоді, коли $|a| = |b|$.

3. Нехай в позначеннях доведення теореми $A = 1$, $B = 1$. Згідно з вправою 2, маємо

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(a_k^2 + b_k^2) = 1.$$

На підставі цієї нерівності довести нерівність Коші.

4. Нехай $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}$. Довести, що

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| < \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

5. Нехай $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset (0, +\infty)$. Довести, що

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant n^2.$$

6. Нехай $\{a_k, b_k, c_k \mid 1 \leqslant k \leqslant n\} \subset \mathbf{R}$. Довести, що

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^4 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^4 \sum_{k=1}^{n} b_k^4 \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)^2.$$

7. Нехай $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}$. Довести що

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant (n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_1 a_2\right).$$

8. Нехай числа $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}$ задовольняють умову $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$.

Для таких наборів визначити найменше значення $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

9. Для наборів вправи 8 визначити найменше значення суми $\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^2$, де $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — фіксовані додатні числа.

10. Визначити мінімальне значення

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

при умові $\sum_{k=1}^{n} p_k a_k = 1$, де $p_1, p_2, \ldots, p_n$ задані числа.

11. Для будь-яких $\{a, b, c\} \subset \mathbf{R}$ довести нерівність $\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|$.

Вказівка. Домножити на суму; нерівність має просте геометричне тлумачення.

4.2. СЕРЕДНІ ЗНАЧЕННЯ Й НЕРІВНІСТЬ МІЖ НИМИ

Означення 1. Нехай $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}$. ***Середнім арифметичним чисел*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається число

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Вправа

12. Довести, що:

а) $\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k \leqslant A_n \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$;

б) $\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k < A_n < \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$,

якщо не всі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ однакові.

Означення 2. Нехай $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset [0, +\infty)$. ***Середнім геометричним чисел*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається число

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 a \ \ldots a_n}.$$

Вправа

13. Перевірити, що

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k \leqslant G_n \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k.$$

У якому випадку обидві нерівності строгі?

Означення 3. Нехай $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset (0, +\infty)$. ***Середнім гармонічним чисел*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається число

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Вправа

14. Довести, що

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n} a_k \leqslant H_n \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} a_k.$$

ТЕОРЕМА (Нерівність Коші). Для будь-якого набору $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset [0, +\infty)$ має місце нерівність

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

причому знак рівності може бути тоді й тільки тоді, коли $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Зазначимо, що ця нерівність виконується зі знаком рівності, якщо $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, оскільки тоді $A_n = G_n = a_1$, і що має місце строга нерівність, якщо хоча б одне з чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дорівнює нулю і вони не всі однакові. При $n = 1$ твердження очевидне.

Нехай числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ додатні й $n > 1$, тоді

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} > 0 \Leftrightarrow \frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 > -1.$$

За допомогою нерівності Бернуллі отримаємо

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n > 1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right) = \frac{A_{n-1} + nA_n - nA_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{a_n}{A_{n-1}},$$

і значить $A_n^n \geqslant a_n A_{n-1}^{n-1}$. Звідси

$$A_n^n \geqslant a_n A_{n-1}^{n-1} \geqslant a_n a_{n-1} A_{n-2}^{n-2} \geqslant \ldots \geqslant a_n a_{n-1} \ldots a_2 A_1^1 = G_n^n;$$

тому

$$A_n \geqslant G_n.$$

Оскільки $n > 1$, то знак рівності в нерівності Бернуллі може бути тоді й тільки тоді, коли $\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 = 0$, тобто коли $A_n = A_{n-1}$, звідки випливає, що $a_n = A_n = A_{n-1}$. Тому знак рівності в нерівності $A_n^n \geqslant G_n^n$ може бути тоді й тільки тоді, коли

$$a_n = A_{n-1}, a_{n-1} = A_{n-1} = A_{n-2}, \ldots, a_2 = A_2 = A_1 = a_1.$$

Вправи

15. Вивести нерівність Бернуллі з нерівності Коші.

Вказівка. Розглянути величину

$$\underbrace{\sqrt[n]{(1 + nx)\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}}_{n \text{ множників}}, \quad x > 0.$$

Таким чином, нерівності Бернуллі й Коші рівносильні.

16. Довести, що

$$H_n \leqslant G_n.$$

Рівність може бути тоді й тільки тоді, коли $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Таким чином,

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n.$$

17. Довести що

$$\forall n \geqslant 1: \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{2}{3}.$$

18. Нехай многочлен $x^{13} - 13x^{12} + \ldots - 1$ має 13 додатних коренів. Знайти їх.

19. Довести, що для $n \geqslant 1$

$$\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

20. Нехай $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset (0, 1)$. Довести що

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

21. Нехай $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1}$.
Довести що

$$A_n < A_{n+1}, \quad G_n < G_{n+1}, \quad H_n < H_{n+1}.$$

Глава 2 ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

§ 1. ОЗНАЧЕННЯ Й ПРИКЛАДИ

1.1. ОЗНАЧЕННЯ

В цьому розділі розглядаються властивості послідовностей дійсних чисел. В основному це властивості, які визначаються усіма членами послідовності, виключаючи довільне скінченне число членів.

Означення 1. Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ називається ***обмеженою***, якщо

$$\exists C \in \mathbf{R}\ \forall n \geqslant 1 : |a_n| \leqslant C.$$

Вправи

1. Визначити значення $x \in \mathbf{R}$, для яких послідовність $\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^n + x^{-n} : n \geqslant 1\right\}$ обмежена.

2. Довести обмеженість послідовностей:

а) $\left\{\frac{n}{2^n} : n \geqslant 1\right\}$; б) $\left\{\frac{2^n}{n!} : n \geqslant 1\right\}$;

в) $\{\sqrt{n^2 + (n-1)\sin n} - n : n \geqslant 1\}$;

г) $\left\{a_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}} : n \geqslant 1\right\}$;

д) $a_n = \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}}}_{n \text{ коренів}} : n \geqslant 1\}$.

3.* Довести, що послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ обмежена, якщо послідовність $\{a_n^3 - a_n : n \geqslant 1\}$ обмежена.

Означення 2. Нехай $x \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. ***Околом*** або ***ε-околом*** точки x називається інтервал

$$B(x, \varepsilon) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{y \in \mathbf{R} \mid |y - x| < \varepsilon\}.$$

Вправа

4. Довести, що

$$(a, b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right).$$

Переконатися, що перетин скінченного числа околів точки x є окіл точки x. Показати також, що перетин двох околів заданих точок є або $\varnothing$, або окіл деякої точки.

Означення 3. Число $a \in \mathbf{R}$ називається ***границею послідовності*** $\{a_n : n \geqslant 1\}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{R} \ \forall n \geqslant N : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Позначення:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n; \quad a_n \to a, \quad n \to \infty.$$

При цьому також кажуть, що ***послідовність*** $\{a_n : n \geqslant 1\}$ ***збігається до числа*** a, або ***має границю*** a. Послідовність, яка збігається до деякої границі називається ***збіжною***, в усіх інших випадках — ***розбіжною***.

Зауваження 1. Звернемо увагу на те, що

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in B(a, \varepsilon).$$

Зазначимо також, що

$$\exists N \in \mathbf{R} \ \forall n \geqslant N \ldots \Leftrightarrow \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N \ldots .$$

2. В означенні 3 для кожного $\varepsilon > 0$ будь-яке з чисел деякої множини $A_\varepsilon \subset \mathbf{R}$ можна брати за N. Наприклад, якщо число N задовольняє умову означення 3, то будь-яке число $N + C$, де $C > 0$, також задовольняє цю умову. Число $N = N(\varepsilon)$ в означенні 3 є одне (будь-яке) з чисел A_ε. Взагалі множина A_ε змінюється із зміною ε, як правило, «зсувається» вправо із зменшенням ε. У деяких випадках можна знайти $\inf A_\varepsilon$, тоді можна покласти $N = \inf A_\varepsilon + 1$.

Вправи

5. Для яких послідовностей число N з означення 3 можна брати незалежним від ε?

6. Довести, що границя послідовності не залежить від порядку розташування її членів або, точніше, що для збіжної до числа a послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$ і будь-якої бієкції $\sigma; \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ послідовність $\{a_{\sigma(n)} : n \geqslant 1\}$ також збігається до a.

7. Довести, що:

а) $a_n \to a, n \to \infty \Leftrightarrow |a_n - a| \to 0, n \to \infty$;

б) $a_n \to a, n \to \infty \Rightarrow |a_n| \to |a|, n \to \infty$; $a_n \to 0, n \to \infty \Leftrightarrow |a_n| \to 0, n \to \infty$.

в) $a_n \to 0, n \to \infty \Leftrightarrow \sup\limits_{k \geqslant n} |a_k| \to 0, \quad n \to \infty$;

г) $a_n \to a, n \to \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} : \{a_N, a_{N+1} \ldots\} \subset B(a, \varepsilon)$.

8. Яка властивість послідовності міститься в твердженні:
а) $\exists a \in R\ \exists \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N : |a_n - a| < \varepsilon$?
б) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N : |a_n - a| \geqslant \varepsilon$?.
Навести приклад такої послідовності.
9. У позначеннях п. 3.4 глави 1 довести, що

$$a = \lim_{n\to\infty} a'_n = \lim_{n\to\infty} a''_n .$$

ТЕОРЕМА. Послідовність дійсних чисел може мати тільки одну границю.

$\ulcorner$ Нехай $a_n \to a, n \to \infty$ і $a_n \to b,\ n \to \infty$.

Тоді, згідно з означеннням 3

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n \geqslant N_1 :\ |a_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n \geqslant N_2 :\ |a_n - b| < \varepsilon.$$

Тому для $n \geqslant \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ отримаємо

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leqslant |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon;$$

звідки випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 :\ |a - b| < 2\varepsilon,$$

і тому $a = b$ (якщо $|a - b| > 0$, то, поклавши $\varepsilon = \frac{1}{3}|a - b|$, отримаємо $\frac{1}{3}|a - b| < 0$, що неможливо). $\lrcorner$

1.2. ПРИКЛАДИ

Результати, що містяться у наведених прикладах, важливі у подальшому й постійно використовуються при розв'язанні задач.

Приклади. 1. Послідовність $\{a, a, \ldots, a, \ldots\}$ $a \in R$ збігається до a. Для довільного $\varepsilon > 0$ число N можна взяти рівним 1.

2. Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$\ulcorner$ Оскільки нерівність $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$, виконується для всіх $n > \frac{1}{\varepsilon}$, то в означенні 3 можна покласти $N = N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + 1$. $\lrcorner$

Вправа

10. Довести, що:

а) $\forall k \in \mathbf{N}: \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0;$

б) $\forall \alpha > 0: \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$

Приклади. 3. Нехай $a \in \mathbf{R}$, $|a| > 1$. Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$.

$\vdash$ Покладемо $|a| = 1 + x$, де $x := |a| - 1 > 0$. Згідно з нерівністю Бернуллі

$$\forall n \in \mathbf{N}: (1+x)^n \geqslant 1 + nx > nx,$$

Отже, $\forall n \in \mathbf{N}: \frac{1}{|a|^n} < \frac{1}{xn}$.

Нехай тепер $N(\varepsilon) = \frac{1}{x\varepsilon} + 1$, де $\varepsilon > 0$. Тоді

$$\forall n \geqslant N(\varepsilon): \left|\frac{1}{a^n} - 0\right| = \frac{1}{|a|^n} < \frac{1}{nx} < \varepsilon. \quad \dashv$$

4. Нехай $a \in \mathbf{R}$ і $|a| < 1$. Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

$\vdash$ Покладемо $b = \frac{1}{a}$ при $a \neq 0$. Тоді $|b| > 1$ і $a^n = \frac{1}{b^n}$; $n \geqslant 1$. $\dashv$

5. Нехай $a \in \mathbf{R}$, $|a| > 1$ і $\alpha \in \mathbf{R}$. Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

$\vdash$ Нехай $k \in \mathbf{N}$, таке, що $k \geqslant \alpha + 1$. Оскільки $|a|^{\frac{1}{k}} > 1$, то $|a|^{\frac{1}{k}} = 1 + x$, де $x := |a|^{\frac{1}{k}} - 1 > 0$. Згідно з нерівністю Бернуллі маємо

$$\forall n \in \mathbf{N}: |a|^{\frac{n}{k}} = (1+x)^n \geqslant 1 + nx > nx.$$

Отже, $\frac{n^{k-1}}{|a|^n} < \frac{1}{nx^k}$, $n \in \mathbf{N}$.

Покладемо в означенні 3 $N(\varepsilon) = \frac{1}{x^k\varepsilon} + 1$, де $\varepsilon > 0$. Тоді

$$\forall n \geqslant N(\varepsilon): \left|\frac{n^\alpha}{a^n} - 0\right| = \frac{n^\alpha}{|a|^n} < \frac{n^{k-1}}{|a|^n} < \varepsilon. \quad \dashv$$

Вправа

11. Нехай $a \in \mathbf{R}$, $|a| < 1$ і $\alpha \in \mathbf{R}$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} (n^\alpha \cdot a^n) = 0$.

Приклади. 6. Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} = 0$.

$\vdash$ Спочатку зазначимо, що для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $n \in \mathbf{N}$

$$0 \leqslant \frac{\lg n}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \lg n < n\varepsilon \Leftrightarrow n < 10^{n\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{n}{(10^\varepsilon)^n} < 1.$$

Оскільки $10^{\varepsilon} > 1$, то згідно з прикладом 5

$$\frac{n}{(10^{\varepsilon})^n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отже, за означенням границі для числа 1

$$\exists N = N(1) \ \exists n \geqslant N: \ \frac{n}{10^{\varepsilon n}} < 1.$$

Тому

$$\forall n \geqslant N: \ \frac{\lg n}{n} < \varepsilon. \qquad \lrcorner$$

7. Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$\ulcorner$ Поклавши в нерівності Коші $a_1 = a_2 = \sqrt{n}$, $a_3 = a_4 = \ldots$ $\ldots = a_n = 1$, отримаємо для $n > 1$

$$1 < \sqrt[n]{n} < \frac{2\sqrt{n} + (n-2)}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Звідси $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$. Для $\varepsilon > 0$ покладемо $N(\varepsilon) = \frac{4}{\varepsilon^2} + 1$. Тоді

$$\forall n \geqslant N(\varepsilon): \ |\sqrt[n]{n} - 1| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon. \qquad \lrcorner$$

Вправи

12. Довести, що $\forall a > 0: \ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

13. Довести, що:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+2} = 1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + |\sin n|} = 1$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

д) $\forall \alpha > 0 \quad \forall \beta \in \mathbf{R}: \ \frac{\lg^{\beta} n}{n^{\alpha}} \to 0, \quad n \to \infty$.

Приклад 8. Доведемо, що послідовність $\{a_n = n : n \geqslant 1\}$ не має границі.

$\ulcorner$ Для доведення треба упевнитися, що будь-яке число $a \in \mathbf{R}$ не задовольняє означенню 3. Дійсно, для будь-якого $a \in \mathbf{R}$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ окіл $B(a, \varepsilon)$ містить не більше як $1 + [2\varepsilon]$ цілих чисел. Тому, починаючи з деякого номера, всі члени послідовності не лежать в $B(a, \varepsilon)$. $\lrcorner$

Означення.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall C \in \mathbf{R} \ \exists N \in \mathbf{R} \ \forall n \geqslant N: \ a_n \geqslant C;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall C \in \mathbf{R} \ \exists N \in \mathbf{R} \ \forall n \geqslant N: \ a_n \leqslant C.$$

Вправи

14. Довести, що послідовність $\left\{\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1-\frac{1}{4}, \ldots\right\}$ не має границі.

15. Нехай $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

16*. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^{\sqrt{n}}} = 0.$

17*. Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ така, що $\frac{a_n}{n} \to 0$, $n \to \infty$. Довести, що

$$\frac{\max(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

18*. Нехай $a_n \to a$, $b_n \to b$, $n \to \infty$. Довести, що

$$\max\{a_n, b_n\} \to \max\{a, b\}, \quad n \to \infty.$$

19. Показати, що границя послідовності не залежить від довільної зміни довільного фіксованого скінченного числа членів послідовності.

20. Довести, що послідовність $\{\{\sqrt{n}\} : n \geqslant 1\}$ не має границі.

21. Довести, що послідовність $\{\sin n : n \geqslant 1\}$ не має границі.

22. Довести, що $\forall a \in \mathbf{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

Вказівка. $\forall a \in \mathbf{R}\ \exists\ k \in \mathbf{N}$: $k+1 > |a|$ і для $n > k$

$$\frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^k}{k!} \cdot \frac{|a|}{k+1} \cdot \frac{|a|}{k+2} \cdot \frac{|a|}{k+3} \cdots \frac{|a|}{n} < \frac{|a|^k}{k!} \left(\frac{|a|}{k+1}\right)^{n-k},$$

$$\frac{|a|}{k+1} < 1.$$

23*. Нехай $a > 0$. Для довільного фіксованого $x_0 > 0$ розглянемо послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$, члени якої визначаються із співвідношення

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right), \quad n \geqslant 1; \quad a_0 = x_0.$$

Довести, що $a_n \to \sqrt{a}$, $n \to \infty$.

Вказівка. За допомогою принципу математичної індукції упевнитися, що

$$\frac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{a_0 - \sqrt{a}}{a_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}, \quad n \geqslant 1,$$

звідки

$$\frac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

На підставі цього співвідношення отримати потрібне твердження.

24*. Навести приклад обмеженої послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$, яка не має границі і для якої $a_{n+1} - a_n \to 0$, $n \to \infty$.

§ 2. ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

2.1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ

ТЕОРЕМА 1. Збіжна послідовність обмежена.

$\vdash$ Нехай $a_n \to a$, $n \to \infty$, $a \in \mathbf{R}$. Згідно з означенням границі послідовності для числа $\varepsilon = 1$

$$\exists \bar{n} \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant \bar{n}: |a_n - a| < 1$$

Покладемо

$$C := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{\bar{n}-1}|, |a| + 1\}.$$

Тоді для n, $1 \leqslant n \leqslant \bar{n} - 1$ маємо: $|a_n| \leqslant C$. Для $n \geqslant \bar{n}$

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leqslant |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leqslant C;$$

отже,

$$\forall n \geqslant 1: |a_n| \leqslant C. \qquad \dashv$$

Вправа

1. Навести приклад обмеженої послідовності, яка не має границі.

ТЕОРЕМА 2. Нехай $a_n \to a$, $n \to \infty$, $a \in \mathbf{R}$ і число $b > a$. Тоді

$$\exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N: a_n < b.$$

$\vdash$ В означенні границі послідовності візьмемо $\varepsilon = b - a > 0$.

Тоді

$$\exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N:$$
$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon = b. \qquad \dashv$$

Вправи

2. Нехай $a_n \to a$, $n \to \infty$ і $c < a$. Тоді

$$\exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N: a_n > c.$$

Довести це твердження.

3. Нехай $a_n \to a > 0$, $n \to \infty$. Довести, що

$$\exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N: a_n > 0.$$

Довести твердження: якщо $a_n \to a \neq 0$, $n \to \infty$, то

$$\exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N: a_n \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 3. Нехай для послідовностей $\{a_n : n \geqslant 1\}$ і $\{b_n : n \geqslant 1\}$ виконуються умови:

1) $a_n \to a$, $b_n \to b$, $n \to \infty$;
2) $\forall n \geqslant 1: a_n \leqslant b_n$.

Тоді $a \leqslant b$.

$\ulcorner$ Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Із умови 1), нерівності $a - \varepsilon < a$ і теореми 2

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N_1 : \ a - \varepsilon < a_n.$$

Аналогічно

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N_2 : \ b_n < b + \varepsilon.$$

Для $n \geqslant N := \max\{N_1, N_2\}$, приймаючи до уваги умову 2), маємо $a - \varepsilon < a_n \leqslant b_n < b + \varepsilon$. Тому

$$a - \varepsilon < b + \varepsilon \Leftrightarrow a - b < 2\varepsilon.$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0 : \ a - b < 2\varepsilon;$$

тому $a - b \leqslant 0 \Leftrightarrow a \leqslant b$. $\lrcorner$

Вправи

4. Навести приклад послідовностей, для яких умова 2) теореми 3 виконується у посиленій формі: $a_n < b_n$, $n \geqslant 1$, але для яких $a = b$.

5. Показати, що твердження теореми 3 зберігається, якщо умову 2) замінити на більш слабку:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 : \ a_n \leqslant b_n.$$

ТЕОРЕМА 4 (про три послідовності). Нехай для послідовностей $\{a_n : n \geqslant 1\}$, $\{b_n : n \geqslant 1\}$ і $\{c_n : n \geqslant 1\}$ виконуються умови:

1) $\forall n \geqslant 1 : \ a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$;
2) $a_n \to a$, $c_n \to a$, $n \to \infty$.

Тоді $b_n \to a$, $n \to \infty$.

$\ulcorner$ Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Згідно з теоремою

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N_1 : \ a - \varepsilon < a_n;$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N_2 : \ c_n < a + \varepsilon.$$

Тоді для $n \geqslant N := \max\{N_1, N_2\}$ маємо

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < a + \varepsilon;$$

звідки випливає, що

$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |b_n - a| < \varepsilon.$$ $\lrcorner$

Вправа

6. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\sin n^2}{n+\cos n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+(-1)^n}$;

Вказівка. Використати результат прикладу 7 п. 1.2.

ТЕОРЕМА 5. Припустимо, що

$$a_n \to a \in \mathbf{R},\ b_n \to b \in \mathbf{R},\ n \to \infty.$$

Тоді:

а) $\forall c \in \mathbf{R}:\ (ca_n) \to ca,\ n \to \infty$, або $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

б) $a_n + b_n \to a + b,\ n \to \infty$, або $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

в) $a_n \cdot b_n \to ab,\ n \to \infty$, або $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

г) якщо додатково $b \neq 0$, то

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b},\ n \to \infty, \text{ або } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

в) Спочатку зазначимо, що

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leqslant \tag{1}$$
$$\leqslant |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b|.$$

Для заданого $\varepsilon > 0$ згідно з теоремою 1

$$\exists C > 0\ \forall n \geqslant 1:\ |b_n| \leqslant C,$$

а за означенням границі послідовності

$$\exists N_1 \in \mathbf{N}\ \forall n \geqslant N_1:\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C};$$

$$\exists N_2 \in \mathbf{N}\ \forall n \geqslant N_2:\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}.$$

Для $n \geqslant N := \max\{N_1, N_2\}$ за допомогою нерівності (1) маємо

$$|a_n b_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2C} \cdot C + |a| \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} < \varepsilon.$$

г) Нехай, наприклад, $b > 0$. За теоремою 2

$$\exists N_1 \in \mathbf{N}\ \forall n \geqslant N_1;\ b_n > \frac{b}{2},$$

а згідно з означенням границі послідовності

$$\exists N_2 \in \mathbf{N}\ \forall n \geqslant N_2:\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon b}{4};$$

$$\exists N_3 \in \mathbf{N}\ \forall n \geqslant N_3:\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{4(1+|a|)}.$$

Тоді для $n \geqslant N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$ отримаємо

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b b_n}\right| = \frac{|a_n b - ab + ab - a b_n|}{|b b_n|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a|}{|b||b_n|}|b_n - b| <$$

$$< \frac{2}{b}\frac{\varepsilon b}{4} + \frac{2|a|}{b \cdot b} \cdot \frac{\varepsilon b^2}{4(1+|a|)} < \varepsilon. \qquad \lrcorner$$

Вправи

7. Довести твердження а) і б) теореми 5.
8. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 3n + \lg n + 1}{3n^2 + \sqrt{n} + \sin 1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n + 2b^n}{3a^n + 3b^4}$,

де $a > 0$, $b > 0$.

Приклад 1. Доведемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 2^n + 3^n} = 3.$$

$\ulcorner$ Використаємо нерівності

$$3 = \sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{n^2 2^n + 3^n} < \sqrt[n]{2n^2 3^n}, \quad n \geqslant 1.$$

В теоремі 4 покладемо для $n \geqslant 1$:

$$a_n = 3, \quad b_n = \sqrt[n]{n^2 2^n + 3^n}, \quad c_n = \sqrt[n]{2n^2 3^n}.$$

Маємо $a_n \to 3$, $n \to \infty$ і

$$c_n = \sqrt[n]{2}\,(\sqrt[n]{n})^2 \cdot 3 \to 3, \quad n \to \infty$$

згідно з теоремою 5. $\lrcorner$

Вправи

9. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3 + k}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} k^{\pi}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k\cdot 3^{n-k}}$; г*) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^\alpha]{\sum\limits_{k=1}^{n} k^n}$, де $\alpha=1$, $\alpha=2$.

10. Нехай $\{a_n : n\geqslant 1\}$ — обмежена, а $b_n\to 0$, $n\to\infty$. Довести, що $a_n b_n\to 0$ $n\to\infty$.

11. Нехай $a_n\to+\infty$, $n\to\infty$ і $\forall n\geqslant 1: b_n\geqslant C\in\mathbf{R}$. Довести, що $a_n+b_n\to+\infty$, $n\to\infty$.

12. Нехай $\forall n\geqslant 1: a_n\geqslant 0$ і $a_n\to a$, $n\to\infty$. Довести, що

$$\forall k\in\mathbf{N}:\ \sqrt[k]{a_n}\to\sqrt[k]{a},\quad n\to\infty.$$

13*. Нехай $a_0=a_1=1$ і $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $n\geqslant 2$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

2.2. ЛІНІЙНЕ РЕГУЛЯРНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

Нехай

$$\{c_{nk}\,|\,1\leqslant k\leqslant n;\, n\geqslant 1\}\subset\mathbf{R} \tag{1}$$

набір фіксованих чисел. Для послідовності $\{a_n : n\geqslant 1\}$ розглянемо послідовність $\{b_n : n\geqslant 1\}$, загальний член якої

$$b_n=\sum_{k=1}^{n} c_{nk}a_k,\quad n\geqslant 1.$$

Виникає питання: при яких умовах для чисел (1) правильне твердження: для будь-якої збіжної послідовності $\{a_n;\ n\geqslant 1\}$ послідовність $\{b_n : n\geqslant 1\}$ також збігається до тієї ж границі?

ТЕОРЕМА (теорема Тьопліца[1] про регулярне перетворення послідовності). Нехай числа

$$\{c_{nk}\,|\,1\leqslant k\leqslant n;\, n\geqslant 1\}$$

задовольняють умовам:

1) $\forall k\in\mathbf{N}:\ c_{nk}\to 0,\ n\to\infty$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk}\to 1,\ n\to\infty$;

[1] *Тьопліц Отто* (1881—1940) — німецький математик.

3) $\exists C > 0 \ \forall n \geqslant 1: \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| \leqslant C.$

Тоді для будь-якої збіжної послідовності чисел $\{a_n : n \geqslant 1\}$ послідовність чисел

$$\left\{b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk} a_k : n \geqslant 1\right\}$$

також збігається і

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

$\ulcorner$ Для послідовності $\{a_n = a : n \geqslant 1\}$, $a \in \mathbf{R}$ згідно з умовою 2)

$$b_n = a \sum_{k=1}^{n} c_{nk} \to a, \quad n \to \infty.$$

Тому досить розглянути випадок, коли $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Нерівність

$$|b_n - 0| = |b_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_{nk} a_k\right| \leqslant \sum_{n=1}^{m-1} |c_{nk}||a_k| + \sum_{k=m}^{n} |c_{nk}||a_k| \tag{2}$$

правильна для будь-якого m, $1 < m \leqslant n$.

Нехай тепер $\varepsilon > 0$ задане. Згідно з означенням границі послідовності

$$\exists N_1 \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N_1 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{2C}, \tag{3}$$

крім того, за теоремою 1 (п. 2.1)

$$\exists D > 0 \ \forall n \geqslant 1 : |a_n| \leqslant D. \tag{4}$$

Нехай у подальшому у нерівності (2) $n \geqslant N_1$ і $m = N_1$. Згідно з умовою 1) теореми

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, N_1 - 1\} : c_{nk} \to 0, \ n \to \infty, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |c_{nk}| \to 0, n \to \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{N_1-1} |c_{nk}| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Звідси

$$\exists N_2 \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N_2 : \sum_{k=1}^{N_1-1} |c_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2D}. \tag{5}$$

Тоді для номерів $n \geqslant N := \max\{N_1, N_2\}$ з нерівності (2), враховуючи (3) — (5) і умову 3) теореми, отримаємо

$$|b_n - 0| \leqslant D \sum_{k=1}^{N_1-1} |c_{nk}| + \frac{\varepsilon}{2C} \sum_{k=N_1}^{n} |c_{nk}| <$$

$$< D \frac{\varepsilon}{2D} + \frac{\varepsilon}{2C} \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2C} \cdot C = \varepsilon. \qquad \rfloor$$

Вправи

14. Довести, що умови 1) і 2) теореми Тьопліца необхідні.

Вказівка. Розглянемо послідовності

$$\{a_n = 1 : n \geqslant 1\} \text{ і } \{0, 0, \ldots, 0, \underset{k\text{-те місце}}{1}, 0, \ldots\}.$$

Зауваження. Умови 1)—3) теореми Тьопліца необхідні й достатні. Проте доведення необхідності умови 3) дещо складніше і тут не наводиться.

15. Довести, що якщо в теоремі Тьопліца $c_{nk} > 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $n \geqslant 1$, то умову 3) можна опустити й тоді

$$a_n \to +\infty,\ n \to \infty \Rightarrow b_n \to +\infty,\ n \to \infty.$$

16. Довести, що

$$a_n \to a,\ n \to \infty \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a, \quad n \to \infty.$$

17. Нехай $a_n \to a$, $n \to \infty$. Довести, що

$$\frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 1 \cdot (a_n)}{n^2} \to \frac{a}{2}, \quad n \to \infty.$$

18. Нехай $a_n > 0$, $n \geqslant 1$ і $a_n \to a$. $n \to \infty$. Довести, що

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \to a, \quad n \to \infty.$$

19. Нехай $a_n > 0$, $n \geqslant 1$ і $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a$, $n \to \infty$. Довести, що $\sqrt[n]{a_n} \to a$, $n \to \infty$.

20*. Нехай $a_n \to a$, $b_n \to b$, $n \to \infty$. Довести, що

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_n b_1}{n} \to ab, \quad n \to \infty.$$

2.3. ТЕОРЕМА ШТОЛЬЦА

ТЕОРЕМА. Припустимо, що послідовності $\{x_n : n \geqslant 1\}$ і $\{y_n : n \geqslant 1\}$ задовольняють умовам:

1) $\forall n \geqslant 1 : \ y_n < y_{n+1}$;

2) $y_n \to +\infty, \ n \to \infty$;

3) існує $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a, \quad a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a$.

$\vdash$ Можна припустити, що $y_1 > 0$. Покладемо: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$;

$$c_{nk} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad n \geqslant 1;$$

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \quad n \geqslant 1.$$

Числа $\{c_{nk}\}$ задовольняють умовам теореми Тьопліца:

$$c_{nk} > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n; \quad n \geqslant 1;$$

$$\forall k \geqslant 1 : \ c_{nk} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \to 0, \ n \to \infty;$$

згідно з умовою 2):

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk} = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} = 1, \quad n \geqslant 1.$$

Тому згідно з теоремою Тьопліца

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} = \frac{x_n}{y_n} \to a, \quad n \to \infty. \ \dashv$$

Вправи

21. Довести, що $\dfrac{n^2}{2^n} \to 0, \ n \to \infty$.

Вказівка. Застосувати двічі теорему Штольца.

22. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}, \quad k \in \mathbf{N}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^{n+1}}\left(a+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}+\ldots+\frac{a^n}{n}\right), \quad a>1;$

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+1\cdot a+2\cdot a^2+\ldots+na^n}{na^{n+1}}; \quad a>1;$

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}}\left(k!+\frac{(k+1)!}{1!}+\ldots+\frac{(k+n)!}{n!}\right), \quad k\in \mathbf{N}.$

23. Нехай $a_n \to a$, $n\to\infty$. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{k}}.$$

24. Нехай $a_n \to a$, $n\to\infty$. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1}+\frac{a_{n-1}}{2^1}+\frac{a_{n-2}}{2^2}+\ldots+\frac{a_1}{2^{n-1}}\right);$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1\cdot 2}+\frac{a_{n-1}}{2\cdot 3}+\frac{a_{n-2}}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{a_1}{n\cdot(n+1)}\right);$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1}-\frac{a_{n-1}}{2^1}+\frac{a_{n-2}}{2^2}-\ldots+(-1)^n\frac{a_1}{2^{n-1}}\right).$

25. Послідовність $\{a_n : n\geqslant 1\}$ така, що $a_{n+1}-a_n\to a\in \mathbf{R}$, $n\to\infty$. Довести, що $\frac{a_n}{n}\to a$, $n\to\infty$.

26*. Для послідовності $\{a_n : n\geqslant 1\}$ послідовність $u_n = 2a_n + a_{n-1}$, $n\geqslant 2$ збігається: $u_n\to u$, $n\to\infty$. Довести, що послідовність $\{a_n : n\geqslant 1\}$ збігається і знайти її границю.

27. Нехай виконуються умови 1) і 3) теореми Штольца, а також

$$x_n\to 0, \quad y_n\to 0, \quad n\to\infty.$$

Довести, що твердження теореми є вірним і при цих умовах.

§ 3. МОНОТОННІ ПОСЛІДОВНОСТІ

3.1. ІСНУВАННЯ ГРАНИЦІ МОНОТОННОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Означення. Послідовність $\{a_n : n\geqslant 1\}$ називається ***монотонно зростаючою у строгому*** сенсі, якщо

$$\forall n\geqslant 1:\ a_n < a_{n+1}.$$

Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ називається ***монотонно неспадною***, якщо

$$\forall n \geqslant 1 : a_n \leqslant a_{n+1}.$$

Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ називається ***монотонно спадною у строгому сенсі***, якщо

$$\forall n \geqslant 1 : a_n > a_{n+1}.$$

Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ називається ***монотонно незростаючою***, якщо

$$\forall n \geqslant 1 : a_n \geqslant a_{n+1}.$$

Послідовність будь-якого із чотирьох означених класів будемо називати також ***монотонною***.

Приклад 1. Послідовність $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ зростає у строгому сенсі: послідовність $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n \ldots\}$ не спадає, а послідовність $\{1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$ не є монотонною.

Вправи

1. Перевірити, що монотонно не спадна послідовність обмежена тоді й тільки тоді, коли вона обмежена зверху.

2. Довести, що послідовність $\{n2^{-n} : n \geqslant 2\}$ строго спадає.

3. Довести, що $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що послідовність

$$\{n2^{-\sqrt{n}} : n \geqslant n_0\}$$

строго спадає.

4. Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ така, що

$$\forall n \geqslant 1 : a_{n+1} \geqslant a_n - \frac{1}{2^n}.$$

Довести, що послідовність

$$\left\{b_n = a_n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} : n \geqslant 1\right\}$$

монотонно не спадає.

5*. Нехай для $c > 2$

$$a_1 = c^2; \qquad a_{n+1} = (a_n - c)^2, \quad n \geqslant 1.$$

Довести, що послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ строго зростає.

ТЕОРЕМА. Монотонна, обмежена послідовність дійсних чисел має границю.

⌈Розглянемо випадок неспадної послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$. Згідно з умовою теореми

$$\exists C \in \mathbb{R} \ \forall n \geqslant 1 : a_n \leqslant C.$$

Таким чином, множина значень послідовності

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

непуста й обмежена. За теоремою про існування точної верхньої межі

$$\exists a \in \mathbf{R}: \ a = \sup_{n \geqslant 1} a_n.$$

Доведемо, що $a_n \to a$, $n \to \infty$.

Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Для числа $a - \varepsilon < a$ згідно з означенням точної верхньої межі

$$\exists a_{n_0}: \ a_{n_0} > a - \varepsilon. \tag{1}$$

Крім того, $\forall n \geqslant 1: \ a_n \leqslant a$. Нехай $N := n_0$. Тоді

$$\forall n \geqslant N: \ a_{n_0} \leqslant a_n \leqslant a.$$

Отже, на основі нерівності (1)

$$\forall n \geqslant N: \ a - \varepsilon < a_n \leqslant a \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon. \qquad \dashv$$

Вправи

6. Довести, що при умовах попередньої теореми

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n = \sup_{n \geqslant 1} a_n$$

для монотонно не спадної послідовності і

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n = \inf_{n \to \infty} a_n$$

для монотонно не зростаючої послідовності.

7. Довести, що для строго зростаючої послідовності

$$\forall n \geqslant 1: \ a_n < a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

8. Нехай послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ монотонно не спадає й необмежена. Довести, що $a_n \to +\infty$, $n \to \infty$.

9. Перевірити, що твердження теореми має місце для послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$ такої, що $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ з властивістю: послідовність $\{a_n : n \geqslant n_0\}$ монотонна й обмежена.

Приклад 2. Доведемо, що $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$.

$\vdash$ Зазначимо, що

$$\frac{n^2}{2^n} > \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \Leftrightarrow (n-1)^2 > 2,$$

причому друга нерівність виконана для $n \geqslant 3$. Таким чином, послідовність $\left\{\dfrac{n^2}{2^n} ; n \geqslant 3\right\}$ додатних чисел строго спадає. Тоді

$$\exists a \in \mathbf{R}: \ a = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Перейшовши до границі в рівності

$$\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} \cdot \frac{n^2}{2^n}$$

отримаємо $a = \frac{1}{2} a$; звідки випливає, що $a=0$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$. —|

Вправи

10. Довести, що

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{2^{n^2}} = 0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2\sqrt{n}} = 0$.

11. Довести, що послідовність

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

збігається і знайти її границю.

12. Нехай $a_1 = 1$ і

$$a_n = \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} a_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Довести, що послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ збігається.

13. Нехай $a_1 = \frac{3}{2}$; $a_n^2 = 3a_{n-1} - 2$, $n \geqslant 2$.

Довести, що послідовність $\{a_n ; n \geqslant i\}$ збігається і знайти її границю.

14. Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ така, що

$$\forall n \geqslant 1 : 0 < a_n < 1, (1 - a_{n+1}) a_n > \frac{1}{4}.$$

Довести збіжність цієї послідовності і знайти її границю.

15*. Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ обмежена і

$$\forall n \geqslant 1 : a_{n+1} \geqslant a_n - \frac{1}{2^n}.$$

Довести, що послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ збігається.

16.* Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ обмежена і

$$\forall n \geqslant 1 : a_{n+2} \leqslant \frac{1}{3} a_{n+1} + \frac{2}{3} a_n.$$

Довести, що $\{a_n : n \geqslant 1\}$ збігається.

16.1. Нехай числа $\{a_{mn} \mid m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}\}$ такі, що

$$\forall n \in \mathbf{N} \ \forall m \in \mathbf{N} : a_{mn} \leqslant a_{m+1n}, a_{mn} \leqslant a_{mn+1}.$$

Довести, що

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{mn} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{mn}$$

(можливо, що обидві границі дорівнюють $+\infty$).

3.2. ЧИСЛО e

Розглянемо дві послідовності додатних чисел

$$\left\{a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \geqslant 1\right\};$$

$$\left\{b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : n \geqslant 1\right\}.$$

Доведемо для них такі властивості.

1°. $\forall n \geqslant 1 : a_n < b_n$;

2°. $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \geqslant 1\right\}$ строго зростає;

3°. $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : n \geqslant 1\right\}$ строго спадає.

$\vdash$ Дійсно, оскільки

$$b_n = a_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n + \frac{a_n}{n} > a_n, \quad n \geqslant 1,$$

то твердження 1° вірне.

Для доведення тверджень 2° і 3° застосуємо нерівність Я. Бернуллі

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n >$$

$$> \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{n}{n^2}\right) = 1, n \geqslant 2.$$

Звідси $a_n > a_{n-1}$, $n \geqslant 2$. Аналогічно

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n-1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} > \frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = 1$$

і тому $b_{n-1} > b_n$, $n \geqslant 2$. $\dashv$

З властивостей 1° — 3° маємо

$$\forall n \geqslant 1 : a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < \ldots < b_2 < b_1.$$

Таким чином, послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$ і $\{b_n : n \geqslant 1\}$ монотонні й обмежені. Згідно з теоремою про існування границі монотонної обмеженої послідовності послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ збігається до деякого додатного числа, яке позначають літерою e[1].

[1] Це позначення, як і позначення числа π, належить Л. Ейлеру.

Відомо, що число e трансцендентне, його наближене значення з точністю до 10^{-15} дорівнює

$$e \approx 2{,}718281828459045.$$

Число e — одна із найважливіших фундаментальних сталих в в математиці. Оскільки $b_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $n \geqslant 1$, то $b_n \to e$, $n \to \infty$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e;$$

$$\forall n \geqslant 1: \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (1)$$

Логарифми при основі e називаються ***натуральними*** і позначаються символом

$$\ln := \log_e.$$

Прологарифмувавши нерівності (1), отримаємо нерівності

$$\forall n \geqslant 1: \frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \qquad (2)$$

Вправи

17. Довести, що

$$\forall n \geqslant 1: 0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}.$$

18. Для $r \in \mathbf{Q}$, $r > 0$ обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{rn}$.

19. Довести, що для $x > 0$ послідовність

$$\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n : n \geqslant 1\right\}$$

строго зростає і обмежена.

Вказівка. Для доведення першого твердження покласти в нерівності Коші $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \frac{n-1+x}{n-1}$, $n \geqslant 2$, а для доведення обмеженості використати (1).

20. Довести, що послідовність $\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n : n \geqslant 1\right\}$ строго спадає і збігається до 1, а послідовність $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} : n \geqslant 1\right\}$ строго зростає і не обмежена.

21. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.

22. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}}{\ln n}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}}{\ln n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{1/n}+e^{2/n}+\ldots+e^{n/n}}{n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1)$.

23. Нехай $a_n \to a$, $n \to \infty$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = a.$$

24. Довести, що для $n > 1$

$$n^n e^{-n} \cdot e < n! < n^{n+1} e^{-n} \cdot e.$$

Вказівка. Перемножити нерівності (1), які відповідають значенням $1, 2, \ldots, n-1$.

25. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n!}{n^n e^{-n}}\right)^{1/n}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(n!)^2}{n^{2n}}\right)^{1/n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(n!)^3}{n^{3n} e^{-n}}\right)^{1/n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^{3n}}{(n!)^3}\right)^{1/n}$

§ 4. ПІДПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

4.1. ОЗНАЧЕННЯ

Нехай $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$. Розглянемо послідовність $\{m(k) : k \geqslant 1\} \subset \mathbf{N}$, у якій

$$1 \leqslant m(1) < m(2) < \ldots < m(k) < m(k+1) < \ldots .$$

Зазначимо, що оскільки $\forall k \geqslant 1 : m(k) \geqslant k$, то

$$m(k) \to +\infty, \quad k \to \infty.$$

Означення 1. Послідовність $\{a_{m(k)} : k \geqslant 1\}$ називається ***підпослідовністю*** вихідної послідовності.

Зауваження. Згідно з цим означенням, сама послідовність є підпослідовністю самої себе.

З означення випливає справедливість таких властивостей підпослідовностей:

1°. Якщо послідовність обмежена, то будь-яка її підпослідовність також обмежена.

2°. Якщо послідовність збігається до a (можливо, $a = +\infty$, або $a = -\infty$), то будь-яка її підпослідовність також збігається до a.

3°. Нехай $a_n \to a$, $n \to \infty$ (можливо, $a = +\infty$ або $a = -\infty$); $\{\nu(k) : k \geqslant 1\} \subset \mathbf{N}$ і $\nu(k) \to +\infty$, $k \to \infty$. Тоді $a_{\nu(k)} \to a$, $k \to \infty$

Вправи

1. Навести повні докази властивостей 1°—3°, а також відповісти на запитання: у чому полягає різниця між властивостями 2° і 3°?

2. Якщо послідовність монотонна й містить хоча б одну обмежену підпослідовність, то вона обмежена. Довести це.

3. Довести, що $a_n \to a$, $n \to \infty$ тоді й тільки тоді, коли будь-яка її підпослідовність містить у собі підпослідовність, що збігається до a.

4. Довести, що послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ збігається, якщо збігаються такі її підпослідовності:

$$\{a_{2k} : k \geqslant 1\}, \{a_{2k-1} : k \geqslant 1\}, \{a_{3k} : k \geqslant 1\}.$$

5. Довести, що існує розбіжна послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ така, що для довільного $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$ підпослідовність $\{a_{m \cdot k} : k \geqslant 1\}$ збігається,

Означення 2. Число $a \in \mathbf{R}$ ***називається частковою границею*** послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$, якщо існує підпослідовність $\{a_{m(k)} : k \geqslant 1\}$ така, що $a_{m(k)} \to a$, $k \to \infty$.

Значення $+\infty$ $(-\infty)$ називається ***частковою границею*** послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$, якщо існує підпослідовність $\{a_{m(k)} : k \geqslant 1\}$ така, що

$$a_{m(k)} \to +\infty \ (-\infty), \quad k \to \infty.$$

Нехай A — множина всіх часткових границь послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$.

Вправи

6. Довести, що $+\infty \in A$ $(-\infty \in A)$ тоді й тільки тоді, коли послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ не обмежена зверху (знизу).

7. Довести, що: (i) $A = \{a\}$, якщо $a_n \to a$, $n \to \infty$; (ii) для обмеженої послідовності множина $A \subset \mathbf{R}$ і обмежена.

8. Нехай $n \in \mathbf{N}$. Навести приклад послідовності, для якої $|A| = n$.

9*. Навести приклад послідовності, для якої $A = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

10*. Визначити множину A для послідовності:

а) $\{\sin \pi n\alpha : n \geqslant 1\}_{\alpha \in \mathbf{Q}}$; б) $\{\sin \pi n\alpha : n \geqslant 1\}_{\alpha \notin \mathbf{Q}}$;

в) $\{n\alpha - [n\alpha] : n \geqslant 1\}_{\alpha \in \mathbf{Q}}$; г) $\{n\alpha - [n\alpha] : n \geqslant 1\}_{\alpha \notin \mathbf{Q}}$,

д) $\left\{\frac{2n^2}{7} - \left[\frac{2n^2}{7}\right] : n \geqslant 1\right\}$;

е) $\{a_n : n \geqslant 1\}$, складеної із занумерованих в якому-небудь порядку елементів множини $\{\sqrt{n} - \sqrt[3]{m} \mid n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}\}$.

4.2. ВЛАСТИВОСТІ ПІДПОСЛІДОВНОСТЕЙ І ЧАСТКОВИХ ГРАНИЦЬ

ТЕОРЕМА 1 (про характеризацію часткової границі). Число $a \in \mathbf{R}$ буде частковою границею послідовності $\{a_m : n \geqslant 1\}$ тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbf{N} \ \exists \bar{n} = n(\varepsilon, N) \in \mathbf{N} : \bar{n} \geqslant N, |a_{\bar{n}} - a| < \varepsilon \quad (1)$$

$\ulcorner$ Необхідність. Нехай $a \in A$. Тоді існує підпослідовність $a_{m(k)} \to a, k \to \infty$. Припустимо, що $\varepsilon > 0$ і $N \in \mathbf{N}$ задані. За означенням границі

$$\exists K_1 \in \mathbf{N} \ \forall k \geqslant K_1 : |a_{m(k)} - a| < \varepsilon,$$

і таким же чином

$$\exists K_2 \in \mathbf{N} \ \forall k \geqslant K_2 : m(k) \geqslant N.$$

Покладемо $\bar{k} := \max(K_1, K_2)$ і $\bar{n} := m(\bar{k})$: тоді

$$\bar{n} \geqslant N, \quad |a_{\bar{n}} - a| < \varepsilon.$$

Достатність. Припустимо, що умова (1) теореми виконана.

Для $\varepsilon = 1$ і $N = 1$ згідно з умовою (1)

$$\exists m(1) \geqslant 1 : |a_{m(1)} - a| < 1.$$

Аналогічно для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ і $N = m(1) + 1$

$$\exists m(2) = \bar{n}\left(\frac{1}{2}, m(1) + 1\right) \geqslant m(1) + 1 : |a_{m(2)} - a| < \frac{1}{2}.$$

Для $\varepsilon = \frac{1}{3}$ і $N = m(2) + 1$

$$\exists m(3) = \bar{n}\left(\frac{1}{3}, m(2) + 1\right) \geqslant m(2) + 1 : |a_{m(3)} - a| < \frac{1}{3}$$

і т. д. У результаті отримаємо підпослідовність $\{a_{m(k)} : k \geqslant 1\}$ таку, що

$$\forall k \geqslant 1 : |a_{m(k)} - a| < \frac{1}{k}.$$

Отже, $a \in A$. $\lrcorner$

Вправа

11. Довести, що

$$+\infty \in A \ (-\infty \in A) \Leftrightarrow (\forall C \in \mathbf{R} \ \forall N \in \mathbf{N} \ \exists \bar{n} \in \mathbf{N} : \bar{n} \geqslant \mathbf{N}; \ a_{\bar{n}} > C \ (a_{\bar{n}} < C).$$

Означення. Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ має ***найбільший (найменший) член***, якщо

$$\exists a_{\bar{n}} \ \forall n \geqslant 1 : \ a_n \leqslant a_{\bar{n}} (a_n \geqslant a_{\bar{n}}).$$

Вправи

12. Перевірити, що монотонно не спадна послідовність має найменший член.

13. Нехай $\{a_n : n \geqslant 1\}$ така, що $a_n \to +\infty$, $n \to \infty$. Довести, що послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ має найменший елемент.

14*. Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ збігається. Довести, що вона має або найменший, або найбільший член.

15. Навести приклад послідовності, яка не має ні найменшого, ні найбільшого члена.

ТЕОРЕМА 2 (про існування монотонної підпослідовності). Будь-яка послідовність дійсних чисел містить монотонну підпослідовність.

⌈ Нехай $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — послідовність дійсних чисел. Тоді має місце один з двох випадків:

(i) будь-яка підпослідовність послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$ має найбільший член;

(ii) існує підпослідовність послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$, яка не має найбільшого члена.

Нехай у випадку (i) число $m(1) \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\forall n \geqslant 1 : \ a_n \leqslant a_{m(1)};$$

число $m(2) \geqslant m(1) + 1$ таке, що

$$\forall n \geqslant m(1) + 1 : \ a_n \leqslant a_{m(2)}$$

(тобто $a_{m(2)}$ — найбільший член підпослідовності $\{a_{m(1)+1}, a_{m(1)+2}, \ldots\}$). Таким же чином нехай $m(3) \geqslant m(2) + 1$ таке, що

$$\forall n \geqslant m(2) + 1 : \ a_n \leqslant a_{m(3)}$$

і т. д. Отримаємо підпослідовність $\{a_{m(k)} : k \geqslant 1\}$, для якої за побудовою

$$a_{m(1)} \geqslant a_{m(2)} \geqslant a_{m(3)} \geqslant \ldots.$$

У випадку (ii) розглянемо підпослідовність, яка не має найбільшого члена. Можна припустити, що сама послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ не має найбільшого члена. Покладемо $m(1) = 1$. За припущенням

$$\exists m(2) : \ a_{m(2)} > a_{m(1)},$$

причому $m(2) > m(1)$. Таким же чином

$$\exists m(3) > m(2) : a_{m(3)} > a_{m(2)}$$

і т. д. Одержимо строго зростаючу підпослідовність $\{a_{m(k)} : k \geqslant 1\}$. ⌋

Вправа

16. Для послідовності $\{\{\sqrt{n}\} : n \geqslant 1\}$ вказати монотонну підпослідовність.

Наслідок 1. Для будь-якої послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$ множина її часткових границь $A \neq \varnothing$.

$\vdash$ За теоремою 2 існує монотонна підпослідовність $\{a_{m(k)} : k \geqslant 1\}$. Припустимо, наприклад, що ця підпослідовність не спадає. Тоді за теоремою про існування границі монотонної послідовності

$$\exists a \in \mathbf{R} : a = \lim_{k \to \infty} a_{m(k)},$$

якщо $\{a_{m(k)} : k \geqslant 1\}$ обмежена. При цьому $a \in A$. Якщо $\{a_{m(k)} : k \geqslant 1\}$ необмежена, то $+\infty \in A$. $\dashv$

Наслідок 2 (теорема Больцано—Вейєрштрасса)[1]. Будь-яка обмежена послідовність дійсних чисел містить збіжну до дійсного числа підпослідовність.

Вправа

17. Довести, що будь-яка нескінченна обмежена множина дійсних чисел містить збіжну до дійсного числа підпослідовність.

4.3. ВЕРХНЯ Й НИЖНЯ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Означення 1. Нехай $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$ — послідовність і A — множина її часткових границь. ***Нижньою границею послідовності*** $\{a_n : n \geqslant 1\}$ називається величина

$$\varliminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \inf a_n := $$

$$:= \begin{cases} -\infty, \text{ якщо } \{a_n : n \geqslant 1\} \text{ не обмежена знизу;} \\ \inf A, \text{ якщо } \{a_n : n \geqslant 1\} \text{ обмежена знизу і } A \neq \{+\infty\}; \\ +\infty, \text{ якщо } A = \{+\infty\}. \end{cases}$$

---

[1] *Больцано Бернард* (1781—1848) — чеський математик. Його основні математичні роботи, опубліковані через сто років після його смерті, містили точні формулювання цілого ряду фундаментальних понять математичного аналізу, а також доведення багатьох фундаментальних теорем.

Вейєрштрасс Карл Теодор Вільгельм (1815—1897)—видатний німецькій математик. Зробив великий внесок у логічне обгрунтування математичного аналізу. Розробив основи теорії функцій комплексної змінної, автор багатьох плідних ідей у варіаційному численні, алгебрі, диференціальній геометрії. Постійно займався педагогічною діяльністю, лекції К. Вейєрштрасса користувалися виключною популярністю. Більша частина його математичних робіт була вперше опублікована тільки у 1898 р.

Верхньою границею послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$ називається величина

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n := $$

$$:= \begin{cases} +\infty, \text{ якщо } \{a_n : n \geqslant 1\} \text{ не обмежена зверху;} \\ \sup A, \text{ якщо } \{a_n : n \geqslant 1\} \text{ обмежена зверху і } A \neq \{-\infty\}; \\ -\infty, \text{ якщо } A = \{-\infty\}. \end{cases}$$

Зауваження. Якщо $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — обмежена послідовність, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \inf A \in \mathbf{R}, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \sup A \in \mathbf{R}.$$

Приклад 1. Нехай послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ така, що $a_n \to a$, $n \to \infty$. Тоді $A = \{a\}$ і тому

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Вправа

18. Довести, що

$$a_n \to a, n \to \infty \Leftrightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a.$$

Приклади. 2. Для послідовності $\{a_n = n : n \geqslant 1\}$ $A = \{+\infty\}$, тому

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = +\infty.$$

3. Для обмеженої послідовності $\{(-1)^n : n \geqslant 1\}$ множина $A = \{-1, 1\}$. Дійсно, будь-яка її підпослідовність або містить скінченне число членів, що дорівнюють -1, або скінченне число членів, що дорівнюють 1, або нескінченно багато членів, що дорівнюють -1, і нескінченно багато, що дорівнюють 1.

У першому випадку підпослідовність збігається до 1, у другому — до -1, у третьому границі не має. Таким чином,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} (-1)^n = -1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} (-1)^n = 1.$$

Вправа

19. Визначити верхню й нижню границю послідовностей:

а) $\left\{\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right.; n \geqslant 1\right\}$; б) $\left\{n - 5\left[\frac{n}{5}\right] : n \geqslant 1\right\}$;

в) $\left\{\left\{\frac{2n^3}{7}\right\} : n \geqslant 1\right\}$; г)* $\{\sin n : n \geqslant 1\}$.

ТЕОРЕМА 1. Нехай для послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$

$$\alpha = \varliminf_{n\to\infty} a_n, \quad \beta = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

Тоді $\alpha \in A$, $\beta \in A$.

$\vdash$ Достатньо розглянути випадок обмеженої послідовності. Доведемо, що $\alpha = \inf A \in A$, тобто, що α — часткова границя послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$. Використаємо теорему про характеризацію часткової границі. Нехай $\varepsilon > 0$ і $n \in \mathbf{N}$ задано. Тоді, згідно з означенням $\inf A = \alpha$

$$\exists a \in A : a < \alpha + \varepsilon.$$

Оскільки a — часткова границя, то для чисел $\alpha + \varepsilon - a > 0$ і N

$$\exists \bar{n} : \bar{n} \geqslant N, |a_{\bar{n}} - a| < \alpha + \varepsilon - a.$$

Тоді

$$|a_{\bar{n}} - \alpha| \leqslant |a_{\bar{n}} - a| + a - \alpha < \alpha + \varepsilon - a + a - \alpha = \varepsilon. \ \dashv$$

Зауваження. Із теореми 1 випливає, що у випадку обмеженої послідовності множина A містить мінімальний і максимальний елементи і

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \min A, \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \max A.$$

ТЕОРЕМА 2 (про характеризацію верхньої і нижньої границі послідовності). Нехай $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — обмежена послідовність. Число

$$\alpha = \varliminf_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 :$$

1) множина $\{n \geqslant 1 \mid a_n < \alpha - \varepsilon\}$ скінченна;
2) множина $\{n \geqslant 1 \mid a_n < \alpha + \varepsilon\}$ нескінченна.

Число $\beta = \varlimsup_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$:

1) множина $\{n \geqslant 1 \mid a_n > \beta + \varepsilon\}$ скінченна.
2) множина $\{n \geqslant 1 \mid a_n > \beta - \varepsilon\}$ нескінченна.

$\vdash$ Розглянемо доведення для верхньої границі.

Необхідність. Нехай $\beta = \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \sup A$ і нехай $\varepsilon > 0$ задано. Оскільки згідно з теоремою 1 $\beta \in A$, то існує підпослідовність $a_{m(k)} \to \beta$, $k \to \infty$. За означенням границі послідовності для числа ε

$$\exists K \in \mathbf{N} \ \forall k \geqslant K : |a_{m(k)} - \beta| < \varepsilon \Rightarrow a_{m(k)} > \beta - \varepsilon$$

і, таким чином, умова 2) виконана.

Припустимо, що умова 1) не виконується. Тоді існує $\varepsilon^* > 0$ і підпослідовність $\{a_{m(k)} : k \geqslant 1\}$

$$\forall k \geqslant 1 : a_{m(k)} > \beta + \varepsilon^*. \qquad (1)$$

За теоремою про монотонну підпослідовність існує монотонна підпослідовність $\{a_{m(k(j))} : j \geqslant 1\}$. Нехай $\gamma := \lim\limits_{j\to\infty} a_{m(k(j))}$. Зазначимо, що $\gamma \in \mathbf{R}$ і $\gamma \in A$. Крім того, згідно з нерівністю (1) $\gamma \geqslant \beta + \varepsilon^*$, тому $\beta = \sup A \geqslant \gamma \geqslant \beta + \varepsilon^*$, що неможливо. Суперечність показує, що умова 1) також виконана.

Достатність. Нехай для числа β виконані умови теореми. Спочатку доведемо, що $\beta \in A$. Використаємо теорему про характеризацію часткової границі. Згідно з умовами (1) і 2) для довільного заданого $\varepsilon > 0$ множина

$$\{n \geqslant 1 \mid \beta - \varepsilon < a_n < \beta + \varepsilon\}$$

нескінченна, тому $\beta \in A$.

Доведемо тепер, що $\beta = \sup A$. Припустимо, що $\exists \gamma \in A : \gamma > \beta$. Тоді для числа $\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma - \beta) > 0$ множина

$$\{n \geqslant 1 \mid \gamma - \varepsilon < a_n < \gamma + \varepsilon\}$$

нескінченна, оскільки $\gamma \in A$. Проте $\gamma - \varepsilon = \frac{\gamma + \beta}{2} > \beta$, і, таким чином, одержали суперечність з умовою 1). Отже, припущення про те, що $\exists \gamma \in A : \gamma > \beta$, приводить до суперечності. Тому $\beta = \sup A$. —|

Вправи

20. Перевірити, що:

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\inf\limits_{k\geqslant n} a_k) = \sup\limits_{n\geqslant 1} (\inf\limits_{k\geqslant n} a_k)$;

б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{k\geqslant n} a_k) = \inf\limits_{n\geqslant 1} (\sup\limits_{k\geqslant n} a_k)$.

21.* Нехай для послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n), \quad n \geqslant 1.$$

Довести, що

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

22.* Довести, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n.$$

23*. Нехай $a_n > 0$, $n \geqslant 1$. Довести, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}.$$

24*. Довести, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max(a_n, b_n) \max\{\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n, \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n\}.$$

§ 5. ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ І КРИТЕРІЙ КОШІ

5.1. ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ І ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Означення 1. Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ називається ***фундаментальною*** або ***послідовністю Коші***, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall m \geqslant N\ \forall n \geqslant N : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Приклади. 1. Послідовність

$$\left\{a_n = \frac{\sin 1}{2^1} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n} : n \geqslant 1\right\}$$

фундаментальна.

⊢ Дійсно, для будь-яких $m, n, m \leqslant n$ з $\mathbf{N}$ маємо

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \frac{\sin(m+2)}{2^{m+2}} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m}.$$

Оскільки $2^{-m} \to 0$, $m \to \infty$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall m \geqslant N : 2^{-m} < \varepsilon,$$

звідси випливає, що

$$\forall m \geqslant N\ \forall n \geqslant N, m \leqslant n : |a_n - a_m| < \frac{1}{2^m} < \varepsilon. \qquad \dashv$$

2. Послідовність $\{a_n = (-1)^n : n \geqslant 1\}$ не є фундаментальною, оскільки для $\varepsilon = 1$

$$\forall N \in \mathbf{N}\ \exists n = N \geqslant N\ \exists m = N+1 \geqslant N : |a_N - a_{N+1}| = 2 > 1.$$

Вправи

1. Довести, що необмежена послідовність не фундаментальна.

2. Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ фундаментальна тоді й тільки тоді, коли

$$\sup_{m \geqslant N,\ n \geqslant N} |a_m - a_n| \to 0,\ N \to \infty.$$

3. Довести, що монотонна послідовність, яка містить фундаментальну підпослідовність, фундаментальна.

4. Нехай $\{i_n : n \geqslant 1\}$ — фіксована послідовність, причому $\forall n \geqslant 1 : i_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Довести, що послідовність

$$\left\{a_n = \frac{i_1}{10} + \frac{i_2}{10^2} + \ldots + \frac{i_n}{10^n} : n \geqslant 1\right\}$$

фундаментальна

1°. Послідовність, що збігається до дійсного числа, фундаментальна.

$\vdash$ Нехай $a_n \to a \in \mathbf{R}, n \to \infty$ і $\varepsilon > 0$ задано. За означенням границі послідовності для числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

$$\exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \geqslant N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

тому

$$\forall m \geqslant N\ \forall n \geqslant N : |a_m - a_n| < |a_m - a| + |a - a_n| < \varepsilon. \dashv$$

2°. Фундаментальна послідовність обмежена.

$\vdash$ Нехай $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — фундаментальна послідовність. Тоді для числа $\varepsilon = 1$

$$\exists N \in \mathbf{N}\ \forall m \geqslant N\ \forall n \geqslant N : |a_m - a_n| < 1.$$

Нехай

$$C := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\};$$

тоді $\forall n \geqslant 1 : |a_n| \leqslant C$. Дійсно, при $1 \leqslant n \leqslant N$ нерівність $|a_n| \leqslant C$ випливає з означення числа C, якщо ж $n > N$, то маємо

$$|a_n| \leqslant |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N| \leqslant C. \dashv$$

Вправа

5. Довести, що монотонна послідовність, яка містить фундаментальну підпослідовність, збіжна.

5.2. КРИТЕРІЙ КОШІ

ТЕОРЕМА. Для того щоб послідовність дійсних чисел збігалася до дійсного числа, необхідно й достатньо, щоб вона була фундаментальною.

$\vdash$ Необхідність. Випливає з властивості 1°.

Достатність. Нехай $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — фундаментальна послідовність, тоді згідно з властивістю 2° вона обмежена. За теоремою про існування монотонної підпослідовності іс-

нує монотонна підпослідовність $\{a_{m(k)} : k \geqslant 1\}$, яка також обмежена. За теоремою про монотонну послідовність $a_{m(k)} \to a \in \mathbf{R}$, $k \to \infty$.

Доведемо, що $a_n \to a$, $n \to \infty$. Нехай $\varepsilon > 0$ задано. З фундаментальності для числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ випливає, що

$$\exists N \in \mathbf{N}\ \forall m \geqslant N\ \forall n \geqslant N : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а згідно з означенням границі послідовності для числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0$,

$$\exists K \in \mathbf{N}\ \forall k \geqslant K : |a_{m(k)} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафіксуємо зараз яке-небудь число $k' \geqslant K$ таке, що $m(k') \geqslant N$. Тоді

$$\forall n \geqslant N : |a_n - a| \leqslant |a_n - a_{m(k')}| + |a_{m(k')} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \lrcorner$$

5.3. ОЗНАЧЕННЯ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ ВЕКТОРІВ

Нехай

$$\mathbf{R}^m := \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in \mathbf{R}, 1 \leqslant i \leqslant m\}.$$

Означення 1. Послідовність векторів

$$\{\vec{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) : n \geqslant 1\}$$

збігається до вектора

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m),$$

якщо

$$\forall i, 1 \leqslant i \leqslant m : x_i^{(n)} \to x_i, \quad n \to \infty.$$

При цьому використовуємо позначення:

$$\vec{x}^{(n)} \to \vec{x}, \quad n \to \infty; \quad \lim_{n \to \infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}.$$

Вправи

6. Довести, що

$$\vec{x}^{(n)} \to \vec{x}, n \to \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} |x_k^{(n)} - x_k| \to 0, \quad n \to \infty.$$

7. Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ така, що

$$\exists \lambda \in [0, 1) \quad \forall n \geqslant 1: \ |a_{n+1} - a_{n+2}| \leqslant \lambda |a_n - a_{n+1}|.$$

Довести, що послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ збігається.

8. Нехай для $n \geqslant 1$, $x \in [0, 3]$

$$P_n(x) = a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x + d_n,$$

де $\{a_n, b_n, c_n, d_n \mid n \geqslant 1\} \subset \mathbb{R}$. Припустимо, що

$$\forall x \in [0, 3]: \ P_n(x) \to P(x) \in \mathbb{R}, \quad n \to \infty.$$

Довести, що кожна з послідовностей

$$\{a_n : n \geqslant 1\}, \quad \{b_n : n \geqslant 1\}, \quad \{c_n : n \geqslant 1\}, \quad \{d_n : n \geqslant 1\}$$

збігається і що P є многочлен на $[0, 3]$.

Глава 3 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ. НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ

§ 1. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ

1.1. ГРАНИЧНА ТОЧКА МНОЖИНИ

Означення 1. Нехай $A \subset \mathbf{R}$. Число $x_0 \in \mathbf{R}$ називається ***граничною точкою множини*** A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in A, \quad y \neq x_0: \ |y - x_0| < \varepsilon.$$

Приклади. 1. Для множини $A = [0, 1]$ множина граничних точок множини A є A.

2. Для множини $A = (0, 1] \cup \{2\}$ множина граничних точок A є $[0, 1]$.

3. Для множини $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \geqslant 1\right\}$ множина граничних точок є $\{0\}$, а множина $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}\right\}$ граничних точок не має.

Таким чином, гранична точка множини A може належати A, а може й не належати A.

Означення 2. Значення $+\infty$ ***є гранична точка*** множини A якщо

$$\forall C \in \mathbf{R} \quad \exists y \in A: \ y > C.$$

Значення $-\infty$ ***є гранична точка*** множини A, якщо

$$\forall C \in \mathbf{R} \quad \exists y \in A: \ y < C.$$

Приклад 4. Для множини $A = \mathbf{N}$ значення $+\infty$ є гранична точка.

Означення 3. Точка $x \in A$, яка не є граничною точкою множини A, називається ***ізольованою точкою множини*** A.

Зауваження. Точка $x \in A$ є ізольованою точкою множини A, якщо

$$\exists \delta > 0: \ B(x, \delta) \cap A = \{x\}.$$

Вправи

1. Довести, що множина всіх граничних точок множини $\mathbf{Q}$ є

$$\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

2. Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$ — гранична точка множини A. Довести, що в будь-якому околі точки x_0 лежить нескінченно багато точок із множини A.

ТЕОРЕМА. Нехай x_0 — гранична точка множини $A \subset \mathbf{R}$. Тоді існує послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\}$, яка задовольняє умовам:

1) $\forall n \geqslant 1$: $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$;

2) $x_n \to x_0$, $n \to \infty$.

⊢ Розглянемо випадок, коли $x_0 \in \mathbf{R}$. За означенням граничної точки для числа $\varepsilon = 1$

$$\exists x_1 \in A, \quad x_1 \neq x_0: \ |x_1 - x_0| < 1.$$

Аналогічно, для числа $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$\exists x_2 \in A$, $x_2 \neq x_0$: $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$;

для $\varepsilon = \frac{1}{3}$

$$\exists x_3 \in A, \quad x_3 \neq x_0: \ |x_3 - x_0| < \frac{1}{3}$$

і т. д. Отримаємо послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\}$, яка задовольняє умові 1) за побудовою. Крім того, з нерівностей

$$\forall n \geqslant 1: \ |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$$

випливає, що $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. ⊣

Вправи

3. Показати, що серед членів послідовності $\{x_n : n \geqslant 1\}$, які задовольняють умовам теореми, нескінченно багато різних.

4. Довести твердження, обернене теоремі.

5*. Визначити множини граничних точок для множини:

а) $A = \{\{\sqrt[3]{n}\} : n \geqslant 1\}$; б) $\{\sin n : n \geqslant 1\}$;

в) $A = \{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n} \mid m \in \mathbf{N}, \ n \in \mathbf{N}\}$.

1.2. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ

Нехай $A \subset \mathbf{R}$. У подальшому розглядаємо функції $f: A \to \mathbf{R}$, причому $A \neq \varnothing$.

Означення 1 (Коші). Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$ — гранична точка множини A і $f: A \to \mathbf{R}$. ***Число*** $p \in \mathbf{R}$ називається ***границею***

(граничним значенням) функції f у точці x_0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in (A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}):$$
$$|f(x) - p| < \varepsilon$$

Позначення: $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; $f(x) \to p$, $x \to x_0$.

Зауваження 1. Звернемо увагу на те, що

$$A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} = \{x \in A \mid |x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0\}.$$

2. Означення 1 можна подати також у вигляді

$$p = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \ f(A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \subset B(p, \varepsilon).$$

3. Безпосередньо з означення 1, як і у випадку границі послідовності з того, що $f(x) \to p$, $f(x) \to q$, $x \to x_0$, випливає, що $p = q$. Далі це твердження буде отримано з єдиності границі послідовності.

Приклади. 1. Нехай $A = \mathbf{R}$, для $c \in \mathbf{R}$: $\forall x \in \mathbf{R} \ f(x) = c$. Тоді

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}: \lim_{x \to x_0} f(x) = c \ (\text{скорочено } \lim_{x \to x_0} c = c).$$

|— Дійсно, для довільного $\varepsilon > 0$ можна в означенні 1 покласти $\delta = 1$. —|

2. Нехай $A = \mathbf{R}$ і $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$. Тоді

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}: \lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2.$$

|— Можна обмежитися розглядом тільки тих значень x, для яких $|x - x_0| < 1$. Спочатку зауважимо, що

$$|x^2 - x_0^2| = |x + x_0| \cdot |x - x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \cdot |x - x_0| <$$
$$< (1 + 2|x_0|)|x - x_0|.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Покладемо

$$\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}, 1\right\};$$

Тоді

$$\forall x, |x - x_0| < \delta:$$

$$|x^2 - x_0^2| < (1 + 2|x_0|) \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} = \varepsilon. \qquad —|$$

Вправа

6. Довести, що

$$\forall k \in \mathbf{N} \ \forall x_0 \in \mathbf{R}: \lim_{x \to x_0} x^k = x_0^k.$$

Приклади. 3. Нехай $A = \mathbf{R}\setminus\{1\}$, $x_0 = 1$; $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x \in A$. Тоді

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

$\vdash$ Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Покладемо $\delta = \varepsilon$. Тоді

$$\forall x,\ |x-1| < \delta,\quad x \neq 1:$$

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = |x+1-2| = |x-1| < \delta = \varepsilon. \qquad \dashv$$

4. Нехай $A = \mathbf{R}\setminus\{0\}$; $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in A$. Тоді

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$\vdash$ Порівнюючи площі трикутників і сектора в колі і використовуючи означення функцій sin і tg, прийдемо до нерівностей

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

з яких випливає, що

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,\quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

з врахуванням парності функцій. Тому

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2};$$

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Нехай тепер $\varepsilon > 0$ задано. Покладемо $\delta = \min\{\varepsilon, 1\}$. Тоді

$$\forall x,\ |x| < \delta,\ x \neq 0:\quad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon. \qquad \dashv$$

Наслідок. Виконується нерівність

$$|\sin x| \leqslant |x|,\quad x \in \mathbf{R},$$

причому знак рівності може бути тільки при $x = 0$.

Вправи

7. Довести, що

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \ \forall x \in \mathbf{R}:\ |\sin nx| \leqslant n|\sin x|.$$

8. Довести, що

$$\forall x \in \mathbf{R}:\ \cos(\sin x) > \sin(\cos x).$$

9. Нехай $x \in \mathbf{R}$ таке, що $\sin x \neq 0$. Довести, що

$$\forall n \in \mathbf{N}: \ 1 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} \leqslant n^2.$$

10. Довести, що $\forall x_0 \in \mathbf{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

Приклад 5. Нехай $a > 0$, $A = \mathbf{R}$, $x_0 = 0$, $f(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$. Доведемо, що

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1.$$

⌈ Розглянемо випадок $a > 1$; функція f в цьому випадку строго зростає, тобто для $x_1 \in \mathbf{R}$, $x_2 \in \mathbf{R}$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Оскільки $a^{1/n} \to 1$, $a^{-1/n} \to 1$, $n \to \infty$, то за означенням границі послідовності

$$\exists N_1 \in \mathbf{N} \ \ \forall n \geqslant N_1: \ a^{1/n} < 1 + \varepsilon;$$

$$\exists N_2 \in \mathbf{N} \ \ \forall n \geqslant N_2: \ a^{-1/n} > 1 - \varepsilon.$$

Покладемо $N := \max\{N_1, N_2\}$, $\delta = \frac{1}{N}$. Тоді

$$\forall x, \ |x - 0| < \delta \Leftrightarrow -\frac{1}{N} < x < \frac{1}{N}$$

$$a^{-1/N} < a^x < a^{1/N} \Rightarrow 1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow |a^x - 1| < \varepsilon. \qquad ⌋$$

Вправа

11. Довести твердження прикладу 5 для $a \in (0, 1)$. Довести також, що

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}: \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Означення 2. Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$ — гранична точка множини A і $f: A \to \mathbf{R}$. ***Значення*** $+\infty$ ***є границя функції*** f ***у точці*** x_0, якщо

$$\forall C \in \mathbf{R} \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}): \ f(x) > C.$$

Значення $-\infty$ ***є границею функції*** f ***у точці*** x_0, якщо

$$\forall C \in \mathbf{R} \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}): f(x) < C.$$

Приклад 6. Нехай $A = \mathbf{R} \setminus \{x_0\}$, $x_0 = 0$; $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$. Тоді

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Означення 3. Нехай $x_0 = +\infty$ є гранична точка A. Число $p \in \mathbb{R}$ називається ***границею функції*** f ***при*** $x \to +\infty$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists C \in \mathbb{R} \ \forall x \in A, \ x > C: |f(x) - p| < \varepsilon.$$

Вправа

12. Дати означення границь у співвідношеннях:

а) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = p \in \mathbb{R}$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

в) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Приклади. 7. Нехай $A = (0, +\infty)$, $x_0 = +\infty$; $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Тоді $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

⌈ Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Зауважимо, що

$$\forall x > 0: \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Покладемо $C = \frac{1}{\varepsilon}$, тоді

$$\forall x > C: \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{C} = \varepsilon. \quad ⌋$$

8. Нехай $a > 1$, $A = \mathbb{R}$ і для $m \in \mathbb{N}$ $f(x) = \frac{x^m}{a^x}$, $x \in A$. Доведемо, що

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^m}{a^x} = 0.$$

⌈ Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Оскільки $\frac{(n+1)^m}{a^n} \to 0$, $n \to \infty$, то для числа $\varepsilon > 0$

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N: \frac{(n+1)^m}{a^n} < \varepsilon.$$

Покладемо $C = N$. Тоді $\forall x > C$:

$$\left| \frac{x^m}{a^x} - 0 \right| = \frac{x^m}{a^x} < \frac{([x]+1)^m}{a^{[x]}} < \varepsilon,$$

оскільки $[x] \geqslant N = C$. ⌋

Вправи

13. Нехай $0 < a < 1$, $m \in \mathbb{R}$. Довести, що $\lim\limits_{x \to +\infty} x^m a^x = 0$.

14. Довести, що $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\lg(x)}{x} = 0$.

Приклад 9. Довести, що $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Оскільки

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} \to e,\ n\to\infty;$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e,\ n\to\infty.$$

то за означенням границі послідовності для числа ε

$$\exists N\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geqslant N:$$

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon.$$

Покладемо $C = N$. Тоді $\forall x > C$.

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e+\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon.$$

Вправи

15. Використовуючи результат прикладу 9, довести, що:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

16. Довести, що

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 1$;

б) границя $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не існує.

17. Довести, що

а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x^3) = a$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = a$.

Навести приклад, який показує, що обернене твердження в б) не є вірним.

18.* Припустимо, що для функції $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$\forall a\in\mathbf{R}: f\left(\frac{a}{n}\right)\to 0,\ n\to\infty.$$

Чи існує $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

19. Довести, що існують послідовності $\{x_n : n\geqslant 1\}\subset(0,+\infty)$ $\{y_n : n\geqslant 1\}\subset(0,+\infty)$ такі, що

$$x_n\to 0,\ \sin\frac{1}{x_n}\to 1,\ n\to\infty;$$

$$y_n\to 0,\ \sin\frac{1}{y_n}\to 0,\ n\to\infty.$$

Означення 4 (Гейне[1]). Нехай x_0 (можливо, що $x_0 = -\infty$ або $x_0 = +\infty$) — гранична точка множини $A \subset \mathbf{R}$. Нехай $f: A \to \mathbf{R}$. Значення p (можливо, що $p = -\infty$ або $p = +\infty$) називається ***границею функції f у точці x_0***, якщо для будь-якої послідовності $\{x_n : n \geqslant 1\}$, яка задовольняє умовам

1) $\forall n \geqslant 1$: $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$;

2) $x_n \to x_0$, $n \to \infty$,

виконується співвідношення

$$f(x_n) \to p, \ n \to \infty.$$

ТЕОРЕМА. Означення Коші й Гейне границі функції у точці рівносильні.

⌈ Доведення розглянемо для випадку $\{x_0, p\} \subset \mathbf{R}$.

(i) Границя Коші є і границею Гейне. Нехай $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ згідно з означенням (1) і нехай $\{x_n : n \geqslant 1\}$ — довільна послідовність, яка задовольняє умовам 1) і 2) з означення 4. Доведемо, що $f(x_n) \to p$, $n \to \infty$. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Із означення 1 для числа ε

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in A, \ |x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0: \ |f(x) - p| < \varepsilon. \quad (1)$$

Згідно з означенням границі послідовності для числа $\delta > 0$

$$\exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N: |x_n - x_0| < \delta. \quad (2)$$

Тоді із співвідношень (1) і (2) отримаємо

$$\forall n \geqslant N: |f(x_n) - p| < \varepsilon.$$

(ii) Границя Гейне є і границею Коші. Нехай число p є границя функції f у точці x_0 згідно з означенням 4. Припустимо, що p не є границею функції f у точці x_0 за означенням Коші. Тоді

$$\exists \varepsilon^* > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x(\delta) \in A, \ |x(\delta) - x_0| < \delta, \ x(\delta) \neq x_0;$$
$$|f(x(\delta)) - p| \geqslant \varepsilon^*{}^2. \quad (3)$$

Нехай $x_n = x(\frac{1}{n})$ для $n \geqslant 1$. Послідовність $\{x \ : n \geqslant 1\}$ задовольняє умову 1) означення 4, вона також задовольняє умову 2), оскільки $x_n - x_0 < \frac{1}{n}$, $n > 1$. Тому згідно з означенням 4 $f(x_n) \to p$, $n \to \infty$, що суперечить (3). ⌋

---

[1] *Гейне Генріх Едуард* (1821—1881) — німецький математик.

[2] Для заданого $\delta > 0$ множина всіх тих $x \in (A \cap B(x_0, \delta))$, $x \neq x_0$, які задовольняють (3), не обов'язково складається із однієї точки; $x(\delta)$ це довільно вибрана точка цієї множини.

Вправи

20. Довести твердження теореми для випадків

а) $x_0 \in \mathbf{R}$, $p = +\infty$; б) $x_0 = -\infty$, $p = +\infty$.

21. Довести, що

а) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$.

22. Довести, що границя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{[x]}{x}$ не існує.

23. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \ldots + \sin\frac{n}{n^2}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

24. Для функції $f\colon \mathbf{R} \to (0, +\infty)$

$$f(x) + \frac{1}{f(x)} \to 2,\ x \to 0.$$

Довести, що $f(x) \to 1$, $x \to 0$.

1.3. ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ

1°. Якщо

$$f(x) \to p_1,\ x \to x_0 \text{ і } f(x) \to p_2,\ x \to x_0,$$

то $p_1 = p_2$.

⌈ Випливає із рівносильності означень Коші і Гейне і єдиності границі послідовності. ⌋

2°. Нехай для $x_0 \in \mathbf{R}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = p \in \mathbf{R}$$

і число $q > p$. Тоді

$$\exists\delta > 0\ \forall x \in A,\ |x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0\colon\ f(x) < q.$$

⌈ Згідно з означенням Коші для числа $\varepsilon = q - p > 0$

$$\exists\delta > 0\ \forall x \in A,\ |x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0\colon\ |f(x) - p| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) < p + \varepsilon = q.$$ ⌋

Вправа

25. Нехай для $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) > 0.$$

Довести, що

$$\exists\delta > 0\ \forall x \in (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\})\colon f(x) > 0.$$

3°. Нехай $f: A \to \mathbf{R}$, $g: A \to \mathbf{R}$, причому $\forall x \in A: f(x) \leqslant g(x)$. Припустимо, що $f(x) \to p$, $x \to x_0$ і $g(x) \to q$, $x \to x_0$. Тоді $p \leqslant q$, тобто при наших припущеннях

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Нехай $\{x_n : n \geqslant 1\}$ — довільна послідовність, яка задовольняє умовам 1) і 2) означення 4 п. 1.2. Тоді

$$f(x_n) \leqslant g(x_n), \ n \geqslant 1; \qquad f(x_n) \to p, g(x_n) \to q, n \to \infty$$

Нерівність $p \geqslant q$ випливає тепер із відповідної властивості границі послідовності п. 2.1 глави 2.

4°. Нехай x_0 (можливо $x_0 = -\infty$ або $x_0 = +\infty$) — гранична точка множини A; $f: A \to \mathbf{R}$, $g: A \to \mathbf{R}$. Припустимо, що існують границі

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = p \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = q \in \mathbf{R}.$$

Тоді

1) $\forall C \in \mathbf{R}$: $\lim\limits_{x \to x_0} (Cf(x)) = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

4) якщо додатково $q \neq 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Доведення аналогічне доведенню властивості 3°, при цьому використовуємо означення Гейне границі функції у точці і відповідні твердження про границю послідовності із п. 2.1 глави 2.

Вправи

26. Довести, що

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{\cos x} - \sqrt[n]{\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{m - n}{2mn}, \quad \{m, n\} \subset \mathbf{N}.$$

27. Нехай для функцій $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \to y_0} g(y) = z_0 \text{ і } \forall x \neq x_0: f(x) \neq y_0,$$

де $\{x_0, y_0\} \subset \mathbf{R}$. Довести що $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = z_0$.

28*. Функція $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ така, що

$$\forall x > 0 \ \forall y > 0: f(x+y) \leqslant f(x) + f(y).$$

Довести, що існує границя $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

1.4. ОДНОБІЧНІ ГРАНИЦІ

Нехай $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\exists \gamma > 0: \ (x_0 - \gamma, x_0) \subset A;$$

при цьому x_0 — гранична точка множини A.

Означення 1. Число $p \in \mathbb{R}$ називається ***границею зліва функції*** f ***у точці*** x_0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0): \ |f(x) - p| < \varepsilon.$$

Позначення: $p = f(x_0 -)$ або $p = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Нехай $A \subset \mathbb{R}$ і $x_0 \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\exists \gamma > 0: (x_0, x_0 + \gamma) \subset A.$$

Означення 2. Число $p \in \mathbb{R}$ називається ***границею справа функції*** f ***у точці*** x_0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta): \ |f(x) - p| < \varepsilon$$

Позначення: $p = f(x_0 +)$ або $p = \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$.

Приклад. Для функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$f(0 -) = -1$; $f(0 +) = 1$.

Вправи

29. Довести, що існування границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ рівносильно існуванню границь $f(x_0 -)$, $f(x_0 +)$ і рівності $f(x_0 -) = f(x_0 +)$.

30. Знайти $\lim\limits_{x \to 0-} a^{1/x}$, $\lim\limits_{x \to 0+} a^{1/x}$, якщо $a > 0$

1·5. ІСНУВАННЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ

Нехай $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$.

Означення 1. Функція f називається ***монотонно неспадною на A (монотонно незростаючою на A)***, якщо

$$\forall x_1 \in A \ \forall x_2 \in A:$$

$$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \ (f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

Функція f називається ***строго зростаючою на A (строго спадною на A)***, якщо

$$\forall x_1 \in A \ \forall x_2 \in A:$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \ f(x_1) > f(x_2)).$$

Приклад. Функція $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ строго спадає на $(-\infty, 0]$ і строго зростає на $[0, +\infty)$.

Означення 2. Функція $f : A \to \mathbf{R}$ називається ***обмеженою на множині A***, якщо множина $f(A)$ обмежена, тобто, якщо

$$\exists C \in \mathbf{R} \ \forall x \in A : |f(x)| \leqslant C.$$

Аналогічно визначається поняття функції, ***обмеженої зверху*** (***знизу***) на A.

ТЕОРЕМА 1. Нехай $f : A \to \mathbf{R}$ і $\exists \gamma > 0 : (x_0 - \gamma, x_0) \subset \subset A$. Припустимо, що:

1) функція f монотонно не спадає на A;
2) функція f обмежена на A.

Тоді існує $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

$\ulcorner$ Нехай $B := \{f(x) x \in (A \cap \{x < x_0\})\}$. Множина B непуста й обмежена. За теоремою про існування точних меж

$$\exists p \in \mathbf{R}: \ p = \sup B.$$

Доведемо, що $f(x_0-) = p$. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Згідно з означенням точної верхньої межі $\exists \bar{x} < x_0 : f(\bar{x}) > p - \varepsilon$. Тоді, поклавши $\delta = x_0 - \bar{x} > 0$, одержимо

$$\forall x \in ((x_0 - \delta, x_0) \cap (x_0 - \gamma, x_0)):$$

$$p - \varepsilon < f(\bar{x}) \leqslant f(x) \leqslant p \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon. \qquad \lrcorner$$

Твердження, аналогічне теоремі 1, правильне й для монотонно не зростаючої функції.

ТЕОРЕМА 2 (**критерій Коші**). Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$ — гранична точка множини A і $f : A \to \mathbf{R}$. Скінченна границя функції f

у точці x_0 існує тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \{x, y\} \subset (A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}):$$
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$\ulcorner$ Необхідність. Якщо скінченна границя f у точці x_0 існує, то для заданого $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in (A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}):$$

$$|f(x) - p| < \frac{\varepsilon}{2}, \ p := \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Тому

$$\forall \{x, y\} \subset (A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}):$$
$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - p| + |p - f(y)| < \varepsilon.$$

Достатність. Використаємо означення Гейне. Нехай $\{x_n : n \geqslant 1\}$ і $\{y_n : n \geqslant 1\}$ — дві послідовності, які задовольняють умовам 1) і 2) означення 4 п. 1.2. Тоді послідовність

$$\{z_n : n \geqslant 1\} := \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots\}$$

також задовольняє цим умовам. Доведемо, що послідовність $\{f(z_n) : n \geqslant 1\}$ збігається. Нехай $\varepsilon > 0$ задане, а $\delta > 0$ вибране згідно з умовою теореми 2. Оскільки $z_n \to x_0$, $n \to \infty$, то за означенням границі послідовності для числа $\delta > 0$

$$\exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N: \ |z_n - x_0| < \delta.$$

Тоді

$$\forall m \geqslant N \ \forall n \geqslant N: \ |f(z_m) - f(z_n)| < \varepsilon.$$

Таким чином, послідовність $\{f(z_n) : n \geqslant 1\}$ фундаментальна, отже, вона збігається до деякого числа $p \in \mathbf{R}$. Звідси

$$f(x_n) \to p, \ f(y_n) \to p, \ n \to \infty$$

і

$$p = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

згідно з означенням Гейне. $\lrcorner$

Вправи

31. Нехай для $\{a, b, c\} \subset \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1; \\ ax^2 + bx + c, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Визначити, при яких значеннях a, b і c функція f монотонна на $\mathbf{R}$.

32. Обчислити границю

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{tg}(\sin(\operatorname{tg} x)) \cdot \operatorname{ctg}(\operatorname{tg}(\sin x)).$$

33. Нехай f — монотонно неспадна на відрізку $[a, b]$ функція, $\{a, b\} \subset \subset \mathbf{R}$. Тоді для будь-якого $c \in (a, b)$ існують $f(c-)$, $f(c+)$, причому $f(c-) \leqslant \leqslant f(c) \leqslant f(c+)$.

Довести, що:

$$\lim_{x \to c+} f(x-) = f(c+);$$

$$\lim_{x \to c-} f(x+) = f(c-).$$

Вказівка. Використати нерівність

$$f(y) \leqslant f(x-) \leqslant f(x), \quad y < x.$$

34*. Функція $f(x) = \sin P(x)$, $x \in \mathbf{R}$, де P — многочлен, періодична на $\mathbf{R}$ тоді й тільки тоді, коли степінь $P \leqslant 1$.

§ 2. ДОСЛІДЖЕННЯ ЛОКАЛЬНОЇ ПОВЕДІНКИ ФУНКЦІЇ

2.1. ПРИПУЩЕННЯ

Нехай $A \subset \mathbf{R}$, x_0 — гранична точка множини A. У цьому параграфі всі міркування проводяться у одній із ситуацій:

1) $x_0 \in \mathbf{R}$ і $\exists \gamma > 0$: $(B(x_0, \gamma) \setminus \{x_0\}) \subset A$;
2) $x_0 \in \mathbf{R}$ і $\exists \gamma > 0$: $(x_0 - \gamma, x_0) \subset A$;
3) $x_0 \in \mathbf{R}$ і $\exists \gamma > 0$: $(x_0, x_0 + \gamma) \subset A$;
4) $x_0 = +\infty$ і $\exists c \in \mathbf{R}$: $(c, +\infty) \subset A$;
5) $x_0 = +\infty$ і $A = \mathbf{N}$.

Будемо розглядати функції $f : A \to \mathbf{R}$, причому нас будуть цікавити в основному тільки два типи поведінки f при $x \to x_0$:

(i) $f(x) \to 0$, $x \to x_0$;
(ii) $f(x) \to +\infty$, $x \to x_0$.

2.2. ВІДНОШЕННЯ «О»

Нехай x_0 — гранична точка множини A і $f : A \to \mathbf{R}$, $g : A \to \mathbf{R}$.

Означення. Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$. ***Функція f підпорядкована функції g при*** $x \to x_0$, якщо

$$\exists L \in \mathbf{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) : |f(x)| \leqslant L\,|g(x)|.$$

Якщо $x_0 = +\infty$, то функція f підпорядкована функції g при $x \to +\infty$, коли

$$\exists L \in \mathbf{R} \quad \exists c \in \mathbf{R} \quad \forall x > c: \quad |f(x)| \leqslant L\,|g(x)|.$$

Позначення: $f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0$ або $f = O(g),\ x \to x_0$.

Вправи

1. Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$. Довести, що $f = O(1),\ x \to x_0$ тоді й тільки тоді, коли f обмежена на $B(x_0, \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ при деякому $\delta > 0$.

2. Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$ і $\forall x \in (A \setminus \{x_0\}) : g(x) \neq 0$. Довести, що $f = O(g)$, $x \to x_0$ тоді й тільки тоді, коли $\frac{f}{g}$ обмежена на $B(x_0, \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ при деякому $\delta > 0$.

3. Перевірити, що для функції g, відмінної від 0 на A, $f = O(g),\ x \to +\infty$ тоді й тільки тоді, коли $\frac{f}{g}$ — обмежена на $(c, +\infty)$ при деякому $c \in \mathbf{R}$.

4. Чи вірно, що для будь-яких двох функцій f і g

$$f = O(g),\quad x \to x_0 \text{ або } g = O(f),\quad x \to x_0?$$

Вказівка. Розглянути приклад: $x_0 = +\infty,\ f(x) = 2^x,\ g(x) = 3^x \sin x,\ x \in \mathbf{R}$.

Для яких функцій f: $f = O(f),\ x \to x_0$?

5. Перевірити, що для довільного $C \neq 0$

$$f = O(g),\quad x \to x_0 \Leftrightarrow f = O(Cg),\ x \to x_0.$$

6. Довести, що:

а) $\sin x = O(x),\ x \to 0$; б) $\sin x = O(1),\ x \to +\infty$;

в) $x^2 = O(x),\ x \to 0$; г) $x = O(x^2),\ x \to +\infty$.

Приклад. Нехай $m \in \mathbf{N}$, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}$. Покажемо, що

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = O(x^m),\ x \to +\infty.$$

⌈ Оскільки

$$1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_m}{x^m} \to 1,\quad x \to +\infty,$$

то

$$\exists c \in \mathbf{R}\quad \forall x > c:\ \left|1 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_m}{x^m}\right| \leqslant 2.$$

Таким чином,

$$\forall x > c:\ |x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m| =$$

$$= |x|^m \left|1 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_m}{x^m}\right| \leqslant 2|x|^m.$$

Вправа

7. Довести, що:

а) $\forall m \in \mathbf{N}:\ x^m = O(2^x),\ x \to +\infty$;

б) $\ln x = O(x),\ x \to +\infty$;

в) $n \ln n = O(2^n),\ n \to +\infty$;

г) $n^2 + 3n + \sin n + 1 = O(n^2),\ n \to +\infty$.

2.3. ВЛАСТИВОСТІ ВІДНОШЕННЯ «О»

1°. Якщо існує $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in \mathbf{R}$, то

$f(x) = O(g(x)), \ x \to x_0.$

$\vdash$ Доведення випливає з того, що

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \in \mathbf{R},$$

і властивості 2° п. 1.3 границі функції в точці. $\dashv$

Вправи

8. Навести приклад, який показує, що твердження, обернене до твердження 1°, не виконується.

9. У якому випадку при умовах властивості 1° має місце співвідношення $g(x) = O(f(x)), \ x \to x_0$?

2°. Якщо

$$f = O(g), \quad x \to x_0, \quad g = O(h), \quad x \to x_0,$$

то

$$f = O(h), \quad x \to x_0.$$

Таким чином,

$$O(O(h)) = (h), \quad x \to x_0.$$

3°. Якщо

$$f = O(g), \quad x \to x_0 \text{ і } h = O(g), \quad x \to x_0,$$

то

$$f + h = O(g), \quad x \to x_0.$$

Таким чином,

$$O_1(g) + O_2(g) = O(g), \quad x \to x_0.$$

4°. Якщо $f_i = O(g_i), \ x \to x_0$ для $i = 1, 2$, то

$$f_1 \cdot f_2 = O(g_1 \cdot g_2), \quad x \to x_0.$$

Отже,

$$O(g_1)\, O(g_2) = O(g_1 g_2), \quad x \to x_0.$$

$\vdash$ Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$. Згідно з умовою для $i = 1, 2$

$$\exists L_i \in \mathbf{R} \quad \exists \delta_i > 0 \quad \forall x \in (A \cap B(x_0, \delta_i) \setminus \{x_0\}):$$
$$|f_i(x)| \leqslant L_i |g_i(x)|.$$

Тому для

$$L := L_1 \cdot L_2, \quad \delta := \min(\delta_1, \delta_2) > 0$$

отримаємо

$$\forall x \in (A \cap B(x, \delta) \setminus \{x_0\}): \ |f_1(x) \cdot f_2(x)| \leqslant L |g_1(x) \cdot g_2(x)|. \ \dashv$$

Вправа

10. Довести твердження 2° і 3°.

2.4. ВІДНОШЕННЯ «о»

Нехай x_0 — гранична точка множини A,

$$f\colon A \to \mathbf{R}, \quad g\colon A \to \mathbf{R}.$$

Означення. Функція f називається ***знехтуваною у порівнянні з функцією g при*** $x \to x_0 \in \mathbf{R}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (A \cap B(x_0 \delta) \setminus \{x_0\}): \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|.$$

Функція f знехтувана у порівнянні з функцією g при $x \to \to +\infty$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in \mathbf{R} \quad \forall x > c: |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|.$$

Позначення: $f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0$ або $f = o(g),\ x \to x_0$.

Вправи

11. Довести що:

а) $f(x) = o(1),\ x \to x_0 \Leftrightarrow f(x) \to 0,\ x \to x_0$;

б) $f(x) = o(x),\ x \to +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0.$

12. Нехай $\forall x \in (A \setminus \{x_0\})$: $g(x) \neq 0$. Тоді

$$f(x) = 0(g(x)), \quad x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

13. Чи вірно, що для будь-яких двох функцій f і g $f = o(g),\ x \to \to x_0$ або $g = o(f),\ x \to x_0$?

Вказівка. Розглянемо приклад: $x_0 = +\infty$; $f(x) = 1$, $g(x) = 1$, $x \in \mathbf{R}$. Для яких функцій $f = o(f),\ x \to x_0$?

14. Довести, що $\forall C \in \mathbf{R}$, $C \neq 0$:

$$f = o(g),\ x \to x_0 \Leftrightarrow f = o(Cg),\ x \to x_0.$$

15. Довести, що

а) $x^2 = o(x),\ x \to 0$; б) $x = o(x^2),\ x \to +\infty$;

в) $\forall m \in \mathbf{N}$: $x^m = o(2^x),\ x \to +\infty$;

г) $\forall \varepsilon > 0$: $\ln x = o(x^\varepsilon),\ x \to +\infty$;

д) $n^2 + 7n + 1 = o(2^n),\ n \to +\infty$.

2.5. ВЛАСТИВОСТІ ВІДНОШЕННЯ «о»

1° Якщо $f = o(g),\ x \to x_0$, то $f = O(g),\ x \to x_0$.

2°. Якщо $f = o(g),\ x \to x_0$ і $g = O(h),\ x \to x_0$. то $f = = o(h),\ x \to x_0$. Таким чином, $o(O(h)) = o(h),\ x \to x_0$. Аналогічно $O(o(h)) = o(h),\ x \to x_0$.

3°. Якщо $f_i = o(g),\ x \to x_0$ для $i = 1,\ 2$, то $f_1 + f_2 = = o(g),\ x \to x_0$.

4°. Якщо $f_1 = o(g_1),\ x \to x_0$ і $f_2 = O(g_2),\ x \to x_0$ то $f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2),\ x \to x_0$.

Отже,

$$o(g_1)O(g_2) = o(g_1 g_2), \quad x \to x_0.$$

$\ulcorner$ Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$. Згідно з означенням відношень «о» і «О», маємо

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in (A \cap B(x_0, \delta_1) \setminus \{x_0\}):$$
$$|f_1(x)| \leqslant \eta |g_1(x)|; \tag{1}$$
$$\exists L > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in (A \cap B(x_0, \delta_2) \setminus \{x_0\}):$$
$$|f_2(x)| \leqslant L |g_2(x)|. \tag{2}$$

Нехай для заданого $\varepsilon > 0$ $\eta = \frac{\varepsilon}{L}$ і $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тоді із (1) і (2) випливає, що

$$\forall x \in (A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}):$$
$$|f_1(x) \cdot f_2(x)| \leqslant L\eta |g_1(x) \cdot g_2(x)| = \varepsilon |g_1(x) \cdot g_2(x)|. \quad \lrcorner$$

Вправа

16. Довести властивості 2° і 3°.

5°. Якщо $f - g = o(f)$, $x \to x_0$, то

$$f - g = o(g), \quad x \to x_0.$$

$\ulcorner$ Використовуючи властивість 2°, достатньо показати, що $f = O(g)$, $x \to x_0$. Згідно з означенням відношення «о», для $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ маємо

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}): \ |f(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{2} |f(x)|.$$

Звідси випливає, що

$$|f(x)| - |g(x)| \leqslant \frac{1}{2} |f(x)|$$

і

$$|f(x)| \leqslant 2|g(x)|, \quad \lrcorner$$

Вправи

17. Нехай $m \in \mathbf{N}$, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}$. Довести, що

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = o(x^{m+1}), \ x \to +\infty.$$

18. Довести, що $x - \sin x = o(x)$, $x \to 0$.

19. Нехай $a > 1$, $g(x) \to +\infty$, $x \to x_0$ і $f = o(g)$, $x \to x_0$. Довести, що $a^{f(x)} = o(a^{g(x)})$, $x \to x_0$.

2.6. ЕКВІВАЛЕНТНІ ФУНКЦІЇ

Означення. Функції f і g називаються ***еквівалентними при*** $x \to x_0$, якщо $f - g = o(f)$, $x \to x_0$.

Позначення: $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$ або $f \sim g$, $x \to x_0$.

Зауваження. Згідно з властивістю 5°, умови $f - g = o(f)$, $x \to x_0$ і $f - g = o(g)$, $x \to x_0$ рівносильні.

Вправи

20. Довести, що:

а) $x^2 + x \sim x^2$, $x \to +\infty$;

б) $x^2 + x \sim x$, $x \to 0$;

в) $\sqrt{x^2 + x + 1} \sim x$, $x \to +\infty$;

г) $n^3 + 7n \ln n + 1 \sim n^3$, $n \to +\infty$.

21. Нехай $m \in \mathbb{N}$, $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}$. Довести, що

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m \sim x^m, \quad x \to +\infty.$$

22. Навести приклад функцій, для яких із того, що $f - g = o(f)$, $x \to x_0$, не випливає, що $f - g \to 0$, $x \to x_0$.

2.7. ВЛАСТИВОСТІ ВІДНОШЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

1°. Нехай $\forall x \in (A \setminus \{x_0\})$: $g(x) \neq 0$. Тоді

$$f \sim g, \quad x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

⌈ Якщо $f \sim g$, $x \to x_0$, то згідно з означенням

$$f - g = o(g), \quad x \to x_0 \Rightarrow \frac{f}{g} - 1 = \frac{o(g)}{g}, \quad x \to x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} - 1 = o(1), \quad x \to x_0 \Rightarrow f(x) - g(x) = g(x)\, o(1) =$$

$$= O(g(x)) \cdot o(1) = o(g(x)), \quad x \to x_0.$$

Тому $f \sim g$, $x \to x_0$. ⌋

2°. Для будь-якої функції f: $f \sim f$, $x \to x_0$.

3°. Якщо $f \sim g$, $x \to x_0$ і $g \sim h$, $x \to x_0$ то $f \sim h$, $x \to x_0$.

⌈ Із співвідношення $f \sim g$, $x \to x_0$ випливає, що $f =$

$= O(g)$, $x \to x_0$ і $g = O(f)$, $x \to x_0$ (див. доведення властивості 5° п. 2.5), згідно з припущенням

$$f - g = o(g), \quad x \to x_0; \qquad g - h = o(g), \quad x \to x_0.$$

Звідки на основі властивості 3° п. 2.5 маємо $f - h = o(g)$, $x \to x_0$, і згідно з властивістю 2° п. 2.5 $f - h = o(f)$, $x \to x_0$. Тому $f \sim h$, $x \to x_0$.

4°. Якщо $f_i \sim g_i$, $x \to x_0$ для $i = 1, 2$, то $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \times \times g_2$, $x \to x_0$.

⌈ Маємо

$$f_1 f_2 - g_1 g_2 = f_1 f_2 - f_1 g_2 + f_1 g_2 - g_1 g_2 =$$
$$= f_1 (f_2 - g_2) + (f_1 - g_1) g_2 =$$
$$= O_1(g_1)\, o_1(g_2) + o_2(g_1)\, O_2(g_2) = o(g_1 g_2), \quad x \to x_0. \quad ⌋$$

5°. Нехай $\forall x \in (A \setminus \{x_0\})$: $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ і $f \sim g$, $x \to x_0$. Тоді для будь-якої функції h: $A \to \mathbf{R}$ з існування однієї з границь

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)\, h(x)), \quad \lim_{x \to x_0} (g(x)\, h(x))$$

випливає існування другої границі і їх рівність.

Аналогічно з існування однієї з границь

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{f(x)}, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)}$$

випливає існування другої і їх рівність.

⌈ Припустимо, що існує $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)\, h(x))$. Тоді на основі властивості 1° існує границя функції

$$x \mapsto g(x)\, h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} (f(x)\, h(x)), \quad x \in A.$$

при $x \to x_0$. ⌋

Вправи

23. З того, що $f \sim g$, $x \to x_0$ не випливає, що $2^f \sim 2^g$, $x \to x_0$. Навести приклад.

24. З того, що $f_i \sim g_i$, $x \to x_0$ для $i = 1, 2$ не випливає, що $f_1 \pm f_2 \sim \sim g_1 \pm g_2$, $x \to x_0$. Навести приклади.

2.8. ПОРЯДОК ОДНІЄЇ ФУНКЦІЇ ВІДНОСНО ІНШОЇ

Нехай функція $g : A \to \mathbf{R}$ така, що $\forall x \in (A \setminus \{x_0\}) : g(x) > > 0$.

Означення. Функція f має ***порядок*** $\rho \in \mathbf{R}$ відносно функції g при $x \to x_0$, якщо існує

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^\rho} = a \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0.$$

Приклади. 1. Нехай $x_0 = 0$. Функція $f(x) = \sin x^2$, $x \in \mathbf{R}$ має порядок 2 відносно функції $g(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$ при $x \to 0$, а функція $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ має порядок -2 відносно $g(x) = x$ при $x \to 0$.

2. Нехай $x_0 = +\infty$. Тоді функція $f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$, $x \in \mathbf{R}$, де $m \in \mathbf{N}$, $\{a_1, a_2, \ldots a_m\} \subset \mathbf{R}$ має порядок m відносно функції $g(x) = x$ при $x \to +\infty$, а функція $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $x > 0$ має порядок $-\frac{1}{2}$ відносно $g(x) = x$ при $x \to +\infty$.

2.9. ШКАЛА ПОРІВНЯННЯ

Нехай $A \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ — гранична точка множини A. Розглянемо функції вигляду $f : A \to \mathbf{R}$.

Означення. Сукупність функцій G називається ***шкалою порівняння при*** $x \to x_0$, якщо:

1) $\forall \{f, g\} \subset G$ або $f = o(g)$, $x \to x_0$ або $g = o(f)$, $x \to x_0$ або $f = g$;

2) $\forall f \in G \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in (A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\})$: $f(x) \neq 0$.

У випадку $x_0 = +\infty$ означення аналогічне з очевидною зміною в умові 2).

Приклади. 1. Нехай $x_0 = 0$, $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Сукупності

$$G_1 = \{A \ni x \mapsto x^n : n \in \mathbf{Z}\},$$

$$G_2 = \{A \ni x \mapsto x^n : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$$

є шкалами порівняння при $x \to 0$.

2. Нехай $x_0 = 0$, $A = (0, a)$, $0 < a \leqslant +\infty$. Сукупність

$$G = \{A \ni x \mapsto x^\alpha \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$$

є шкала порівняння при $x \to 0+$.

3. Нехай $x_0 = +\infty$, $A = (a, +\infty)$, $a > 0$. Сукупності

$$G_1 = \{A \ni x \mapsto x^n : n \in \mathbf{Z}\},$$

$$G_2 = \{A \ni x \mapsto x^n : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$$

є шкалами порівняння при $x \to +\infty$.

Звернемо увагу на те, що непуста підмножина шкали порівняння G — також шкала порівняння.

2.10. ГОЛОВНА ЧАСТИНА. ПОНЯТТЯ ПРО АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗКЛАД

Нехай G — шкала порівняння при $x \to x_0$ і f — деяка функція.

Означення 1. Якщо

$$\exists L \neq 0 \ \exists g \in G\colon f(x) \sim Lg(x), \quad x \to x_0,$$

то функція Lg називається ***головною частиною функції*** f ***відносно шкали*** G при $x \to x_0$.

Зауваження. Головна частина f відносно заданої шкали може не існувати. Навести приклад.

ТЕОРЕМА (про єдиність головної частини). Якщо

$$f(x) \sim L_i g_i(x), \quad x \to x_0; \qquad i = 1, 2,$$

де $L_1 \neq 0$, $L_2 \neq 0$ і $g_i \in G$, $i = 1, 2$, то $L_1 = L_2$ і $g_1 = g_2$.

⌈Оскільки $L_1 g_1 \sim L_2 g_2$, $x \to x_0$ згідно з 3°, то $L_1 g_1 - L_2 g_2 = o(L_1 g_1)$, $x \to x_0$ і $L_1 g_1 - L_2 g_2 = o(g_1)$, $x \to x_0$. Якщо $g_1 \neq g_2$, то одержимо $L_2 g_2 = L_1 g_1 + o(g_1)$, $x \to x_0$. Звідси випливає, що припущення $g_2 = o(g_1)$, $x \to x_0$ приводить до співвідношення $g_1 = o(g_1)$, $x \to x_0$, що неможливо для функції із шкали. Аналогічно неможливий і випадок $g_1 = o(g_2)$, $x \to x_0$. Тому $g_1 = g_2$, звідки $(L_1 - L_2) g_1 = o(g_1)$, $x \to x_0$ і, таким чином, $L_1 = L_2$. ⌋

Послідовне виділення головної частини відносно відповідним чином підібраної шкали дозволяє досить детально описати поведінку функції при $x \to x_0$. Нехай G — шкала порівняння при $x \to x_0$ і f — деяка функція.

Визначимо головну частину $L_1 g_1$ функції f відносно шкали G при $x \to x_0$. Тоді

$$L_1 \neq 0, \quad g_1 \in G, \quad f \sim L_1 g_1, \quad x \to x_0;$$
$$f - L_1 g_1 = o(g_1), \quad x \to x_0.$$

Отже,

$$f(x) = L_1 g_1(x) + o(g_1(x)), \quad x \to x_0$$

Нехай далі $L_2 g_2$ — головна частина функції $f - L_1 g_1$ відносно шкали G при $x \to x_0$. Тоді

$$L_2 \neq 0, \ g_2 \in G, \ f - L_1 g_1 \sim L_2 g_2, \ x \to x_0.$$

Тому $g_2 = o(g_1)$, $x \to x_0$. Крім того,

$$f - L_1 g_1 - L_2 g_2 = o(g_2), \quad x \to x_0;$$

$$f(x) = L_1 g_1(x) + L_2 g_2(x) + o(g_2(x)), \quad x \to x_0.$$

Продовжуючи так і далі, після n кроків отримаємо такий розклад, для функції f

$$f(x) = L_1 g_1(x) + L_2 g_2(x) + \ldots + L_n g_n(x) + o(g_n(x)),$$

$$x \to x_0, \tag{1}$$

де $L_i \neq 0$, $g_i \in G$, $1 \leqslant i \leqslant n$, причому для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ $g_{i+1} = o(g_i)$, $x \to x_0$.

Права частина формули (1) називається ***асимптотичним розкладом функції*** f при $x \to x_0$ відносно шкали G з точністю до g_n.

Вправа

25. Довести, що асимптотичний розклад з точністю до g_n визначається єдиним чином.

Приклад. Обчислимо границю

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} - 3\sqrt[3]{x}\right).$$

⌈Для числа $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ і функції $f(x) = \sqrt[3]{x+a}$, $x \geqslant -a$ розглянемо асимптотичний розклад при $x \to +\infty$ відносно шкали

$$G = \{(0, +\infty) \ni x \mapsto x^{\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Спочатку знайдемо головну частину f відносно G при $x \to +\infty$, тобто визначимо $L_1 \neq 0$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ таким чином, щоб

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+a}}{L_1 x^{\alpha_1}} = 1.$$

Для цього слід покласти $L_1 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{3}$. Тоді $\sqrt[3]{x+a} \sim \sqrt[3]{x}$, $x \to +\infty$. Знайдемо тепер головну частину функції $x \mapsto \sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x}$, $x \geqslant \max(0, -a)$ при $x \to +\infty$ відносно шкали G, тобто визначимо $L_2 \neq 0$ і $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ таким чином, щоб

$$\frac{\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x}}{L_2 x^{\alpha_2}} = \frac{a}{L_2 x^{\alpha_2} \left(\sqrt[3]{(x+a)^2} + \sqrt[3]{x(x+a)} + \sqrt[3]{x^2}\right)} \to 1$$

при $x \to +\infty$. Треба покласти $L_2 = \frac{a}{3}$, $\alpha_2 = -\frac{2}{3}$. Таким чином,

$$\sqrt[3]{x+a} = \sqrt[3]{x} + \frac{a}{3\sqrt[3]{x^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right), \quad x \to +\infty,$$

Цього розкладу досить для обчислення границі

$$x^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x-2}-3\sqrt[3]{x}\right)=$$

$$=x^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3\sqrt{x^2}}+\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-\right.$$

$$\left.-3\sqrt[3]{x}+o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\right)=\frac{1}{3}+\frac{o\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)}{x^{-\frac{2}{3}}},\quad x\to+\infty.$$

Отже, границя дорівнює $\frac{1}{3}$.

Вправа

26. Довести, що:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}-\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)=-\frac{9}{8}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}-2\sqrt[3]{x}\right)=-\frac{2}{9}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}-3\sqrt{x}\right)=-\frac{7}{4}$.

§ 3. НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ

3.1. ОЗНАЧЕННЯ Й ПРИКЛАДИ

Нехай $A\subset\mathbf{R}$, x_0 — гранична точка множини A, причому $x_0\in A$ і $x_0\in\mathbf{R}$. Нехай $f: A\to\mathbf{R}$.

Означення 1. Функція f називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

тобто, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Використовуючи означення Коші й Гейне щодо границі функції у точці, отримаємо два означення, рівносильні означенню 1.

Означення 2. Функція f неперервна в точці x_0, якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in(A\cap B(x_0,\delta)):\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Означення 3. Функція f неперервна в точці x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n : n \geqslant 1\}$, яка задовольняє умовам:

$$1)\ \forall n \geqslant 1:\ x_n \in A; \qquad 2)\ x_n \to x_0, \quad n \to \infty,$$

виконується співвідношення $f(x_n) \to f(x_0)$, $n \to \infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$

Найтиповішим є випадок, коли для точки x_0 існує $\delta > 0$ таке, що $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$. Тоді означенню неперервності функції f у точці x_0 можна надати такої форми:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon),$$

тобто для будь-якого околу V точки $f(x_0)$ існує окіл U точки x_0 такий, що $f(U) \subset V$.

Цікаві також такі два випадки.

Нехай x_0 і A такі, що $\exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0] \subset A$.

Означення 4. Функція f називається ***неперервною зліва у точці*** x_0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0]:\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

тобто, якщо $f(x_0 -) = f(x_0)$

Нехай x_0 і A такі, що $\exists \delta > 0 : [x_0, x_0 + \delta) \subset A$.

Означення 5. Функція f називається ***неперервною справа у точці*** x_0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in [x_0, x_0 + \delta):\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

тобто, якщо $f(x_0) = f(x_0 +)$.

Вправа

1. Довести, що функція f неперервна у точці x_0 тоді й тільки тоді, коли f неперервна зліва і справа у точці x_0.

Означення 6. Будь-яка функція неперервна в ізольованій точці. Функція f ***неперервна на множині*** A, якщо вона неперервна в кожній точці множини A. *Позначення*:

$f \in \mathbf{C}(A) \Leftrightarrow f$ неперервна в кожній точці множини A.

ТЕОРЕМА. Нехай функції $f : A \to \mathbf{R}$ і $g : A \to \mathbf{R}$ неперервні в точці $x_0 \in A$. Тоді:

а) $\forall C \in \mathbf{R} : Cf$ неперервна в точці x_0;

б) $f + g$ неперервна в точці x_0;

в) $f \cdot g$ неперервна в точці x_0;

г) якщо додатково $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{1}{g}$ неперервна в точці x_0.

|— Доведення випливає з означення 1 і властивості 4° п. 1.3 границі функції у точці. —|

Приклади. 1. Нехай $c \in \mathbf{R}$ і $f(x) = c$, $x \in \mathbf{R}$. Тоді $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$.
$\vdash$ Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$ фіксоване і $\forall \varepsilon > 0$ $\delta = \varepsilon$. Тоді

$$\forall x,\ |x - x_0| < \delta:\ |f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon. \quad \dashv$$

2. Нехай $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$. Переконаємось, що $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$.
$\vdash$ Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$ фіксоване і $\forall \varepsilon > 0$ $\delta = \varepsilon$. Тоді

$$\forall x,\ |x - x_0| < \delta:\ |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon. \quad \dashv$$

3. Нехай $m \in \mathbf{N}$, $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}$;

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Переконаємось, що $P \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$, тобто що многочлен є неперевною функцією на осі.
$\vdash$ Наслідок результатів прикладів 1, 2 і теореми. $\dashv$
4. Раціональна функція є відношення двох многочленів:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in \{x \mid Q(x) \neq 0\}.$$

Із результату прикладу 3 і теореми випливає, що раціональна функція неперервна на множині $\{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.
5. Функції $\{\sin, \cos\} \subset \mathbf{C}(\mathbf{R})$, а функції tg і ctg неперервні на множині визначення.
Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$ фіксоване, $\forall \varepsilon > 0$ покладемо $\delta = \varepsilon$. Тоді

$$\forall x,\ |x - x_0| < \delta:$$

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Для функції cos міркування аналогічні, для tg і ctg треба використати теорему. $\dashv$

6. Нехай $a > 0$ і $f(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$. Доведемо, що $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$.
$\vdash$ Дійсно

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}:\ \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} (a^x - a^{x_0}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{x_0} \lim_{x \to x_0} (a^{x - x_0} - 1) = 0 \Leftrightarrow a^{x_0} \lim_{u \to 0} (a^u - 1) = 0. \quad \dashv$$

7. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Тоді $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ і $f(0-) = -1$; $f(0+) = 1$.

Означення 7. Якщо функція f не є неперервною у точці x^0, то кажуть, що ***функція f розривна у точці*** x_0 і що ***x^0 є точка розриву функції f.***

Вправи

2. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

не є неперервною в точці 0.

3. Якщо $f \in \mathbf{C}(A)$, то $|f| \in \mathbf{C}(A)$. Довести це твердження і навести приклад, який показував би, що обернене твердження не є правильним.

4. Нехай для функцій f і g

$$h(x) = \max(f(x),\ g(x)),\ x \in A;$$

$$k(x) = \min(f(x),\ g(x)),\ x \in A.$$

Якщо $\{f, g\} \subset \mathbf{C}(A)$, то $\{h, k\} \subset \mathbf{C}(A)$. Довести це.

5. Нехай $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $g(x) = f(x^3)$, $h(x) = f(x^2)$, $x \in \mathbf{R}$. Припустимо, що $g \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$. Чи вірно, що $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$? Якщо $h \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$, чи завжди $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$?

6. Нехай $f(x) = [x] \sin \pi x$, $x \in \mathbf{R}$. Довести, що $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$. Побудувати графік цієї функції.

7. Довести, що функція

$$f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]},\ x \geqslant \frac{1}{2}$$

неперервна й строго зростає на $[1, +\infty)$.

8. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbf{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Довести, що ця функція неперервна у точках $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ і розривна у всіх інших точках.

9. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Функція Діріхле [1]. Довести, що f розривна в кожній точці.

10. Побудувати графік функції

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{2^x \cdot x^{2n} + x^2 + 1}{x^{2n} + 1},\quad x \in \mathbf{R}$$

і дослідити її на неперервність.

11*. Нехай $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ неперервна у точці 0 і

$$\forall x \in \mathbf{R}\colon\ f(x) + f\left(\frac{2x}{3}\right) = x.$$

Довести, що $f(x) = \dfrac{3}{5}x$, $x \in \mathbf{R}$.

12. Визначити f, якщо $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ і $\forall r \in \mathbf{Q}$:
а) $f(r) = 0$; б) $f(r) = r^5 + r + 1$.

---

[1] *Діріхле Петер Густав Лежен* (1805—1859) — німецький математик. Йому належить ряд фундаментальних результатів у математичному аналізі, теорії чисел, варіаційному численні й математичній фізиці.

13. Нехай $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ і

$$\exists C \in \mathbf{R} \quad \forall r \in \mathbf{Q}: \ |f(r)| \leqslant C.$$

Довести, що функція f обмежена на $\mathbf{R}$.

14. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([0, 1])$. Чи можуть функції f і g бути різними: а) тільки у скінченному числі точок із $[0, 1]$? б) тільки у зліченній множині точок із $[0, 1]$?

14.1. Функція $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ така, що

$$\forall \{x, y\} \subset (0, +\infty): \ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Довести, що $\exists c > 0 \ \forall x > 0: f(x) = cx$.

15*. Нехай $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ і

$$\forall x \in \mathbf{R} \ \forall y \in \mathbf{R}: \ f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Довести, що $f(x) = f(1) \cdot x$, $x \in \mathbf{R}$. Рівняння (1) відносно функції f називається ***функціональним рівнянням Коші***.

15.1. Функція $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ така, що

$$\forall x \in \mathbf{R} \ \forall n \in \mathbf{N}: \ f\left(x - \frac{1}{n}\right) \leqslant f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Чи є функція f монотонною? Те ж питання при додатковій умові $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$.

3.2. ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

1°. Нехай f неперервна у точці x_0 і $p \in \mathbf{R}$, $f(x_0) < p$. Тоді

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in (A \cap B(x_0, \delta)): \ f(x) < p.$$

|_ Наслідок властивості 2° п. 1.3, границі функції у точці. _|

2°. Про границю складної функції. Нехай x_0 — гранична точка множини $A \subset \mathbf{R}$, $f: A \to \mathbf{R}$ і існує

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = p \in \mathbf{R},$$

і нехай функція $g: B \to \mathbf{R}$ для $B \supset \{f(x) \mid x \in A\} \cup \{p\}$ неперервна у точці p. Тоді

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(p),$$

тобто

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)).$$

|¯Якщо $\{x_n : n \geqslant 1\}$ — будь-яка послідовність, яка задовольняє умовам 1) і 2) означення 4 п. 1.2, то згідно з означенням Гейне границі функції f у точці x_0

$$f(x_n) \to p, \quad n \to \infty$$

і згідно з тим же означенням для функції g у точці p і неперервності функції g у точці p

$$g(f(x_n)) \to g(p), \quad n \to \infty. \qquad \lrcorner$$

3°. **Про неперервність суперпозиції неперервних функцій.** Нехай функція $f: A \to \mathbf{R}$ неперервна у точці $x_0 \in A$, $B \supset \supset \{f(x) \mid x \in A\}$ і функція $g: B \to \mathbf{R}$ неперервна у точці $f(x_0)$. Тоді функція $h(x) = g(f(x))$, $x \in A$ неперервна у точці x_0.

$\ulcorner$ Наслідок 2°, якщо покласти $p = f(x_0)$. $\lrcorner$

Нехай $(a, b) \subset \mathbf{R}$. Можливо, що $=\infty \leqslant a$ і $b \leqslant +\infty$. Нехай $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ монотонно не спадна на (a, b) функція. Тоді згідно з п. 1.5 існує

$$\lim_{x \to b-} f(x) = d \in \mathbf{R},$$

якщо функція f обмежена зверху на (a, b) і $f(x) \to +\infty$, $x \to \to b-$, якщо f не є обмеженою зверху на (a, b). Поведінка функції f при $x \to a+$ аналогічна.

4°. **ТЕОРЕМА (про існування і неперервність оберненої функції).** Нехай $f: (a, b) \to \mathbf{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Припустимо, що функція f задовольняє умовам:

1) f строго зростає на (a, b);
2) $f \in \mathbf{C}((a, b))$.

Позначимо

$$c = \lim_{x \to a+} (x), \quad d = \lim_{x \to b-} f(x);$$

при цьому $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$. Тоді $\exists!\ g: (c, d) \to (a, b)$ яка задовольняє умовам:

1) g строго зростає на (c, d);
2) $g \in \mathbf{C}((c, d))$;
3) $\forall x \in (a, b)$: $g(f(x)) = x$,

$\forall y \in (c, d)$: $f(g(y)) = y$.

$\ulcorner$ I. Доведемо спочатку, що

$$\forall y_0 \in (c, d)\ \exists!\ (x_0 \in (a, b): f(x_0) = y_0.$$

Введемо множину

$$M = \{x \in (a, b) \mid f(x) < y_0\}.$$

(i) Множина $M \neq \varnothing$. Дійсно, оскільки

$$\lim_{x \to a+} f(x) = c < y_0,$$

то для послідовності $\{x'_n : n \geqslant 1\}$, яка задовольняє умовам: а) $x'_n \in (a, b)$, $n \geqslant 1$; б) $x'_n \to a$, $n \to \infty$, маємо

$$f(x) \to c < y_0, \quad n \to \infty.$$

Таким чином

$$\exists N_1 \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N_1: \ f(x'_n) < y_0 \Rightarrow x'_n \in M.$$

(ii) Множина M обмежена зверху. Розглянемо послідовність $\{x''_n : n \geqslant 1\}$, яка задовольняє умовам: а) $x''_n \in (a, b)$, $n \geqslant 1$; б) $x_n \to b$, $n \to \infty$. Маємо

$$f(x''_n) \to d > y_0, \quad n \to \infty,$$

звідки

$$\exists N_2 \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N_2: \ f(x''_n) > y_0 \Rightarrow x''_n \notin M.$$

Тоді x''_{N_2} є верхня межа M, оскільки за умовою 1) теореми для $x \geqslant x''_{N_2}$: $f(x) \geqslant f(x''_{N_2}) > y_0 \Rightarrow x \notin M$.

(iii) За теоремою про існування точних меж

$$\exists x_0 \in \mathbf{R}: \ x_0 = \sup M.$$

Крім того, оскільки $x'_{N_1} < x_0 < x''_{N_2}$, то $x_0 \in (a, b)$.

Доведемо, що $f(x_0) = y_0$. Нехай n_0 таке, що

$$\forall n \geqslant n_0: \ a < x_0 - \frac{1}{n} < x_0 < x_0 + \frac{1}{n} < b.$$

Оскільки $x_0 = \sup M$, то з умови 1) теореми випливає, що $x_0 - \frac{1}{n} \in M$, $n \geqslant n_0$ і, таким чином, $f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) < y_0$, $n \geqslant n_0$. Звідси, використовуючи умову 2) теореми, маємо

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) \leqslant y_0.$$

Отже,

$$f(x_0) \leqslant y_0.$$

Крім того, $x_0 + \frac{1}{n} \notin M$, $n \geqslant n_0$ і тому

$$f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) > y_0, \quad n \geqslant n_0.$$

З умови неперервності

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) \geqslant y_0,$$

звідки

$$f(x_0) \geqslant y_0.$$

Тому $f(x_0) = y_0$.

Якщо $\bar{x} \in (a, b)$ таке, що $f(\bar{x}) = y_0$, то з припущення $\bar{x} < x_0 \Rightarrow y_0 = f(\bar{x}) < f(x_0) = y_0$, що неможливо. Аналогічно приводить до суперечності і припущення $\bar{x} > x_0$. Тому $\bar{x} = x_0$ і потрібне значення x_0 визначається єдиним чином.

II. Визначимо тепер функцію $g : (c, d) \to (a, b)$, поклавши для $y \in (c, d)$ значення $g(y)$ рівним тому єдиному числу $x \in (a, b)$, для якого $f(x) = y$. При цьому

$$\forall x \in (a, b): \ g(f(x)) = x,$$

$$\forall y \in (c, d): \ f(g(y)) = y.$$

Функція g є оберненою до функції f.

III. Нехай $c < y_1 < y_2 < d$. Доведемо, що $g(y_1) < g(y_2)$. Припустимо, що $g(y_1) \geqslant g(y_2)$. Покладемо $g(y_i) = x_i$, $i = 1, 2$. При цьому $a < x_2 \leqslant x_1 < b$. Тому згідно з умовою 1) теореми $f(x_2) \leqslant f(x_1)$ або $f(g(y_2)) \leqslant f(g(y_1)) \Leftrightarrow y_2 \leqslant y_1$, що неможливе. Таким чином, функція g строго зростає на (c, d).

IV. Доведемо , що $g \in \mathbf{C}((c, d))$. Нехай $y_0 \in (c, d)$ фіксоване. Використаємо означення Гейне. Візьмемо довільну послідовність $\{y_n : n \geqslant 1\}$, яка задовольняє умовам: а) $y_n \in (c, d)$, $n \geqslant 1$; б) $y_n \to y_0$, $n \to \infty$. Досить довести, що $g(y_n) \to g(y_0)$, $n \to \infty$. За доведеним в частині I можна вважати що

$$y_n \in [f(x'_{N_1}), f(x''_{N_2})], \quad n \geqslant 1.$$

Покладемо $x_n := g(y_n)$, $n \geqslant 1$ і $x_0 := g(y_0)$. Зауважимо, що, $x_n \in [x'_{N_1}, x''_{N_2}] \subset (a, b)$, $n \geqslant 0$. Припустимо, що $x_n \not\to x_0$, $n \to \infty$. Тоді обмежена послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\}$ має часткову границю і тому

$$\exists z \in [x'_{N_1}, x''_{N_2}], \quad z \neq x_0 \ \exists \{x_{n(k)} : k \geqslant 1\};$$

$$x_{n(k)} \to z, \quad k \to \infty,$$

звідки за умовою теореми маємо

$$f(x_{n(k)}) \to f(z) \neq f(x_0), \quad k \to \infty.$$

Тому

$$y_{n(k)} \to f(z) \neq y_0, \quad k \to \infty,$$

що неможливо. ⌋

Зауваження. Якщо $a \in \mathbf{R}$, то теорема залишається справедливою для множини $[a, b)$ з образом $[c, d)$, неперервність у точках a і c є неперервність справа; аналогічне зауваження відноситься і до кінця b.

Твердження, аналогічне доведеній теоремі, справедливе також для функції строго спадної і неперервної.

3.3 ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Нехай число $m \in \mathbf{N}$ фіксовано, $[a, b) = [0, +\infty)$ і $f(x) = x^m$, $x \in [0, +\infty)$.

Функція f задовольняє умовам теореми про існування й неперервність оберненої функції: f строго зростає і неперервна на $[0, +\infty)$; при цьому $c = 0$, $d = +\infty$. Тому існує єдина строго зростаюча й неперервна на $[0, +\infty)$ функція g: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, обернена до f. Функція g позначається символами

$$g(y) = \sqrt[m]{y} = y^{1/m}, \quad y \geqslant 0,$$

причому

$$\forall x \geqslant 0: \sqrt[m]{x^m} = x;$$

$$\forall y \geqslant 0: (\sqrt[m]{y})^m = y$$

(див. теорему про існування кореня натурального ступеня із невід'ємного числа).

Вправа

16. Застосувати властивість 4° до функції $f(x) = x^2$, $x \leqslant 0$ і визначити обернену функцію.

Приклад 2 (означення і властивості логарифмічної функції). Нехай число $d > 0$, $d \neq 1$, $(a, b) = \mathbf{R}$, $f(x) = d^x$, $x \in \mathbf{R}$.

Доведемо, що функція f має обернену, яка й називається ***логарифмічною функцією***.

⌈ Розглянемо випадок, коли $d > 1$. Для $0 < d < 1$ міркування аналогічні. Якщо $d > 1$, то функція f строго зростає й неперервна на $\mathbf{R}$, при цьому $c = 0$, $d = +\infty$. Згідно з властивістю 4°

$$\forall y \in (0, +\infty) \ \exists! \ x \in \mathbf{R}: \ d^x = y.$$

Число x називається ***логарифмом числа*** y за основою d і позначається символом $x = \log_d y$.

Функція $g(y) = \log_d y$, $y \in (0, +\infty)$, обернена f, строго зростає й неперервна на $(0, +\infty)$. Крім того,

$$\forall x \in \mathbf{R}: \ \log_d d^x = x;$$

$$\forall y \in (0, +\infty): \ d^{\log_d y} = y,$$

і оскільки $d^0 = 1$, то $\log_d 1 = 0$. ⌋

Вправа

17. Застосувати властивість 4° у прикладі 2 для $0 < d < 1$.

Приклад 3 (означення й властивості обернених тригонометричних функцій). Нехай

$$(a, b) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Функція tg строго зростає, неперервна на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ і $c = -\infty$, $d = +\infty$. Згідно з властивістю 4°

$$\forall y \in \mathbf{R} \ \exists! \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right): \ \operatorname{tg} x = y.$$

Число x називається ***арктангенсом числа*** y і позначається символом $x = \operatorname{arctg} y$. Обернена функція $g(y) = \operatorname{arctg} y$, $y \in \mathbf{R}$ строго зростає й неперервна на $\mathbf{R}$. Крім того,

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right): \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x;$$

$$\forall y \in \mathbf{R}: \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = y,$$

а рівності $\operatorname{tg} 0 = 0$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ рівносильні таким: $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Вправи

18. Застосувати властивість 4° до функцій:

а) $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$

і дати означення функцій arcsin, arccos. Описати властивості цих функцій.

19. Застосувати властивість 4° до функції

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 1, \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Приклади. 4. Нехай $a > 0$, $a \neq 1$. Доведемо, що

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e,$$

у окремому випадку при $a = e$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = 1.$$

⌈Застосуємо твердження 2° про границю складної функції, поклавши

$$A = (0, +\infty), \ x_0 = 0; \qquad f(x) = (1 + x)^{1/x}, \quad x > 0;$$

$$p = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e;$$

$$B = (0, +\infty): \ g(y) = \log_a y, \quad y > 0.$$

Оскільки логарифмічна функція неперервна на $(0, +\infty)$, то вона неперервна й у точці $y = e$. Тому згідно з твердженням 2° маємо

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a (1 + x)^{1/x} = \log_a e. \qquad ⌋$$

5. Нехай $a > 0$. Доведемо, що

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

⌈ Нехай $a \neq 1$. Зазначимо, що

$$z := a^x - 1 \to 0 \Leftrightarrow x \to 0$$

і що $x = \log_a (1 + z)$. Тому

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\log_a (1 + z)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a. \quad \dashv$$

6. Доведемо, що для будь-якого $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{\alpha \ln(1+x)} - 1)\, \alpha \ln (1 + x)}{\alpha x \ln (1 + x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln (1+x)} - 1}{\alpha \ln (1 + x)} \cdot \alpha \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = \alpha, \quad \alpha \neq 0.$$

При цьому використані результати прикладів 4 і 5, а також неперервність логарифмічної функції у точці 1, звідки $\ln (1 + x) \to 0$, $x \to 0$. $\dashv$

7. Нехай для $\alpha \in \mathbf{R}$; $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$. Покажемо, що $f \in \mathbf{C}((0, +\infty))$ Дійсно, оскільки

$$\forall x > 0\colon\ x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

то неперервність є наслідком неперервності логарифмічної і показникової функції, а також властивості 3°.

Вправи

20. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} x$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin \left(\dfrac{\pi}{6} \cos x\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^x$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln a_n}{\ln b_n}$; якщо $\forall n \geqslant 1$: $a_n > 0$, $b_n > 0$: $b_n \to +\infty$, $n \to \infty$; $\dfrac{a_n}{b_n} \to c \in (0 + \infty)$, $n \to \infty$.

21. Нехай f монотонно неспадна й неперервна на $\mathbf{R}$ функція і $\{x_n\colon n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$. Довести, що

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varliminf_{n\to\infty} x_n); \qquad \varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n).$$

22. Нехай f монотонно незростаюча й неперервна на $\mathbf{R}$ функція і $\{x_n\colon n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$. Довести, що

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n), \quad \varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varliminf_{n\to\infty} x_n).$$

3.4. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ, НЕПЕРЕРВНИХ НА ВІДРІЗКУ

Припускаємо, що $[a, b]$ відрізок, де $-\infty < a < b < +\infty$.

ТЕОРЕМА 1 (перша теорема Вейєрштрасса). Функція $f \in \mathbf{C}([a, b])$ обмежена на відрізку $[a, b]$.

$\ulcorner$Припустимо, що функція f необмежена на $[a, b]$. Тоді

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \exists x_n \in [a, b]:\ |f(x_n)| \geqslant n.$$

Обмежена послідовність $\{x_n: n \geqslant 1\}$ згідно з теоремою Больцано — Вейєрштрасса містить збіжну підпослідовність $x_{m(k)} \to x_0$, $k \to \infty$. При цьому $a \leqslant x_0 \leqslant b$, оскільки $a \leqslant x_{m(k)} \leqslant b$, $k \geqslant 1$. За умовою функція f неперервна в точці x_0, тому $f(x_{m(k)}) \to f(x_0)$, $k \to \infty$, що неможливо, оскільки

$$|f(x_{m(k)})| \geqslant m(k) \to +\infty, \quad k \to \infty. \qquad \lrcorner$$

Вправи

23. Навести приклад функції $f \in \mathbf{C}((a, b])$ не обмеженої на $(a, b]$.

24. Нехай для функції $f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{C}([0, +\infty))$, існує $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbf{R}$.

Довести, що f обмежена на $[0, +\infty)$.

25. Нехай $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ і є періодичною з додатним періодом на $\mathbf{R}$. Довести, що f обмежена на $\mathbf{R}$.

Означення. Нехай $f: A \to \mathbf{R}$. Функція f приймає в точці $x_0 \in A$ ***найбільше***, або ***максимальне*** (***найменше***, або ***мінімальне***) значення, якщо

$$\forall x \in A:\ f(x) \leqslant f(x_0)\ \ (f(x) \geqslant f(x_0)).$$

При цьому

$$f(x_0) = \max_A f\ \ (f(x_0) = \min_A f).$$

Вправа

26. Нехай $f(x) = \{x\}$, $x \in [0, 2]$. Довести, що не існує точки $x_0 \in [0, 2]$, для якої

$$f(x_0) = \sup_{[0,2]} f = 1.$$

ТЕОРЕМА 2 (друга теорема Вейєрштрасса). Функція $f \in \mathbf{C}([a, b])$ приймає найбільше й найменше значення на $[a, b]$, тобто

$$\exists x_* \in [a, b]\ \ \forall x \in [a, b]:\ f(x_*) \leqslant f(x)$$

і

$$\exists x^* \in [a, b]\ \ \forall x \in [a, b];\ f(x) \leqslant f(x^*).$$

⌈Доведемо існування точки x^*. Множина $f([a, b])$ обмежена за першою теоремою Вейєрштрасса і за теоремою про існування точних меж

$$\exists p \in \mathbf{R}: \ p = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Згідно з означенням точної верхньої межі

$$\forall n \in \mathbf{N} \ \exists x_n \in [a, b]: \ p - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant p.$$

Послідовність $\{x_n: n \geqslant 1\} \subset [a, b]$ обмежена і за теоремою Больцано — Вейєрштрасса існує підпослідовність $x_{m(k)} \to x^*$, $k \to \infty$, де $x^* \in [a, b]$. Із неперервності функції f у точці x^*

$$f(x_{m(k)}) \to f(x^*), \quad k \to \infty,$$

а за побудовою

$$\forall k \geqslant 1: \ p - \frac{1}{m(k)} < f(x_{m(k)}) \leqslant p.$$

Звідси $f(x_{m(k)}) \to p$; $k \to \infty$. Таким чином,

$$f(x^*) = p = \sup_{[a,b]} f. \qquad ⌋$$

Зауваження **1.** Звернемо увагу на те, що в умовах теореми

$$f(x^*) = \sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f$$

Аналогічно і для x_*.

Вправи

27. Навести приклад, який показує, що теорема 2 неправильна для функції $f \in C([a, b])$.

28. Нехай $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ і періодична з додатним періодом. Тоді

$$\exists x_* \in \mathbf{R} \ \forall x \in \mathbf{R}: \ f(x) \geqslant f(x_*);$$

$$\exists x^* \in \mathbf{R} \ \forall x \in \mathbf{R}: \ f(x) \leqslant f(x^*).$$

29. Нехай

$$P(x) = x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \ldots + a_{2m}, \quad x \in \mathbf{R},$$

де $m \in \mathbf{N}$, $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2m}\} \subset \mathbf{R}$. Довести що, $\exists x_0 \in \mathbf{R}: P(x_0) = \inf_{\mathbf{R}} P$.

30. Нехай P — довільний многочлен. Довести, що

$$\exists x_* \in \mathbf{R}: |P(x_*)| = \inf_{\mathbf{R}} |P|.$$

31. Нехай $f \in \mathbf{C}([0, +\infty))$, $f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$. Довести, що

$$\exists x_* \geqslant 0: \ f(x_*) = \inf_{[0,+\infty)} f.$$

32. Нехай для $f \in \mathbf{C}([a, b])$

$$g(x) = \max_{[a,x]} f, \quad h(x) = \min_{[a,x]} f; \qquad x \in [a, b].$$

Довести, що $\{g, h\} \subset \mathbf{C}([a, b])$.

33. Нехай $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$; $f(x) \to -\infty$, $x \to -\infty$; $f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$. Покладемо

$$g(x) = \sup \{t \mid f(t) < x\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Чи є функція g неперервною?

34. Нехай для функції f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ і точки $x_0 \in \mathbf{R}$

$$\omega(x_0, \delta) := \sup_{x:|x-x_0|<\delta} |f(x) - f(x_0)|,$$

де $\delta > 0$. Довести, що f неперервна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли $\omega(x_0, \delta) \to 0$, $\delta \to 0$.

ТЕОРЕМА 3. Припустимо, що функція $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ задовольняє умовам:

1) $f \in \mathbf{C}([a, b])$;

2) або $f(a) < 0 < f(b)$, або $f(a) > 0 > f(b)$. Тоді $\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$.

$\vdash$ Нехай $f(a) < 0 < f(b)$. Визначимо множину

$$M = \{x \in [a, b] \; f(x) < 0\}.$$

Множина $M \neq \varnothing$, оскільки $a \in M$, і обмежена, оскільки $M \subset [a, b]$. За теоремою про існування точних меж множина M має точну верхню межу. Нехай $x_0 = \sup M$. Покажемо, що $a < x_0 < b$. Згідно з властивістю 1° п. 3.2 при умовах теореми 3

$$\exists \delta_1 > 0 \;\; \forall x \in [a, a + \delta_1): \; f(x) < 0;$$

$$\exists \delta_2 > 0 \;\; \forall x \in (b - \delta_2, b]: \; f(x) > 0.$$

Звідси випливає, що $[a, a + \delta_1) \subset M$, $\sup M \leqslant b - \delta_2$. Таким чином, $a < x_0 < b$.

Доведемо тепер, що $f(x_0) = 0$. Згідно з означенням точної межі

$$\forall n \in \mathbf{N} \;\; \exists x_n \in M: \; x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leqslant x_0 = \sup M.$$

Для послідовності $\{x_n: n \geqslant 1\}$

$$\forall n \geqslant 1: \; f(x_n) < 0; \qquad x_n \to x_0, \quad n \to \infty.$$

Звідси за умовою 1) одержимо

$$f(x_n) \to f(x_0), \quad n \to \infty; \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant 0$$

і $f(x_0) \leqslant 0$. Крім того, з нерівності $x > x_0$ випливає, що $x \in M$ і $f(x) \geqslant 0$, а тому

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) \geqslant 0$$

і

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f(x) \geqslant 0.$$

Таким чином, $f(x_0) = 0$. ⌋

Вправи

35. Нехай $m \in \mathbf{N}$, $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1}\} \subset \mathbf{R}$ і $P(x) = x^{2m-1} + a_1 x^{2m-2} + \ldots + a_{2m-1}$, $x \in \mathbf{R}$. Довести, що

$$\exists x_0 \in \mathbf{R}\colon P(x_0) = 0.$$

36. Нехай $f \in \mathbf{C}([0, 2])$ і $f(0) = f(2)$. Довести, що

$$\exists x \in [0, 2]\ \exists y \in [0, 2]\colon x - y = 1 \text{ і } f(x) = f(y).$$

37. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([a, b])$, $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$. Довести, що

$$\exists x_0 \in (a, b)\colon f(x_0) = g(x_0).$$

ТЕОРЕМА 4 (теорема Коші про проміжне значення). Нехай $f \in \mathbf{C}([a, b])$. Тоді для довільного числа L з відрізка з кінцями $f(a)$ і $f(b)$

$$\exists x_0 \in [a, b]\colon f(x_0) = L.$$

⌈Розглянемо випадок, коли $f(a) < f(b)$. Тоді $f(a) \leqslant L \leqslant f(b)$. Якщо $f(a) = L$ або $f(b) = L$, то твердження очевидне. Тому далі припускаємо, що $f(a) < L < f(b)$. Функція $g(x) := f(x) - L$, $x \in [a, b]$, задовольняє умовам теореми 3:

1) $g \in \mathbf{C}([a, b])$;
2) $g(a) < 0 < g(b)$.

За теоремою 3

$$\exists x_0 \in (a, b)\colon g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = L.$$ ⌋

Вправи

38. Довести, що множина значень функції $f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbf{R}$ дорівнює $\mathbf{R}$.

39. Нехай $f \in \mathbf{C}([a, b])$. Довести, що $f([a, b])$ є відрізок.

40. Функція $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ строго зростає на $[a, b]$ і така, що

$$\forall L \in (f(a), f(b))\ \exists x_0 \in (a, b)\colon f(x_0) = L.$$

Довести, що f неперервна на (a, b).

Зауваження 2. Звернемо увагу на те, що означення неперервності в точці є локальним. Воно залежить, грубо кажучи, тільки від значень функції, які лежать у як завгодно малому околі точки. Теореми п. 3.4 показують, що неперервним функціям дійсно відповідають ті інтуїтивно вгадувані властивості, які звичайно описуються словом «неперервна».

3.5. РІВНОМІРНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Нехай $A \subset \mathbf{R}$ і $f : A \to \mathbf{R}$.

Означення. Функція f називається ***рівномірно неперервною на множині*** A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \{x', x''\} \subset A, \quad |x' - x''| < \delta:$$
$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Зауваження. Якщо f рівномірно неперервна на множині A, то $f \in \mathbf{C}(A)$. Обернене твердження, як показує приклад 3, не має місця.

Приклади. 1. Функція $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$ рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$. Для доведення в означенні покласти $\delta = \varepsilon$.

2. Функція sin рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$.

$\ulcorner$ Дійсно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon \ \forall \{x', x''\} \subset \mathbf{R}, \quad |x' - x''| < \delta:$$
$$|\sin x' - \sin x''| = 2\left|\cos \frac{x' + x''}{2}\right| \cdot \left|\sin \frac{x' - x''}{2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant |x' - x''| < \delta = \varepsilon. \qquad \lrcorner$$

3. Нехай $A = (0, 1]$; $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$. Функція f не є рівномірно неперервною на A.

$\ulcorner$ Для числа $\varepsilon^* = \dfrac{1}{2} > 0$ маємо

$$\forall \delta > 0 \ \exists \{x_n, x_{n+1}\} \subset (0, 1], \quad |x_n - x_{n+1}| < \delta:$$
$$|x_n^{-1} - x_{n+1}^{-1}| = 1 > \frac{1}{2},$$

а саме $x_n = \dfrac{1}{n}$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$. Зазначимо, що $f \in \mathbf{C}(A)$. $\lrcorner$

Вправи

41. Довести, що такі функції рівномірно неперервні на заданих множинах:

а) $f(x) = x^2$, $x \in [0, 10]$; б)* $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$;

в) $f(x) = \sin(\cos x)$, $x \in \mathbf{R}$; г)* $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

42. Довести, що такі функції не є рівномірно неперервними на заданих множинах:

а) $f(x) = x^2$, $x \geqslant 0$; б) $f(x) = \sin x^2$; $x \geqslant 0$;

в)* $f(x) = x \sin x$, $x \geqslant 0$; г)* $f(x) = \sin(x \sin x)$, $x \geqslant 0$.

43. Довести, що: а) сума рівномірно неперервних на множині A функцій рівномірно неперервна на A; б) добуток рівномірно неперервних на множині A функцій не обов'язково рівномірно неперервний на A.

ТЕОРЕМА (Кантора). Нехай $f \in \mathbf{C}([a, b])$. Тоді f рівномірно неперервна на $[a, b]$.

$\ulcorner$ Припустимо, що f не є рівномірно неперервною на $[a, b]$. Тоді, згідно з означенням

$$\exists \varepsilon^* > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists \{x'(\delta), x''(\delta)\} \subset [a, b],$$
$$|x'(\delta) - x''(\delta)| < \delta: \ |f(x'(\delta)) - f(x''(\delta))| \geqslant \varepsilon^*. \qquad (1)$$

Для числа ε^* розглянемо таку послідовність значень для δ: $\left\{\frac{1}{n}: n \geqslant 1\right\}$ і послідовності відповідних пар точок $\{x'_n: n \geqslant 1\}$, $\{x''_n: n \geqslant 1\}$, де $x'_n = x'\left(\frac{1}{n}\right)$, $x''_n = x''\left(\frac{1}{n}\right)$. Послідовність $\{x'_n: n \geqslant 1\} \subset [a, b]$ за теоремою Больцано — Вейєрштрасса містить збіжну підпослідовність $x'_{m(k)} \to x_0 \in [a, b]$, $k \to \infty$. Оскільки

$$|x'_{m(k)} - x''_{m(k)}| < \frac{1}{m(k)}, \quad k \geqslant 1,$$

то $x''_{m(k)} \to x_0$, $k \to \infty$. У силу неперервності функції f у точці x_0 маємо

$$f(x'_{m(k)}) \to f(x_0), \quad f(x''_{m(k)}) \to f(x_0), \quad k \to \infty.$$

Тому

$$f(x'_{m(k)}) - f(x''_{m(k)}) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Але згідно з нерівністю (1)

$$|f(x'_{m(k)}) - f(x''_{m(k)})| \geqslant \varepsilon^*, \quad k \geqslant 1.$$

Суперечність показує, що наше припущення невірне, а f — рівномірно неперервна на $[a, b]$. $\lrcorner$

Вправи

44. Нехай $f \in C(\mathbf{R})$ і існують границі $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \in \mathbf{R}$. Довести, що f рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$.

45. Нехай $f \in C(\mathbf{R})$ і періодична на $\mathbf{R}$ з додатним періодом. Довести, що f рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$.

3.6. РОЗРИВИ ФУНКЦІЙ

Нехай $f: (a, b) \to \mathbf{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, і $x_0 \in (a, b)$. Функція f неперервна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли існують границі зліва й справа в точці x_0

$$f(x_0 -), \quad f(x_0 +) \qquad (1)$$

і виконуються рівності

$$f(x_0 -) = f(x_0) = f(x_0 +). \qquad (2)$$

Якщо f у точці x_0 не є неперервною, то точка x_0 є точка розриву функції f.

Означення. Якщо обидві границі в (1) існують (скінченні), але хоча б одна із рівностей (2) порушується, то точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду***. При цьому кажуть, що функція f має в точці x_0 стрибок. Якщо хоча б одна із границь в (1) не існує (в окремому випадку, нескінченна), то точка x_0 називається ***точкою розриву другого роду***.

Зауваження. Інколи окремо розглядають випадок, коли обидві границі (1) існують і $f(x_0-) = f(x_0+) \neq f(x_0)$. Тоді точку x_0 називають ***точкою усуваного розриву***.

Приклади. 1. Для функції $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbf{R}$ маємо для $x_0 = 0$ $f(0) = 0$, $f(0-) = -1$, $f(0+) = 1$. Точка 0 є точкою розриву першого роду.

2. Для функції $f(x) = \{x\}$, $x \in \mathbf{R}$ кожна з точок множини $\mathbf{Z}$ є точкою розриву першого роду.

3. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

У точці 0 функція f не має границі ні зліва ні справа, тому вона є точкою розриву другого роду.

Зауваження. У випадках, аналогічних прикладу 3, значення в точці x_0 інколи не розглядають. Наприклад, про функцію $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ при цьому кажуть, що вона в точці 0 має розрив другого роду.

ТЕОРЕМА. Нехай $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ — монотонна на $[a, b]$ функція. Функція f може мати за точки розриву тільки стрибки.

$\ulcorner$ Нехай f монотонно не спадає на $[a, b]$. За теоремою 1 п. 1.5 існують

$$f(a+), \quad f(b-); \qquad \forall c \in (a, b): f(c-), f(c+),$$

причому

$$f(a) \leqslant f(a+) \leqslant f(c-) \leqslant f(c) \leqslant f(c+) \leqslant f(b-) \leqslant f(b). \ \lrcorner$$

Вправи

46. Довести, що твердження теореми справедливе і для монотонної функції на (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

47. Довести, що монотонна функція може мати не більше, ніж зліченну множину точок розриву першого роду.

§ 4. ТЕОРЕМА ВЕЙЄРШТРАССА

4.1. ДОПОМІЖНІ ТОТОЖНОСТІ

Припустимо, що $n \in \mathbf{N}$, $x \in [0, 1]$

(i) $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

⌈ Ця рівність випливає із тотожності $1^n = (x + (1-x))^n$, якщо застосувати формулу бінома Ньютона. ⌋

(ii) $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right) x^k (1-x)^{n-k} = 0.$$

⌈ Оскільки $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ при $k \geqslant 1$, то

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} =$$
$$= x \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i x^i (1-x)^{n-i-1} = x.$$

Звідси й випливає потрібна тотожність. ⌋

(iii) $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

⌈ Спочатку, як і при доведенні (ii), маємо

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-1) x^k (1-x)^{n-k} = nx \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^i i x^i (1-x)^{n-1-i} =$$
$$= n(n-1) x^2.$$

На основі (i) і (ii) одержимо

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} =$$
$$= \frac{1}{n^2} \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-1) x^k (1-x)^{n-k} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{n} C_n^k k x^k (1-x)^{n-k}\right] - 2x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} + x^2 =$$
$$= \frac{n(n-1)}{n^2} x^2 + \frac{nx}{n^2} - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}.$$ ⌋

Вправа

1. Нехай P — многочлен. Показати, що функція $\mathbb{R} \ni t \mapsto P(at+b)$, де a, b фіксовані, також многочлен від t.

4.2. ТЕОРЕМА ВЕЙЄРШТРАССА ПРО НАБЛИЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНАМИ ФУНКЦІЇ, НЕПЕРЕРВНОЇ НА ВІДРІЗКУ

ТЕОРЕМА. Нехай $f \in C([a, b])$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує многочлен P_ε, такий, що

$$\forall x \in [a, b]: |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad (\Leftrightarrow \max_{[a,b]} |f - P^\varepsilon| < \varepsilon).$$

⌈Достатньо довести теорему для відрізка $[0, 1]$. Дійсно, якщо теорема справедлива у випадку відрізка $[0, 1]$, то для функції $f \in C([a, b])$ і заданого $\varepsilon > 0$ існує многочлен P_ε такий, що

$$\forall t \in [0, 1]: |f(a + t(b-a)) - P_\varepsilon(t)| < \varepsilon,$$

і тому

$$\forall x \in [a, b]: \left| f(x) - P_\varepsilon\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon.$$

Нехай $f \in C([0, 1])$. Покладемо

$$B_n(f; x) := \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

для $n \in \mathbb{N}$ і $x \in [0, 1]$; $0^0 := 1$; $B_n(f, \cdot)$ — многочлен Бернштейна[1] степеня n для функції f. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Згідно з теоремою Кантора для числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall \{x', x''\} \subset [0, 1]$, $|x' - x''| < \delta$: $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Покладемо $p_{nk}(x) := C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, $x \in [0, 1]$, $n \geqslant 1$. Зазначимо, що $p_{nk}(x) \geqslant 0$, $x \in [0, 1]$ і $n \geqslant 1$. Використовуючи тотожності (i) і (iii), одержимо

$$\forall x \in [0,1]: |f(x) - B_n(f, x)| = \left|f(x) \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) - B_n(f, x)\right| =$$

[1] *Бернштейн Сергій Натанович* (1880—1968) — видатний радянський математик, який отримав ряд фундаментальних результатів у теорії наближення функцій, теорії ймовірності і інших розділах математики. Запропоноване ним у 1912 р. доведення теореми Вейєрштрасса грунтується на витонченій теоретико-ймовірнісній ідеї. Воно досить елементарне й має ту перевагу, що многочлени, які наближають функцію f, будуються у явному вигляді.

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) p_{nk}(x) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| p_{nk}(x) =$$

$$= \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| p_{nk}(x) +$$

$$+ \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| p_{nk}(x) < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta} p_{nk}(x) +$$

$$+ 2L \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\delta} p_{nk}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) +$$

$$+ \frac{2L}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 p_{nk}(x) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2L}{\delta^2} \cdot \frac{x(1-x)}{n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{L}{2n\delta^2}; \qquad L := \max_{[a,b]} |f|.$$

Нехай N таке, що $\forall n \geqslant N$: $\frac{L}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді

$$\forall n \geqslant N \ \ \forall x \in [0, 1]: \ |f(x) - B_n(f, x)| < \varepsilon. \qquad \lrcorner$$

Вправи

2. Довести, що для функції $f \in \mathbf{C}([0, 1])$

$$\forall x \in [0, 1]: \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

3*. Нехай функція f: $[0, 1] \to \mathbf{R}$ така, що

$$\exists L \in \mathbf{R} \ \ \forall \{x', x''\} \subset [0, 1]: \ |f(x') - f(x'')| \leqslant L |x' - x''|.$$

Використовуючи нерівності Коші, а також тотожності (i), (ii), довести, що

$$\forall n \geqslant 1 \ \ \forall x \in [0, 1]: \ |f(x) - B_n(f, x)| \leqslant \frac{L}{2\sqrt{n}}.$$

Глава 4. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

§ 1. ПРАВИЛА ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ

1.1. ОЗНАЧЕННЯ Й ПРИКЛАДИ

Нехай $A \subset \mathbf{R}$, точка $x_0 \in A$, причому

$$\exists \delta > 0: \ (x_0 - \delta, \ x_0 + \delta) \subset A$$

Нехай $f: A \to \mathbf{R}$. Покладемо

$$\Delta x := x - x_0, \quad x \in A, \quad x \neq x_0; \qquad \Delta f(x_0) := f(x) - f(x_0).$$

При цьому

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення. Якщо існує (скінченна) границя

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то ця границя називається ***похідною функції*** f ***у точці*** x_0 і позначається одним із символів:

$$\frac{df(x)}{dx}, \quad f'(x_0), \quad \dot{f}(x_0), \quad (f(x_0))'.$$

Таким чином,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Розглянемо приклади граничної поведінки відношення

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

при $x \to x_0$.

Приклад 1. Нехай $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbf{R}$.
Якщо $x_0 > 0$, то при $x > 0$, $x \neq x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x|x| - x_0|x_0|}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \to 2x_0 = 2|x_0|,$$

$$x \to x_0.$$

Якщо $x_0 < 0$, то при $x < 0$, $x \neq x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-x^2 + x_0^2}{x - x_0} = -x_0 - x \to -2x_0 = 2|x_0|, \quad x \to x_0$$

При $x_0 = 0$, $x \neq x_0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x| \to 0, \quad x \to 0.$$

Таким чином,

$$\forall x \in \mathbf{R}: \ (x|x|)' = 2|x|.$$

Вправа

1. Показати, що $\forall x \in \mathbf{R}$:

а) $(x)' = 1$; б) $(x^2)' = 2x$.

Приклади. 2. Для функції $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$ маємо $(|x|)' = (x)' = 1$ при $x > 0$, $(|x|)' = (-x)' = -1$ при $x < 0$. Нехай $x_0 = 0$, тоді

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} \quad \text{при } x \neq 0.$$

Границя цього відношення при $x \to 0$ не існує. Тому не існує й похідна функції f у точці 0. Зауважимо, що

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1; \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

3. Для функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbf{R}$, і точки $x_0 = 0$ відношення

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \to +\infty, \quad x \to 0.$$

Отже, похідна функції f у точці 0 не існує.

4. Для функції

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

і точки $x_0 = 0$ відношення

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin \dfrac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

границі при $x \to 0$ не має. Отже, похідна функції f в точці $x_0 = 0$ не існує.

1.2. ФІЗИЧНА І ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЇ ПОХІДНОЇ

(і) Точка P рухається вздовж числової прямої, $s(t)$ — координата точки P у момент часу t. Нехай t_1, t_2 — два моменти часу, причому $t_1 < t_2$. Середня швидкість руху точки за період часу $[t_1, t_2]$ дорівнює

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1},$$

де $s(t_2) - s(t_1)$ — шлях, який пройдено за час $t_2 - t_1$. Миттєва швидкість у точці t_1 визначається як границя

$$\lim_{t_2 \to t_1+} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Таким чином, миттєва швидкість $v(t)$ точки P у момент часу t є похідна у точці t від шляху s: $v(t) = s'(t)$. Якщо миттєва швидкість точки у момент часу t відома, то наближене значення шляху, який пройдено за проміжок часу $[t, t + \Delta t]$, дорівнює наближено $s'(t)\,\Delta t$.

(ii) Нехай $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ і $x_0 \in (a, b)$. Пряма, що проходить через точки $P_0 = (x_0, f(x_0))$ і $P = (x, f(x))$ для $x \neq x_0$ називається ***січною***. Положення січної визначається точкою P_0 та кутом нахилу січної $\alpha(P(x))$, який відраховується проти годинникової стрілки від додатного напряму осі абсцис. Тангенс цього кута дорівнює

$$\operatorname{tg} \alpha(P(x)) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

При цьому досить обмежитися значеннями кута $\alpha(P(x)) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Якщо абсцису x наближати до x_0, то точка $P(x)$ буде наближатися, рухаючись вздовж графіка, до точки P_0. При цьому може статися, що січна наближається до деякого певного положення, точніше, це значить, що кут $\alpha(P(x)) \to \alpha_0$, $x \to x_0$.

Якщо існує граничне положення січної при $x \to x_0$, тобто існує $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(P(x)) = \alpha_0$, то пряма, що проходить через точку P_0 і утворює кут α_0 з додатним напрямом осі абсцис, називається ***дотичною до графіка функції*** f у точці $(x_0, f(x_0))$. Дотична у точці може не існувати. Цікава поведінка січної при $x \to x_0$ у прикладі 4 п. 1.1.

ЛЕМА. Дотична до графіка функції f у точці $(x_0, f(x_0))$ з кутом нахилу $\alpha_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ до додатного напряму осі абсцис існує тоді й тільки тоді, коли існує $f'(x_0)$, при цьому

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0).$$

⌈ Дійсно, якщо $f'(x_0)$ існує, то згідно з рівністю (1) існує

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} \alpha(P(x)) = f'(x_0),$$

а оскільки $\operatorname{arctg} \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$, то

$$\alpha(P(x)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha(P(x))) \to \operatorname{arctg} f'(x_0), \quad x \to x_0,$$

причому $\operatorname{arctg} f'(x_0) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Отож дотична існує і $\alpha_0 = \operatorname{arctg} f'(x_0)$.

Якщо існує дотична у точці $(x_0, f(x_0)$, тобто

$$\alpha(P(x)) \to \alpha_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \to x_0,$$

то з того, що $\operatorname{tg} \in C\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$, випливає

$$\operatorname{tg} \alpha(P(x)) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to \operatorname{tg} \alpha_0, \quad x \to x_0,$$

тому існує $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0$. ⌋

Вправи

2. Довести, що функція f має вертикальну дотичну $\left(\alpha_0 = \frac{\pi}{2}\right)$ до графіка у точці $(x_0, f(x_0))$ тоді й тільки тоді, коли

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to +\infty \ (-\infty), \quad x \to x_0.$$

В цьому випадку іноді кажуть про нескінченну похідну і пишуть $f'(x_0) = +\infty \ (-\infty)$.

3. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

має $f'(0)$, і дати геометричну інтерпретацію цьому результату.

1.3. ЗАУВАЖЕННЯ

1. Означення похідної у точці має локальний характер. Точніше це значить: гранична поведінка відношення

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ при } x \to x_0$$

не зміниться, якщо для довільно заданого $\delta > 0$ зовні δ-околу точки x_0 довільно змінити значення функції.

2. Якщо існує $f'(x_0) \in \mathbf{R}$, то

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

⌈ Дійсно,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

звідки випливає, що

$$\alpha(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \to 0, \quad x \to x_0$$

і

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0) =$$
$$= f(x) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0. \quad \lrcorner$$

Вправа

4. Якщо $\exists L \in \mathbf{R}$: $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0)$, $x \to x_0$ то існує $f'(x_0) = L$. Довести це твердження.

3. Визначення дотичної може бути сформульоване в такій формі: пряма вигляду

$$g(x) = f(x_0) + L(x - x_0), \quad x \in \mathbf{R},$$

де $L \in \mathbf{R}$ — фіксоване число, називається ***дотичною до графіка функції*** f ***у точці*** $(x_0, f(x_0))$, якщо

$$f(x) - g(x) = o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Вправа

5. Довести рівносильність означень дотичної до графіка функцій, наведених у п. 1.2 і 1.3.

4. Якщо в точці x_0 існує $f'(x_0) \in \mathbf{R}$, то функція f неперервна в точці x_0.

$\ulcorner$ Дійсно, згідно з зауваженням 2

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

тому $f(x) - f(x_0) \to 0$ і $f(x) \to f(x_0)$, $x \to x_0$. $\lrcorner$

Вправа

6. Навести приклад, який показує, що неперервна в точці функція може не мати похідної в цій точці.

Означення. Якщо $\forall x \in A$ існує $f'(x)$, то функція $f' : A \ni x \mapsto f'(x)$ називається ***похідною функції*** f ***на множині*** A. Операція визначення f' часто називається ***диференціюванням функції*** f.

Вправа

7. Нехай функція f має похідну $f'(x_0)$ у точці x_0. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$;

б) $\lim\limits_{n \to \infty} n \left(f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) \right) - f(x_0))$;

в)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)}{f(x_0)}\right)^n$, якщо $f(x_0)>0$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$, де $x_n\to x_0$, $n\to\infty$ і $x_n\neq x_0$, $n\geqslant 1$;

д)* Чи обов'язково існує границя

$$\lim\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n},$$

де $x_n\to x_0$, $z_n\to x_0$, $n\to\infty$ і $x_n\neq z_n$, $n\geqslant 1$?

Вказівка. Розглянути для точки $x_0=0$ функції $f(x)=x^3$, $x\in\mathbf{R}$ і

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}; & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

1.4. ПРАВИЛА ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ

1°. Обчислення похідної суми, добутка та частки функцій. Нехай функції $f\colon A\to\mathbf{R}$ і $g\colon A\to\mathbf{R}$ мають похідні $f'(x_0)$ і $g'(x_0)$ в точці x_0. Тоді:

1) $\forall C\in\mathbf{R}$ функція Cf має похідну в точці x_0, причому

$$(Cf)'(x_0)=Cf'(x_0);$$

2) функція $f+g$ має похідну в точці x_0, причому

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0);$$

3) функція fg має похідну в точці x_0, причому

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0);$$

4) якщо додатково $g(x_0)\neq 0$, то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

⊢ 3) Оскільки

$$\frac{f(x)\,g(x)-f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)\,g(x)-f(x_0)\,g(x)+f(x_0)\,g(x)-f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,g(x)+f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

то твердження 3) випливає з означення похідних $f'(x_0)$ і $g'(x_0)$, а також з неперервності функції g в точці x_0.

4) Оскільки $g(x_0) \neq 0$, то $g(x) \neq 0$ в деякому околі точки x_0. Для таких x

$$\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)=$$

$$=\frac{f(x)\,g(x_0)-f(x_0)\,g(x)+f(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g(x)}{g(x)\,g(x_0)\,(x-x_0)}=$$

$$=\frac{1}{g(x)\,g(x_0)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,g(x_0)-f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right).$$

Звідси, як і вище, одержимо твердження 4) теореми. ⌋

Вправи

8. Довести твердження 1) і 2) правила 1°.

9. Нехай $f_i: A \to \mathbf{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ і $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ існує $f_i'(x_0)$. Довести, що:

а) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right)'(x_0)=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i'(x_0)$;

б) $\left(\prod\limits_{i=1}^{n} f_i\right)'(x_0)=f_1'(x_0)\,f_2(x_0)\cdot\ldots\cdot f_n(x_0)+f_1(x_0)\,f_2'(x_0)\ldots f_n(x_0)+\ldots$
$\ldots+f_1(x_0)\,f_2(x_0)\ldots f_n'(x_0)$.

10. Нехай додатково до умов вправи 9 дано, що $f_i(x_0) \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Довести, що

$$\frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} f_i\right)'(x_0)}{\prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x_0)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i'(x)}{f_i(x_0)}.$$

2°. Правило диференціювання складної функції, або ланцюгове правило. Нехай функція $f: A \to \mathbf{R}$ має похідну $f'(x_0)$ у точці $x_0 \in A$. Функція $g: B \to \mathbf{R}$, $B \supset \{f(x) \mid x \in A\}$ має похідну $g'(y_0)$ в точці $y_0 = f(x_0)$. Тоді функція $g(f)$: $: A \ni x \mapsto g(f(x))$ має похідну в точці x_0, причому

$$(g(f))'(x_0)=g'(f(x_0))\,f'(x_0).$$

⌈Згідно з означенням похідної $g'(y_0)$ і зауваженням 2 п. 1.3 маємо

$$g(y)-g(y_0)=g'(y_0)(y-y_0)+\alpha(y)(y-y_0),$$

де $\alpha(y) \to 0$, $y \to y_0$. Для $x \neq x_0$ покладемо в цій рівності $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ і поділимо його на $x - x_0$:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= g'(f(x_0)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \alpha(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (1)$$

Із існування $f'(x_0)$ згідно з зауваженням 4 п. 1.3 випливає неперервність функції f у точці x_0. Тому $f(x) \to f(x_0) = y_0$, $x \to x_0$ і, таким чином, $\alpha(f(x)) \to 0$ при $x \to x_0$. На основі рівності (1) при $x \to x_0$ одержимо існування похідної функції $g(f)$ у точці x_0 і потрібну рівність. ⌋

Вправа

11. Сформулювати й довести правило диференціювання суперпозиції трьох функцій $(h(g(f)))'$.

3°. Правило диференціювання оберненої функції. Припустимо, що функція $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ задовольняє умовам:

1) $f \in \mathbf{C}((a, b))$;

2) f строго зростає на (a, b).

Нехай $(c, d) := \{f(x) \mid x \in (a, b)\}$, $(-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty)$ і $g : (c, d) \to (a, b)$ є обернена до f функція. Якщо в точці x_0 існує $f'(x_0) \neq 0$, то функція g має похідну $g'(y_0)$ в точці $y_0 = f(x_0)$, причому

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

⌈ Якщо $y \neq y_0$, то $g(y) \neq g(y_0)$, оскільки g строго зростає (див. властивість 4° п. 3. 2 (глава 3)) . Згідно з зауваженням п. 1.3 маємо

$$y - y_0 = f(g(y)) - f(g(y_0)) =$$

$$= f'(g(y_0))(g(y) - g(y_0)) + \alpha(g(y))(g(y) - g(y_0)),$$

де $\alpha(g(y)) \to 0$ при $g(y) \to g(y_0)$. Оскільки $g \in \mathbf{C}((c, d))$, то $y \to y_0 \Rightarrow g(y) \to g(y_0) \Rightarrow \alpha(g(y)) \to 0$. Тому

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f'(g(y_0))(g(y) - g(y_0)) + \alpha(g(y))(g(y) - g(y_0))} =$$

$$= \frac{1}{f'(g(y_0)) + \alpha(g(y))} \to \frac{1}{f'(g(y_0))}, \quad y \to y_0. \qquad ⌋$$

Вправа

12. Нехай f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ і $\forall x \in \mathbf{R}$ існує $f'(x)$. Довести, що:

а) похідна парної функції f є непарна функція;

б) похідна непарної функції f є парна функція;

в) похідна періодичної з періодом $T > 0$ функції f є періодична з періодом T функція.

1.5. ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ

Приклад 1. Нехай $\alpha \in \mathbf{R}$. Доведемо, що

$$\forall x > 0\colon (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

⌈Нехай $x > 0$ фіксоване. На основі результату прикладу 6 п. 3.3 глави 3 маємо

$$\frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha-1}\,\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}} \to \alpha x^{\alpha-1},\ \Delta x \to 0. \quad ⌋$$

Зокрема, якщо $\alpha = n \in \mathbf{N}$, то $\forall x \in \mathbf{R}$: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Вправи

13. Довести, що $\forall x \in \mathbf{R}$

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)' = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1},$$

де $n \in \mathbf{N}$, $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}$.

14. Обчислити похідну $f(x) = \dfrac{P(x)}{x-a}$, $x \neq a$, де P — многочлен.

Приклади. 2. Нехай $a > 0$. Доведемо, що

$$\forall x \in \mathbf{R}\colon (a^x)' = a^x \ln a.$$

⌈Використовуючи результат прикладу 5 п. 3.3 глави 3, маємо

$$\frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x\,\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to a^x \ln a,\ \Delta x \to 0. \quad ⌋$$

Зокрема, при $a = e$

$$\forall x \in \mathbf{R}\colon (e^x)' = e^x.$$

3. Доведемо, що

$$\forall x \in \mathbf{R}\colon (\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x;$$

$$\forall x \in \left(\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbf{Z}\right\}\right)\colon (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\forall x \in (\mathbf{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbf{Z}\})\colon (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

|— Оскільки $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $x \to 0$ і функція cos неперервна, то

$$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = 2\frac{1}{\Delta x}\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x,\ \Delta x \to 0.$$

Використовуючи правило 2° для $x \in \mathbf{R}$, одержимо

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1) = -\sin x.$$

Останні дві формули безпосередньо випливають із правила 1° п. 1.4. —|

4. Нехай $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Доведемо, що

$$\forall\, x > 0:\ (\log_\alpha x)' = \frac{1}{x\ln\alpha}.$$

Зокрема, $\forall\, x > 0$: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

|— Розглянемо випадок, коли $\alpha > 1$. Використаємо правило 3° п. 1. 4. Нехай $(a, b) = \mathbf{R}$; $f(x) = \alpha^x$, $x \in \mathbf{R}$, причому $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ і $(c, d) = (0, +\infty)$ Крім того,

$$\forall\, x \in \mathbf{R}:\ f'(x) = \alpha^x \ln\alpha \neq 0.$$

Обернена функція $g(y) = \log_\alpha y$, $y \in (0, +\infty)$ має похідну при $y > 0$:

$$g'(y) = (\log_\alpha y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\alpha^x \ln\alpha} = \frac{1}{y\ln\alpha},\ y = f(x). \quad —|$$

5. Доведемо, що

$$\forall\, x \in \mathbf{R}:\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

|— Застосуємо правило 3° п. 1. 4, поклавши $(a, b) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. При цьому $(c, d) = \mathbf{R}$,

$$\operatorname{tg} \in \mathbf{C}\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right),\ f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0,\quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Тому для $y \in \mathbf{R}$, $x = \operatorname{arctg} y$ для оберненої функції $g(y) = \operatorname{arctg} y$, $y \in \mathbf{R}$ маємо

$$(\operatorname{arctg} y)' = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \cos^2 x = \cos^2(\operatorname{arctg} y) = \frac{1}{1+y^2}. \quad —|$$

6. Аналогічно доводиться, що

$$\forall\, x \in \mathbf{R}\colon (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$\forall\, x \in (-1, 1)\colon (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\forall\, x \in (-1, 1)\colon (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Вправи

15. Нехай $f\colon A \to (0, +\infty)$, $g\colon A \to \mathbf{R}$; $x_0 \in A$ і існують $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Довести, що

$$(f^g)'(x_0) = f(x_0)^{g(x_0)}\left(g'(x_0)\ln f(x_0) + \frac{f'(x_0)\,g(x_0)}{f(x_0)}\right).$$

Вказівка. Використати рівність $f^g = e^{g\ln f}$.

16. Довести, що

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{21}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a'_{1i}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \cdots & a'_{2i}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a'_{ni}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

якщо елементи вихідного визначника мають похідну в точці x.

17. Використовуючи поняття похідної, довести формулу бінома Ньютона

$$(a+bx)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} x^{n-k},\ x \in \mathbf{R},$$

і $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

18. Обчислити суму:

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} k e^{kx}$, $x \in \mathbf{R}$; б) $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_n^k$.

19. Нехай P — многочлен степеня n з коренями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і старшим коефіцієнтом 1. Обчислити $P'(x_k)$; $1 \leqslant k \leqslant n$.

20. Обчислити похідні функції на $\mathbf{R}$:

а) $f(x) = |\sin x| \sin x$, $x \in \mathbf{R}$;

б) $f(x) = [x]\sin^2 \pi x$, $x \in \mathbf{R}$.

21. Навести приклад відмінних від сталих функцій f і g, для яких справедливе таке «правило» обчислення похідної добутку функцій:

$$(fg)'(x) = f'(x)\,g'(x).$$

1.6. ОДНОБІЧНІ ПОХІДНІ

Нехай $f\colon A \to \mathbf{R}$ і

$$\exists\, \delta > 0\colon (x_0 - \delta,\ x_0] \subset A.$$

Означення 1. Якщо існує границя

$$\lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то ця границя називається ***лівою похідною функції*** f ***в точці*** x_0 і позначається символом $f'_-(x_0)$.

Нехай $f\colon A \to \mathbf{R}$ і $\exists\, \delta > 0\colon [x_0,\ x_0 + \delta) \subset A$.

Означення 2. Якщо існує границя

$$\lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то ця границя називається ***правою похідною в точці*** x_0 і позначається символом $f'_+(x_0)$.

Вправи

22. Довести, що існування $f'(x_0)$ рівносильно існуванню $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ і рівності

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

23. Довести, що із існування $f'_-(x_0)$ і $f'_+(x_0)$ випливає неперервність функції f у точці x_0.

24. Функція $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ має похідну на $\mathbf{R}$. У яких точках функція $|f|$ має похідну?

25. Нехай $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ і існують f' і g' на $\mathbf{R}$. У яких точках функція

$$h(x) := \max(f(x),\ g(x)),\quad x \in \mathbf{R}$$

має похідну?

§ 2. ТЕОРЕМИ ПРО ФУНКЦІЇ, ЯКІ МАЮТЬ ПОХІДНІ

2.1. ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ

ТЕОРЕМА 1 (**Ферма**[1]). Нехай $f\colon (a, b) \to \mathbf{R}$, $x_0 \in (a, b)$ і $f(x_0) = \max\limits_{x \in (a,b)} f(x)$ або $f(x_0) = \min\limits_{x \in (a,b)} f(x)$. Якщо в точці x_0 існує похідна $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

---

[1] *Ферма Пьєр* (1601—1665) — відомий французький математик. Юрист за професією він вивчав математику і займався нею у вільний час. Ферма — один із творців аналітичної геометрії, автор видатних праць з теорії чисел. Зокрема, їм була сформульована знаменита остання теорема Ферма, спроби розв'язати яку призвели до розвитку ряду розділів математики. Ферма запропонував метод визначення найбільших і найменших значень функцій до введення поняття похідної, а також метод знаходження дотичних. Отримав важливі результати з алгебри, теорії ймовірностей, оптики та ін.

|‾ Припустимо, що $f(x_0) = \max\{f(x) \mid x \in (a, b)\}$. Зауважимо, що при $x \neq x_0$ маємо $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$. Тому

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0; \qquad (1)$$

аналогічно

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0. \qquad (2)$$

Із співвідношень (1) і (2) випливає, що $f'(x_0) = 0$. _|

Вправа

1. Нехай $f\colon (a, b] \to \mathbf{R}$, $f(b) = \max\{f(x) \mid x \in (a, b]\}$ і існує $f'_-(b)$. Довести, що $f'_-(b) \geqslant 0$.

ТЕОРЕМА 2 (Ролля [1]). Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ задовольняє умовам:

1) $f \in \mathbf{C}([a, b])$;
2) $\forall x \in (a, b)$ існує $f'(x)$;
3) $f(a) = f(b)$.

Тоді $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

|‾Якщо $\forall x \in [a, b] : f(x) = f(a)$, то $\forall c \in (a, b)$: $f'(c) = 0$. Тому розглянемо випадок, коли

$$\exists \bar{x} \in [a, b]\colon f(\bar{x}) \neq f(a). \qquad (3)$$

Згідно з умовою (1) і другою теоремою Вейєрштрасса

$$\exists\, x_* \in [a, b]\colon\ f(x_*) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\},$$

$$\exists\, x^* \in [a, b]\colon\ f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

При цьому з умови (3) або $f(x_*) \neq f(a)$, або $f(x^*) \neq f(a)$. Припустимо, що $f(x^*) \neq f(a)$. Тоді $x^* \neq a$, $x^* \neq b$ і, отже, $x^* \in (a, b)$. Для функції f і точки x^* виконані всі умови теореми Ферма, тому $f'(x^*) = 0$. Покладемо $c = x^*$. _|

Вправи

2. Нехай $P(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$, $x \in \mathbf{R}$; $n \in \mathbf{N}$. Довести, що многочлен P' має n дійсних коренів, які лежать по одному між коренями многочлена P.

3*. Нехай $\{a_1, a_2, \ldots, a_n;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbf{R}$ і $f(x) = a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + a_n e^{\alpha_n x}$, $x \in \mathbf{R}$ — функція, відмінна від 0 в деякій точці. Довести, що функція f може мати не більше $(n-1)$-го дійсного нуля.

---

[1] *Ролль Мішель* (1652—1719)— французький математик. Цю теорему він довів для многочленів алгебраїчними методами.

4. Нехай $\{a_1, a_2, \ldots, a_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbf{R}$ і $f(x) = a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \ldots a_n x^{\alpha_n}$, $x > 0$ — функція, відмінна від 0 в деякій точці. Довести, що функція f може мати не більше $(n-1)$-го додатного нуля.

5*. Нехай функції f і g задовольняють умовам теореми Ролля. Довести, що

$$\exists\, c \in (a, b)\colon f'(c) + f(c)\, g'(c) = 0.$$

6*. Нехай функції $f_i\colon [a, b] \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, 3$ такі, що:

1) $\forall\, x \in (a, b)$ існує $f_i'(x)$, $i = 1, 2, 3$;

2) $f_i \in \mathbf{C}([a, b])$, $i = 1, 2, 3$.

Довести, що $\exists\, c \in (a, b)$:

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & f_1(b) & f_1'(c) \\ f_2(a) & f_2(b) & f_2'(c) \\ f_3(a) & f_3(b) & f_3'(c) \end{vmatrix} = 0.$$

ТЕОРЕМА 3 (Лагранжа[1] про середнє значення, або про скінченний приріст). Припустимо, що функція $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ задовольняє умовам:

1) $f \in \mathbf{C}([a, b])$;

2) $\forall x \in (a, b)$ існує $f'(x)$.

Тоді

$$\exists\, c \in (a, b)\colon f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

$\vdash$ Розглянемо функцію

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

Функція g задовольняє на $[a, b]$ умовам теореми Ролля, причому $g' = f' - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Згідно з цією теоремою

$$\exists\, c \in (a, b)\colon g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \qquad \dashv$$

---

[1] *Лагранж Жозеф Луї* (1736—1813) — видатний французький математик, автор фундаментальних праць з математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, варіаційного числення, теоретичної механіки, алгебри й теорії чисел. Лагранж брав участь у роботі комісії по розробці метричної системи мір, якою зараз користується увесь світ. Він був чудовим викладачем, членом кількох академій наук.

Зауваження 1. Відношення $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ є тангенс кута нахилу до осі абсцис січної, що проходить через точки $(a, f(a))$ і $(b, f(b))$. Згідно з твердженням теореми існує точка c така, що дотична до графіка функції f у точці $(c, f(c))$ паралельна січній.

Вправи

7. Показати, що теорема Ролля є наслідком теореми Лагранжа.

8. Нехай $f(x) = x^2 + px + q$, $x \in [a, b]$; $\{p, q\} \subset \mathbf{R}$. Визначити число c з теореми Лагранжа.

9. Нехай функція f задовольняє умовам теореми Лагранжа і

$$\exists L \in \mathbf{R}\ \forall x \in (a, b): |f'(x)| \leqslant L. \tag{4}$$

Довести, що f задовольняє умову

$$\forall \{x', x''\} \subset [a, b]: |f(x') - f(x'')| \leqslant L\,|x' - x''|.$$

10. Якщо функція $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ має похідну f' на (a, b), яка задовольняє умові (4), то функція f рівномірно неперервна на (a, b).

11*. Нехай функція $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ має похідну f' на $\mathbf{R}$ і

$$\forall \{x, y\} \subset \mathbf{R}: f(x) - f(y) = f'\left(\frac{x+y}{2}\right)(x-y).$$

Визначити всі функції f, які задовольняють цим умовам.

11.1*. Нехай для функції $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ існує f'_+ на (a, b) і $f'_+ \in C((a, b))$. Довести, що існує похідна f' на (a, b) і $f' = f'_+$ на (a, b).

Вказівка. Спочатку встановити, що на довільному відрізку $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ для функції f є справедливим твердження теорем Ролля та Лагранжа з заміною f' на f'_+.

Наслідок 1. Функція $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ має похідну f' на (a, b) і

$$\forall x \in (a, b): f'(x) = 0.$$

Тоді для деякого $L \in \mathbf{R}$

$$\forall x \in (a, b): f(x) = L.$$

⌈До функції f і відрізка з кінцями x і x_0 застосуємо теорему Лагранжа. Тоді

$$f(x) = f(x_0) =: L. \qquad ⌋$$

Наслідок 2. Функції $f: (a, b) \to \mathbf{R}$, $g: (a, b) \to \mathbf{R}$ мають похідні f' і g' на (a, b) і

$$\forall x \in (a, b): f'(x) = g'(x).$$

Тоді для деякого числа $L \in \mathbf{R}$

$$\forall x \in (a, b): f(x) = g(x) + L.$$

⌈Застосувати наслідок 1 до функції $f - g$. ⌋

Наслідок 3. Функція $f:(a, b) \to \mathbf{R}$ має похідну на (a, b) і для деякого числа $L \in \mathbf{R}$

$$\forall x \in (a, b): \quad f'(x) = L.$$

Тоді для деякого $M \in \mathbf{R}$

$$\forall x \in (a, b): \quad f(x) = Lx + M.$$

Наслідок 4. Нехай функція $f:(a, b] \to \mathbf{R}$ задовольняє умовам:

1) $f \in \mathbf{C}((a, b])$;
2) $\forall x \in (a, b)$ існує $f'(x)$;
3) існує $\lim\limits_{x \to b-} f'(x) = L$.

Тоді існує $f'_{-}(b)$ і $f'_{-}(b) = L$.

Нехай $a < x < b$. Застосуємо теорему Лагранжа до функції f на відрізку $[x, b]$

$$\exists c = c(x) \in (a, b): \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(c(x)).$$

Звідси і із умови 3) випливає твердження наслідку 4, оскільки $c(x) \to b-$; $x \to b-$. ∎

Вправи

12. Визначити всі функції $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. для яких $f'(x) = ax + b$, $x \in \mathbf{R}$; $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$ фіксовані.

13. Визначити всі функції $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, для яких $f'(x) = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Вказівка. Помножити на e^{-x} і отримати у лівій частині похідну $f(x)e^{-x}$.

14. Функції $f: (a, b) \to (0, +\infty)$, $g: (a, b) \to (0, +\infty)$ мають похідні f' і g' на (a, b) і

$$\forall x \in (a, b): \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Довести, що для деякого числа $L \in \mathbf{R}$

$$\forall x \in (a, b): \quad f(x) = Lg(x).$$

14.1. Нехай функція $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\forall \{x', x''\} \subset [a, b]: |f(x') - f(x'')| \leqslant L|x' - x''|,$$

де L—деяке число, і за виключенням зліченого набору точок з $[a, b]$ існує $f'(x) = 0$. Довести, що $f(x) = f(a)$, $x \in [a, b]$.

ТЕОРЕМА 4 (Коші). Нехай функції $f:[a, b] \to \mathbf{R}$, $g:[a, b] \to \mathbf{R}$ задовольняють умовам:

1) $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([a, b])$;
2) $\forall x \in (a, b)$ існують $f'(x)$, $g'(x)$;

3) $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$.

Тоді

$$\exists c \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

|_Спочатку зауважимо, що $g(b) \neq g(a)$, оскільки рівність $g(a) = g(b)$ потягнула б за собою згідно з теоремою Ролля існування точки $c \in (a, b)$, в якій $g'(c) = 0$, що суперечить умові 3).

Функція

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)), \quad x \in [a, b]$$

задовольняє на відрізку $[a, b]$ всім умовам теореми Ролля. Тому

$$\exists c \in (a, b): h'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0. \quad \_|$$

Зауваження 2. Теорема Лагранжа — це окремий випадок теореми Коші при $g(x) = x$, $x \in [a, b]$.

Вправи

15. Нехай функція $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ задовольняє умовам теореми Лагранжа. Довести, що

$$\exists c \in (a, b): f(b) - f(a) = e^{-c} f'(c) (e^b - e^a).$$

16. Отримати теореми Ролля, Лагранжа і Коші як наслідки вправи 6.

16.1. Нехай $f \in \mathbf{C}([a,b])$, існує f'_+ на (a, b) і $f(a) < f(b)$. Довести, що

$$\exists c \in (a, b): \ f'_+(c) \geqslant 0.$$

Вказівка. Існують числа α, β, $a < \alpha < \beta < b$ такі, що $f(\alpha) < f(\beta)$. Якщо $f'_+(x) < 0$ для $x \in [\alpha, \beta]$, то існує $x_0 \in (\alpha, \beta)$: $f(x_0) < f(\alpha)$. Тому

$$\min_{[\alpha,\beta]} f = f(x_*), \ x_* \in (\alpha, \beta).$$

Тоді $f'_+(x_*) \geqslant 0$.

16.2. Нехай $f \in \mathbf{C}([a, b])$, існує f'_+ на (a, b) і $f(a) = f(b)$. Тоді

$$\exists c_1 \in (a, b): \ f'_+(c_1) \geqslant 0;$$

$$\exists c_2 \in (a, b): \ f'_+(c_2) \leqslant 0.$$

16.3. Нехай $f \in \mathbf{C}([a, b])$, існує f'_+ на (a, b). Довести, що

$$\exists c_1 \in (a, b) \quad \exists c_2 \in (a, b):$$

$$f'_+(c_1) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'_+(c_2).$$

2.2. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ п. 2.1

1°. Доводення нерівностей.

Приклади 1. Доведемо, що

$$\forall \{x', x''\} \subset \mathbf{R}: \quad |\sin x' - \sin x''| \leqslant |x' - x''|;$$

$$\forall \{x', x''\} \subset \mathbf{R}: \quad |\cos x' - \cos x''| \leqslant |x' - x''|;$$

$$\forall \{x', x''\} \subset \mathbf{R}: \quad |\operatorname{arctg} x' - \operatorname{arctg} x''| \leqslant |x' - x''|;$$

$$\forall \{x', x''\} \subset [1, +\infty): \quad |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leqslant \frac{1}{2}|x' - x''|.$$

|— Доведення цих нерівностей аналогічні. Тому розглянемо доведення першої нерівності. Нехай, наприклад $x' < x''$. До функції sin застосуємо на відрізку $[x', x'']$ теорему Лагранжа:

$$\exists c \in (x', x''): |\sin x' - \sin x''| = |\cos c|(x'' - x').$$

Враховуючи нерівність $|\cos u| \leqslant 1$, $u \in \mathbf{R}$, отримаємо потрібну нерівність. —|

2. Покажемо що;

а) $\forall x \in \mathbf{R}: e^x \geqslant 1 + x$, причому рівність може бути тоді й тільки тоді, коли $x = 0$;

$$\text{б) } \forall x > 0: e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

|— Нехай спочатку $x > 0$. За теоремою Лагранжа для функції $f(u) = e^u$, $u \in [0, x]$,

$$\exists c \in (0, x): \quad e^x - e^0 = e^c(x - 0) > x,$$

оскільки $e^c > 1$ для $c > 0$. Якщо $x < 0$, то теорему Лагранжа застосуємо до функції $f(u) = e^u$, $u \in [x, 0]$. Маємо

$$\exists c \in (x, 0): \quad e^0 - e^x = e^c(0 - x) < -x,$$

оскільки $-x > 0$, а $e^c < 1$ для $c < 0$. Таким чином, при $x \neq 0$ маємо $e^x > 1 + x$.

Для доведення другої нерівності застосуємо теорему Коші до функцій

$$f(u) = e^u, \quad g(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2}, \quad u \in [0, x].$$

Одержимо

$$\exists c \in (0, x): \quad \frac{e^x - e^0}{1 + x + \frac{x^2}{2} - 1} = \frac{e^c}{1 + c}.$$

Враховуючи доведену нерівність, знаходимо

$$\frac{e^x - 1}{x + \frac{x^2}{2}} > 1 \Leftrightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}. \qquad —|$$

Вправи

17. Довести, що

$$\forall x > -1: \quad \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x;$$

рівність має місце тоді й тільки тоді, коли $x = 0$.

18. Довести, що

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x > 0: \quad e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

19. (**Узагальнення нерівності Бернуллі**). Нехай $a > 1$. Довести, що

$$\forall x > -1: \quad (1+x)^a \geqslant 1 + ax; \quad «=» \Leftrightarrow x = 0.$$

20. Довести, що $\forall x \geqslant 0$:

$$x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin x \leqslant x; \qquad 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1.$$

21. Припустимо, що функції $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ і $g: [a, b] \to R$ задовольняють умовам теореми Лагранжа і

$$\forall x \in (a, b): \quad f'(x) < g'(x).$$

Довести, що $f(b) - f(a) < g(b) - g(a)$.

22. Довести, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 > 0 \quad \forall x > x_0: \ln x < x^{\varepsilon}.$$

2°. Дослідження монотонності функцій за допомогою похідних.

ТЕОРЕМА 1. Нехай $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ і $\forall x \in (a, b)$ існує $f'(x)$. Для того щоб функція f була монотонно не спадною на (a, b), необхідно й достатньо, щоб

$$\forall x \in (a, b): \quad f'(x) \geqslant 0. \tag{1}$$

⌈Достатність. Припустимо, що умова (1) виконана. Нехай $a < x' \leqslant x'' < b$. Застосуємо до функції f на відрізку $[x', x'']$ теорему Лагранжа:

$$\exists c \in (x', x''): f(x'') - f(x') = f'(c)(x'' - x') \geqslant 0.$$

Звідки $f(x'') \geqslant f(x')$.

Необхідність. Якщо f монотонно не спадає на (a, b), то

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

оскільки $\Delta x > 0$ і $f(x + \Delta x) - f(x) \geqslant 0$.

ТЕОРЕМА 2. Нехай $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$

і $\forall x \in (a, b)$ існує $f'(x)$. Для того щоб функція f строго зростала на (a, b), необхідно й достатньо, щоб виконувалися умови:

1) $\forall x \in (a, b): \ f'(x) \geqslant 0$;

2) не існує інтервалу $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$:

$$\forall x \in (\alpha, \beta): \ f'(x) = 0.$$

⌈ Необхідність. Нехай f строго зростає на (a, b). Тоді f монотонно не спадає на (a, b) і перша умова виконана згідно з теоремою 1. Умова 2) також виконана, оскільки із існування інтервалу (α, β) з властивістю $\forall x \in (\alpha, \beta): f'(x) = 0$ випливає, що f стала на (α, β) (див. наслідок 1 п. 2.1). Останнє суперечить тому, що f строго зростає на (a, b).

Достатність. Нехай умови 1) і 2) виконані. Тоді за теоремою 1 функція f монотонно не спадає. Для $x' < x''$ рівність $f(x') = f(x'')$ із-за монотонності має наслідком

$$\forall x \in [x', x'']: \ f(x) = f(x'),$$

а тому

$$\forall x \in (x', x''): \ f'(x) = 0,$$

що неможливо внаслідок умови 2). Тому $f(x') < f(x'')$. ⌋

Зауваження. Теореми, аналогічні теоремам 1 і 2, вірні для монотонно не зростаючих функцій.

Приклад 3. Функція $f(x) = x + \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ згідно з теоремою 2 строго зростає на $\mathbf{R}$.

Вправи

23. Визначити інтервали монотонності функцій:

а) $f(x) = x^x, \ x > 0$; б) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \ x \in \mathbf{R} \setminus [-1, 0]$;

в) $f(x) = \frac{\ln x}{x}, \ x > 0$.

Яке з чисел π^e і e^π більше?

24. Довести нерівність

$$\forall x > 0: \ln(1 + x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}.$$

Вказівка. Довести монотонність функції f, яка дорівнює різниці лівої і правої частин нерівності, і розглянути нерівність $f(x) < f(0)$.

25*. Нехай $a > 0$, $b > 0$. Довести, що наступні функції строго зростають на $(0, +\infty)$:

а) $f(x) = \frac{\ln(ax + 1)}{\ln(bx + 1)}, \ x > 0; \ a < b$;

б) $f(x) = \left(\frac{a + x}{b + x}\right)^{b+x}, \ x > 0, \ a \neq b$.

26. Довести, що $x^2 \cos x < \sin^2 x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

27. Нехай f: $[\theta_1, \theta_2] \to (0, +\infty)$, $f \in \mathbf{C}([\theta_1, \theta_2])$; $\forall \theta \in (\theta_1, \theta_2)$ існує $f'(\theta)$; $f(\theta_1) = f(\theta_2)$. Довести, що існує $\theta_0 \in (\theta_1, \theta_2)$ таке, що дотична до графіку $r = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ у точці $(\theta_0, f(\theta_0))$ перпендикулярна до радіуса-вектора цієї точки.

28. Дослідити на монотонність функції

$$f_1(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right), \quad f_2(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2x}\right), \quad x > 0,$$

та встановити нерівність

$$\frac{e}{2n+2} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}, \quad n \geqslant 1.$$

§ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНІ Й ДИФЕРЕНЦІАЛИ СТАРШИХ ПОРЯДКІВ

3.1. ПОНЯТТЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ

Нехай $f: A \to \mathbf{R}$ і точка x_0 така, що $\exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$.

Означення. Функція f називається ***диференційовною в точці*** x_0, якщо

$$\exists L \in \mathbf{R}: \ f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0), \ x \to x_0. \quad (1)$$

Для диференційовної в точці x_0 функції лінійна функція $y = L(x - x_0)$, $x \in \mathbf{R}$ називається ***диференціалом у точці*** x_0. *Позначення:* $x - x_0 = dx$, $L(x - x_0) = Ldx = df(x_0)$.

Більш логічним є не дуже поширене позначення

$$df(x_0, h) = Lh, \quad h \in \mathbf{R}.$$

Зауваження 1. Диференціал функції f у точці x_0 є головна частина (лінійна відносно $x - x_0$) приросту $f(x) - f(x_0)$ функції f відносно шкали порівняння $\{\mathbf{R} \ni x \mapsto (x - x_0)^n : n \geqslant 1\}$ при $x \to x_0$.

З цього та єдиності головної частини випливає, що число L визначається єдиним чином.

ТЕОРЕМА. Функція f диференційовна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли існує похідна $f'(x_0)$.

⌈Необхідність. Якщо f диференційовна в точці x_0, то із (1) при $x \neq x_0$ маємо

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}, \quad x \to x_0.$$

Тому існує

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

Отже, існує $f'(x_0) = L$.

Достатність міститься у зауваженні 2 п. 1.3. ⌋

Зауваження 2. Таким чином, $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$. Тому позначення похідної $\frac{df(x_0)}{dx}$ можна тлумачити як відношення диференціалів. Із правил обчислення похідних легко отримати правила обчислення диференціалів. Наприклад, $d(fg) = gdf + fdg$ та ін.

3. Розглянемо правило обчислення диференціалу складної функції. Припустимо, що виконані умови правила 2° п. 1.4. Тоді

$$dg(y_0) = g'(y_0)\,dy,$$

$$dh(x_0) = dg(f(x_0)) = g'(f(x_0))\,f'(x_0)\,dx,$$

де $h = g(f)$. У правій частині першої рівності маємо диференціал функції g у точці y_0, у правій частині другої рівності — диференціал складної функції у точці x_0. Причому праві частини мають одну й ту ж форму, бо $f(x_0) = y_0$ і $dy = df(x_0) = f'(x_0)\,dx$. Цю властивість часто ***інваріантністю форми диференціалу***.

Вправа

1. Довести, що для функції $y = f(x)$, $x \in A$, яка є заданою параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, виконується формула

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

якщо x' і y' існують і $x'(t) \neq 0$.

Зауваження 4. Введені вище похідна й диференціал називаються також ***похідною й диференціалом першого порядку***.

3.2. ПОХІДНІ СТАРШИХ ПОРЯДКІВ

Припустимо, що для функції $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ $\forall x \in (a, b)$ існує $f'(x)$. Визначимо функцію $g := f' : (a, b) \to \mathbf{R}$, поклавши $g(x) = f'(x)$, $x \in (a, b)$.

Означення 1. Якщо в точці $x_0 \in (a, b)$ існує похідна $g'(x_0)$ функції g, то ця похідна називається ***похідною другого порядку функції*** f у точці x_0 і позначається одним із символів:

$$f''(x_0), \quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

Якщо похідна порядку $n \in \mathbf{N}$ визначена, її позначення

$$f^{(n)}(x_0), \quad \frac{d^n f(x_0)}{dx^n},$$

і для будь-якого $x \in (a, b)$ існує $f^{(n)}(x)$, то похідна порядку $n+1$ визначається як

$$\frac{df^{(n)}(x)}{dx},$$

якщо остання існує.

Приклади. 1. Нехай $a > 0$. Тоді для $n \in \mathbf{N}$ $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$(a^x)' = a^x \ln a, \ (a^x)'' = a^x \ln^2 a, \ldots, (a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n,$$

зокрема

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

2. Для $n \in \mathbf{N}$ $\forall x \in \mathbf{R}$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Нехай $\alpha \in \mathbf{R}$. Для $n \in \mathbf{N}$ $\forall x > 0$:

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)\, x^{\alpha - n}.$$

Зокрема, для $\alpha \in \mathbf{N}$ і $n > \alpha$ $\forall x \in \mathbf{R}$: $(x^\alpha)^{(n)} = 0$.

4. Для $n \in \mathbf{N}$ $\forall x > -1$

$$((1 + x^\alpha)^{(n)} = (\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n};$$

$$\forall x > 0: \ (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

1°. Елементарні властивості похідної n-го порядку. Припустимо, що функції f і g мають на (a, b) похідну порядку n. Тоді:

1) $\forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant n$: $(f^{(n-k)})^{(k)} = f^{(n)}$;

2) $\forall C \in \mathbf{R}$: $(Cf)^{(n)} = Cf^{(n)}$;

3) $(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$;

4) $(f(\bar{a}x + \bar{b}))^{(n)} = \bar{a}^n f^{(n)}(\bar{a}x + \bar{b})$, $\{\bar{a}, \bar{b}\} \subset \mathbf{R}$. Тут $f^{(0)} := f$.

Вправа

2. Знайти похідні n-го порядку в точках множини визначення функцій:

а) $f(x) = \sin^2 x$; б) $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6}$; г)* $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Означення 2. Нехай $A \subset \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{C}^{(n)}(A) \Leftrightarrow \forall x \in A$ існує $f^{(n)}(x)$, причому $f^{(n)} \in \mathbf{C}(A)$.

Зауваження 5. Якщо $A = [a, b]$, то під похідними функції f у точках a і b будемо розуміти $f'_+(a)$ і $f'_-(b)$ відповідно. Аналогічне зауваження стосується й старших похідних.

Вправи

3. Нехай $\{f, g\} \subset C^{(n)}(R)$. Довести, що $g(f) \in C^{(n)}(R)$.

4. Нехай функція $f \in C^{(n)}((a, b))$ має обернену функцію g, причому $f'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$. Довести, що $g \in C^{(n)}((c, d))$, де $(c, d) = \{f(x) \mid x \in (a, b)\}$.

5. Показати, що для $n \geqslant 1$

$$C^{(n)}(A) \subset C^{(n-1)}(A) \subset \ldots \subset C^{(1)}(A) \subset C(A).$$

Означення 3.

$$C^{(\infty)}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^{(n)}(A).$$

Приклад 5. Функції $\sin, \cos, f(x) = e^x$, $x \in R$ належать класу $C^{(\infty)}(R)$.

Далі вважаємо, що $f^{(0)} = f$.

2. Формула Лейбніца[1]. Нехай $\{f, g\} \subset C^{(n)}((a, b))$ для деякого $n \in N$. Тоді $fg \in C^{(n)}((a, b))$ і на (a, b)

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}. \qquad (2)$$

---

[1]. *Лейбніц Готфрід Вільгельм* (1646—1716) — великий німецький математик і філософ. Один із фундаторів диференціального і інтегрального числення. До основних понять диференціального числення Лейбніц прийшов у зв'язку з задачею про знаходження дотичної до кривої. Надрукована у 1684 р. невелика його робота містила означення поняття похідної, правила диференціювання функцій, застосування похідних до знаходження найбільших і найменших значень функцій і до дослідження опуклості функцій. Формулу (2) він одержав у 1685 р. Поняття інтеграла було введене ним у 1686 р. Лейбніц отримав багато інших фундаментальних результатів в математичному аналізі, його логічні ідеї стали вихідним пунктом розвитку математичної логіки. Лейбніц сконструював одну з перших рахункових машин, йому належить також значна частина сучасної математичної символіки, яка виявилася дуже зручною (позначення похідної і інтеграла, терміни «функція» і «координати» та ін.). Суттєвий внесок у розповсюдження й розвиток революційних математичних ідей Лейбніца внесли брати *Бернуллі* і *Лопіталь*. Одним із засновників диференціального і інтегрального числення був *І. Ньютон* (1642—1727) — великий англійський фізик і математик. У зв'язку з дослідженням фізичних задач І. Ньютон розробив основи математичного аналізу, навів важливі приклади розв'язку диференціальних рівнянь. Результати Ньютона були опубліковані у 1704, 1707, 1736 рр., пізніше публікацій Лейбніца.

⌈При $n = 1$ одержимо твердження 3) правила 1° п. 1.4. Припустимо, що формула (2) вірна для числа $n - 1$. Тоді

$$(fg)^{(n)} = ((fg)^{(n-1)})' = \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)} g^{(n-1-k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (f^{(k+1)} g^{(n-1-k)} + f^{(k)} g^{(n-k)}) = C_{n-1}^0 f g^{(n)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) f^{(k)} g^{(n-k)} + C_{n-1}^{n-1} f^{(n)} g = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

При цьому було використане співвідношення

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k, \tag{3}$$

яке доводиться прямим підрахунком. Таким чином, із слушності формули (2) для індексу $n - 1$ випливає її слушність для n. ⌋

Вправи

6. Довести рівність (3).

7. Обчислити похідні:

а) $(x^n e^x)^{(n)}$, $x \in \mathbf{R}$; б) $(x^n \ln x)^{(n)}$, $x > 0$.

8. Довести, що

$$(e^x \sin x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} \cdot e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

3.3. ДИФЕРЕНЦІАЛИ СТАРШИХ ПОРЯДКІВ

Припустимо, що для функції $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ існує $f'(x)$, $x \in (a, b)$. Розглянемо перший диференціал функції $df(x, h_1) = f'(x) h_1$, $x \in (a, b)$, $h' \in \mathbf{R}$, як функцію від x, вважаючи h_1 фіксованим. Перший диференціал цієї функції, тобто

$$d(df(x)) = d(df(x, h_1)) = df'(x_0, h_2) h_1 = f''(x) h_1 \cdot h_2, \quad h_i \in \mathbf{R},$$
$$i = 1, 2,$$

називається ***другим диференціалом функції*** f у точці x і позначається символом $d^2 f(x, h_1, h_2)$. Аналогічно ***диференціал порядку*** n є диференціал першого порядку від $d^{n-1} f(x, h_1, \ldots, h_{n-1})$. Має місце формула

$$d^n f(x, h_1, \ldots, h_n) = f^{(n)}(x) h_1 h_2 \ldots h_n, \{h_i\} \subset \mathbf{R}. \tag{4}$$

Часто диференціалом порядку n називається також функція

$$d^n f(x, h) := f^{(n)}(x) h^n, \quad h \in \mathbf{R}.$$

Вправи

9. Обчислити диференціал d^2F, де $F(u) = f(g(u))$, $u \in \mathbf{R}$, для функцій $\{f, g\} \subset C^{(2)}(\mathbf{R})$.

10. Для функції $y = f(x)$, $x \in A$, яка є заданою параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, обчислити $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\{x, y\} \subset C^{(2)}(T)$ і $x'(t) \neq 0$, $t \in T$.

§ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

4.1. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА [1]

1°. **Формула Тейлора для многочлена.** Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}$. Для будь-якої точки $x_0 \in \mathbf{R}$ многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \quad x \in \mathbf{R}$$

можна записати у вигляді

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + b_n(x - x_0)^n, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

де $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — числа. Ці числа можуть бути визначені таким чином. Поклавши в рівності (1) $x = x_0$, отримаємо $b_0 = P(x_0)$. Продиференціюємо рівність (1)

$$P'(x) = 1 \cdot b_1 + 2b_2(x - x_0) + \ldots + nb_n(x - x_0)^{n-1}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Поклавши тут $x = x_0$, знайдемо $b_1 = \frac{P'(x_0)}{1!}$. Із формули (2) маємо

$$P''(x) = 2 \cdot 1 \cdot b_2 + \ldots + n(n-1) b_n (x - x_0)^{n-2}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Поклавши тут $x = x_0$, отримаємо $b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}$. Продовжуючи аналогічно, упевнимося, що

$$\forall m \geqslant 0: \ b_m = \frac{P^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

---

[1] *Тейлор Брук* (1685—1731) — англійський математик.

Таким чином,

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Ця формула цікава тим, що пояснює такий факт: многочлен P на $\mathbf{R}$ повністю визначається заданням значення многочлена і його похідних в одній (довільній) точці.

У випадку функцій, відмінних від многочлена, формула (4) не правильна. Проте, якщо обмежитися значеннями x, які близькі до x_0, то при певних умовах можна твердити, що аналог правої частини (4) близький до функції.

2°. **Формула Тейлора з залишковим членом у формі Пеано** [1]. Нехай функція $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ для точки $x_0 \in (a, b)$ і $n \geqslant 1$ задовольняє умовам:

1) $\forall x \in (a, b)$ існує $f^{(n-1)}(x)$;

2) існує $f^{(n)}(x_0)$.

Тоді слушне співвідношення — ***формула Тейлора***:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{5}$$

де $o((x - x_0)^n)$ називається ***залишковим членом у формі Пеано.***

$\vdash$ Нехай

$$r_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad x \in (a, b)$$

залишковий член. Згідно з умовами 1) і 2), $\forall x \in (a, b)$ існують $r_n^{(n-1)}(x)$ і $r_n^{(n)}(x_0)$, причому

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Згідно з означенням похідної маємо

$$r_n^{(n-1)}(x) = r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(x_0) = r_n^{(n)}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

при $x \to x_0$, тобто

$$r_n^{(n-1)}(x) = o(x - x_0), \quad x \to x_0. \tag{6}$$

---

[1] *Пеано Джузеппе* (1858—1932) — італійський математик. Перший побудував неперервну криву, що заповнює квадрат. Йому належить загальна теорема про існування розв'язку диференціального рівняння, аксіоми Пеано натуральних чисел, результати з обгрунтування геометрії.

Використовуючи теорему Лагранжа, одержимо

$$r_n^{(n-2)}(x) = r_n^{(n-2)}(x) - r_n^{(n-2)}(x_0) = r_n^{(n-1)}(c)(x - x_0),$$

де c лежить між x і x_0. Звідси та з рівності (6) випливає, що

$$r_n^{(n-2)}(x) = o((x - x_0)^2), \quad x \to x_0.$$

Продовжуючи аналогічно, отримаємо

$$r_n(x) = 0((x - x_0)^n), \quad x \to x_0. \qquad \lrcorner$$

Зауваження 1. При $x_0=0$ формула Тейлора часто називається ***формулою Маклорена***[1].

2. Формула (5) являє собою асимптотичний розклад функції f відносно шкали $\{\mathbf{R} \ni x \mapsto (x - x_0)^n : n \geqslant 1\}$ при $x \to x_0$.

3°. Формула Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа. Нехай для функції $f: (a, b) \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in (a, b)$ існує $f^{(n+1)}(x)$ і $x_0 \in (a, b)$. Тоді

$$\forall x \in (a, b) \quad \exists \theta, \quad 0 < \theta < 1;$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x), \tag{7}$$

де

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

$\ulcorner$ При $x = x_0$ рівність (7) справедлива. Нехай $x \neq x_0$. Покладемо

$$u(z) := f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x - z) - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n -$$

$$- \frac{L}{(n+1)}(x - z)^{n+1}, \quad L \in \mathbf{R}$$

для значень z, які лежать на відрізку з кінцями x і x_0. Згідно з умовами функція u неперервна й має похідну в точках цього відрізка. Крім того, $u(x) = 0$. Підберемо L таким чином, щоб $u(x_0) = 0$. За теоремою Ролля

$$\exists \theta, \ 0 < \theta < 1: \ u'(x_0 + \theta(x - x_0)) = 0.$$

---

[1] *Маклорен Колін* (1698—1746) — шотландський математик, учень Ньютона. Ним отримано ряд важливих результатів у математичному аналізі, геометрії і алгебрі.

Зауважимо, що

$$u'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + \frac{L}{n!}(x-z)^n.$$

Тому $L = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$. Рівність (7) зараз збігається з рівністю $u(x_0) = 0$. ⌋

У наступних прикладах $x_0 = 0$.

Приклад 1. Для $n \in \mathbf{N}$ $\forall x \in \mathbf{R}$;

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x),$$

де

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)} x^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Зауваження 3. Формула, наведена в цьому прикладі, дозволяє фактично обчислювати значення e^x з певною точністю. Наприклад, для $x \in [0,3]$ і $n = 12$ маємо $r_n(x) < 0{,}001$.

Приклади. 2. $\forall k \in \mathbf{N}$ $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \tilde{r}_k(x);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \tilde{\tilde{r}}_k(x).$$

3. Для $n \in \mathbf{N}$ і $x > -1$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

4. Нехай для $\alpha \in \mathbf{R}$ і $n \geqslant 0$

$$C_\alpha^n := \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Для $x > -1$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + \ldots + C_\alpha^n x^n + r_n(x).$$

Вправи

1. Записати формулу Тейлора з залишковим членом у формі Пеано в точці $x_0 = 0$ для функцій:

а) $\sin^2$: б) $f(x) = x\ln(1+x)$, $x > -1$:

в) $f(x) = e^{x^2}$; $x \in \mathbf{R}$: г) $(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$;

д) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$; е) $\operatorname{sh} x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\operatorname{ch} x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

2. Нехай f — парна функція, яка задовольняє умовам 3°, де $(a, b) = \mathbf{R}$ і $x_0 = 0$. Довести, що основна частина формули Тейлора (7) (її права частина без r_n) містить тільки парні степені. Яка особливість формули Тейлора для непарної функції?

3. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Довести, що $f \in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$ і записати формулу Тейлора для f в точці 0.

4.2. ПРАВИЛА ЛОПІТАЛЯ[1]

Правила обчислення границь функцій у точці можна застосовувати при певних обмеженнях (див. главу 3). У ряді важливих випадків виникає потреба обчислення границь при умовах, у яких ці обмеження не виконуються. Типовим є питання про границю при $x \to x_0$ в одній із ситуацій:

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ коли } f(x) \to 0, \quad g(x) \to 0, \quad x \to x_0;$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ коли } f(x) \to +\infty, \quad g(x) \to +\infty, \quad x \to x_0;$$

$$f(x)\,g(x), \text{ коли } f(x) \to 0, \ g(x) \to +\infty;$$

$$f(x) - g(x), \text{ коли } f(x) \to +\infty, \ g(x) \to +\infty, \ x \to x_0;$$

$$f(x)^{g(x)}, \text{ коли } f(x) \to 0, \ g(x) \to 0, \quad x \to x_0;$$

$$f(x)^{g(x)}, \text{ коли } f(x) \to 1, \quad g(x) \to +\infty, \quad x \to x_0.$$

Ефективним засобом обчислення подібних границь є використання поняття похідної, правила обчислення таких границь були вперше запропоновані Лопіталем.

ТЕОРЕМА 1. Припустимо, що функції $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $g : (a, b) \to \mathbf{R}$ задовольняють умовам:

1) $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to b-} g(x) = 0;$
2) $\forall x \in (a, b)$ існують $f'(x)$, $g'(x)$;
3) $\forall x \in (a, b)$: $g'(x) \neq 0$;
4) існує $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R}$.

Тоді існує $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

---

[1] *Лопіталь де Гійом Франсуа* (1661—1704) — французький математик, автор першого підручника з диференціального числення (1696).

Продовжимо функції f і g на півінтервал $(a, b]$, поклавши $f(b) = 0$, $g(b) = 0$; при цьому f і g неперервні зліва в точці b. За умовою 3) і за теоремою Ролля $g(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$.

Нехай $\varepsilon > 0$ задане. За умовою 4)

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in (b - \delta, b): \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon .$$

За теоремою Коші маємо для $x \in (b - \delta, b)$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \varepsilon,$$

$$c \in (x, b) \subset (b - \delta, b).$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, то отриманий результат дає твердження теореми 1.

Приклади. 1. Нехай $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$. Доведемо, що

$$\lim_{x \to e} \frac{(\ln x)^\alpha - \left(\frac{x}{e}\right)^\beta}{x - e} = \frac{\alpha - \beta}{e} .$$

Застосуємо теорему 1 до інтервалу $(1, e)$ і функцій

$$f(x) = (\ln x)^\alpha - \left(\frac{x}{e}\right)^\beta, \quad g(x) = x - e, \quad x > 1.$$

Умови 1) — 3) і, крім того,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha (\ln x)^{\alpha - 1} \frac{1}{x} - \beta \left(\frac{x}{e}\right)^{\beta - 1} \frac{1}{e} \to \frac{\alpha - \beta}{e}, \quad x \to e-.$$

2. При будь-якому $\alpha \in \mathbf{R}$ правильна рівність

$$\lim_{x \to 1} \frac{\left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^\alpha - 1}{\ln x} = \frac{2\alpha}{\pi} .$$

3. При будь-якому $\alpha \in \mathbf{R}$ правильна рівність

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^\alpha x}{\sin^2 x} = \frac{\alpha}{2} .$$

Зауваження 1. Твердження, аналогічне теоремі 1, правильне для границі справа. Якщо в умові 4) теореми існує границя в точці a, то можна твердити, що існує границя в точці a для $\frac{f}{g}$.

Вправи

4. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^n - \sin^n x}{x^{n+2}}$, $n \in \mathbf{N}$.

5. Довести, що

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

Вказівка. Використати тотожність $f^g=e^{g\ln f}$ і неперервність функції $f(x)=e^x$ $x\in\mathbf{R}$.

Наслідок 1. Теорема 1 правильна для $b=+\infty$, а її аналог з правою границею — для $a=-\infty$.

⌈ Нехай у теоремі 1 $b=+\infty$. Можна припустити, що $a>0$. Покладемо $z=\frac{1}{x}$, $x\in(a,+\infty)$, зауважимо, що $z\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ і $z\to 0+$, $x\to+\infty$. Визначимо функції

$$F(z)=f\left(\frac{1}{z}\right),\quad G(z)=g\left(\frac{1}{z}\right),\ z\in\left(0,\frac{1}{a}\right).$$

Тоді

$$F'(x)=f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right),\quad G'(z)=g'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right),\quad z\in\left(0,\frac{1}{a}\right),$$

Крім того,

$$F(z)\to 0,\quad G(z)\to 0,\quad z\to 0+;$$

$$\frac{F'(z)}{G'(z)}=\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}\to L,\quad z\to 0+,$$

Згідно з теоремою 1 для границі справа в точці a маємо

$$\frac{F(z)}{G(z)}\to L,\ z\to 0+,$$

що рівносильно співвідношенню

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to L;\qquad x\to+\infty.$$ ⌋

Вправи

6. Обчислити границю

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}.$$

7. Довести, що твердження теореми 1 і наслідку 1 правильні і для $L=+\infty$.

8. Довести, що

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)=1.$$

Вказівка. Використати рівність

$$x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)=\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{x}}.$$

ТЕОРЕМА 2. Припустимо, що функції $f\colon (a, b)\to \mathbf{R}$ і $g\colon (a, b)\to \mathbf{R}$ задовольняють умовам:

1) $g(x)\to +\infty$, $x\to b-$;
2) $\forall x\in (a, b)$ існують $f'(x)$, $g'(x)$;
3) $\forall x\in (a, b)\colon g'(x)\neq 0$;
4) існує

$$\lim_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in \mathbf{R}.$$

Тоді існує границя

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

⌈Нехай $\varepsilon>0$ задане. Згідно з умовою 4) і визначенням границі функції у точці для числа $\frac{\varepsilon}{2}>0$,

$$\exists c_1\in (a, b)\ \forall x\in (c_1, b)\colon \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}\Leftrightarrow L-\frac{\varepsilon}{2}<$$
$$<\frac{f'(x)}{g'(x)}<L+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

За умовою 1)

$$\exists c_2\in (a, b)\ \forall x\in (c_2, b)\colon g(x)>0,\ g(x)-g(c_1)>0.$$

Нехай $x>\max(c_1, c_2)$. До функцій f і g на відрізку $[c_1, x]$ застосуємо теорему Коші. Тоді

$$\exists\theta\in (c_1, x)\colon\ \frac{f(x)-f(c_1)}{g(x)-g(c_1)}=\frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}.$$

Враховуючи нерівність (1), отримаємо нерівності

$$L-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(c_1)}{g(x)-g(c_1)}<L+\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (2)$$

які після множення на $g(x)-g(c_1)>0$ і ділення на $g(x)$ рівносильні

$$u(x)<\frac{f(x)}{g(x)}<v(x),$$

де

$$u(x):=\left(L-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{g(c_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(c_1)}{g(x)};$$

$$v(x):=\left(L+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{g(c_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(c_1)}{g(x)}.$$

За умовою 1)

$$u(x) \to L - \frac{\varepsilon}{2}, \quad v(x) \to L + \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \to b-.$$

Тому згідно з п. 1.3 глави 3

$$\exists c_3 \in (a, b) \ \forall x \in (c_3, b): u(x) > L - \varepsilon, \quad v(x) < L + \varepsilon.$$

Покладемо тепер $c = \max(c_1, c_2, c_3)$. Тоді

$$\forall x \in (c, b): \ L - \varepsilon < u(x) < \frac{f(x)}{g(x)} < v(x) < L + \varepsilon.$$

і

$$\forall x \in (c, b): \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, то отриманий результат дає твердження теореми. ⌋

Зауваження 2. Теорема 2 правильна для $b = +\infty$, для правої границі для $L = +\infty$.

Приклади. 4. Покажемо, що $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x = 0$.

⌈ Нехай $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Тоді умови теореми 2 виконані. Зокрема

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{x} / \frac{1}{x^2} \right) = 0. \quad ⌋$$

5. Покажемо, що $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2^x} = 0$.

⌈ Застосуємо двічі теорему 2:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2^x \ln 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2^x (\ln 2)^2} = 0. \quad ⌋$$

Вправи

9. Довести, що:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0, \ \varepsilon > 0;$ б) $\lim\limits_{x \to 1+} (\ln x \cdot \ln\ln x) = 0;$

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2x + \sin x} = \frac{1}{2};$ г) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2\sqrt{n}} = 0;$

д) $\lim\limits_{x \to 0+} x^\varepsilon \ln x = 0, \ \varepsilon > 0;$ е) $\lim\limits_{x \to 0+} x^x = 1.$

10. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}};$ б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)^x;$

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right)^x;$ г) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^x;$

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$;

є) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sin \dfrac{\pi x}{6x+1} + \cos \dfrac{\pi x}{3x+1}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sin^2 \dfrac{\pi x}{4x+\sqrt{x}} + \cos^2 \dfrac{\pi x + \sqrt{x}}{4x}\right)^x$;

з)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3}\left((\cos\alpha)^{2x} + (\cos\beta)^{2x} + (\cos\gamma)^{2x}\right)\right)^{1/x}.$$

10.1. Довести, що для кожного $n \in \mathbf{N}$ існує число $a_n \in (0, 1)$ таке, що

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+a_n} = e.$$

Знайти

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} n\left(a_n - \frac{1}{2}\right).$$

10.2. Для функцій $f, g\colon (0, 1) \to \mathbf{R}$ існують f' і g' на $(0, 1)$, причому $g'(x) \neq 0$, $x \in (0, 1)$, а також $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, $x \to 0$ Довести, що

$$\varliminf_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant \varliminf_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \varlimsup_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4.3. ДОСЛІДЖЕННЯ ОПУКЛОСТІ І НЕРІВНІСТЬ ІЄНСЕНА [1]

Нехай $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $f\colon (a, b) \to \mathbf{R}$

Означення 1. Функція f називається ***опуклою вниз на*** $(a\ b)$, якщо

$$\forall \{x_1, x_2\} \subset (a, b)\ \forall \alpha \in [0, 1]:$$
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Функція f називається ***опуклою вгору на*** (a, b), якщо функція $-f$ опукла вниз на (a, b).

Означення 2. Функція f називається ***строго опуклою вниз на*** (a, b), якщо

$$\forall \{x_1, x_2\} \subset (a, b),\ x_1 \neq x_2\ \forall \alpha \in (0, 1):$$
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Функція f називається ***строго опуклою вгору на*** (a, b), якщо функція $-f$ строго опукла вниз на (a, b).

---

[1]. *Ієнсен Йоган Людвиг* (1859—1925) — датський математик. Отримав ряд відомих результатів у теорії аналітичних функцій, геометрії та ін.

Функція, яка задовольняє одному із наведених означень називається ***опуклою***.

Приклади. 1. Функція $f(x) = Lx + M$, $x \in \mathbf{R}$, $\{L, M\} \subset \mathbf{R}$ опукла вниз і опукла вгору (але не строго) на $\mathbf{R}$.

2. Функція $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ строго опукла вниз на $\mathbf{R}$.

[Нехай $x_1 \neq x_2$, $\alpha \in (0, 1)$. Тоді

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)^2 = \alpha^2 x_1^2 + 2\alpha(1-\alpha) x_1 x_2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 <$$

$$< \alpha^2 x_1^2 + \alpha(1-\alpha)(x_1^2 + x_2^2) + (1-\alpha)^2 x_2^2 = \alpha x_1^2 + (1-\alpha) x_2^2,$$

оскільки згідно з нерівністю Коші $2x_1x_2 < x_1^2 + x_2^2$. ⌋

Вправи

11. Довести, що функція $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$ опукла вниз на $\mathbf{R}$.

12. Довести, що функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ строго опукла вниз на $(0, +\infty)$.

13. Довести, що функція $f\colon (a, b) \to \mathbf{R}$ опукла вниз на (a, b) тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \{x_1, x_2\} \subset (a, b),\ x_1 < x_2\ \forall l,\ l(x) = L(x) + M,\ \{L, M\} \subset \mathbf{R}.$$

$$l(x_1) \geqslant f(x_1) \text{ і } l(x_2) \geqslant f(x_2) \Rightarrow \forall x \in (x_1, x_2)\colon l(x) \geqslant f(x).$$

14*. Довести, що функція $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, опукла й обмежена на $\mathbf{R}$, постійна на $\mathbf{R}$.

Вказівка. Нехай, наприклад, f опукла вниз і $f(x_1) < f(x_2)$ для $x_1 < x_2$. Тоді із нерівності

$$f(x) \geqslant f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x > x_2$$

випливає, що $f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$. Остання нерівність рівносильна нерівності із означення опуклості.

15*. Довести, що функція, опукла й обмежена на (a, b), неперервна на (a, b).

ТЕОРЕМА 1. Функція $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ опукла (строго опукла) вниз на (a, b) тоді й тільки тоді, коли для будь-якої точки $x_0 \in (a, b)$ функція нахилу

$$g(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$$

монотонно не спадає (строго зростає) на $(a, b) \setminus \{x_0\}$.

⌈Розглянемо тільки випадок строго опуклої вниз функції f. Нехай $a < x_0 < x_1 < x_2 < b$. Покладемо

$$\alpha = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}, \quad 1 - \alpha = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_0}.$$

Тоді $\alpha \in (0, 1)$ і $x_1 = \alpha x_0 + (1 - \alpha) x_2$. Зауважимо, що такі нерівності рівносильні:

$$f(\alpha x_0 + (1-\alpha) x_2) < \alpha f(x_0) + (1-\alpha) f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0} f(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_0) f(x_1) < (x_2 - x_1) f(x_0) + (x_1 - x_0) f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_0)(f(x_1) - f(x_0)) < (x_1 - x_0)(f(x_2) - f(x_0)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2).$$

Для інших випадків розміщення точок x_1 і x_2 міркування аналогічні. ⌋

ТЕОРЕМА 2. Нехай $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ і $\forall x \in (a, b)$ існує $f'(x)$. Функція f опукла (строго опукла) вниз на (a, b) тоді й тільки тоді, коли функція f' монотонно не спадає (строго зростає) на (a, b).

⌈ Розглянемо випадок опуклої вниз на (a, b) функції.

Необхідність. Нехай f опукла вниз на (a, b) і $a < x_1 < x_2 < b$. Згідно з теоремою 1 для точок $a < u < x_1 < x_2 < v < b$ маємо

$$\frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant \frac{f(v) - f(x_2)}{v - x_2}.$$

Звідси

$$f'_-(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'_+(x_2)$$

і далі

$$f'(x_1) = f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_2) = f'(x_2).$$

Достатність. Нехай f' монотонно не спадає на (a, b). Знову використаємо теорему 1. Нехай $x_0 \in (a, b)$, а

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in (a, b) \setminus \{x_0\}.$$

За теоремою Лагранжа

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^2} = \frac{f'(x) - f'(c)}{x - x_0},$$

де число c лежить між x і x_0. Тому $g'(x) \geqslant 0$, $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Отже, функція g зростає на кожному із інтервалів (a, x_0) і (x_0, b). Крім того,

$$g(x_0 -) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) = g(x_0 +). \quad ⌋$$

Вправа

16. Довести теорему 2 для випадку строгої опуклості.

Вказівка до доведення необхідності. Розглянути точки $a < u < x_1 < z < x_2 < v < b$.

ТЕОРЕМА 3. Нехай $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ і $\forall x \in (a, b)$ існує $f''(x)$. Для того щоб функція f була опуклою вниз на (a, b), необхідно й достатньо, щоб $\forall x \in (a, b) : f''(x) \geqslant 0$. Для того щоб функція f була строго опуклою вниз на (a, b), необхідно й достатньо, щоб:

1) $\forall x \in (a, b)$: $f''(x) \geqslant 0$;

2) не існувало інтервалу $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ такого, що

$$\forall x \in (\alpha, \beta): \quad f''(x) = 0.$$

⊢ Наслідок теореми 2 і теорем 1 і 2 п. 2.2. ⊣

Вправи

17. Перевірити, що:

а) функція $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$ строго опукла вниз на $\mathbf{R}$;

б) функція $f(x) = \ln x$, $x > 0$ строго опукла вгору на $(0, +\infty)$;

в) функція $f(x) = \ln(\sin x) - \ln x$, $x \in (0, \pi)$ строго опукла вгору на $(0, \pi)$.

18. Визначити інтервали опуклості функцій sin, cos, tg, arctg, arcsin; $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

ТЕОРЕМА 4 (нерівність Ієнсена). Нехай f — опукла вниз на (a, b) функція. Тоді

$$\forall n \geqslant 2 \ \forall \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset (a, b)$$

$$\forall \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset [0, 1], \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1: \qquad (1)$$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n) f(x_n).$$

Для строго опуклої вниз функції нерівність (1) є строга, якщо числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не всі однакові, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ додатні.

⊢ При $n = 2$ нерівність (1) збігається з нерівністю із означення опуклої функції. Припустимо, що нерівність (1) правильна для будь-якого набору із $n - 1$ точки. Розглянемо для $n \geqslant 3$ набір

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset (a, b);$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset [0, 1], \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1.$$

Серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ хоча б одне відмінне від 1. Нехай $\alpha_1 < 1$. Згідно з припущенням

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = f\left(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)\sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_1} x_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1 f(x_1) + (1-\alpha_1) f\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_1} x_k\right) \leqslant \alpha_1 f(x_1) +$$

$$+ (1-\alpha_1)\sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_1} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k).$$

Згідно з принципом математичної індукції нерівність (1) доведена. ⌋

Вправа

18.1. Довести твердження теореми 4 відносно строго опуклої функції.

Зауваження. Нерівність (1) має такий фізичний зміст. Розглянемо графік функції f і розмістимо в точках $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ відповідно маси $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Координати центру ваги мас цієї системи мають вигляд

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(x_j).$$

Для опуклої вниз функц ії f центр мас лежить над кривою і тому його ордината $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(x_j)$ більша, ніж ордината $f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right)$ точки на кривій з абсцисою $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$. Таким чином,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(x_j) \geqslant f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right).$$

Приклади. 3. Функція $f(x) = |x|$ $x \in \mathrm{R}$ опукла вниз на R. Тому згідно з нерівністю (1) при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$

$$\forall \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathrm{R}: \left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

4. Функція $f(x) = \ln x$, $x > 0$ строго опукла вгору на $(0, +\infty)$. Тому згідно з нерівністю (1) при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$

$$\forall \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset (0, +\infty): \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln x_j$$

або $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \geqslant \sqrt[n]{\sum_{j=1}^{n} x_j}$ (нерівність Коші між середніми).

5. Нехай числа $n \in \mathbf{N}$ і $p \geqslant 1$ фіксовані і для довільних чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbf{R}$

$$\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \|\vec{x}\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Доведемо, що для будь-яких чисел

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset \mathbf{R};$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_p \leqslant \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p \text{ (нерівність Мінковського).}$$

$\vdash$ Оскільки

$$|x_k + y_k|^p \leqslant (|x_k| + |y_k|)^p, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

то досить розглянути тільки випадок невід'ємних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Нехай $u_k := x_k + y_k$; тоді існують $\{\alpha_k, \beta_k\} \subset [0, 1]$ такі, що

$$x_k = u_k \alpha_k, \quad y_k = u_k \beta_k, \quad \alpha_k + \beta_k = 1; \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Якщо

$$U := \sum_{k=1}^{n} u_k^p = 0,$$

то нерівність очевидно справджується із знаком рівності, при $U > 0$ використаємо нерівність Ієнсена для функції $f(x) = x^p$, $x \in [0, 1]$, яка є строго опуклою вниз,

$$\|\vec{x}\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} x_k^p = U \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^p \geqslant U \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k\right)^p,$$

де

$$\lambda_k := \frac{u_k^p}{U}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Тому

$$\|\vec{x}\|_p \geqslant U^{1/p} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k$$

і аналогічно

$$\|\vec{y}\|_p \geqslant U^{1/p} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \beta_k.$$

Після додавання останніх двох нерівностей одержимо

$$\|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p \geqslant U^{1/p} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = U^{1/p} = \|\vec{x} + \vec{y}\|_p.$$

Вправи

19. Нехай функції f і g опуклі вниз на (a, b). Довести, що:

а) функція $c_1 f + c_2 g$, де c_1, c_2 додатні, опукла вниз на (a, b);

б) функція $h(x) = \max(f(x), g(x))$ $x \in (a, b)$ опукла вниз на (a, b).

20. Довести, що для $n \geqslant 2$

$$\forall \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset (0, +\infty)$$

$$\forall \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset [0, 1], \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$$

правильна наступна нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \geqslant \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}.$$

20.1. Нехай числа $n \in \mathbf{N}$, $p > 1$, $q > 1$, такі, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, фіксовано. Довести, що для будь-яких чисел

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \mathbf{R}$$

справджується **нерівність Гьольдера**

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

Вказівка. У випадку $\|\vec{x}\|_p > 0$ і $\|\vec{y}\|_q > 0$ нерівність Гьольдера має вигляд

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\|\vec{x}\|_p} \cdot \frac{y_k}{\|\vec{y}\|_q} \leqslant 1.$$

За результатом вправи 20

$$\frac{x_k}{\|\vec{x}\|_p} \frac{y_k}{\|\vec{y}\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \left(\frac{x_k}{\|\vec{x}\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{y_k}{\|\vec{y}\|_q} \right)^q$$

для $1 \leqslant k \leqslant n$. Потім додати отримані нерівності.

Зауваження. Обидві нерівності Мінковського і Гьольдера є вірними для довільного набору комплексних чисел

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n\}.$$

4.4. УМОВИ ЛОКАЛЬНОГО ЕКСТРЕМУМУ

Нехай $A \subset \mathbf{R}$.

Означення 1. Точка $x_0 \in A$ називається ***точкою локального максимуму функції*** $f : A \to \mathbf{R}$, якщо

$$\exists \delta > 0: \quad B(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$$

і

$$\forall x \in B(x_0, \delta): \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

При цьому точка x_0 називається ***точкою строгого локального максимуму***, якщо

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}: \qquad f(x) < f(x_0)$$

Аналогічно визначаються точки ***локального мінімуму й строгого локального мінімуму***. Точки локального мінімуму та локального максимуму називаються ***точками локального екстремуму***.

Вправи

21. Нехай для f: $[a, b] \to \mathbf{R}$; x_*, x^* — точки із $[a, b]$, для яких $f(x_*) = \inf\limits_{[a, b]} f$, $f(f^*) = \sup\limits_{[a, b]} f$.

Чи є точки x_* і x^* точками локального екстремуму? Навести приклади.

22. Нехай E — множина всіх точок локального максимуму функції f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ на $[a, b]$. Якщо існує точка $x^* \in [a, b]$ така, що $f(x^*) = \max\limits_{[a, b]} f$, то $x^* \in E \cup \{a, b\}$

$$f(x^*) = \max \{f(x) \mid x \in E \cup \{a, b\}\}.$$

Довести це твердження. Аналогічне твердження правильне для мінімального на $[a, b]$ значення функції f.

23*. Довести, що множина всіх точок, в яких функція f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ має строгий локальний максимум, або строгий локальний мінімум, не більш як зліченна.

ТЕОРЕМА 1. Нехай для функції $f: A \to \mathbf{R}$ точка $x_0 \in A$ є точкою локального екстремуму. Якщо в точці x_0 існує $f'(x)$, то $f'(x_0) = 0$. ⌋

⌈ Нехай x_0 — точка локального максимуму. Тоді

$$\exists \delta > 0: \quad B(x_0, \delta) \subset A,$$
$$\forall x \in B(x_0, \delta): f(x) \leqslant f(x_0).$$

Тому до функції f на інтервалі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ можна застосувати теорему Ферма, згідно з якою $f'(x_0) = 0$. ⌋

Зауваження **1.** Згідно з теоремою 1 точки локального екстремуму для функції, яка має похідну, слід шукати серед точок, у яких похідна дорівнює 0.

Означення 2. Точки, в яких похідна функції f обертається в нуль, називаються ***критичними (стаціонарними) точками функції*** f.

Вправи

24. Довести, що функція може мати локальний екстремум в точках, в яких похідна не існує. Розглянути приклад функції $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$.

25. Довести, що точки, у яких похідна дорівнює 0, не обов'язково є точками локального екстремуму. Розглянути приклад функції $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ і точку $x_0 = 0$.

Зауваження 2. Таким чином, точки локального екстремуму функції f лежать у об'єднанні множини критичних точок функції f і множини тих точок, в яких похідна не існує.

Означення 3. Функція g ***зберігає знак ліворуч від точки*** x_0, ***якщо***

$$\exists\delta > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, \quad x_0): g(x) > 0$$

або

$$\exists\delta > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, \quad x_0): g(x) < 0.$$

Аналогічно визначається поняття: функція g ***зберігає знак праворуч від точки*** x_0.

ТЕОРЕМА 2. Нехай функція $f: A \to \mathrm{R}$ задовольняє одній із двох умов:

1) $\exists\delta > 0 \ \forall x \in B(x_0, \delta)$ існує $f'(x)$, причому точка x_0 критична, тобто $f'(x_0) = 0$, і похідна f' зберігає знак ліворуч і праворуч від точки x_0.

2) $f \in \mathbf{C}(A)$ і $\exists\delta > 0 \ \forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ існує $f'(x)$, причому похідна f' зберігає знак ліворуч і праворуч від точки x_0.

Якщо при перехсді через точку x_0 похідна змінює знак, то x_0 — точка строгого локального екстремуму. Якщо ж при переході через точку x_0 похідна f' знака не змінює, то x_0 не є точкою локального екстремуму.

|¯Умова 2) більш загальна, тому розглянемо доведення при її виконанні.

(i) Нехай для деякого $\delta > 0$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0): \ f'(x) > 0; \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta): \ f'(x) < 0$$

(похідна змінює знак «+» на «—»). При цьому функція f строго зростає на $(x_0 - \delta, x_0]$ і строго спадає на $[x_0, x_0 + \delta)$. Тому

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}: \ f(x) < f(x_0),$$

а точка x_0 є точкою строгого локального максимуму. Аналогічно, якщо похідна змінює знак «—» на «+», то точка x_0 є точкою строгого локального мінімуму.

(ii) Нехай зараз $\delta > 0$ таке, що

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}: \ f'(x) > 0$$

(похідна знака не змінює). Тоді f строго зростає на кожному із інтервалів $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ і внаслідок неперервності в точці x_0 — на інтервалі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тому x_0 не є точкою локального екстремуму. _|

Вправи

26. Нехай

$$f(x)=\begin{cases} x^4\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Довести, що: а) 0 — точка строгого локального мінімуму; б) похідна f' не зберігає знака ні праворуч ні ліворуч від точки 0.

27. Знайти точки локального екстремуму функції:

а) $f(x)=x^x,\quad x>0;$ б) $f(x)=x^n e^{-x},\quad x\in\mathbf{R};\quad n\in\mathbf{N}.$

ТЕОРЕМА 3. Нехай $f\colon A\to\mathbf{R}$, $m\in\mathbf{N}$, $m\geqslant 2$, $x_0\in A$. Припустимо, що виконані умови:

1) $\exists\delta>0\ \forall x\in B(x_0,\delta)\subset A$ існує $f^{(m-1)}(x)$;

2) існує $f^{(m)}(x_0)$;

3) $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(m-1)}(x_0)=0,\ f^{m}(x_0)\neq 0.$

Тоді для $m=2k$, $k\in\mathbf{N}$ точка x_0 є точкою локального екстремуму, а саме — точкою строгого локального максимуму при $f^{(m)}(x_0)<0$ і точкою строгого локального мінімуму при $f^{(m)}(x_0)>0$. Для значень $m=2k+1$, $k\in\mathbf{N}$ точка x_0 не є точкою локального екстремуму.

$\ulcorner$ Формула Тейлора з залишковим членом у формі Пеано для функції f і точки x_0 має вигляд

$$f(x)=\sum_{j=0}^{m}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j+o((x-x_0)^m),\qquad x\to x_0$$

або за умовою 3)

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m),\qquad x\to x_0;$$

звідки при $x\neq x_0$

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^m\left(\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}+\frac{o((x-x_0)^m)}{(x-x_0)^m}\right),\qquad x\to x_0. \tag{1}$$

Згідно з означенням «о» для числа $\frac{1}{2m!}|f^{(m)}(x_0)|>0$

$$\exists\delta>0\ \forall x\in B(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}:\ \left|\frac{o((x-x_0)^m)}{(x-x_0)^m}\right|<\frac{1}{2m!}|f^{(m)}(x_0)|.$$

Зауважимо, що для $x\in B(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$ величини

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}+\frac{o((x-x_0)^m)}{(x-x_0)^m}\ \text{ і }\ \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

мають ненульові значення одного знака. Враховуючи формулу (1), можна твердити, що знак різниці $f(x) - f(x_0)$ для $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ збігається із знаком добутка

$$(x - x_0)^m \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}. \qquad (2)$$

Тому при $m = 2k$ різниця $f(x) - f(x_0) > 0$, якщо $f^{(m)}(x_0) > 0$ і тому точка x_0 є точкою строгого локального мінімуму. Різниця $f(x) - f(x_0) < 0$, якщо $f^{(m)}(x_0) < 0$, і тоді x_0 є точкою строгого локального максимуму. Якщо ж $m = 2k + 1$, то добуток (2) змінює знак при переході через точку x_0 у $B(x_0, \delta')$ для будь-якого $0 < \delta' < \delta$. Тому x_0 не є точкою локального екстремуму. ⌋

Вправа

28. Знайти точки локального екстремуму функцій на $\mathbf{R}$:

а) $f(x) = x^4(1-x)^3$; б) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4(2x^2+1)}$;

в) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

4.5. ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ

Нехай $A \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in A$.

Означення. Точка x_0 називається ***точкою перегину графіка функції*** $f\colon A \to \mathbf{R}$, якщо f неперервна в точці x_0, існує $\delta > 0$ таке, що $B(x_0, \delta) \subset A$, і на кожному з інтервалів $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ функція f опукла, причому напрями опуклості різні.

Приклад. Для функції $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ точка $x_0 \subset 0$ є точкою перегину, оскільки $f''(x) \subset 0$ при $x < 0$, і тому f опукла вгору на $(-\infty, 0)$; f $f''(x) > 0$ при $x > 0$, і тому f опукла вниз на $(0, +\infty)$.

Вправи

29. Знайти точки перегину функції $f(x) = x + \sin x$, $x \in \mathbf{R}$.

30. Нехай для функції $f\colon A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in B(x_0, \delta)$ існує $f'(x)$. Довести, що якщо x_0 є точкою перегину f, то x_0 є точкою локального екстремуму функції f'.

Вказівка. Використати теорему 2 п. 4.3.

ТЕОРЕМА 1. Нехай $f\colon A \to \mathbf{R}$ і $x_0 \in A$ такі, що $\exists \delta > 0$ $\forall x \in B(x_0, \delta)$ існує $f'(x)$. Нехай x_0 — точка перетину. Якщо існує $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.

⌈Твердження випливає із результату вправи 30 і теореми 1 п. 4.4. ⌋

Зауваження. Таким чином, точки перегину функції f містяться в об'єднанні множини точок, в яких f'' дорівнює 0, і множині точок, в яких f'' не існує.

Вправа

31. Довести, що точка x_0, в якій $f''(x_0) = 0$, не обов'язково є точкою перегину.

Вказівка. Розглянути функцію $f(x) = x^4$, $x \in \mathbf{R}$, $x_0 = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Припустимо, що функція $f : A \to \mathbf{R}$ і точка $x_0 \in A$ задовольняють умовам:

1) $\exists \delta > 0 \ \forall x \in B(x_0, \delta)$ існує $f''(x)$;

2) $f''(x_0) = 0$;

3) f'' зберігає знак ліворуч і праворуч від точки x_0. Тоді x_0 є точкою перегину функції f, якщо f'' змінює знак при переході через x_0 і x_0 не є точкою перегину, якщо f'' не змінює знаку при переході через x_0.

⌈Наслідок результату вправи 30 і теореми 2 п. 4.4 при умові 1). ⌋

Вправа

32. Використовуючи результат вправи 30, сформулювати й довести аналог теореми 3 п. 4.4 для точок перегину.

4.6. АСИМПТОТИ

Нехай $A \subset \mathbf{R}$, a — гранична точка множини A, $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Означення. Пряма $y = kx + l$, $x \in \mathbf{R}$ називається ***асимптотою графіка функції*** f при $x \to +\infty$ або при $x \to -\infty$, якщо

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx - l) = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx - l) = 0.$$

Пряма $x = a \in \mathbf{R}$ називається ***асимптотою графіка функції*** f, якщо виконується хоча б одне із співвідношень:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty \text{ або } -\infty; \quad \lim_{x \to a+} f(x) = +\infty \text{ або } -\infty.$$

Приклади. 1. Для функції $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ прямі $y = 0$, $x = 0$ є асимптотами.

2. Для функції $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x > 0$ пряма $y = 0$ є асимптотою при $x \to +\infty$ та при $x \to -\infty$.

Зауваження. Згідно з означенням параметри похилої асимптоти $y =$

$= kx + l$, $x \in \mathbf{R}$, наприклад при $x \to +\infty$, знаходять із співвідношень

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad l = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx).$$

Вправа

33. Знайти асимптоти функцій:

а) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; б) $f(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^2}$, $x \neq 0$.

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ДО ГЛАВ 1—4

1. Нехай $f: X \to X$ і для $n \in \mathbf{N}$, $f^1(x) := f(x)$ $f^{n+1}(x) := f(f^n(x))$. Якщо $\exists m \in \mathbf{N}\ \forall x \in X: f^m(x) = x$, то f — бієкція. Довести це твердження.

2. Чи є функція $f: \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$, яка визначається співвідношенням $\mathbf{N}^2 \ni (m, n) \mapsto \min(m, n) \in \mathbf{N}$ сюр'єкцією? Ін'єкцією? Визначити $f(A)$ для множини

$$A = \{(2k, n) \mid k \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}\}, f^{-1}(\{k\}) \text{ для } k \in \mathbf{N}.$$

3. Довести, що функція $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, яка визначається співвідношенням $f(n) = n + (-1)^n$, $n \in \mathbf{Z}$ є бієкція.

4. Визначити потужність множин:

а) $\{x \in \mathbf{N} \mid \exists y \in \mathbf{R}: 10 \sin y = x\}$;

б) $\{x \in \mathbf{R} \mid \exists y \in \mathbf{N}: y = \log_2 x\}$;

в) $\{x \in \mathbf{R} \mid \exists n \in \mathbf{N}\ \exists a_1 \in \mathbf{Z} \ldots \exists a_n \in \mathbf{Z}: x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0\}$.

5*. Довести, що такі множини мають потужність континіум: а) множина ірраціональних чисел; б) об'єднання зліченної сукупності множин потужності континіум; в) декартів добуток зліченної сукупності множин потужності континіум; г) множина всіх нескінченних послідовностей натуральних чисел; д) множина всіх нескінченних послідовностей дійсних чисел; е) множина $2\mathbf{N}$; ж) множина всіх функцій із $\mathbf{N}$ в $\mathbf{N}$; з) множина всіх збіжних послідовностей дійсних чисел; і) $\mathbf{C}([a, b])$.

6. Нехай $A \subset \mathbf{R}$, де A — обмежена множина, і нехай J — перетин всіх відрізків, які містять у собі множину A, тобто $J = \bigcap_{I: I = [a,b] \supset A}$.

Довести, що $J = [\inf A, \sup A]$.

7. Нехай $f: X \times Y \to \mathbf{R}$, де X і Y — деякі множини. Показати, що

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) \geqslant \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y).$$

8*. Нехай A — довільна підмножина $\mathbf{R}$, $A \neq \varnothing$, і функція $f: A \to \mathbf{R}$ задовольняє умові Ліпшица із сталою $L \in \mathbf{R}$:

$$\forall \{x, y\} \subset A: |f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|.$$

Довести, що існує продовження f на $\mathbf{R}$, яке задовольняє на $\mathbf{R}$ умові Ліпшица зі сталою L.

Вказівка. Розглянути функцію

$$g(x) := \inf_{y \in A} (f(y) + L|x - y|), \quad x \in \mathbf{R}.$$

9. Довести, що послідовність $\left\{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} : n \geqslant 2\right\}$ строго спадає, а послідовність $\left\{\frac{(\sqrt[n]{n!})^2}{n} : n \geqslant 2\right\}$ строго зростає.

10. Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ збіжна, а послідовність $\{b_n : n \geqslant 1\}$ обмежена і така, що $\forall n \geqslant 1 : b_{n+1} \geqslant b_n + a_{n+1} - a_n$. Довести, що послідовність $\{b_n : n \geqslant 1\}$ збіжна.

11*. Послідовність $\{a_n : n \geqslant 1\}$ збіжна, а послідовність $\{b_n : n \geqslant 1\}$ обмежена і така, що

$$\forall n \geqslant 1 : b_{n+2} - \frac{3}{2} b_{n+1} + \frac{1}{2} b_n \geqslant a_{n+2} - \frac{3}{2} a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n.$$

Довести, що послідовність $\{b_n : n \geqslant 1\}$ збіжна.

12. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln \ln n} \sum_{j=2}^{n} \frac{a_j}{j \ln j},$$

якщо $a_n \to a$, $n \to \infty$.

Відповідь. a

13. Визначити функцію

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + j^n x^n}, \quad x \in (0, 1]$$

і побудувати її графік.

Відповідь. $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \chi_{\left\{\frac{1}{j} \mid j \geqslant 1\right\}}(x), x \in (0, 1]\right.$, де $\chi_A(x) = 1$, $x \in A$; $\chi_A(x) = 0$, $x \notin A$.

14. Нехай $\forall n \geqslant 1 : a_n > 0$, $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ і виконуються нерівності

$$a_{n+1} \leqslant \frac{(s_n - 1) a_n + a_{n-1}}{s_{n+1}}, \quad n \geqslant 2.$$

Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Відповідь. 0.

15. Для числа $x \geqslant 0$ обчислити суму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\left\{\frac{[x2^n]}{2}\right\} + 1\right) \cdot 2^{-n-1}.$$

Тут $[a]$ — ціла частина числа a, $\{a\} = a - [a]$.

Відповідь. $\frac{1}{2}(\{x\} + 1)$.

16. Нехай $\forall n \geqslant 1$: $a_n \in (0, 1)$; $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^3 + \ldots + a_1^n).$$

Відповідь. 0.

17. Визначити дійсні числа a, b, c так, щоб існувала скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} n\left(an + \sqrt{2 + bn + cn^2}\right).$$

18. Нехай для $x \in (0, +\infty)$

$$a_1 = \sqrt{x},\ a_2 = \sqrt{x + a_1}, \ldots, a_{n+1} = \sqrt{x + a_n}, \ldots$$

Довести, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: f(x)$ і визначити функцію f.

Відповідь. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + x},\ x > 0.$

19. Функція $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ має похідну в точці a. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} f\left(a + \frac{j}{n^2}\right) - nf(a)\right).$$

Відповідь. $\dfrac{1}{2} f'(a).$

19.1. Функція $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, де

$$P(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_{2n},\ x \in \mathbf{R},$$

$$n \in \mathbf{N},\ \{a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\} \subset \mathbf{R},$$

не є ін'єкцією або сюр'єкцією.

20*. Довести, що не існує неперервної бієкції R на відрізок $[-1, 1]$.

21*. Довести, що не існує неперервної бієкції R на коло в площині.

22*. Довести, що не існує функції $f \in C(\mathbf{R})$, яка приймає кожне значення двічі.

23. Навести приклад функції із $C(\mathbf{R})$, яка приймає кожне значення тричі.

24. Побудувати графік функції

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}\sin\dfrac{\pi x}{2} + x^2}{x^{2n} + 1},\quad x \in \mathbf{R}.$$

Чи буде $f \in C(\mathbf{R})$? Чи буде f диференційовною на $\mathbf{R}$?

25. Довести, що для $n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x + e^{2x} + \ldots + e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

26*. Нехай $x_1 > 0$ і $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$, $n \geqslant 1$. Довести, що $nx_n \to 2$, $n \to \infty$.

Вказівка. Нехай $\{x_n : n \geqslant 1\}$ — послідовність задачі 26. Спочатку зауважимо, що $x_n > 0$, $n \geqslant 1$ і що $x_n \to 0$, $n \to \infty$. Далі

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - \ln(1 + x_n)}{x_n \ln(1 + x_n)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1 + x)}{x \ln(1 + x)} = \frac{1}{2}.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{j+1}}-\frac{1}{x_j}\right)=\frac{1}{2},$$

звідки $\frac{1}{nx_n}-\frac{1}{nx_1}\to\frac{1}{2}$, $n\to\infty$. Тому $nx_n\to 2$, $n\to\infty$.

Другий підхід див.: *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: В 2 т. М., 1978. Т. 1. 392 с.

27*. Нехай $x_1>0$ і $x_{n+1}=\operatorname{arctg} x_n$, $n\geqslant 1$. Довести, що $\sqrt{n}\cdot x_n\to\sqrt{\frac{3}{2}}$, $n\to\infty$.

Вказівка. Аналогічно розв'язку задачі 26 обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}\right).$$

28. Нехай для $n\in\mathbf{N}$ $\{a_1,\dots,a_n,x_1,\dots,x_n\}\subset(0,+\infty)$. Обчислити границю

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}a_jx_j^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Відповідь. $\max\{x_1,\dots,x_n\}$.

29*. Нехай $x=0,\ x_1x_2\dots x_n\dots$ — запис числа $x\in[0,1]$ у системі числення за основою 3, а f — функція

$$[0,1]\ni x\mapsto f(x)=0,\ y_1y_2\dots y_n\dots,$$

де $f(x)$ записано в системі числення за основою 2, причому

$$y_1=1\Leftrightarrow x_1=1,\ y_{n+1}=y_n\Leftrightarrow x_{n+1}=x_n,\ n>1.$$

Довести, що $f\in C([0,1])$ і що f не є диференційовною в кожній точці $x\in[0,1]$.

30. Функції f і g рівномірно неперервні на множині A. Чи будуть рівномірно неперервними на A функції: а) cf, $c\in\mathbf{R}$; б) $f+g$; в) fg у випадку $A=[a,b]$? $A=[a,+\infty)$?

Відповідь. а) і б) «так» для $[a,b]$ і для $[a,+\infty)$.

31. Нехай P — многочлен степеня $n\geqslant 2$ з різними дійсними коренями $x_1,x_2,\dots,x_n$. Знайти суму $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{P'(x_j)}$.

Відповідь. 0.

32. Нехай

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\leqslant 0;\\ ax^2-2x, & x>0.\end{cases}$$

Визначити всі $a\in\mathbf{R}$, при яких f має обернену функцію g. Знайти g.

Відповідь. $a\leqslant 0$.

33. Довести, що функція $f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^2}$, $x>-1$ має обернену функцію g. Знайти g'.

34. Визначити головну частину таких функцій на $\mathbf{R}$:

а) $x \mapsto 1 - \cos(1 - \cos x)$;

б) $x \mapsto x \sin(\sin x) - \sin^2(x)$

при $x \to 0$ відносно шкали порівняння $\{x^n\}$.

Відповідь. а) $\frac{x^4}{8}$; б) $\frac{x^6}{18}$.

35. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0+} x^{x^{x^x}}$.

Відповідь 1.

36. Функція $f: A \to \mathbf{R}$ називається ***алгебраїчною на множині A***, якщо для деякого $n \in \mathbf{N}$ і деяких многочленів $P_0, P_1, \ldots, P_n$; $P_n \not\equiv 0$ виконується рівність

$$P_n(x)\,(f(x))^n + P_{n-1}(x)\,(f(x))^{n-1} + \ldots + P_0(x) = 0, \quad x \in A.$$

Довести, що функції $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$ не є алгебраїчними на множині вигляду $[a, +\infty)$, де $a \in \mathbf{R}$.

37. Нехай $f: [0, 1] \to [0, 1]$, $f \in C([0, 1])$. Довести, що

$$\exists x \in [0, 1]: f(x) = x.$$

38. Для функції $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ існує f' на $[a, b]$, причому $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) := f'_+(a) > 0$, $f'(b) := f'_-(b) > 0$. Довести, що

$$\exists c \in (a, b): f(c) = 0, \quad f'(c) \leqslant 0.$$

39. Для функції $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ існує f'' на (a, b) і для трьох різних точок x_1, x_2, x_3 із (a, b) $f(x_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Довести, що $\exists c \in (a, b): f''(c) = 0$.

40. Нехай функції $f: (a, b) \to (-1, +\infty)$; $g: (a, b) \to \mathbf{R}$ задовольняють умовам:

1) $\forall x \in (a, b): f(x) \neq 0$;

2) існує $\lim\limits_{x \to b-} f(x)\,g(x) = L \in \mathbf{R}$, $L \neq 0$;

3) існує $\lim\limits_{x \to b-} (1 + f(x))^{g(x)} = e^L$.

Довести, що $f(x) \to 0$, $x \to b-$.

41. Нехай $f \in C([a, b])$ і $f(a) = f(b)$. Довести, що існує відрізок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ такий, що $\beta - \alpha = \frac{1}{2}(b - a)$, $f(\alpha) = f(\beta)$.

42. Нехай $\{f, g\} \subset C^{(2)}([0, 1])$, причому $\forall x \in (0, 1): g'(x) \neq 0$ і $f'(0)\,g''(0) \neq f''(0)\,g'(0)$. Нехай $\theta(x)$ для $x \in (0, 1]$ яке-небудь із чисел із теореми Коші

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(\theta(x))}{g'(\theta(x))}.$$

Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\theta(x)}{x}$.

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

43. Функція $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ строго опукла і така, що $\exists x_* \in \mathbf{R}: f(x_*) = \min f$. Довести, що $f(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$.

Вказівка. Показати, що f опукла вниз, а потім порівняти величини

$$\frac{f(x_* + 1) - f(x_*)}{1}, \quad \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$$

для $x > x_* + 1$.

44. Довести, що для будь-яких $n \in \mathbf{N}$, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ правильна нерівність

$$\sqrt[n]{\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n} \leqslant \sin \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Вказівка. Розглянути функцію $f(x) = \ln \sin x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

45. Для кожного $a \in \mathbf{R}$ визначити кількість коренів рівняння

$$x^3 - 3x^2 - ax + 5 = 0.$$

46. Довести, що функція $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = 3x^5 + 7x^3 + 2x + 1$$

є бієкцією.

47. Чи є функція $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

ін'єкцією? Сюр'єкцією?

48. Нехай $f \in C([-1, 1])$ і f парна (непарна). Довести, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує многочлен P, який містить тільки парні (непарні) степені x і такий, що

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f|x) - P(x)| < \varepsilon.$$

49. Нехай $f: (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ така, що для $x \in (0, +\infty)$ існує $f'(x)$ і $f(x) + f'(x) \to 0$, $x \to +\infty$

Довести, що $f(x) \to 0$, $x \to +\infty$.

50. Нехай $f \in C^{(2)}([0, +\infty))$ і для деякого $k \in \mathbf{N}$ $x^k f(x) \to 0$, $x^k f''(x) \to 0$, $x \to +\infty$. Довести, що $x^k f'(x) \to 0$, $x \to +\infty$.

51. Нехай функція $f: [a, b] \to [a, b]$ задовольняє умові

$$\forall \{x', x''\} \subset [a, b]: |f(x'') - f(x'')| \leqslant |x' - x''|.$$

Для $x_1 \in [a, b]$ покладемо

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n)), \quad n \geqslant 1.$$

Довести, що послідовність $x_n \to z \in [a, b]$, $n \to \infty$ і *що* $f(z) = z$.

Вказівка. Показати, що для $z = f(z)$ правильні твердження: 1) $|x_{n+1} - z| \leqslant |x_n - z|$, $n \geqslant 1$; 2) $x_n < z \Rightarrow x_{n+1} < z$, $n \geqslant 1$. Звернути увагу на те, що множина $\{z \mid f(z) = z\}$ є відрізок, або точка.

52*. Функція $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ має похідну в точках (a, b) і

$$f(x) \to -\infty, x \to a+; \; f(x) \to +\infty, \; x \to b-;$$

$$\forall x \in (a, b): f'(x) - f^2(x) \leqslant 1.$$

Довести, що $b - a \geqslant \pi$.

53*. Функція $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ така, що

$$\forall x \in [a, b] \; \exists \delta > 0 \quad \exists L \in \mathbf{R}$$

$$\forall \{x', x''\} \subset [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta): |f(x') - f(x'')| \leqslant L|x' - x''|.$$

Довести, що f задовольняє умову Ліпшица на $[a, b]$.

54*. Функція $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ має f'' на $\mathbf{R}$ і обмежена на $\mathbf{R}$. Довести, що $\exists \theta \in \mathbf{R}: f''(\theta) = 0$.

55. Функція $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ опукла вниз на $\mathbf{R}$, диференційовна в точці x_* і $f'(x_*) = 0$. Довести, що x_* — точка, в якій функція f приймає найменше на $\mathbf{R}$ значення.

Глава 5 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§ 1. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

1.1. ПРИМІТИВНА

Якщо функція $f: A \to \mathbf{R}$ диференційовна для кожного $x \in A$, то операція диференціювання ставить у відповідність функції $f: A \to \mathbf{R}$ нову функцію $f': A \to \mathbf{R}$ — похідну функції f. Одне з можливих фізичних тлумачень цієї операції — визначення швидкості руху за функцією, яка задає пройдений шлях за час руху. З точки зору застосувань природною є обернена операція — визначення пройденого шляху за відомою швидкістю руху як функції часу. Більш формально, остання операція — це операція визначення функції за її похідною.

У цьому розділі літера J позначає одну з множин на $\mathbf{R}$:

$$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b), (-\infty, a],$$

$$(-\infty, a), [b, +\infty), (b, +\infty), (-\infty, +\infty),$$

де $a < b$. Крім того, для функції $\varphi: [a, b] \to \mathbf{R}$ покладемо

$$\varphi'(a) := \varphi'_{+} + (a), \quad \varphi'(b) := \varphi'_{-}(b).$$

Означення 1. Нехай $f: J \to \mathbf{R}$. Функція $F: J \to \mathbf{R}$ називається ***примітивною (первісною) функції*** f ***на*** J, якщо

$$\forall x \in J \text{ існує } F'(x) \text{ і } F'(x) = f(x).$$

Зауваження **1.** Із означення 1 випливає, що примітивна функції на J неперервна на J.

Приклади. 1. Для функції $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$ примітивною на $\mathbf{R}$ є функція $F(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

2. Для функції $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$ примітивною на $\mathbf{R}$ є функція $F(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

3. Для функції $f(x) = 0$ для $x < 0$ і $f(x) = x$ для $x \geqslant 0$ примітивною на $\mathbf{R}$ є функція $F(x) = 0$ для $x < 0$ і $F(x) = \frac{x^2}{2}$ для $x \geqslant 0$.

Чи будь-яка функція має примітивну? Наступний приклад показує, що відповідь на це питання негативна.

Приклад 4. Нехай $J = (-1, 1)$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Функція f не має примітивної на J.

⌈Припустимо, що це твердження не має місця. Нехай F така, що $\forall x \in J$: $F'(x) = f(x)$. До відрізка $[0, x]$, $0 < x < 1$ і функції F застосуємо теорему Лагранжа. Тоді

$$\exists \theta \in (0, x): F(x) - F(0) = F'(\theta)\, x = f(\theta)\, x = x.$$

Звідси $F'_+(0) = 1$. Але $F'_+(0) = F'(0) = 0$[1]. ⌋

Цей приклад показує, що прості функції можуть не мати примітивної. Тому потрібна теорема, яка б гарантувала існування примітивної. Така теорема буде доведена в наступному розділі. Для того щоб розглядати і такі функції, як у прикладі 4, інколи використовують означення, більш загальне, ніж означення 1.

Означення 2. Нехай f: $J \to \mathbf{R}$. Функція F: $J \to \mathbf{R}$ називається ***примітивною*** функції f на J, якщо:

1) $F \in \mathbf{C}(J)$;
2) $\forall x \in J \setminus A$ існує $F'(x)$ і $F'(x) = f(x)$;
3) A не більш як зліченна, причому $\forall n \in \mathbf{N}$, множина $A \cap [-n, n]$ скінченна.

Далі, якщо спеціально не обмовлено, то використовуємо означення 1.

Якщо примітивна для функції f існує, то вона визначається не єдиним способом. Дійсно, якщо F — примітивна функції f на J, то для будь-якого числа $C \in \mathbf{R}$ функція $F + C$ є також примітивна функції f на J:

$$\forall x \in J: \quad (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Крім того, якщо F і G — примітивні функції f на J, то

$$\forall x \in J: \quad (F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Отже,

$$\exists C \in \mathbf{R}\ \forall x \in J:$$
$$F(x) - G(x) = C \Leftrightarrow F(x) = G(x) + C.$$

---

[1] Має місце більш загальне твердження — теорема Дарбу: нехай $\forall x \in [a, b]$ існує $f'(x)$, тоді функція f' приймає як значення кожне проміжне число між $f'(a)$ і $f'(b)$.

Таким чином, для функції, яка має примітивну, множину всіх можливих примітивних отримуємо із будь-якої однієї примітивної в результаті всіляких її зсувів вздовж осі ординат. Одну примітивну можна виділити, якщо задати її значення $F(x_0)$ у деякій точці $x_0 \in J$.

Означення 3. Невизначеним інтегралом від функції f ***на*** J називається вираз

$$F(x) + C, \quad x \in J,$$

де F — примітивна функція f на J, а C — символ, який позначає довільну сталу. Невизначений інтеграл від функції f на J позначається символом

$$\int f(x)\,dx, \quad x \in J.$$

Таким чином, невизначений інтеграл від f на J являє собою загальний вигляд функції з похідною f на J. Процедура визначення примітивної, або невизначеного інтеграла для функції f, називається ***інтегруванням*** f.

Вправи

1. Знайти примітивні на R для функцій:

а) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$; б) $f(x) = \max(1, x^2)$, $x \in \mathbf{R}$; в) $f(x) = |\cos x|$, $x \in \mathbf{R}$; г) $f(x) = \sin x + |\sin x|$, $x \in \mathbf{R}$.

2. Функція f має примітивну F на R. Яку властивість має функція F, якщо:

а) f — парна на R; б) f — непарна на R; в) f — періодична на R?

3*. Функція f: $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$ має примітивну на $(0, +\infty)$. Визначити f, якщо

$$2xF(x) = f(x), \quad x > 0,$$

де F — примітивна функції f на $(0, +\infty)$.

1.2 ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Наступні властивості невизначеного інтеграла випливають з його означення при умові існування примітивних:

1. $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x), \quad x \in J;$

2. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C, \quad x \in J;$

3. $\forall a \in \mathbf{R},\ a \neq 0$:

$$\int (af(x))\,dx = a\int f(x)\,dx, \quad x \in J;$$

4. $\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx, \quad x \in J;$

5. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad x \in J,$ і $\{a, b\} \subset \mathbf{R},\ a \neq 0,$ то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \quad x \in J_1,$$

де $J_1 = \{x \mid ax + b \in J\}$.

На перший погляд з фактичним обчисленням інтеграла справа виглядає простою. А саме, згідно з означеннями 1 і 3 п. 1.1 маємо

$$F'(x) = f(x), \quad x \in J \Leftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + G, \quad x \in J. \qquad (1)$$

Використовуючи це співвідношення і таблицю основних похідних, отримуємо такі важливі формули:

1. Для $\alpha \neq -1$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x > 0.$$

Для n цілого, $n \geqslant 0$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Для $n \in \mathbf{Z},\ n \neq -1$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

на кожному із інтервалів $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

на кожному із інтервалів $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

3. $a > 0, \quad a \neq 1.$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad x \in \mathbf{R},$$

і при $a = e$

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad x \in \mathbf{R}.$$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbf{R}.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad x \in \mathbf{R}.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

на кожному із інтервалів $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

на кожному із інтервалів $(n\pi, n\pi + \pi)$, $n \in \mathbf{Z}$.

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C, \quad x \in \mathbf{R}$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, x \in (-1, 1)$.

Співвідношення (1) дозволяє продовжувати наведену таблицю необмежено. Положення, проте, суттєво змінюється, якщо для заданої функції f на J потрібно знайти примітивну. Можна обчислити похідну багатьох функцій і не знайти функції F, для якої $F' = f$. Подібний пошук може бути і марним. Зауважимо (без доведення) такий відомий факт: примітивні елементарних [1] функцій, взагалі кажучи, елементарними функціями можуть і не бути. Наприклад, не будуть елементарними функціями примітивні таких простих функцій:

$$f(x) = \cos x^2, f(x) = \sin x^2, f(x) = e^{x^2}, x \in \mathbf{R}; \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}, x > 0,$$

хоча, як буде далі доведено, їх примітивні існують. Нижче розглянемо деякі найважливіші спеціальні прийоми, які дозволяють знаходити ефективно і у явному вигляді примітивні для функцій з деяких класів елементарних функцій.

Вправи

4. Знайти помилку у такому міркуванні:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C = \ln|1-x| + C = \int \frac{dx}{1-x} = -\int \frac{dx}{x-1},$$

отже, $\int \frac{dx}{x-1} = 0$.

5. Нехай для $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

$$(x)_+^n := \begin{cases} x^n, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Довести, що

$$\int (ax+b)_+^n dx = \frac{(ax+b)_+^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad x \in \mathbf{R},$$

де $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$.

---

[1] **Елементарними функціями** є: многочлени, раціональні функції, степенева, показникова й логарифмічна функції, тригонометричні та обернені тригонометричні функції, їх суми, добутки й частки, а також всілякі суперпозиції у скінченному числі цих функцій. Похідні елементарних функцій є елементарними функціями.

5.1. Для функції $f: J \to (0, +\infty)$, для якої існує f' на J, знайти

$$\int \frac{f(x) - f'(x)}{f(x)}\, dx, \quad x \in J.$$

1.3. ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПІДСТАНОВКИ ТА ЧАСТИНАМИ

ТЕОРЕМА 1. Нехай F — примітивна функції f на J, тобто

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, x \in J,$$

а функція $\varphi: \tilde{J} \to J$ така, що $\forall u \in \tilde{J}$ існує $\varphi'(u)$. Тоді

$$\int f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, du = F(\varphi(u)) + C, \quad u \in \tilde{J}.$$

$\vdash$ Дійсно, згідно з правилом диференціювання складної функції

$$(F(\varphi(u)))' = F'(\varphi(u))\, \varphi'(u) = f(\varphi(u))\, \varphi'(u), u \in \tilde{J}. \quad \dashv$$

Вправи

4. Знайти помилку у такому міркуванні:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C = \ln|1-x| + C = \int \frac{dx}{1-x} =$$
$$= -\int \frac{dx}{x-1},$$

отже, $\int \frac{dx}{x-1} = 0.$

5. Нехай для $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

$$(x)_+^n := \begin{cases} x^n, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Довести, що

$$\int (ax+b)_+^n dx = \frac{(ax+b)_+^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad x \in \mathbf{R},$$

де $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$.

5.1. Для функції $f: J \to (0, +\infty)$, для якої існує f' на J, знайти

$$\int \frac{f(x) - f'(x)}{f(x)}\, dx, \quad x \in J.$$

Зауваження. Теорема 1 застосовується, як правило, одним із двох способів:

1. Інтеграл $\int \Phi(x)\, dx$ від функції Φ зображується у вигляді

$$\int \Phi(u)\, du = \int f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, du,$$

у якому для функції f відома примітивна F. Тоді за теоремою

$$\int \Phi(u)\, du = F(\varphi(u)) + C.$$

При цьому може бути зручним формалізований запис

$$\int \Phi(u)\,du \int f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du = \left| \begin{array}{l} \varphi(u) = x \\ \varphi'(u)\,du = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int f(x)\,dx = F(x) + C = F(\varphi(u)) + C.$$

2. Інтеграл $\int \Phi(x)\,dx$ від функції Φ зображується у вигляді

$$\int \Phi(x)\,dx = \int \Phi(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du,$$

де функція $x = \varphi(u)$ має обернену функцію φ^{-1} і для функції $\Phi(\varphi)\,\varphi'$ відома примітивна G. Тоді

$$\int \Phi(x)\,dx = G(u) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Приклади. 1. Обчислити інтеграл $\int u \cos u^2 du$, $u \in \mathbf{R}$.

$\vdash$ За теоремою 1

$$\int u \cos u^2 du = \left| \begin{array}{l} u^2 = x \\ 2u\,du = dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \cos x\,dx = \frac{1}{2} \sin x +$$

$$+ C = \frac{1}{2} \sin u^2 + C. \qquad \dashv$$

2. Обчислити інтеграл $\int \sqrt{1 - x^2}\,dx$, $x \in [-1, 1]$.

$\vdash$ Маємо

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin x \\ dx = \cos u\,du \end{array} \right| = \int \cos^2 u\,du = \int \frac{1 + \cos 2u}{2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sin 2u + C = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C. \qquad \dashv$$

ТЕОРЕМА 2. Нехай функції $u\colon J \to \mathbf{R}$; $v\colon J \to \mathbf{R}$ такі, що $\forall x \in J$ існують $u'(x)$ та $v'(x)$. Крім того, функція $u \cdot v'$ має примітивну на J.

Тоді функція $u'v$ також має примітивну на J і має місце рівність

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx, \quad x \in J.$$

$\vdash$ Функція uv є примітивною функції $u'v + uv'$ на J, тому

$$\int (u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x))\,dx = u(x)\,v(x) + C, \quad x \in J.$$

Звідси, враховуючи припущення про існування примітивної та властивості 3 і 4 п. 1.2, одержимо потрібну рівність. $\dashv$

Вправа

6. Знайти помилку в міркуванні: на підставі теореми 2

$$\int \frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{ll} du = dx, & v = \dfrac{1}{x} \\ u = x, & dv = -\dfrac{1}{x^2}\,dx \end{array} \right| = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$= 1 + \int \frac{dx}{x};$$

отже, $0 = 1$.

§ 2. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ІЗ ДЕЯКИХ КЛАСІВ

2.1. РАЦІОНАЛЬНІ ФУНКЦІЇ. ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Раціональною функцією називається відношення двох многочленів. Ця функція визначена на всій прямій за винятком нулів знаменника. Раціональну функцію $\frac{P}{Q}$, де P і Q — многочлени, завжди можна зобразити у вигляді $\frac{P}{Q} = S + \frac{\tilde{P}}{Q}$, де S і $\tilde{P}$ — многочлени, причому степінь многочлена $\tilde{P}$ менша за степінь многочлена Q. Далі припускатимемо, що розглядається раціональна функція $\frac{P}{Q}$ — відношення многочленів, в якому степінь чисельника менша за степінь знаменника (такий ***дріб*** називається ***правильним***).

Безпосереднім наслідком основної теореми алгебри є наступна лема.

ЛЕМА 1. Нехай

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad x \in \mathbf{R}$$

многочлен з дійсними коефіцієнтами $a_0, a_1, \ldots, a_n$, причому $a_0 \neq 0$. Існує єдиний з точністю до переставлення набір комплексних чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ такий, що

$$\forall x \in \mathbf{R}: \; Q(x) = a_0(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n). \qquad (1)$$

Перетворимо зображення (1), враховуючи кратність дійсних коренів, і те, що комплексний корінь $z = \alpha + i\beta$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$, $\beta \neq 0$, входить в (1) разом із спряженим коренем $z = \alpha - i\beta$. Двійка комплексно спряжених коренів приводить до множника

$$(x - z)(x - \bar{z}) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 + px + q,$$

де $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$, причому $p \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{R}$ і $p^2 - 4q = -4\beta^2 < 0$. Тому із зображення (1) отримаємо

$$\forall x \in \mathbf{R}: \; Q(x) = a_0 \prod_{\nu=1}^{r} (x - x_\nu)^{u_\nu} \prod_{\mu=1}^{s} (x^2 + p_\mu x + q_\mu)^{v_\mu}, \qquad (2)$$

де $\{a_0; x_1, \ldots, x_r; p_1, q_1, \ldots, p_s, q_s\} \subset \mathbf{R}$, причому $p_\mu^2 - 4q_\mu < 0$, $1 \leqslant \mu \leqslant s$; $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ — натуральні числа. Якщо $r = 0$ ($s = 0$), то в (2) відсутній другий (третій) множник. За-

значимо, що в зображенні (2) всі числа дійсні. В наступних двох лемах P і Q є многочлени з дійсними коефіцієнтами.

ЛЕМА 2. Нехай степінь многочлена P менша за степінь многочлена Q, який має вигляд

$$Q(x) = (x-a)^m Q_1(x),\ x \in \mathbf{R};\ a \in \mathbf{R},\ m \in \mathbf{N},$$

причому Q_1 — многочлен і $Q_1(a) \neq 0$. Тоді раціональний дріб $\frac{P}{Q}$ зображується єдиним чином у вигляді

$$\frac{p(x)}{(x-a)^m Q_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1} Q_1(x)},$$

$$x \in \{y \mid Q(y) \neq 0\},$$

де $A \in \mathbf{R}$, P_1 — многочлен з дійсними коефіцієнтами, такий, що другий дріб у правій частині рівності — правильний.

|— Розглянемо для довільного $A \in \mathbf{R}$ різницю

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^m} = \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^m Q_1(x)}. \tag{3}$$

Виберемо число A так, щоб чисельник правої частини рівності (3) ділився на $x - a$, тобто щоб виконувалась рівність

$$P(a) - AQ_1(a) = 0$$

або

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

Покладемо

$$P_1(x) = \frac{P(x) - AQ_1(x)}{x-a}. \qquad \text{—|}$$

ЛЕМА 3. Нехай степінь многочлена P менше степені многочлена Q, який має вигляд

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x),\ x \in \mathbf{R};\ \{p, q\} \subset \mathbf{R},\ m \in \mathbf{N},$$

причому $p^2 - 4q < 0$ і многочлен Q_1 не ділиться на тричлен $x^2 + px + q$. Тоді раціональний дріб P/Q зображується єдиним чином у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax - B}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)},$$

$$x \in \{y \mid Q(y) \neq 0\},$$

де $\{A, B\} \subset \mathbf{R}$; P_1 — такий многочлен з дійсними коефіцієнтами, що другий дріб у правій частині рівності — правильний.

Розглянемо різницю

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m} = \frac{P(x)-(Ax+B)Q_1(x)}{Q(x)}. \qquad (4)$$

Підберемо зараз A і B таким чином, щоб чисельник правої частини рівності (4) ділився на $x^2+px+q=(x-z)(x-\bar{z})$, де $z=\alpha+i\beta$ ($p=-2\alpha$, $q=\alpha^2+\beta^2$), тобто щоб виконувалися рівності

$$\frac{P(z)}{Q_1(z)} = A\alpha + B + i\beta A;$$

$$\frac{P(\bar{z})}{Q_1(\bar{z})} = A\alpha + B - i\beta A.$$

Звідси

$$A = \frac{1}{\beta}\operatorname{Im}\frac{P(z)}{Q_1(z)}, \quad B = \operatorname{Re}\frac{P(z)}{Q_1(z)} - \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{Im}\frac{P(z)}{Q_1(z)};$$

P_1 — частка від ділення

$$P(x)-(Ax+B)Q_1(x) \text{ на } x^2+px+q.$$

2.2. РОЗКЛАД НА ЕЛЕМЕНТАРНІ ДРОБИ. МЕТОД НЕВИЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Леми 2 і 3 дозволяють твердити, що будь-який правильний раціональний дріб припускає єдине розкладання на суму доданків, які мають вигляд

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad a\in\mathbf{R},\ A\in\mathbf{R},\ m\in\mathbf{N}; \qquad (5)$$

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}, \quad \{A,B,p,q\}\subset\mathbf{R},\ m\in\mathbf{N}, \qquad (6)$$

причому $p^2-4q<0$.

Дроби виду (5) та (6) називаються ***елементарними***. Для фактичного розкладання правильного раціонального дробу $\frac{P}{Q}$ використовують так званий ***метод невизначених коефіцієнтів***.

Спочатку записують знаменник Q у вигляді (2), потім записують розклад $\frac{P}{Q}$ як суму дробів (5) та (6) з невідомими коефіцієнтами (A — в (5) та A, B — в (6)). Після зведення отриманої рівності до спільного знаменника і його відкидання одержимо рівність двох многочленів. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, прийдемо до системи лінійних рівнянь для невідомих коефіцієнтів.

Таким чином, враховуючи властивість 4 п. 1.2, можна твердити, що інтегрування будь-якої раціональної функції зводиться до інтегрування многочлена і дробів виду (5) та (6).

Вправа

1. Зобразити у вигляді суми елементарних дробів функції:

а) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^4-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{(x-1)^3(x^2+1)^2}$, $x \neq -1$.

2.3. ІНТЕГРУВАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДРОБІВ

Елементарні дроби виду (5) легко інтегруються. При $m = 1$

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$$

на кожному з інтервалів $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$. Якщо $m \in \mathbf{N}$ і $m > 1$, то

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}\,dx = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C$$

на кожному із інтервалів $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$.

Розглянемо інтегрування дробів виду (6). Зауважимо, що

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^m} + \left(B - \frac{p}{2}A\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}, \qquad (1)$$

де $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4} > 0$.

Для першого інтеграла правої частини маємо

$$\int \frac{2t\,dt}{t^2+a^2} = \ln(t^2+a^2) + C$$

при $m = 1$ і

$$\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^m} = -\frac{1}{(m-1)(t^2+a^2)^{m-1}} + C$$

при $m > 1$.

Залишилося обчислити інтеграл

$$K_m := \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}; \quad m \geqslant 1.$$

Використовуємо формулу інтегрування за частинами:

$$K_m = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = \left| \begin{matrix} du = dt \\ v = (t^2+a^2)^{-m} \end{matrix} \right| = \frac{1}{(t^2+a^2)^m} +$$

$$+ 2m \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^{m+1}} = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2mK_m - 2ma^2 K_{m+1}.$$

Звідси

$$K_{m+1} = \frac{t}{2ma^2(t^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma^2} K_m, \quad m \geqslant 1. \qquad (2)$$

Беручи до уваги, що $K_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{a} + C$, можна, використовуючи формулу (2), визначити K_m для будь-якого $m \in \mathbf{N}$.

Таким чином, інтеграл від раціональної функції обчислюється ефективно і результатом інтегрування є сума, яка, можливо, містить раціональну, логарифмічну функцію і арктангенс.

Зауваження. Зазначимо, що процедура інтегрування раціональних функцій була відома вже Ж. Ліувіллю та Ш. Ерміту.

Вправа

2. Вказати метод обчислення інтеграла $\int R(e^x)\,dx$, де R — раціональна функція.

2.4. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ ВІД sin і cos

Означення. Многочленом від двох змінних називається функція $P : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ вигляду

$$P(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots$$

$$\ldots + a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + a_{0n}y^n, (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

де $\{a_{00}, a_{10}, \ldots, a_{0n}\} \subset \mathbf{R}$. ***Раціональною функцією від двох змінних*** називається відношення двох многочленів від двох змінних.

Зауваження. Нехай R — раціональна функція від двох змінних, а R_1, R_2 — раціональні функції від однієї змінної. Тоді

$$R(R_1, R_2) : x \mapsto (R_1(x), R_2(x)) \text{ —}$$

раціональна функція від x.

Нехай R — раціональна функція від двох змінних. Інтеграл

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції таким чином:

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad x = 2\operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Вправи

2. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 1}$.

3. Обчислити інтеграл $\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx$.

4. Вказати метод обчислення інтеграла $\mathbf{R}(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\,dx$, де $\mathbf{R}$ — раціональна функція від двох змінних.

2.5. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ З ІРРАЦІОНАЛЬНОСТЯМИ

Нехай R — раціональна функція від двох змінних.

1°. Нехай $\{a, b, c, d\} \subset \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Інтеграл

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

вводиться до інтеграла від раціональної функції таким чином:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t, \quad x = \frac{b-t^n d}{ct^n - a} \\ dx = \left(\frac{b-t^n d}{ct^n - a}\right)' dt \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{b-t^n d}{ct^n - a}, t\right)\left(\frac{b-t^n d}{ct^n - a}\right)' dt.$$

2°. Нехай $\{a, b, c, d\} \subset \mathbf{R}$, $a \neq 0$. За допомогою заміни $x + \frac{b}{2a} = zd$ інтеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$ зводиться до одного з інтегралів

$$\int \tilde{R}(z, \sqrt{z^2 - 1})\, dz;$$

$$\int \tilde{R}(z, \sqrt{1 + z^2})\, dz, \quad \int \tilde{R}(z, \sqrt{1 - z^2})\, dz \tag{1}$$

з раціональною функцією від двох змінних $\tilde{R}$. Перший та третій інтеграли в (1) можна звести до інтеграла від раціональної функції, так само, як і у випадку 1°. Для обчислення другого інтеграла в (1) можна використати заміну $\operatorname{sh} z = u$.

Зауваження. Потрібно мати на увазі, що розглянуті підстановки при фактичному обчисленні приводять до складних перетворень, і що структура функції R часто дозволяє обходитись без цих загальних підстановок.

Глава 6 ІНТЕГРАЛ РІМАНА

§ 1. ОЗНАЧЕННЯ ІНТЕГРАЛА РІМАНА[1]

1.1. ДОПОМІЖНІ ОЗНАЧЕННЯ

Означення 1. Нехай $[a, b]$ — відрізок. Набір точок x_0, $x_1, \ldots, x_n$ таких, що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

називається ***розбиттям відрізка*** $[a, b]$ і позначається одним із символів $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\lambda([a, b])$, λ.

Діаметром (***дрібністю*** або ***розміром***) розбиття λ називається число

$$|\lambda| := \max\{\Delta x_k \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\},$$

де $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Зауважимо, що $\Delta x_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a$.

Нехай $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ — обмежена на $[a, b]$ функція. Тоді

$$\exists m \in \mathbf{R} \quad \exists M \in \mathbf{R} \quad \forall x \in [a, b]: m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Нехай $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — деяке розбиття відрізка $[a, b]$. Для кожного $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ визначимо числа

$$m_k = m_k(f) := \inf\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f,$$

$$M_k = M_k(f) := \sup\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f.$$

При цьому для будь-якого $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$$\inf_{[a,b]} f \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant \sup_{[a,b]} f. \tag{1}$$

---

[1] *Ріман Георг Фрідріх Бернхард* (1826—1866) — видатний німецький математик.

Означення 2. Нижньою сумою Дарбу[1] для обмеженої на $[a, b]$ функції f і розбиття $\lambda = \lambda([a, b])$ називається число

$$L(f; \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k.$$

Верхньою сумою Дарбу для обмеженої на $[a, b]$ функції f і розбиття $\lambda = \lambda([a, b])$ називається число

$$U(f; \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Для кожного $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ фіксуємо довільну точку ξ_k, тобто вибираємо $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Набір точок $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ називається ***набором, що є відповідним до розбиття*** λ, і позначається символом $\{\xi_i \mid \lambda\} = \{\xi_i\}$.

Означення 3. Інтегральною сумою для функції $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, розбиття λ відрізка $[a, b]$ і відповідного до λ набору точок $\{\xi_i/\lambda\}$ називається число

$$S(f; \lambda, \{\xi_i \mid \lambda\}) = S(f; \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\, \Delta x_k.$$

Вправа

1. Нехай $a = -1$, $b = 1$; $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$;

$$\lambda = \left\{-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\};$$

$$\xi_i = x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, 8.$$

Визначити $L(f; \lambda)$, $U(f; \lambda)$, $S(f; \lambda, \{\xi_i \mid \lambda\})$ і дати геометричну інтерпретацію.

Враховуючи вибір точок $\{\xi_i\}$ і нерівності (1), маємо

$$\inf_{[a,b]} f \leqslant m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k \leqslant \sup_{[a,b]} f, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{2}$$

Помноживши k-ту нерівність (2) на додатне число Δx_k і склавши отримані добутки, знайдемо

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leqslant L(f; \lambda) \leqslant S(f; \lambda, \{\xi_i\}) \leqslant U(f; \lambda) \leqslant \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a). \tag{3}$$

---

[1] *Дарбу Жан Гастон* (1842—1917) — французький математик.

Вправи

2. Дати геометричну інтерпретацію нерівностей (3).

3. Нехай $a = 0$, $b = 1$; $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Для довільного розбиття λ записати $L(f; \lambda)$, $U(f; \lambda)$, а також $S(f; \lambda, \{\xi_i\})$ для набору

$$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{3}} (x_{k+1}^2 + x_{k+1}x_k + x_k^2)^{\frac{1}{2}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

1.2. ОЗНАЧЕННЯ ІНТЕГРАЛА ТА ІНТЕГРОВНОЇ ФУНКЦІЇ

Розглянемо функції $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, обмежені на $[a, b]$. Для обмеженої на $[a, b]$ функції f, будь-якого розбиття λ і будь-якого набору $\{\varepsilon_i \mid \lambda\}$ виконуються нерівності (3), з яких випливає, що множини дійсних чисел

$$\{L(f; \lambda) \mid \lambda\}, \quad \{U(f; \lambda) \mid \lambda\},$$

тобто множини верхніх і нижніх сум Дарбу, відповідних усім можливим розбиттям λ відрізка $[a, b]$, обмежені.

Означення 1. Нижнім інтегралом від функції f по відрізку $[a, b]$ називається число

$$\underline{\int} f(x)\,dx := \sup_{\lambda} L(f; \lambda).$$

Верхнім інтегралом від функції f по відрізку $[a, b]$ називається число

$$\overline{\int} f(x)\,dx := \inf_{\lambda} U(f; \lambda).$$

Точні верхня й нижні межі беруться відповідно по усім можливим розбиттям λ відрізка $[a, b]$.

Вправи

4. Знайти нижній і верхній інтеграли для функції, постійної на $[a, b]$.

5. Знайти нижній і верхній інтеграли для функції Діріхле[1] на $[a, b]$, тобто функції, яка набуває значення 1 у раціональних точках і 0 в ірраціональних.

6. Обчислити нижній інтеграл від функції $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$.

Вказівка. Використати нерівність $x_k < \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$.

Означення 2. Функція f називається ***інтегровною за Ріманом*** по відрізку $[a, b]$, якщо

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx.$$

---

[1]. *Діріхле Петер Густав Лежен* (1805—1859) — німецький математик.

При цьому спільне значення верхнього й нижнього інтегралів називається ***інтегралом Рімана*** від функції f по відрізку $[a, b]$ і позначається символом

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Зауваження. Згідно з означенням 2 інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, є число, яке визначається функцією f і відрізком $[a, b]$, зокрема, це число не залежить від x. Тому можна писати

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$$

і т. д. Більш логічним є позначення $\int_a^b f$, але загальноприйняте позначення пов'язане з логікою перетворень інтеграла і тому корисне.

Зауважимо також, що числа a та b у позначенні інтеграла називаються ***нижньою*** і ***верхньою границями інтеграла*** відповідно.

Приклади. 1. Якщо для деякого $C \in \mathbf{R}$ $f(x) = C$, $x \in [a, b]$, то для будь-якого λ

$$L(f;\lambda) = U(f;\lambda) = C(b-a).$$

Отже, f інтегровна за Ріманом і

$$\int_a^b C dx = C(b-a).$$

2. Для функції Діріхле f на $[0, 1]$ при будь-якому розбитті λ

$$L(f;\lambda) = 0, \quad U(f;\lambda) = 1.$$

Отже,

$$\underline{\int} f(x)\,dx = 0 \neq 1 = \overline{\int} f(x)\,dx.$$

Таким чином, функція Діріхле не інтегровна за Ріманом.

Вправа

7. Нехай $f \in C([0, 1])$

$$\exists C \in \mathbf{R}\ \forall \lambda = \lambda([0, 1]):\ L(f;\lambda) = C.$$

Довести, що $f(x) = C$, $x \in [0, 1]$.

Позначення:

$f \in \mathbf{R}([a, b]) \langle\Rightarrow\rangle f$ інтегровна за Ріманом по відрізку $[a, b]$.

1.3. ВЛАСТИВОСТІ СУМ ДАРБУ

Зауважимо, що з нерівностей (3) п. 1.2 випливає твердження:

1°. Для довільного розбиття λ відрізка $[a, b]$

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leqslant L(f; \lambda) \leqslant U(f; \lambda) \leqslant \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a).$$

Означення 1. Нехай λ і λ' — розбиття відрізка $[a, b]$. Розбиття λ' називається ***підрозбиттям*** розбиття λ, якщо $\lambda \subset \lambda'$, тобто якщо λ' можна одержати із λ додаванням нових точок.

2°. Для будь-якого λ і будь-якого його підрозбиття λ' виконуються нерівності

$$L(f; \lambda) \leqslant L(f; \lambda'), \quad U(f; \lambda) \geqslant U(f, \lambda').$$

⌈ Достатньо розглянути випадок, коли розбиття λ' відрізняється від розбиття $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ додаванням однієї точки x'. Нехай x' належить відрізку $[x_k, x_{k+1}]$, тобто $x_k < x' < x_{k+1}$. Тоді

$$L(f; \lambda) = m_0 \Delta x_0 + \ldots + m_k \Delta x_k + \ldots + m_{n-1} \Delta x_{n-1};$$

$$L(f, \lambda') = m_0 \Delta x_0 + \ldots + (m'_k (x' - x_k) +$$

$$+ m''_k (x_{k+1} - x')) + \ldots + m_{n-1} \Delta x_{n-1},$$

$$\text{де } m'_k := \inf_{[x_k, x']} f \geqslant m_k, \; m''_k := \inf_{[x', x_{k+1}]} f \geqslant m_k.$$

Звідси

$$L(f; \lambda') - L(f; \lambda) = m'_k (x' - x_k) + m''_k (x_{k+1} - x') -$$

$$- m_k \Delta x_k \geqslant m_k (x' - x_k) + m_k (x_{k+1} - x') - m_k x_k = 0.$$

Для верхньої суми Дарбу міркування такі самі. ⌋

3°. Нехай λ_1 і λ_2 — довільні розбиття відрізка $[a, b]$ Тоді

$$L(f; \lambda_1) \leqslant U(f; \lambda_2).$$

⌈Припустимо, що $\lambda' = \lambda_1 \cup \lambda_2$. Тоді λ' є підрозбиттям кожного із розбиттів λ_1 і λ_2. На основі властивостей 1° і 2° маємо

$$L(f; \lambda_1) \leqslant L(f, \lambda') \leqslant U(f; \lambda') \leqslant U(f, \lambda_2). \quad ⌋$$

Наслідок. Для будь-якої обмеженої на $[a, b]$ функції f

$$\underline{\int} f(x)\, dx \leqslant \overline{\int} f(x)\, dx.$$

⌈ Випливає з властивості 3° і означення точних меж. ⌋

Вправи

8. Нехай $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$. Довести, що

$$L(\alpha f + \beta;\ \lambda) = \alpha L(f;\ \lambda) + \beta(b - a),$$

$$U(\alpha f + \beta;\ \lambda) = \alpha U(f;\ \lambda) + \beta(b - a)$$

для будь-якого розбиття λ.

9. Нехай $\forall x \in [a, b]$: $f(x) \leqslant g(x)$.
Довести, що $\forall \lambda$: $L(f; \lambda) \leqslant L(g, \lambda)$; $U(f, \lambda) \leqslant U(g, \lambda)$.

10. Довести, що $\forall \lambda$:

$$L(f + g;\ \lambda) \geqslant L(f;\ \lambda) + L(g;\ \lambda),$$

$$U(f + g;\ \lambda) \leqslant U(f;\ \lambda) + U(g;\ \lambda).$$

11. Нехай $f \in \mathbf{C}([a, b])$. Довести, що для будь-якого розбиття нижня й верхня суми Дарбу функції f є інтегральними сумами.

11.1. Для функції $f \in \mathbf{C}([a, b])$ покладемо

$$F(x) := \int_{-a}^{x} f(u)\,du, \quad G(x) := \int_{a}^{-x} f(u)\,du, \quad x \in (a, b]$$

і $F(a) := 0$, $G(a) := 0$. Довести, що існують F' і G' на $[a, b]$ і

$$F'(x) = G'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Розглядаючи функцію $G - F$, довести, що $f \in \mathbf{R}([a, b])$.

Вказівка. За властивістю 2° маємо

$$F(x + \Delta x) \leqslant F(x) + \max_{[x, x+\Delta x]} f(u)\,\Delta x;$$

$$F(x + \Delta x) \geqslant F(x) + \min_{[x, x+\Delta x]} f(u)\,\Delta x, \quad \Delta x > 0,$$

Аналогічні нерівності справедливі й для функції G.

Зауваження. Аналогічну властивість мають суми Дарбу монотонної на відрізку функції.

1.4. КРИТЕРІЙ ІНТЕГРОВНОСТІ

ТЕОРЕМА 1. $f \in \mathbf{R}([a, b]) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \lambda = \lambda[a, b]:\ U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \varepsilon.$$

⌈ Необхідність. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$, тобто

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Припустимо, що $\varepsilon > 0$ задане. Згідно з означенням $\underline{\int} f(x)\,dx$

$$\exists \lambda_1:\ \underline{\int} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(f; \lambda_1).$$

Аналогічно згідно з означенням $\overline{\int} f(x)\,dx$

$$\exists \lambda_2\colon\ U(f;\lambda_2) < \overline{\int} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$. Враховуючи властивості 1° і 2°, для розбиття λ одержимо

$$\underline{\int} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(f;\lambda_1) \leqslant L(f,\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant U(f;\lambda) \leqslant U(f,\lambda_2) < \overline{\int} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, $U(f;\lambda) - L(f,\lambda) < \varepsilon$.

Достатність. На основі наслідку п. 1.3 маємо, що для будь-якого розбиття λ

$$L(f;\lambda) \leqslant \underline{\int} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int} f(x)\,dx \leqslant U(f;\lambda),$$

звідки

$$0 \leqslant \overline{\int} f(x)\,dx - \underline{\int} f(x)\,dx \leqslant U(f;\lambda) - L(f,\lambda).$$

Враховуючи умову теореми 1,

$$\forall \varepsilon > 0\colon\ 0 \leqslant \overline{\int} f(x)\,dx - \underline{\int} f(x)\,dx < \varepsilon,$$

звідки

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx. \qquad \lrcorner$$

Означення. Коливанням функції f на відрізку $[\alpha, \beta]$ називається число

$$\omega(f,[\alpha,\beta]) := \sup_{[\alpha,\beta]} f - \inf_{[\alpha,\beta]} f.$$

Зауважимо, що $\omega(f,[\alpha,\beta]) \geqslant 0$.

Вправа

12. Довести, що

$$\omega(f,[\alpha,\beta]) = \sup_{\substack{x'\in[\alpha,\beta]\\ x''\in[\alpha,\beta]}} (f(x') - f(x'')).$$

Нехай $\omega_k(f) = \omega(f,[x_k, x_{k+1}])$ для відрізка $[x_k, x_{k+1}]$ розбиття $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Теорема 1 припускає таке просте й і корисне переформулювання.

ТЕОРЕМА 2.

$$f \in \mathbf{R}([a, b]) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \lambda = \lambda([a, b]): \sum_{k=0}^{k-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \varepsilon.$$

Вправи

13. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$. Довести, що
$|f| \in \mathbf{R}([a, b])$, $\sin f \in \mathbf{R}([a, b])$, $f^2 \in \mathbf{R}([a, b])$.

14*. Функція f така, що

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in \mathbf{R}([a, b]) \ \forall x \in [a, b]: \ |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Довести, що $f \in \mathbf{R}([a, b])$.

15*. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$; φ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$.
Довести, що $\varphi(f) \in \mathbf{R}([a, b])$.

Вказівка. Використати результат попередньої задачі й теорему Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервної функції многочленами.

16.* Функція $f \in \mathbf{R}([a, b])$ і дорівнює 0 у всіх точках неперервності на відрізку $[a, b]$. Довести, що

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0.$$

1.5. КЛАСИ ІНТЕГРОВНИХ ФУНКЦІЙ

ТЕОРЕМА 1. Нехай f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ монотонна на відрізку $[a, b]$. Тоді $f \in \mathbf{R}([a, b])$.

⌈Припустимо, що f монотонно не спадає і нехай $f(a) < f(b)$. Використаємо критерій інтегровності. Для заданого $\varepsilon > 0$ розглянемо довільне розбиття λ відрізка $[a, b]$ з розміром

$$|\lambda| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Для такого розбиття одержимо

$$U(f; \lambda) - L(f; \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta x_k \leqslant |\lambda| \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) =$$

$$= |\lambda| (f(b) - f(a)) < \varepsilon. \qquad ⌋$$

ТЕОРЕМА 2. $\mathbf{C}([a, b]) \subset \mathbf{R}([a, b])$.

⌈Використаємо критерій інтегровності. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. За теоремою Кантора функція $f \in \mathbf{C}([a, b])$ рівномірно неперервна на $[a, b]$. Отже, для числа $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$

$$\exists \delta > 0 \ \forall \{x', x''\} \subset [a, b], \quad |x' - x''| < \delta:$$

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Для будь-якого розбиття $\lambda = \lambda([a, b])$ з розміром $|\lambda| < \delta$ одержимо

$$U(f; \lambda) - L(f, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon. \quad \lrcorner$$

ТЕОРЕМА 3. Нехай $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \subset [a, b]$, $f \in \mathbf{C}([a, b] \setminus \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_m\})$, f — обмежена на $[a, b]$. Тоді $f \in \mathbf{R}([a, b])$.

⌊ Оскільки функція f обмежена на $[a, b]$, то

$$\exists C \in \mathbf{R} \ \forall x \in [a, b]: \ |f(x)| \leqslant C.$$

Використовуємо критерій інтегровності. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Покладемо $\delta = \varepsilon (16mC)^{-1} > 0$, $C > 0$. Множина

$$[a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^{m} (z_k - \delta, z_k + \delta) \tag{1}$$

або порожня, або складається із скінченного числа замкнених відрізків. Далі розглядаємо другий випадок. За умовою функція f неперервна на множині (1). Тому за теоремою Кантора вона рівномірно неперервна на цій множині. Тоді існує $\gamma > 0$ таке, що для будь-яких x' і x'', які належать одному відрізку множини (1), і таких, що $|x' - x''| < \gamma$, виконується нерівність

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Нехай тепер λ — довільне розбиття відрізку $[a, b]$ з розміром $|\lambda| < \min(\delta, \gamma)$. Для такого розбиття одержимо, поклавши

$$G = \bigcup_{k=1}^{m} (z_k - \delta, z_k + \delta),$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = \sum_{k:[x_k, x_{k+1}] \cap G = \varnothing} \omega_k(f) \Delta x_k +$$

$$+ \sum_{k:[x_k, x_{k+1}] \cap G \neq \varnothing} \omega_k(f) \Delta x_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k:[x_k, x_{k+1}] \cap G = \varnothing} \Delta x_k +$$

$$+ 2C \sum_{k:[x_k, x_{k+1}] \cap G \neq \varnothing} \Delta x_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) + 2C 4\delta m = \varepsilon. \quad \lrcorner$$

Вправи

17. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}; & x \in (0, 1]; \\ 0; & x = 0. \end{cases}$$

Довести, що $f \in \mathbf{R}([0, 1])$.

18. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}\left(\sin \dfrac{1}{x}\right), & 0 < x \leqslant 1; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

де

$$\operatorname{sign} a = \begin{cases} 1, & a > 0; \\ 0, & a = 0; \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Довести, що $f \in \mathbf{R}([0, 1])$.

19. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$, а функція $\tilde{f}$ отримана із f довільного зміною значень f у довільному скінченному числі довільних точок на $[a, b]$. Довести, що $\tilde{f} \in \mathbf{R}([a, b])$.

20*. Нехай функція $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ обмежена на відрізку $[a, b]$ і виключаючи зліченний набір точок неперервна на $[a, b]$. Довести, що $f \in \mathbf{R}([a, b])$.

Вказівка. Використати вправу 14.1 до п. 2.1 глави 4.

§ 2. ІНТЕГРАЛ ЯК ГРАНИЦЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ СУМ

2.1. ГРАНИЦЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ СУМ

Інтегральна сума

$$S(f; \lambda, \{\xi_i \ \lambda\}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\, \Delta x_k$$

для функції f, розбиття λ та відповідного цьому розбиттю набору точок $\{\xi_i/\lambda\}$ була визначена у п. 1.1.

Означення. Число $J \in \mathbf{R}$ називається ***границею інтегральних сум*** $\{S(f; \lambda, \{\xi_i \mid \lambda\})\}$ при $|\lambda| \to 0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \lambda, |\lambda| < \delta \ \forall \{\xi_i \mid \lambda\}:$$

$$|S(f; \lambda, \{\xi_i \mid \lambda\}) - J| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\, \Delta x_k - J \right| < \varepsilon.$$

Позначення: $J = \lim\limits_{|\lambda| \to 0} S(f; \lambda)$.

Зауваження 1. Єдиність границі J можна отримати безпосередньо, як і у випадку границі послідовності. Вона випливає також і з теореми Дарбу, яка наведена нижче.

Вправи

1. Довести, що якщо існує $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda)$, то для будь-якого $C \in \mathbf{R}$ існує

$$\lim_{|\lambda|\to 0} S(Cf;\lambda) = C \lim_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda).$$

2. Довести, що якщо існують

$$\lim_{|\lambda|\to 0} S(f_1;\lambda), \quad \lim_{|\lambda|\to 0} S(f_2;\lambda),$$

то існує

$$\lim_{|\lambda|\to 0} S(f_1+f_2;\lambda) = \lim_{|\lambda|\to 0} S(f_1;\lambda) + \lim_{|\lambda|\to 0} S(f_2,\lambda).$$

3. Довести, що якщо існує $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda)$, то функція f обмежена на $[a, b]$.

Вказівка. $\exists\delta > 0\ \forall\lambda,\ |\lambda| < \delta\ \forall\{\xi_i \mid \lambda\}\ \forall\{\xi_i' \mid \lambda\}$:

$$|S(f;\lambda, \{\xi_i\}) - S(f;\lambda, \{\xi_i'\})| < 2.$$

Після цього для фіксованого k розглянути випадок, коли $\xi_i = \xi_i'$ для $i \neq k$, і отримати обмеженість функції на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$.

Зауваження 2. Якщо існує

$$\lim_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda) = J,$$

то значення J можна обчислити як границю послідовності таким чином. Для кожного $n \in \mathbf{N}$ розглянемо розбиття відрізка $[a, b]$

$$x^{(n)} = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_{m(n)}^{(n)}\};$$

ці розбиття можна вибирати довільно при одній умові

$$|\lambda^{(n)}| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Для кожного $n \in \mathbf{N}$ розглянемо довільний набір $\{\xi_i^{(n)} \mid \lambda^{(n)}\}$. Тоді числова послідовність

$$\left\{S(f;\lambda^{(n)}, \{\xi_i^{(n)} \mid \lambda^{(n)}\}) = \sum_{k=0}^{m(n)-1} f(\xi_k^{(n)})\,\Delta x_k^{(n)};\ n \geqslant 1\right\}$$

збігається до J.

2.2. ТЕОРЕМА ДАРБУ

ТЕОРЕМА. $f \in \mathbf{R}([a, b])$ тоді й тільки тоді, коли існує $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda)$. При цьому

$$\lim_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Необхідність. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$ і $\varepsilon > 0$ задане. Згідно з критерієм інтегровності

$$\exists \lambda_0 = \lambda_0([a, b]): U(f; \lambda_0) - L(f; \lambda_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай m — кількість точок в розбитті λ_0, $C > 0$ таке, що $\forall x \in [a, b]: |f(x)| \leqslant C$. Нехай зараз λ — довільне розбиття з розміром $|\lambda| < \delta := \varepsilon (8mC)^{-1}$, а $\lambda' = \lambda \cup \lambda_0$. Маємо

$$U(f; \lambda) = U(f; \lambda') + (U(f; \lambda) - U(f; \lambda')) \leqslant U(f; \lambda_0) +$$
$$+ (U(f; \lambda) - U(f; \lambda')) \leqslant U(f; \lambda_0) + 2C|\lambda| m < U(f; \lambda_0) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким чином,

$$U(f; \lambda) < U(f; \lambda_0) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Аналогічно доводиться, що

$$L(f; \lambda) > L(f; \lambda_0) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Звідки

$$L(f; \lambda_0) - \frac{\varepsilon}{4} < L(f; \lambda) \leqslant U(f; \lambda) < U(f; \lambda_0) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Оскільки

$$\forall \lambda: L(f; \lambda) \leqslant S(f: \lambda) \leqslant U(f; \lambda),$$

то

$$\forall \lambda, |\lambda| < \delta \ \forall \{\xi_i | \lambda\}: |S(f; \lambda) - \int_a^b f(x)\, dx| < \varepsilon.$$

Достатність. Припустимо, що існує

$$\lim_{|\lambda| \to 0} S(f; \lambda) = J.$$

Згідно з результатом вправи 3 функція f обмежена на відрізку $[a, b]$.

Доведемо, що $f \in \mathbf{R}([a, b])$ за допомогою критерію інтегровності. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. За означенням границі інтегральних сум

$$\exists \delta > 0 \ \forall \lambda, |\lambda| < \delta \ \forall \{\xi_i | \lambda\}: |S(f; \lambda) - J| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Для кожного k, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ і чисел m_k, M_k за означенням точних меж

$$\exists x_k' \in [x_k, x_{k+1}]: f(x_k') > M_k - \frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

$$\exists x_k'' \in [x_k, x_{k+1}]: f(x_k'') < m_k + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Тоді

$$U(f;\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k<\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k')\,\Delta x_k+\frac{\varepsilon}{4}<J+\frac{\varepsilon}{q},$$

$$L(f;\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k>\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k'')\,\Delta x_k-\frac{\varepsilon}{4}>J-\frac{\varepsilon}{q}.$$

Звідси

$$U(f;\lambda)-L(f;\lambda)<\varepsilon.$$

Вправи

4. Використовуючи зауваження 2 п. 2.1, обчислити інтеграл $\int_0^1 x^2dx$ двома способами:

1) $\forall n\in\mathbf{N}\ \lambda^{(n)}=\left\{0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n}\ldots,\ \frac{n}{n}\right\},\ \xi_k^{(n)}=\frac{k}{n},\quad 0\leqslant k\leqslant n-1;$

2) $\forall\ \{\lambda^{(n)};\ n\geqslant 1\},\ |\lambda^{(n)}|\to 0,\ n\to\infty$, поклавши

$$\xi_k^{(n)}=\sqrt{\frac{1}{3}\left((x_k^{(n)})^2+x_k^{(n)}x_{k+1}^{(n)}+(x_{k+1}^{(n)})^2\right)},\quad 0\leqslant k\leqslant m_{(n)}-1.$$

(Зауважимо, що відповідна площа криволінійної трапеції була вперше обчислена Архімедом).

Аналогічно обчислити $\int_0^1 x^m dx,\ m\in\mathbf{N}$.

Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^x dx$ за допомогою розбиття з 1), використовуючи як $\xi_k^{(n)}$ точку, яка визначається теоремою Лагранжа

$$e^{(k+1)/n}-e^{k/n}=e^{\xi_k^{(n)}}\frac{1}{n},\quad \xi_k^{(n)}\in\left[\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n}\right];$$

тут $0\leqslant k\leqslant n-1$.

5. Зобразити границю послідовності

$$\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}:\ n\geqslant 1\right\}$$

у вигляді інтеграла.

Відповідь. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

6. Для функції f, яка є обмеженою на $[a,b]$, і $\alpha>0$ обчислити границю

$$\lim_{|\lambda|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k^{1+\alpha}.$$

7. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$. Обчислити границі

$$\lim_{|\lambda|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sin \Delta x_k, \quad \lim_{|\lambda|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + f(\xi_k)\Delta x_k).$$

8*. Нехай $f \in \mathbf{C}([a, b])$ і $\forall x \in [a, b]$: $f(x) > 0$. Обчислити границю

$$\lim_{|\lambda|\to 0} \prod_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k))^{\Delta x_k}.$$

9*. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$. Обчислити границю

$$\lim_{|\lambda|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\, g(\eta_k)\, \Delta x_k),$$

де $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$ — набори точок, що відповідають розбиттю λ.

10. Нехай f і $\tilde{f}$ — функції із вправи 19, п. 1.5. Довести, що

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \tilde{f}(x)\, dx.$$

Таким чином, інтеграл не залежить від значень функції у будь-якому скінченному фіксованому наборі точок.

11*. Довести, що для будь-якої обмеженої на $[a, b]$ функції існують границі

$$\lim_{|\lambda|\to 0} L(f; \lambda) = \underline{\int} f(x)\, dx$$

і

$$\lim_{|\lambda|\to 0} U(f; \lambda) = \overline{\int} f(x)\, dx,$$

як визначаються аналогічно до границі інтегральних сум.

12. Нерівність Ермітa—Адамара. Нехай функція f опукла вниз на інтервалі (α, β) і $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$, причому $a < b$. Довести нерівність

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

§ 3. ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛА РІМАНА

3.1. ЛІНІЙНІСТЬ І АДИТИВНІСТЬ

1°. Якщо $f \in \mathbf{R}([a, b])$ і $C \in \mathbf{R}$, то $Cf \in \mathbf{R}([a, b])$

$$\int_a^b (Cf(x))\, dx = C \int_a^b f(x)\, dx.$$

|— Твердження випливає із теореми Дарбу і того, що завжди

$$S(Cf;\lambda) = CS(f;\lambda).$$ —|

2°. Якщо $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$, то $(f+g) \in \mathbf{R}([a, b])$ і

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

|— Зауважимо, що завжди

$$S(f+g;\lambda) = S(f;\lambda) + S(g;\lambda).$$ —|

3°. Якщо $f \in \mathbf{R}([a, b])$ і $a < c < b$, то $f \in \mathbf{R}([a, c])$ і $f \in \mathbf{R}([c, b])$, причому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

|— Для будь-якої функції f, яка є обмеженою на $[a, b]$, виконуються рівності

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx;$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Доведення цих рівностей аналогічні, тому доведемо лише другу. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Згідно з означенням верхнього інтеграла

$$\exists \lambda_1 = \lambda_1([a, c]):\ U(f;\lambda_1) < \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists \lambda_2 = \lambda_2([c, b]):\ U(f;\lambda_2) < \overline{\int_c^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для розбиття $\lambda = \lambda([a, b]) := \lambda_1 \cup \lambda_2$ отримаємо

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant U(f;\lambda) = U(f;\lambda_1) + U(f;\lambda_2) <$$

$$< \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0: \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Тому

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Аналогічно, для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\exists \lambda = \lambda([a, b]): \; U(f; \lambda) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Нехай $\lambda' = \lambda \cup \{c\}$, $\lambda_1 = \lambda' \cap [a, c]$, $\lambda_2 = \lambda' \cap [c, b]$. Тоді

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx \leqslant U(f; \lambda_1) + U(f; \lambda_2) =$$

$$= U(f; \lambda') \leqslant U(f; \lambda) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Звідси, як і вище, можна зробити висновок, що

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Із нерівностей (2) та (3) отримуємо потрібну рівність. Якщо $f \in \mathbf{R}([a, b])$, то ліві частини рівностей (1) рівні, значить рівні і їхні праві частини, звідки, враховуючи наслідок п. 1.3, маємо $f \in \mathbf{R}([a, c])$ і $f \in \mathbf{R}([c, b])$. ⌋

Зауваження. Із критерію інтегровності випливає, що $f \in \mathbf{R}([a, b])$, якщо $f \in \mathbf{R}([a, c])$ і $f \in \mathbf{R}([c, b])$.

3.2. НЕРІВНОСТІ ТА ТЕОРЕМА ПРО СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ

1°. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$ і $\forall x \in [a, b]$: $f(x) \leqslant g(x)$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

⌈ Для будь-якого розбиття λ маємо

$$L(f;\lambda) \leqslant L(g;\lambda) \leqslant \underline{\int_a^b} g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx,$$

звідки й випливає потрібна нерівність. ⌋

Зауваження. Твердження 1° є властивістю монотонності інтеграла; з нього випливає, що нерівності можна інтегрувати (але не диференціювати).

Вправи

1. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$ і $\forall x \in [a, b]$: $f(x) \geqslant 0$. Довести, що

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

2. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$ і числа m, M такі, що $\forall x \in [a, b]$: $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Довести, що

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

2°. **Теорема про середнє значення.** Нехай $f \in \mathbf{C}([a, b])$. Тоді

$$\exists \theta \in [a, b]: \int_a^b f(x)\,dx = f(\theta)(b-a).$$

⌈ Покладемо $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$. Тоді

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Звідси випливає, що число $L := \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ задовольняє нерівностям $m \leqslant L \leqslant M$.

Згідно з теоремою Коші про проміжне значення,

$$\exists \theta \in [a, b]: f(\theta) = L.$$ ⌋

Вправи

3. Припустимо, що $f \in \mathbf{C}([a, b])$, $\forall x \in [a, b]$: $f(x) \geqslant 0$ і $\exists x_0 \in [a, b]$: $f(x_0) > 0$. Довести, що

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

4. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$ і $\forall x \in [a, b]$: $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $g(x) \geqslant 0$ з деякими числами m і M. Довести, що $fg \in \mathbf{R}([a, b])$ і

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. Нехай $f \in \mathbf{C}([a, b])$, $g \in \mathbf{R}([a, b])$; $\forall x \in [a, b]$: $g(x) \geqslant 0$. Довести, що

$$\exists \theta \in [a, b]: \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\theta) \int_a^b g(x)\,dx.$$

6. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a,b])$. Обчислити границю

$$\lim_{|\lambda| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,dx.$$

3°. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$. Тоді $|f| \in \mathbf{R}([a, b])$ і

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Інтегровність $|f|$ випливає із критерія інтегровності і нерівності

$$\omega_k(|f|) = \sup_{\substack{x' \in [x_k, x_{k+1}] \\ x'' \in [x_k, x_{k+1}]}} (|f(x')| - |f(x'')|) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{x' \in [x_k, x_{k+1}] \\ x'' \in [x_k, x_{k+1}]}} |f(x') - f(x'')| = \omega_k(f).$$

Зауважимо, що

$$\forall x \in [a, b]: \ -f(x) \leqslant f(x) \leqslant f(x)$$

і застосуємо властивість 1°. ⌋

Вправи

7. Нехай $f \in \mathbf{R}([0, 1])$. Довести, що

$$\lim_{n \to \infty} \int_{1/n}^{1} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

8. Довести, що

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} \sin^n x\,dx = 0.$$

9. Нехай $f \in C([0, 1])$. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx.$$

10. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^4 \int\limits_n^{n+1} \frac{x}{1+x^5}\, dx\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^3 \int\limits_n^{2n} \frac{x}{1+x^5}\, dx\right)$.

11. Довести нерівність Коші для $\{f, g\} \subset R([a, b])$:

$$\left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, dx \cdot \int_a^b g^2(x)\, dx.$$

12*. Нехай $f \in C([a, b])$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\int_a^b f^{2n}(x)\, dx} = \max_{[a,b]} |f|.$$

13. Нехай $f \in C([a, b])$ і

$$\forall g \in C[a, b]: \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0.$$

Довести, що $\forall x \in [a, b]$: $f(x) = 0$.

14. Нехай $f \in C([a, b])$ і $\int\limits_a^b f(x)\, dx = 0$. Довести, що

$$\int_a^b f^2(x)\, dx \leqslant -mM(b-a),$$

де $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$.

15. Нехай $\{f, g\} \subset R([a, b])$ і

$$h(x) = \min(f(x), g(x)),$$

$$H(x) = \max(f(x), g(x)), \quad x \in [a, b].$$

Довести, що $\{h, H\} \subset R([a, b])$.

3.3. ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛА ЯК ФУНКЦІЇ ВЕРХНЬОЇ ГРАНИЦІ

Означення. Покладемо

$$\forall f: \int_a^a f(x)\,dx := 0.$$

Для функції $f \in \mathbf{R}([a, b])$, де $a < b$, покладемо

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Якщо $f \in \mathbf{R}([a, b])$, то за властивістю 3°, п. 3.1 $\forall x \in [\alpha, b]$: $f \in \mathbf{R}([a, x])$. Нехай

$$\forall x \in [a, b] \qquad \varphi(x) := \int_a^x f(u)\,du,$$

при цьому $\varphi(a) = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Якщо $f \in \mathbf{R}([a, b])$, то $\varphi \in \mathbf{C}([a, b])$.

$\ulcorner$ Дійсно, для будь-яких $\{x', x''\} \subset [a, b]$ маємо

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| = \left|\int_a^{x'} f(u)\,du - \int_a^{x''} f(u)\,du\right| =$$

$$= \left|\int_{x'}^{x''} f(u)\,du\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \cdot |x' - x''|.$$

Таким чином, φ — рівномірно неперервна на $[a, b]$. $\lrcorner$

Зауваження. За умовами теореми 1 функція φ задовольняє умову Ліпшіца з показником 1.

Вправа

16. Нехай $\varphi(x) = \int_{-1}^{x} \operatorname{sign} u\,du$, $x \in [-1, 1]$. Довести, що

$$\varphi'_{-}(0) = -1, \quad \varphi'_{+}(0) = 1,$$

і, таким чином, $\varphi'(0)$ не існує. Побудувати графік φ.

ТЕОРЕМА 2. Якщо $f \in C([a, b])$, то $\varphi \in C^{(1)}([a, b])$, причому $\forall x \in [a, b]$: $\varphi'(x) = f(x)$.

$\ulcorner$ Нехай $x \in [a, b]$ зафіксовано, а Δx таке, що $x + \Delta x \in [a, b]$ і $\Delta x \neq 0$. Оскільки

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(u)\,du,$$

то після застосування теореми про середнє значення одержимо

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=f(\theta(x,\Delta x)),$$

де $\theta(x, \Delta x)$ лежить між x і $x+\Delta x$. Внаслідок неперервності f при $\Delta x \to 0$, одержимо, що $\varphi'(x)=f(x)$. ⌋

ТЕОРЕМА 3 (про існування примітивної). **Функція $f \in$ $\in$ C ($[a, b]$) має примітивну на $[a, b]$.**

⌈Згідно з теоремою 2 примітивною є функція φ. ⌋

Вправи

17. Довести, що функція $f \in$ C ($(0, +\infty)$) має примітивну на $(0, +\infty)$

18. Обчислити границю

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_{0}^{x}\frac{u\,\mathrm{arctg}\,u}{1+u}\,du.$$

Вказівка. Застосувати правило Лопіталя.

3.4. ОСНОВНА ФОРМУЛА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

ТЕОРЕМА 1 (формула Ньютона—Лейбніца, або основна формула інтегрального числення). Припустимо, що функція f задовольняє умови:

1) $f \in$ **R** ($[a, b]$);

2) f має примітивну на $[a, b]$.

Нехай G — довільна примітивна функції f на $[a, b]$. Тоді

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = G(b)-G(a).$$

⌈Перше доведення: для $f \in$ **C** ($[a, b]$). При цьому функція

$$\varphi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(u)\,du, \quad x\in[a,b]$$

є примітивною функції f на $[a, b]$. Якщо G — деяка примітивна функції f на $[a, b]$, то

$$\exists C\in\mathbf{R}\ \forall x\in[a,b]\colon G(x)=\varphi(x)+C.$$

Зауважимо, що $\varphi(a)=0$. Тому $G(a)=C$. Поклавши $x=b$, одержимо

$$G(b)=\varphi(b)+G(a)$$

або

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Друге доведення: для загального випадку. Нехай λ — розбиття відрізка $[a, b]$. До кожної із різниць правої частини рівності

$$G(b) - G(a) = (G(x_1) - G(x_0)) + (G(x_2) - G(x_1)) + \ldots$$
$$\ldots + (G(x_n) - G(x_{n-1}))$$

застосуємо теорему Лагранжа про скінченний приріст. Тоді

$$G(b) - G(a) = f(\xi_0)\,\Delta x_0 + f(\xi_1)\,\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\,\Delta x_{n-1},$$

де $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Таким чином,

$$G(b) - G(a) = S(f; \lambda, \{\xi_i \mid \lambda\}).$$

За теоремою Дарбу при $|\lambda| \to 0$ одержимо

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad \lrcorner$$

Зауваження. 1. Різницю $G(b) - G(a)$ часто позначають символом

$$G(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

2. Теорема 1 має місце й тоді, коли в умові 2) примітивна береться в сенсі означення 2 п. 1.1, глава 5.

Вправа

19. Нехай $f \in C^{(1)}([1; +\infty))$. Довести формулу

$$\int_1^x [u]\,f'(u)\,du = [x]\,f(x) - \sum_{k:1 \leqslant k \leqslant x} f(k), \quad x \geqslant 1,$$

де $[a]$ — ціла частина числа a.

Приклад. Нехай f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ інтегровна за Ріманом на кожному скінченному відрізку і має примітивну на $\mathbf{R}$. Припустимо, що a і b — диференційовні на $\mathbf{R}$ функції. Тоді має місце формула Лейбніца

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(u)\,du = f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

$\ulcorner$ Нехай G — примітивна функції f на $\mathbf{R}$. За формулою Ньютона—Лейбніца для довільного $x \in \mathbf{R}$

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(u)\,du = G(b(x)) - G(a(x)),$$

причому права частина отриманої рівності має похідну, яка за правилом диференціювання складної функції буде дорівнювати

$$\frac{d}{dx}(G(b(x)) - G(a(x))) = G'(b(x))\,b'(x) - G'(a(x))\,a'(x) =$$
$$= f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x). \quad \lrcorner$$

Вправи

19.1. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$, $g \in \mathbf{C}([a, b])$ і

$$\forall x \in (a, b):\ g'_+(x) = f(x).$$

Довести, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a).$$

Вказівка. Використати вправу 16.3 п. 2.1 глави 4.

19.2. Для функції $f(x) = [x]$, $x \in [0, 3]$ функцією g із вправи 19.1 є функція

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1]. \\ x, & x \in [1, 2], \\ 2x - 2, & x \in [2, 3], \end{cases}$$

для неї $g'_+(x) = f(x)$, $x \in [0, 3)$. Отже,

$$\int_0^3 [x]\,dx = g(3) - g(0) = 4 - 1 = 3.$$

Перевірити ці твердження.

20. Функція $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ і періодична з періодом T. Довести, що

$$\forall a \in \mathbf{R}:\ \int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

3.5. ФОРМУЛИ ЗАМІНИ ЗМІННОЇ ТА ІНТЕГРУВАННЯ ПО ЧАСТИНАМ

ТЕОРЕМА 1. Припустимо, що:
1) $f \in \mathbf{C}((A, B))$;
2) $u \in \mathbf{C}^1([\alpha, \beta])$;
3) $u([\alpha, \beta]) \subset (A, B)$.
Тоді має місце формула

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))\,u'(t)\,dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx.$$

$\ulcorner$ Функція f неперервна на відрізку з кінцями $u(\alpha)$ та $u(\beta)$; отже, вона має примітивну G на цьому відрізку. Тоді за

формулою Ньютона—Лейбніца

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx = G(u(\beta)) - G(u(\alpha)). \qquad (1)$$

Крім того, функція $G(u)$ є примітивною для $f(u)\,u'$ на $[\alpha, \beta]$, причому $f(u)\,u' \in \mathbf{C}([\alpha, \beta])$. Тому за формулою Ньютона — Лейбніца

$$\int_{\alpha}^{b} f(u(t))\,u'(t)\,dt = G(u(\beta)) - G(u(\alpha)). \qquad (2)$$

Потрібна формула випливає із рівностей (1) та (2). ⌋

Вправа

21. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$. Довести:

1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$;

2) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} f(c+x)\,dx, \quad c \in \mathbf{R}$;

3) рівність вправи 20; 4) $\int_{-1}^{1} \frac{x^4 dx}{a^x+1} = \frac{1}{5}, \quad a > 0$;

5) $a > 0$, $f\colon [0, a] \to [0, +\infty)$, $f \in \mathbf{C}([0, a])$, $p \geqslant 1$;

$$\left(\int_0^a f(x)\,dx\right)^p = p\int_0^a f(x)\left(\int_0^x f(u)\,du\right)^{p-1} dx;$$

$$\ln\left(1 + \int_0^a f(x)\,dx\right) = \int_0^a \frac{f(u)}{1 + \int_0^u f(t)\,dt}\,du.$$

Приклад 1 (розв'язок функціонального рівняння Коші у класі локально інтегровних за Ріманом функцій). Визначимо функцію $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, інтегровну на кожному скінченному відрізку і таку, що задовольняє функціональному рівнянню Коші,

$$\forall x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R}\colon f(x+y) = f(x) + f(y). \qquad (3)$$

⌈Зафіксуємо в рівності (3) величину x і отриману рівність проінтегруємо по y на відрізку $[0, 1]$:

$$\int_0^1 f(x+y)\,dy = f(x) + C, \quad C := \int_0^1 f(y)\,dy.$$

Після заміни змінної одержимо рівність

$$\int_{x}^{x+1} f(t)\,dt = f(x) + C, \tag{4}$$

в якій згідно з теоремою 1 п. 3.3 ліва частина неперервна по x. Тоді за формулою (4) функція f неперервна, а тому за теоремою 2 п. 3.3 ліва частина рівності (4) диференційовна по x. Таким чином, $f \in C^{(1)}(R)$ і

$$f(x+1) - f(x) = f'(x), \quad x \in R,$$

звідки, беручи до уваги співвідношення (3), маємо $f(1) = f'(x)$, $x \in R$. Тому $f(x) = f(1)\,x + c$, $x \in R$

Число $c = 0$, оскільки $f(0) = 0$. Остаточно

$$f(x) = f(1)\,x, \quad x \in R. \qquad \lrcorner$$

ТЕОРЕМА 2. Нехай $\{u, v\} \subset C^{(1)}([a, b])$. Тоді

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

$\ulcorner$ Функція uv є примітивною для суми $uv' + u'v$ на $[a, b]$, тому за формулою Ньютона—Лейбніца

$$\int_a^b (u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x))\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a),$$

звідки й випливає потрібна формула. $\lrcorner$

Приклад 2. Для $n \in N \cup \{0\}$ обчислити інтеграл

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

$\ulcorner$ Використаємо при $n \geqslant 2$ формулу теореми 2:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left| \begin{array}{ll} \sin^{n-1} x = u; & \sin x = v' \\ (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x = u'; & -\cos x = v \end{array} \right| =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx =$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Тоді

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

Оскільки $I_0 = \frac{\pi}{2}$, то

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \geqslant 0.$$

Аналогічно

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \quad k \geqslant 0. \qquad \lrcorner$$

Зауваження. Оскільки

$$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}, \quad n \geqslant 1,$$

то з формул для I_{2k} та I_{2k+1} маємо

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1))!!},$$

звідки

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n}.$$

Оскільки різниця між правою і лівою частиною останньої нерівності є

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n(2n+1)} < \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Ця рівність є відома *формула Дж. Валліса* (1616 — 1703).

ТЕОРЕМА 3 (формула Тейлора із залишковим членом у інтегральній формі). Нехай $f \in C^{(n+1)}((\alpha, \beta))$. Тоді $\forall a \in (\alpha, \beta)$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$ виконується рівність

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

$\ulcorner$ Для фіксованого x розглянемо функцію

$$g(s) := f(s) + \frac{f'(s)}{1!}(x-s) + \frac{f''(s)}{2!}(x-s)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(x-s)^n, \quad s \in (\alpha, \beta).$$

Для функції g маємо

$$g(x) = f(x)$$

і

$$g'(s) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{n!}(s-x)^n, \quad s \in (\alpha, \beta).$$

а формулою Ньютона—Лейбніца

$$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(s)\,ds,$$

що й є потрібною рівністю. ⌋

Вправи

22. Використовуючи теорему 3, вивести формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.

23. Нехай функції u і v мають примітивні U і V на $[a, b]$, $(uV + Uv) \in$ $\in$ R $([a, b])$. Тоді $(uV) \in$ R $([a, b])$ тоді й тільки тоді, коли $(Uv) \in$ R $([a, b])$ і

$$\int_a^b U(x)\,v(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b u(x)\,V(x)\,dx.$$

§ 4. ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ПІД ЗНАКОМ ІНТЕГРАЛА

4.1. ПОТОЧКОВА ТА РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТІ ФУНКЦІЙ

Нехай $A \subset$ R, $f: A \to$ R і $\forall n \in$ N; f_n; $A \to$ R.

Означення 1. Послідовність функцій $\{f_n,\ n \geqslant 1\}$ ***збігається поточково*** до функції f на множині A, якщо

$$\forall x \in A:\ f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty.$$

Приклади. 1. Нехай $A = [0, 1]$; $\forall n \geqslant 1$ $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$;

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1); \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Послідовність $\{f_n : n \geqslant 1\}$ збігається до f поточково на $[0, 1]$.

2. Нехай $A_n =$ R; $f(x) = 0$, $x \in$ R і

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant n; \\ 1, & x > 0; \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

Послідовність $\{f_n : n \geqslant 1\}$ збігається до f поточково на R.

3. Нехай $A = [0, 1]$; $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$ і

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \setminus \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]; \\ n^2, & x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]; \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

Послідовність $\{f_n : n \geqslant 1\}$ збігається до f поточково на $[0, 1]$.

Означення 2. Послідовність функцій $\{f_n : n \geqslant 1\}$ ***збігається рівномірно на множині*** A до функції f, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N \ \forall x \in A: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Зауваження 1. Умова означення 2 може бути записана також у рівносильній формі:

$$d_n := \sup_A |f_n(x) - f(x)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

яка є зручною для практичного дослідження рівномірної збіжності.

2. Із рівномірної на множині A збіжності випливає поточкова на множині A збіжність. Обернене твердження не має місця. У прикладах 1—3 рівномірної збіжності немає. Дійсно, у прикладах 1 і 2 $d_n = 1$; $n \geqslant 1$; у прикладі 3 $d_n = n^2$, $n \geqslant 1$.

4.2. ТЕОРЕМА ПРО ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД

ЛЕМА. Припустимо, що виконані умови:

1) $\forall n \geqslant 1$: $f_n \in \mathbf{R}([a, b])$;

2) послідовність $\{f_n : n \geqslant 1\}$ збігається рівномірно на $[a, b]$ до деякої функції f: $[a, b] \to \mathbf{R}$. Тоді $f \in \mathbf{R}([a, b])$.

⌈ Використаємо критерій інтегровності. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Згідно з умовою 2) леми

$$\exists N \in \mathbf{N} \ \forall x \in [a, b]: |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_N(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \qquad (1)$$

Зафіксуємо N у співвідношенні (1). Оскільки $f_N \in \mathbf{R}([a, b])$, то $\exists \lambda$:

$$U(f_N; \lambda) - L(f_N; \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k(f_N) - m_k(f_N)) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

З нерівності (1) для кожного k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ маємо:

$$m_k(f) \geqslant m_k(f_N) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

$$M_k(f) \leqslant M_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Таким чином,

$$u(f;\lambda) - L(f;\lambda) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(M_k(f_N) - m_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)\Delta x_k < \varepsilon. \quad \lrcorner$$

ТЕОРЕМА. Нехай:

1) $\forall n \geqslant 1: f_n \in \mathbf{R}([a, b])$;

2) послідовність $\{f_n : n \geqslant 1\}$ збігається рівномірно на $[a, b]$ до функції f.

Тоді $f \in \mathbf{R}([a, b])$ і має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$\ulcorner$ Інтегровність функції f міститься у лемі. Для доведення рівності зауважимо, що

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|(b-a) \to 0, \quad n \to \infty. \quad \lrcorner$$

Зауваження. Теорема є найпростішою достатньою умовою для граничного переходу під знаком інтеграла Рімана. Більш корисним є таке твердження. Нехай

1) $\forall n \geqslant 1$: $f_n \in \mathbf{R}([a, b])$;

2) $f \in \mathbf{R}([a, b])$ і $f_n \to f$, $n \to \infty$ поточково на $[a, b]$;

3) $\exists C > 0$ $\forall x \in [a, b]$ $\forall n \geqslant 1$: $|f_n(x)| \leqslant C$.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Це твердження тут доводиться не буде.

Вправи

1. Довести, що при виконанні умов теореми $\forall g \in \mathbf{R}([a, b])$ має місце твердження

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

2. Використовуючи теорему Вейєрштрасса, довести, що для будь-якої функції $f \in C([a, b])$ існує послідовність многочленів, рівномірно збіжна на $[a, b]$ до f.

3*. Нехай $f \in C([a, b])$ і

$$\forall n \in N \cup \{0\}: \int_a^b x^n f(x)\, dx = 0.$$

Довести, що $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$.

4. Нехай $f \in C([-1,1])$ і

$$\forall n \in N \cup \{0\}: \int_{-1}^1 x^{2n} f(x)\, dx = 0.$$

Довести, що f — непарна функція на $[-1,1]$.

Вказівка. Прийняти до уваги, що умова виконана також для функції $[-1,1] \ni x \mapsto f(-x)$, а отже, і для парної функції $[-1,1] \ni x \mapsto f(x) + f(-x)$. Тому

$$\int_{-1}^1 x^m (f(x) + f(-x))\, dx = 0$$

для всіх $m \in N \cup \{0\}$.

5. Нехай $f \in C([-1,1]$ і

$$\forall n \in N \cup \{0\}: \int_{-1}^1 x^{2n+1} f(x)\, dx = 0.$$

Довести, що f — парна функція.

6. Нехай $f \in C([a, b])$ і

$$\forall n \in N \cup \{0\}: \int_a^b e^{nx} f(x)\, dx = 0.$$

Довести, що $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$.

7. Нехай $f \in C([a, b])$ і для фіксованого $m \in N$ виконується співвідношення

$$\forall n \in N, \quad n \geqslant m: \int_a^b x^n f(x)\, dx = 0.$$

Довести, що $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$.

8. Нехай $f \in C([0, 1])$ і

$$\forall n \in N: \int_0^1 x^{3n} f(x)\, dx = 0.$$

Довести, що $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$.

§ 5. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

5.1. ПЛОЩА КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРАПЕЦІЇ

Припустимо, що читач володіє звичайним означенням площі многокутника. Нехай $f \in C([a, b])$ і $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$. Множина точок площини

$$F = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

називається ***криволінійною трапецією.***

Нехай λ — деяке розбиття відрізка $[a, b]$. Для кожного відрізка $[x_k, x_{k+1}]$ розглянемо криволінійну трапецію $F_k = \{(x, y) \mid x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1},\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, а також вписаний у F_k і описаний навколо F_k прямокутники з основою $[x_k, x_{k+1}]$ і висотами $m_k(f)$ та $M_k(f)$ відповідно. Сумарна площа усіх вписаних прямокутників дорівнює $L(f; \lambda)$, а описаних — $U(f; \lambda)$.

Означення. Величина

$$S_* = \sup_{\lambda} L(f; \lambda)$$

називається ***внутрішньою площею*** криволійнійної трапеції F, а величина

$$S^* = \inf_{\lambda} U(f; \lambda) —$$

зовнішньою площею. Якщо для F має місце рівність $S_* = S^*$, то трапеція F називається ***квадровною*** (така, що має площу), а число $S(F) := S_* = S^*$ — ***площею криволінійної трапеції*** F.

Таким чином, величини S_* та S^* є нижнім і верхнім інтегралами для функції f, які при зроблених припущеннях збігаються. Отже, криволінійна трапеція F квадровна і її площа дорівнює

$$S(F) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Вправи

1. Нехай $\{f, g\} \subset C([a, b])$, причому $\forall x \in [a, b]$: $f(x) \leqslant g(x)$. Показати, що множина

$$G = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

має площу $S(G)$:

$$S(G) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

2. Припустивши, що площа колового сектора відома, довести, що криволінійний сектор F, що визначається у полярних координатах

$$F = \{(\theta, r) \mid \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,\ 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta)\},$$

де $\rho \in C([\theta_1, \theta_2])$, є квадровним і має площу

$$S(F) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\, d\theta.$$

3. Довести, що площа фігури, обмеженої еліпсом

$$\frac{x_2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

дорівнює πab.

5.2. ДОВЖИНА ДУГИ КРИВОЇ

Множина точок площини

$$\Gamma = \{x, y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [a, b]\}$$

з функціями $\{\varphi, \psi\} \subset C([a, b])$ називається ***неперервною кривою в площині.***

Нехай $\lambda = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ — деяке розбиття відрізка $[a, b]$, а Γ_λ — ламана, яку одержимо, з'єднавши кожну пару сусідніх точок $(\varphi(t_k), \psi(t_k))$ і $(\varphi(t_{k+1}), \psi(t_{k+1}))$ на Γ відрізком прямої. Довжина $l(\Gamma_\lambda)$ ламаної Γ_λ дорівнює

$$l(\Gamma_\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k))^2 + (\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k))^2}.$$

Означення. Якщо існує скінченна границя[1]

$$\lim_{|\lambda| \to 0} l(\Gamma_\lambda) = l(\Gamma),$$

то крива Γ називається ***спрямлюваною***, а границя $l(\Gamma)$ — ***довжиною кривої*** Γ.

Вправи

4*. Побудувати приклад неперервної кривої, для якої границя (1) дорівнює $+\infty$.

5. Довести, що

$$l(\Gamma) = \sup_{\lambda} l(\Gamma_\lambda).$$

---

[1] Означення цієї границі аналогічне означенню границі інтегральних сум.

ТЕОРЕМА. Нехай $\{\varphi, \psi\} \subset C^1([a, b])$. Тоді крива Γ є спрямлюваною і її довжина дорівнює

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt.$$

$\ulcorner$ Використовуючи теорему Лангража, запишемо значення $l(\Gamma_\lambda)$ у вигляді

$$l(\Gamma_\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2}\Delta t_k =$$

$$= S(\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}; \lambda, \{\xi_i \mid \lambda\}) + r_\lambda;$$

$$\{\xi_k, \eta_k\} \subset [x_k, x_{k+1}], \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1;$$

$$r_\lambda := \sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 - (\psi'(\xi_k))^2})\, \Delta t_k.$$

Оскільки $\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2} \in C([a, b])$, то за теоремою Дарбу

$$\lim_{|\lambda| \to 0} S(\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}, \lambda, \{\xi_i \mid \lambda\}) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Крім того, за нерівністю

$$|\sqrt{u^2 + v^2} - \sqrt{u^2 + w^2}| \leqslant |v - w|, \{u, v, w\} \subset R$$

маємо для r_λ:

$$|r_\lambda| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\psi'(\eta_k) - \psi'(\xi_k)|\, \Delta t_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(\psi')\, \Delta t_k.$$

Звідси

$$\lim_{|\lambda| \to 0} r_\lambda = 0. \qquad \lrcorner$$

Зауваження. Аналогічно розглядається випадок просторової кривої.

Вправи

6. Нехай $f \in C^1([a, b])$ і

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ y = f(x)\}.$$

Довести, що Γ спрямлювана крива і

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

7. Нехай для $\rho \in C^1([\theta_1, \theta_2])$

$$\Gamma = \{(\theta, r) \mid \theta \in [\theta_1, \theta_2], \quad r = \rho(\theta)\}, \text{ —}$$

крива, задана у полярних координатах (θ, r). Довести, що крива спрямлювана і має довжину

$$l(\Gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2}\, d\theta.$$

5.3. ОБ'ЄМ ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Вважаємо відомою формулу для об'єму прямого кругового циліндра. Нехай F — криволінійна трапеція, яка розглядалася в п. 5.1, а G — тіло, утворене при обертанні трапеції F навколо осі абсцис. Визначити об'єм тіла G можна таким чином. Нехай λ — деяке розбиття відрізка $[a, b]$. Обертаючи разом з F прямокутники, вписані у криволінійні трапеції $\{F_k\}$, одержимо тіло $G_*(\lambda)$, складене з дисків, яке має об'єм

$$V(G_*(\lambda)) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k^2(f)\, \Delta x_k.$$

Аналогічно при обертанні прямокутників, описаних навколо $\{F_k\}$, одержимо тіло $G^*(\lambda)$, об'єм якого

$$V(G^*(\lambda)) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi M_k^2(f)\, \Delta x_k.$$

Величини

$$\sup_\lambda V(G_*(\lambda)) \text{ і } \inf_\lambda V(G^*(\lambda))$$

називаються ***внутрішнім*** і ***зовнішнім об'ємом*** тіла G відповідно.

Означення. Якщо для тіла G внутрішній і зовнішній об'єм збігаються, то тіло G називається ***кубованим*** (таким, що має ***об'єм***), а спільна величина внутрішнього і зовнішнього об'ємів — називається ***об'ємом тіла*** G.

Зауважимо, що при наших припущеннях

$$m_k^2(f) = m_k(f^2),\ M_k^2(f) = M_k(f^2); \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

і тому

$$V(G_*(\lambda)) = \pi L(f^2; \lambda),\ V(G^*(\lambda)) = \pi U(f^2, \lambda).$$

Таким чином, тіло G є кубованим і має об'єм

$$V(G) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Вправа

8. Обчислити об'єм тора.

5.4. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Припустимо відомою формулу для площі поверхні зрізаного конуса. Нехай P — поверхня, одержана при обертанні навколо осі абсцис кривої

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ y = f(x)\},\ f \in \mathbf{C}([a, b]).$$

Площу P можна визначити таким чином. Нехай $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — деяке розбиття відрізка $[a, b]$. Для кожної пари точок x_k, x_{k+1} з'єднаємо відрізком прямої точки $(x_n, f(x_k))$ і $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$. Тоді при обертанні разом з поверхнею P одержимо поверхню $P(\lambda)$, складену із зрізаних конусів, з площею

$$S(P(\lambda)) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi (f(x_k) + f(x_{k+1})) \sqrt{(f(x_{k+1}) - f(x_k))^2 + \Delta x_k^2}.$$

Означення. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{|\lambda| \to 0} S(P(\lambda)) =: S(P),$$

то вона називається ***площею поверхні P.***

ТЕОРЕМА. Нехай $f \in \mathbf{C}^1([a, b])$. Тоді поверхня P має площу, яка визначається за формулою

$$S(P) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

$\ulcorner$ Для кожного k, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ за теоремою Коші про проміжне значення

$$\exists \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]:\ \frac{1}{2}(f(x_k) + f(x_{k+1})) = f(\xi_k),$$

а за теоремою Лагранжа

$$\exists \eta_k \in [x_k, x_{k+1}]:\ f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\eta_k)\, \Delta x_k.$$

Отже

$$S(P(\lambda)) = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + (f'(\eta_k))^2}\, \Delta x_k.$$

Далі, як і в п.5.2, доводимо, що

$$\lim_{|\lambda| \to 0} S(P(\lambda)) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad \lrcorner$$

5.5. ПРО ІНШІ ЗАСТОСУВАННЯ

Міркування, які використовувалися в цьому параграфі для отримання формул обчислення різних геометричних величин, можуть бути використані і в багатьох інших випадках.

Вправи

9. Нехай F — криволінійна трапеція, розглянута в п. 5.1, і її площа $S(F) > 0$. Дати означення координат $x_ц$; $y_ц$ — центра ваги однорідної криволінійної трапеції F і одержати формули

$$x_ц = \frac{1}{S(F)} \int_a^b x f(x)\, dx; \qquad y_ц = \frac{1}{2S(F)} \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

10. Довести для F другу теорему Гульдіна: об'єм тіла обертання фігури, що лежить в площині, навколо неперетинаючої її осі, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, яке описує центр ваги фігури.

11. Нехай Γ — крива, задана у вправі 6, і її довжина $l(\Gamma) > 0$. Дати означення координат $x_ц$, $y_ц$ центра ваги однорідної кривої Γ і одержати формули

$$x_ц = \frac{1}{l(\Gamma)} \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx;$$

$$y_ц = \frac{1}{l(\Gamma)} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

12. Довести для Γ першу теорему Гульдіна: площа поверхні, одержаної при обертанні кривої, що лежить в площині, навколо деякої неперетинаючої її осі, дорівнює довжині дуги цієї кривої, помноженої на довжину кола, описаного центром ваги кривої.

Зауваження. Хоча запропоновані в цьому параграфі означення ряду геометричних понять і приводять до ефективних і корисних формул, з математичної точки зору підхід до цих означень залишає бажати кращого. Єдиний підхід до означень понять площі, об'єму і т. д. буде розглянуто пізніше.

5.6. СТИСЛІ ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Першими прикладами використання методів, які зараз відносять до інтегрального числення, були розв'язки деяких геометричних задач, отримані *Євдоксом* (*Євдокс Книдський* (IV ст. до н. е.) — древньогрецький математик і астроном, обчислив об'єми конуса і піраміди) і *Архімедом* (*Архімед із Сіракуз* (III ст. до н. е.) — видатний древньогрецький вчений математик, механік, фізик, астроном, винахідник, багато його праць присвячено визначенню площ, об'ємів, центрів ваги).

Потрібно зазначити, що задачі про обчислення довжини дуги кривої, площі фігури, об'єму тіла, координат центра ваги протягом майже 2000 років до Ньютона і Лейбніца залишалися найважливішими математичними проблемами. Наприклад, Архімед вважав одним із найважливіших своїх результатів доведення того, що об'єм кулі відноситься до об'єму описаного

ціліндра як 2 : 3. Майже всі видатні математики, попередники Ньютона і Лейбніца, намагалися розв'язувати такі задачі. При цьому мова йшла тільки про обчислення площі, об'єму і т. д., припускалось, наприклад, що фігура має площу. До XVII ст. математиками було розв'язано багато окремих задач, які можна віднести до інтегрального числення. Проте ні Архімед, ні його послідовники аж до XVII ст. не бачили в розв'язках окремих задач, які використовували спеціальні властивості об'єктів, витоків єдиного методу. Диференціальне і інтегральне числення було створене в XVII ст. Ньютоном (*Ньютон Ісак* (1643—1727) — видатний англійський фізик, математик, астроном; винайшов закони механіки і закон всесвітнього тяжіння) і *Лейбніцем*. Вони ж першими ефективно використали нові методи у механіці, фізиці, геометрії.

Зокрема, інтегральне числення дає виключно простий спосіб обчислення довжини дуг, площ, об'ємів і т. д., цей спосіб сьогодні посилі й школяреві. Сучасне інтегральне числення базується на поєднанні двох аспектів: означення інтеграла як границі інтегральних сум і знаходження функції за її похідною. Ньютон, як правило, використовував другий метод. Лейбніц розвивав перший аспект, цікавий теоретично й ефективний в застосуваннях. Перше означення інтеграла, яке й зараз можна вважати точним, дав у 1821 р. за допомогою інтегральних сум для неперервної функції *Коші*. Умову існування інтеграла для функцій, які не є неперервними, дав *Ріман*. Метод означення інтеграла за допомогою сум Дарбу і верхнього та нижнього інтегралів належить *Дарбу*. Подальше розвинення поняття інтеграла пов'язане з іменами *Стільтьєса* (*Стільтьєс Томас Йоаннес* (1856—1894) — голландський математик) і *Лебега* (*Лебег Анрі* (1875—1941)— французький математик, засновник теорії міри й теорії функцій дійсної змінної). Методи та ідеї інтегрального числення виявилися дуже плідними як в самій математиці, так і в її застосуваннях. Для розв'язку цілого ряду типових класів задач було створено багато різних варіацій поняття інтеграла.

РЯДИ

Глава 7

§ 1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ РЯДІВ

1.1. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Нехай $\{a_n: n \geqslant 1\}$ — послідовність дійсних чисел. ***Рядом*** називається вираз

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (1)$$

Цей вираз поки що точного сенсу не має, оскільки нескінченне число додавань здійснити не можна.

Для кожного $n \in \mathbf{N}$ покладемо

$$s_n \doteq a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Число a_n називається n-м ***членом***, а число s_n — n-ю ***частковою сумою ряду*** (1). Зауважимо, що

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}, \quad n \geqslant 1.$$

Означення. Дві послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$ і $\{s_n : n \geqslant 1\}$ називаються ***числовим рядом*** і позначаються символом (1). Якщо послідовність часткових сум $\{s_n : n \geqslant 1\}$ збігається до дійсного числа s, то ряд (1) називається ***збіжним***, а число s—***сумою ряду*** (1) і позначається символом

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Якщо послідовність $\{s_n : n \geqslant 1\}$ скінченної границі не має, то ряд (1) називається ***розбіжним***.

ТЕОРЕМА 1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то

$$a_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

⌈ Дійсно, оскільки

$$a_n = s_n - s_{n-1}, \quad n \geqslant 2$$

і

$$s_n \to s \in \mathbf{R}, \quad n \to \infty,$$

то

$$a_n \to s - s = 0, \quad n \to \infty. \qquad \lrcorner$$

Теорема 1 дає просту необхідну умову збіжності ряду (1). Аналогічно можна одержати інші умови.

ТЕОРЕМА 2. Якщо ряд (1) збігається, то

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Приклад 1. Ряди

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots; \tag{2}$$

$$1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots \tag{3}$$

є розбіжними, оскільки послідовності часткових сум $s_n = n$, $n \geqslant 1$ у випадку ряду (2) і $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0$, ... у випадку ряду (3) границі не мають. Можна також використати теорему 1.

Вправа

1*. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ розбіжний.

Приклади. 2. **Геометричний ряд.** Так називається для $x \in \mathbf{R}$ ряд

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots x^n + \ldots, \tag{4}$$

часткова сума якого

$$s_n = \begin{cases} n, & x = 1; \\ \dfrac{1 - x^n}{1 - x}, & x \neq 1, \end{cases}$$

для $n \geqslant 1$.

⌈ Якщо $|x| < 1$, то $x^n \to 0$, $n \to \infty$. Отже, при $|x| < 1$ ряд (4) збігається до суми $\dfrac{1}{1-x}$:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}; \qquad |x| < 1.$$

При $|x| \geqslant 1$ послідовність $\{s_n : n \geqslant 1\}$ скінченної границі не має; отже, при $|x| \geqslant 1$ ряд (4) розбігається. ⌋

3. Доведемо, що

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots = 1.$$

⌈ Дійсно, для $n \geqslant 1$

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отже, $s_n \to 1$, $n \to \infty$. ⌋

4. Гармонічний ряд. Так називається ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

⌈Доведемо, що цей ряд розбігається. Використаємо теорему 2. При $n \geqslant 1$

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \geqslant n\,\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\,.$$

Отже, $s_{2n}-s_n \not\to 0$, $n\to\infty$. Оскільки послідовність $\{s_n : n \geqslant 1\}$ зростає і не має границі, то $s_n \to +\infty$ $n\to\infty$. Проте зростання s_n із зростанням n відбувається дуже повільно. Л. Ейлер [1] підрахував, що $s_{1.000.000} \approx 14$. Треба звернути увагу на те, що члени гармонічного ряду спадаючи, збігаються до 0. ⌋

Вправа

2. Довести, що часткові суми гармонічного ряду задовольняють нерівностям

$$0 < s_n - \ln(n+1) < 1, \quad n \geqslant 2.$$

Вказівка. Використати нерівності для членів послідовності, визначаючої число e.

Приклад 5. Узагальнений гармонічний ряд. Так називається ряд

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\ \ldots, \tag{5}$$

де $\alpha \in \mathbf{R}$. Нехай

$$s_n(\alpha) := 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\,, \quad n \geqslant 1,$$

При $\alpha = 1$ ряд (5) є гармонічним і $s_n(1) \to +\infty$, $n\to\infty$. При $\alpha \leqslant 1$

$$s_n(\alpha) \geqslant s_n(1), \ n \geqslant 1;$$

отже, ряд (5) розбігається і при $\alpha < 1$. При $\alpha > 1$ ряд (5) збігається. Дійсно, спочатку маємо

$$s_{2n}(\alpha) = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n)^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{(2n-1)^\alpha} \leqslant 1+\frac{1}{2^\alpha}\,s_n(\alpha)+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n-2)^\alpha} <$$

$$< 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}\,s_n(\alpha) \leqslant 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}\,s_{2n}(\alpha), \quad n \geqslant 1,$$

звідки

$$s_{2n}(\alpha) < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}\,, \quad n \geqslant 1.$$

---

[1] *Ейлер Леонард* (1707—1783) — один із найвидатніших математиків усіх часів. Він був також фізиком, механіком і астрономом. Значну частину життя провів у Росії, був членом Петербурзької АН.

Тому

$$s_{2n}(\alpha) \to \zeta(\alpha) \in \mathbf{R}, \quad n \to \infty$$

і

$$s_{2n+1}(\alpha) = s_{2n}(\alpha) + \frac{1}{(2n+1)^{\alpha}} \to \zeta(\alpha), \quad n \to \infty.$$

Зауваження. Нехай $\zeta(\alpha)$ — сума ряду (5) при $\alpha > 1$. Функція ζ є знаменна **дзета-функція Рімана**, яка часто зустрічається в багатьох розділах математики. Ряд припущень щодо поведінки цієї функції до нашого часу не доведені і не спростовані.

Вправа

3. Знайти суми рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$; в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$, $m \in \mathbf{N}$.

1.2. ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ РЯДІВ

1°. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається і має суму s. Тоді для будь-якого $c \in \mathbf{R}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (ca_n)$ також збігається і має суму cs, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

⌈ Доведення випливає із означень. ⌋

2°. Нехай ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} a''_n$$

збігаються до сум s' і s'' відповідно. Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a'_n + a''_n)$$

збігається до суми $s' + s''$, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a'_n + a''_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n + \sum_{n=1}^{\infty} a''_n.$$

Означення. Для ряду

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

і числа $m \in \mathbf{N}$ ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n + \ldots \qquad (2)$$

називається ***залишком вихідного ряду***.

Якщо ряд (2) збігається, то r_m — його сума.

3°. Якщо ряд (1) збігається до суми s, то збігається і будь-який його залишок, причому

$$\forall m \in \mathbf{N}: \ s = s_m + r_m.$$

Якщо для деякого $m \in \mathbf{N}$ збігається залишок (2), то ряд (1) збігається.

Вправи

4. Довести, що для збіжного ряду

$$r_m \to 0, \ m \to \infty.$$

4°. Критерій Коші збіжності числового ряду. Для того щоб ряд (1) збігався, необхідно й достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N \ \forall p \in \mathbf{N}:$$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Цей критерій являє собою перефразування критерію Коші збіжності послідовності $\{s_n : n \geqslant 1\}$ часткових сум ряду.

Вправи

5. Довести, що ряди

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots;$$

$$a_1 + 0 + a_2 + 0 + a_3 + 0 + \ldots + 0 + a_n + 0 + \ldots$$

збігаються або розбігаються одночасно.

6. Довести збіжність ряду

$$\frac{\sin 1^2}{1^2} + \frac{\sin 2^2}{2^2} + \frac{\sin 3^2}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n^2}{n^2} + \ldots$$

§ 2. РЯДИ З НЕВІД'ЄМНИМИ ЧЛЕНАМИ

2.1. КРИТЕРІЙ ЗБІЖНОСТІ І НАСЛІДОК

ТЕОРЕМА. Нехай члени ряду

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

задовольняють умову: $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant 0$. Ряд (1) збігається тоді й тільки тоді, коли послідовність його часткових сум $\{s_n : n \geqslant 1\}$ обмежена.

|— Спочатку зауважимо, що для ряду (1) з невід'ємними членами послідовність часткових сум не спадає:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n, \quad n \geqslant 1.$$

Необхідність. Якщо ряд (1) збігається, то послідовність його часткових сум обмежена як збіжна послідовність. При цьому умова невід'ємності членів необов'язкова.

Достатність. Послідовність $\{s_n : n \geqslant 1\}$ монотонно не спадає й обмежена, отже, збігається. —|

Зауваження 1. Звернемо увагу на такі факти. Якщо $s_n \to s$, $n \to \infty$, то

$$\forall n \geqslant 1: \ s_n \leqslant s;$$

якщо, крім того, $\forall n \geqslant 1: \ a_n > 0$, то

$$\forall n \geqslant 1: s_n < s.$$

У подальшому замість цієї теореми часто будемо використовувати твердження, яке містить достатню умову збіжності ряду з невід'ємними членами.

ЛЕМА. Нехай ряд (1) з невід'ємними членами збігається, а послідовність чисел $\{d_n : n \geqslant 1\}$ така, що

$$\exists L > 0 \ \ \forall n \geqslant 1: \quad 0 \leqslant d_n \leqslant L.$$

Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n a_n \tag{2}$$

збігається.

|— Використаємо теорему. Покладемо

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \tilde{s}_n := \sum_{k=1}^{n} d_k a_k, \quad n \geqslant 1.$$

Згідно з теоремою

$$\forall n \geqslant 1: \ s_n \leqslant s = \lim_{n \to \infty} s_n.$$

Враховуючи умови леми, знаходимо

$$\forall n \geqslant 1: \quad \tilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} d_k a_k \leqslant L s_n \leqslant L s. \qquad \lrcorner$$

Зауваження 2. Зауважимо, що при умовах леми

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n a_n \leqslant L \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Вправи

1. Нехай ряд (1) з невід'ємними членами збігається, а послідовність чисел $\{d_n : n \geqslant 1\}$ обмежена. Довести, що ряд (2) збігається.

Вказівка. Використати критерій Коші.

2*. Довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

3. Довести збіжність рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$.

4*. Довести, що для будь-якої послідовності дійсних чисел $\{d_n : n \geqslant 1\}$ такої, що $d_n \to +\infty$, $n \to \infty$ існує збіжний ряд з невід'ємними членами

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

для якого ряд

$$d_1 a_1 + d_2 a_2 + \ldots + d_n a_n + \ldots$$

розбігається.

Це значить, що умова леми в певному сенсі необхідна.

2.2. ОЗНАКИ ПОРІВНЯННЯ

1°. Припустимо, що члени рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2}$$

задовольняють умову: $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, $n \leqslant 1$. Тоді із збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1) (із розбіжності ряду (1) випливає розбіжність ряду (2)).

⌈Нехай ряд (2) збігається. Покладемо

$$d_n = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n}, & b_n \neq 0; \\ 0, & b_n = 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що $0 \leqslant d_n \leqslant 1$, $d_n b_n = a_n$, $n \geqslant 1$. За лемою ряд (1) збігається. ⌋

Приклади. 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^3}$ збігається, оскільки за нерівністю

$$0 < \sin x < x, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$n \sin \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^2}, \quad n \geqslant 1,$$

причому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ розбігається, оскільки за нерівністю $\sin x > \frac{2}{\pi} x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin \frac{1}{n} > \frac{2}{\pi} \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 1$$

і гармонічний ряд розбігається.

3. Твердження 1° має місце, якщо $\exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N$: $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n^2}$ збігається. Дійсно, оскільки $\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}} \to 0$, $n \to \infty$, то

$$\exists N \ \forall n \geqslant N: \quad \frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}} < 1.$$

Тому

$$\forall n \geqslant N: \quad \frac{\ln^3 n}{n^2} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

причому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ збігається.

Вправи

5. Довести збіжність рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

6*. Визначити значення $a > 0$, для яких збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{f(n)}}{n}$, де $f(n)$ — число нулів у десятковому запису числа n.

Відповідь. $0 < a < 91$.

6.1. Нехай $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ і існує $\alpha > 0$ таке, що $a_{n+1} \leqslant \alpha a_n$, $n \geqslant 1$. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Довести, що для довільного $p \in \mathbf{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{np} = +\infty.$$

2°. Нехай члени рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{4}$$

задовольняють умові: $a_n > 0$, $b_n > 0$, $n \geqslant 1$. Припустимо, що існує скінченна, або нескінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C, \quad 0 \leqslant C \leqslant +\infty.$$

Тоді при $C < +\infty$ із збіжності ряду (4) випливає збіжність ряду (3), при $C > 0$ із розбіжності ряду (4) випливає розбіжність ряду (3). Таким чином, при $0 < C < +\infty$ обидва ряди одночасно збігаються або розбігаються.

Нехай $C < +\infty$ і ряд (4) збігається. Покладемо

$$d_n = \frac{a_n}{b_n} > 0, \quad n \geqslant 1.$$

Послідовність $\{d_n : n \geqslant 1\}$ обмежена як збіжна, і за лемою п. 2.1 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

збігається.

Якщо $C > 0$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{C} < +\infty$ і за доведеним із збіжності ряду (3) випливає збіжність ряду (4). ⌋

Приклади. 4. Нехай $\alpha > 0$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)^{\alpha}$$

розбігається при $\alpha \leqslant 1$ і збігається при $\alpha > 1$.

|— Дійсно,

$$(\sqrt{n^2+1} - n)^{\alpha} \sim \frac{1}{2^{\alpha}} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad n \to \infty,$$

тому

$$\frac{(\sqrt{n^2+1} - n)^{\alpha}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} \to \frac{1}{2^{\alpha}}, \quad n \to \infty,$$

причому узагальнений гармонічний ряд розбігається при $\alpha \leqslant 1$ і збігається при $\alpha > 1$. —|

5. Доведемо, що

$$\gamma_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \to \gamma, \quad n \to \infty.$$

Число $\gamma \approx 0{,}577215\ldots$ — ***стала Ейлера***. Цікаво відзначити, що до цього часу невідомо, чи є γ числом раціональним.

|— Для доведення зауважимо, що при $n > 1$

$$\gamma_n = 1 + \left(\frac{1}{2} - \ln\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \ln\frac{3}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\right)$$

є частковою сумою ряду

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\right),$$

для якого

$$\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}, \quad n \to \infty. \qquad —|$$

Вправи

7. Нехай $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$. При яких α і β ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \operatorname{arctg} n^{\beta}$$

збігається?

8. Довести збіжність послідовності

$$\left\{\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln n} - \ln\ln n : n \geqslant 2\right\}.$$

3°. Нехай члени рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{6}$$

задовольняють умовам:

$$\forall n \geqslant 1: a_n > 0,\ b_n > 0 \text{ і } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Тоді із збіжності ряду (6) випливає збіжність ряду (5).

Нехай ряд (6) збігається. Покладемо

$$d_n = \frac{a_n}{b_n} > 0, \quad n \geqslant 1.$$

Зазначимо, що для $n \geqslant 1$

$$d_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \frac{a_n}{b_n} = d_n \leqslant d_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant d_1.$$

Таким чином, послідовність $\{d_n : n \geqslant 1\}$ обмежена і за лемою п. 2.1 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

збігається.

Приклад 5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$ збігається. Дійсно, при $n \geqslant 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n-1} e^n n!}{e^{n+1}(n+1)!\, n^{n-2}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}}{e} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 =$$

$$= \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}; \qquad b_n := \frac{1}{n^2}.$$

Вправи

9. Довести збіжність рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

10. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ розбігається.

11. Нехай ряд з невід'ємними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Довести збіжність рядів:

а) $\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \ldots + \sqrt{a_n a_{n+1}} + \ldots;$

б) $\frac{\sqrt{a_1}}{1} + \frac{\sqrt{a_2}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_n}}{n} + \ldots;$

в) $\frac{a_1^{1/p}}{1^{2/q}} + \frac{a_2^{1/p}}{2^{2/q}} + \ldots + \frac{a_n^{1/p}}{n^{2/q}} + \ldots;\quad p > 1,\ q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

2.3. ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ

1°. Ознака Д'Аламбера[1] (перше формулювання). Якщо члени ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

задовольняють умовам:

1) $\forall n \geqslant 1:\ a_n > 0;$

2) $\exists \rho,\ 0 \leqslant \rho < 1\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geqslant n_0:\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \rho,$

то ряд (1) збігається. Якщо при умові 1)

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geqslant n_0:\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1,$$

то ряд (1) розбігається.

2°. Ознака Д'Аламбера (друге формулювання). Припустимо, що члени ряду (1) задовольняють умовам:

1) $\forall n \geqslant 1 : a_n > 0;$

2) існує $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r,\quad 0 \leqslant r \leqslant +\infty.$ Тоді при $r < 1$ ряд (1) збігається, а при $r > 1$ — розбігається.

⌈Твердження 2° є наслідком 1° і означення границі послідовності. Наприклад, при $r < 1$

$$\forall \rho,\ r < \rho < 1\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0:\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho.$$

Доведення 1° випливає із нерівностей

$$\forall n \geqslant n_0:\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \rho = \frac{\rho^{n+1}}{\rho^n};\qquad a_{n+1} \geqslant a_n;$$

[1] *Д'Аламбер Жан Лерон* (1717—1783) — один із найрізнобічних і впливових вчених XVIII ст. Математик, фізик, механік (принцип д'Аламбера), автор фізико-математичної частини «Енциклопедії» Д. Дідро, а також ряду праць з музики і естетики.

ознаки порівняння 3°, збіжності геометричного ряду і теореми 1 п. 1.1. _|

Приклад 1. Ряд

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

збігається для будь якого $x \geqslant 0$, оскільки

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!\,x^n}=\frac{x}{n+1}\to 0, \quad n\to\infty, \quad x>0.$$

Вправи.

12. Довести збіжність рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(n!)^2}{n^{2n}}$.

13. Якщо для ряду (1) з додатними членами $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, то ряд (1) збігається; якщо $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, то ряд (1) розбігається. Довести ці твердження.

3°. Ознака Коші (перше формулювання). Якщо члени ряду (1) задовольняють умовам:

1) $\forall n \geqslant 1;\ a_n \geqslant 0$;

2) $\exists \rho,\ 0 \leqslant \rho < 1\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geqslant n_0$: $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \rho$, то ряд (1) збігається. Якщо при умові 1) $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ для нескінченного числа номерів n, то ряд (1) розбігається.

4°. Ознака Коші (друге формулювання). Якщо члени ряду (1) задовольняють умовам:

1) $\forall n \geqslant 1$: $a_n \geqslant 0$;

2) існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$, $0 \leqslant r \leqslant +\infty$, то при $r<1$ ряд (1) збігається, а при $r>1$ — розбігається.

|— Твердження 4° є наслідком 3° і означення границі послідовності.

Доведення 3° випливає із нерівностей $\forall n \geqslant n_0$: $a_n \leqslant \rho^n$; $a_n \geqslant 1$ для нескінченного числа номерів n, ознаки порівняння 1° п. 2.2, збіжності геометричного ряду і теореми 1 п. 1.1._|

Приклад 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}2^n}{(n+1)^{n^2}}$ збігається, оскільки

$$\sqrt[n]{a_n}=2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\to\frac{2}{e}<1; \quad n\to\infty.$$

Вправи

14. Довести збіжність рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{(\ln n)^n}$.

15. Нехай для ряду (1) з невід'ємними членами $r := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$. Довести, що ряд (1) збігається при $r < 1$ і розбігається при $r > 1$.

16. Якщо для послідовності додатних чисел $\{a_n : n \geqslant 1\}$ існує

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r,$$

то існує

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r.$$

Довести це твердження і навести приклад, який показував би, що обернене твердження не має місця.

5°. Логарифмічна ознака. Нехай члени ряду (1) задовольняють умовам:

1) $\forall n \geqslant 0$: $a_n > 0$;

2) існує $\lim_{n\to\infty} \left(n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = r$, $-\infty \leqslant r \leqslant +\infty$. Тоді ряд (1) збігається при $r > 1$ і розбігається при $r < 1$.

⌈ Для доведення ознаки використаємо нерівності

$$\forall n \geqslant 1: \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

з яких випливає, що

$$\forall n \geqslant 1: \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Нехай $r > 1$ і $1 < \rho < r$ фіксоване. За означенням границі послідовності

$$\exists n_0\ \forall n \geqslant n_0: \ n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant \rho;$$

отже,

$$\forall n \geqslant n_0: n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant \rho n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

або

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\rho} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{1}{(n+1)^{\rho}}\right) / \left(\frac{1}{n^{\rho}}\right).$$

Потрібне твердження одержимо з 3°, п.2.2, і збіжності узагальненого гармонічного ряду з $\alpha = \rho > 1$. Нехай $r < 1$. Тоді

$$\exists n_0\ \forall n \geqslant n_0: \ n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1 < n \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right);$$

звідки

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n}{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \left(\frac{1}{n}\right) / \left(\frac{1}{n-1}\right).$$

У цьому випадку залишилось також використати 3° п. 2.2 і розбіжність гармонічного ряду. ⌋

Приклад 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{e^n n!}$ збігається, оскільки

$$n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = n \ln \frac{n^{n-1} e^{n+1} (n+1)!}{e^n n! (n+1)^n} = n \left(1 - (n-1) \times \right.$$
$$\left. \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \to \frac{3}{2} > 1, \quad n \to \infty.$$

Вправи

17. Довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

18. **Ознака Раабе**[1]. Припустимо, що члени ряду (1) задовольняють умовам:

1) $\forall n \geqslant 1$: $a_n > 0$;

2) існує $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$. Довести, що ряд (1) збігається при $r > 1$ і розбігається при $r < 1$.

Вказівка. Використати логарифмічну ознаку.

6°. **Інтегральна ознака Маклорена—Коші**[2]. Припустимо, що функція $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ задовольняє умовам:

1) $\forall x \geqslant 1$: $f(x) \geqslant 0$;
2) $\forall 1 \leqslant x_1 < x_2$: $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Нехай $a_n := f(n)$, $n \geqslant 1$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

збігається або розбігається в залежності від того, скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(u)\, du.$$

---

[1] *Раабе Жозеф Людвіг* (1801—1859) — швейцарський математик і фізик, засновник сферичної тригонометрії.

[2] *Маклорен Колін* (1698—1746) — шотландський математик, учень І. Ньютона. Разом з Д. Бернуллі і Л. Ейлером отримав премію Паризької АН за теорію напливів і відпливів. Першим опублікував працю про розклад функції в ряд.

|— Покладемо для $x \geqslant 1$

$$F(x) := \int_1^x f(u)\,du.$$

Зауважимо, що функція F монотонно не спадає на $[1, +\infty)$. Дійсно, за умовою 1)

$$F(x_2) = \int_1^{x_2} f(u)\,du = F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(u)\,du \geqslant F(x_1), \quad 1 \leqslant x_1 < x_2.$$

Тому існування

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \Leftrightarrow \text{існування } \lim_{n\to\infty} F(n) \Leftrightarrow \sup_{n\geqslant 1} F(n) < +\infty. \qquad (2)$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \; b_n := F(n+1) - F(n) = \int_n^{n+1} f(u)\,du; \quad n \geqslant 1$$

має часткові суми

$$\tilde{s}_n := \sum_{k=1}^{n} b_k = F(n+1) - F(1) = F(n+1), \quad n \geqslant 1,$$

і тому збігається тоді й тільки тоді, коли границя (2) скінченна. Крім того, оскільки

$$f(n+1) \leqslant F(n+1) - F(n) = \int_n^{n+1} f(u)\,du \leqslant f(n), \quad n \geqslant 1, \qquad (3)$$

то для $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$; $n \geqslant 1$, одержимо нерівності

$$s_{n+1} - f(1) \leqslant \tilde{s}_n \leqslant s_n, \quad n \geqslant 1.$$

Звідси

$$\sup_{n\geqslant 1} s_n < +\infty \Leftrightarrow \sup_{n\geqslant 1} \tilde{s}_n < +\infty \Leftrightarrow \sup_{n\geqslant 1} F_n < +\infty. \qquad \text{—|}$$

Зауваження. Нехай $r_m := \sum_{n=m+1}^{\infty} f(n)$, $m \geqslant 1$. Із співвідношення (3) випливає, що

$$r_m \leqslant \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(m) = \lim_{x\to+\infty} \int_m^x f(u)\,du.$$

Приклади. 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$ збігається, оскільки

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_{u=1}^{u=x} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Крім того,

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{1}{(\alpha - 1)\, m^{\alpha-1}}, \quad m \geqslant 1.$$

5. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^{\alpha}}$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leqslant 1$.

Дійсно,

$$\int_2^x \frac{du}{u (\ln u)^{\alpha}} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dz}{z^{\alpha}} = \frac{(\ln x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(\ln 2)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

при $\alpha \neq 1$ і

$$\int_2^x \frac{du}{u \ln u} = \ln\ln x - \ln\ln 2.$$

Вправи

18.1. Для ряду з приклада 4 знайти $\lim_{m \to \infty} (m^{\alpha-1} r_m)$.

18.2. Нехай $a_n > 0$, $n \geqslant 1$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається. Нехай $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 1$, $n \geqslant 1$. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{s_n \ln s_n}$ розбігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n}$ збігається.

19. Визначити α, при яких збігається ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^{\alpha}$, $a > 0$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^{\alpha}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha}$.

20. Ознака Коші. Припустимо, що

$$\forall n \geqslant 2: \quad a_{n-1} \geqslant a_n \geqslant 0.$$

Довести, що ряди

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

$$2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^n a_{2^n} + \ldots$$

збігаються або розбігаються одночасно. Використати цей результат для дослідження гармонічного ряду.

21*. Нехай $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

22. Довести, що при умовах вправи 18.2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^{\alpha}}$ збігається для $\alpha > 1$ і розбігається для $\alpha \leqslant 1$.

23. Нехай $a_n > 0$, $n \geqslant 1$, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Нехай

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \quad n \geqslant 1.$$

Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^{\alpha}}$ збігається при $\alpha < 1$ і розбігається при $\alpha \geqslant 1$.

24. Нехай $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається. Дослідити збіжність рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n^2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n a_n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$.

25. Припустимо, що для $n \geqslant 1$ $a_n > 0$ і для фіксованого $m \in \mathbf{N}$ існує

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+m}}{a_n} = r.$$

Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається при $r < 1$ і розбігається при $r > 1$.

26. Нехай $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ і $\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[\ln n]{a_n} < \frac{1}{e}$.

Довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

27. Нехай $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ і $\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[\ln \ln n]{n a_n} < \frac{1}{e}$.

Довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

§ 3. ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ З ДОВІЛЬНИМИ ЧЛЕНАМИ

3.1. РЯД ЛЕЙБНІЦА

Розглянемо ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots \qquad (1)$$

Доведемо, що ряд (1) збігається і знайдемо його суму. Нехай

$$s_n := 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n};$$

$$\gamma_n := s_n - \ln n,$$

$$\tilde{s}_n := 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad n \geqslant 1.$$

Зауважимо, що для $k \geqslant 1$

$$\tilde{s}_{2k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k} = 1+\frac{1}{2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{2k}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right) = s_{2k}-s_k = \ln 2k +$$

$$+\gamma_{2k}-\ln k-\gamma_k;$$

$$\tilde{s}_{2k+1} = \tilde{s}_{2k}+\frac{1}{2k+1}.$$

Оскільки $\gamma_n \to \gamma$, $n \to \infty$, то $\tilde{s}_n \to \ln 2$, $n \to \infty$.

Таким чином, ряд (1) збігається і

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2. \qquad (2)$$

Цікаво, що збіжність ряду Лейбніца (1), зокрема його сума, залежать від порядку розташування його членів. Розглянемо ряд

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}+\ldots, \qquad (3)$$

який відрізняється від ряду (1) тільки порядком розташування членів. Для часткової суми ряду (3) з номером $3k$ маємо для $k \geqslant 1$:

$$\tilde{\tilde{s}}_{3k} := 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4k-3}+$$

$$+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{4k-1}+\frac{1}{4k}-$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4k}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)=$$

$$=s_{4k}-\frac{1}{2}s_{2k}-\frac{1}{2}s_k=\gamma_{4k}+\ln 4k-\frac{1}{2}\gamma_{2k}-\frac{1}{2}\ln(2k)-$$

$$-\frac{1}{2}\gamma_k-\frac{1}{2}\ln k.$$

Тому

$$\tilde{\tilde{s}}_{3k}\to\frac{3}{2}\ln 2,\quad k\to\infty;$$

$$\tilde{\tilde{s}}_{3k+1}:=\tilde{\tilde{s}}_{3k}+\frac{1}{4k+1}\to\frac{3}{2}\ln 2,\quad k\to\infty;$$

$$\tilde{\tilde{s}}_{3k+2}:=\tilde{\tilde{s}}_{3k}+\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+3}\to\frac{3}{2}\ln 2,\quad k\to\infty.$$

Отже, і $\tilde{\tilde{s}}_n\to\frac{3}{2}\ln 2,\ n\to\infty.$

Таким чином,

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots=\frac{3}{2}\ln 2.$$

Ряд Лейбніца має нову властивість, яка притаманна рядам: на відміну від скінченної суми сума ряду залежить від порядку доданків.

Вправи

1. Довести, що

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{2}\ln 6.$$

2. Довести, що

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

3*. Довести, що

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

Зауважимо, що якщо «звести подібні члени» як в скінченній сумі, то в лівій частині одержимо 0.

3.2. АБСОЛЮТНО Й УМОВНО ЗБІЖНІ РЯДИ

Означення 1. Ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

називається ***абсолютно збіжним***, якщо ряд

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \tag{2}$$

збігається.

Означення 2. Збіжний ряд (1) називається ***умовно збіжним***, якщо ряд (2) розбігається.

Прикладом умовно збіжного ряду є ряд Лейбніца.

ТЕОРЕМА 1. Якщо ряд (1) збігається абсолютно, то він збігається, причому

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

$\vdash$ Члени ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) \tag{3}$$

задовольняють нерівностям $0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|, \quad n \geqslant 1$. Тому ряд (3) збігається. Додавши до ряду (3) збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-|a_n|)$, одержимо збіжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Нерівність для сум рядів дістанемо за допомогою переходу до границі в нерівностях

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad n \geqslant 1. \qquad \dashv$$

Покладемо для $n \geqslant 1$:

$$u_n := \begin{cases} a_n, & a_n \geqslant 0; \\ 0, & a_n < 0; \end{cases} \qquad v_n := \begin{cases} -a_n, & a_n < 0; \\ 0, & a_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Зазначимо, що:

1) $u_n \geqslant 0, \ v_n \geqslant 0, \ n \geqslant 1$;
2) $a_n = u_n - v_n, \quad n \geqslant 1$;
3) $|a_n| = u_n + v_n, \ n \geqslant 1$.

ТЕОРЕМА 2. Ряд (1) збігається абсолютно тоді й тільки тоді, коли ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{4}$$

збігаються, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{5}$$

⌈ Збіжність рядів (4) випливає з нерівностей

$$u_n \leqslant |a_n|, \quad v_n \leqslant |a_n|, \quad n \geqslant 1$$

і ознаки порівняння 1° п. 2.2. Використовуючи збіжності рядів (4), одержимо рівності (5) за допомогою 1° п. 1.2 і 2° п. 1.2. ⌋

ТЕОРЕМА 3. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно. Тоді ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{6}$$

розбігаються.

⌈ Припустимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається. Тоді, згідно з 1° п. 1.2 і 2° п. 1.2, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

збігається. Проте із збіжності рядів (6) випливає абсолютна збіжність вихідного ряду. ⌋

3.3. ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ

1°. Ознака Лейбніца. Припустимо, що числа a_n, $n_n \geqslant 1$ задовольняють умовам:

1) $\forall n \geqslant 1$: $a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$;

2) $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Тоді ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{7}$$

збігається до суми s, причому $0 \leqslant s \leqslant a_1$.

$\ulcorner$ Для часткових сум з парними номерами з умови (1) випливає

$$s_{2k} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2k-1} - a_{2k} = (a_1 - a_2) + \\ + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2k-1} - a_{2k}) \geqslant s_{2k-2}, \quad k \geqslant 2.$$

Аналогічно

$$s_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - \\ - a_{2k} \leqslant a_1, \quad k \geqslant 1.$$

Таким чином, послідовність $\{s_{2k}: k \geqslant 1\}$ монотонно не спадає і обмежена: $0 \leqslant s_{2k} \leqslant a_1$, $k \geqslant 1$.

Нехай $s = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k}$, $s \in \mathbf{R}$. Тоді згідно з умовою 2)

$$s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1} \to s, \quad k \to \infty. \qquad \lrcorner$$

Зауваження 1. Нехай

$$r_m = (-1)^m a_{m+1} + (-1)^{m+1} a_{m+2} + \ldots$$

залишок ряду (7), $m \in \mathbf{N}$. Тоді

$$|r_m| \leqslant a_{m+1}, \quad m \geqslant 1.$$

Вправи

4. Дослідити збіжність рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]}}{n}$, $[a]$ — ціла частина числа a.

5. Довести, що ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots$$

збігається, а ряд, отриманий перестановкою доданків,

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots$$

розбігається.

6*. Нехай числа a_n, $n \geqslant 1$ задовольняють умовам ознаки Лейбніца. Довести збіжність ряду

$$a_1 - \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} - \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} + \ldots$$

7. Навести приклад збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, для якого:

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ розбігається;

б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ розбігається.

Нехай n і p — фіксовані числа з $\mathbf{N}$

$$\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+p}; b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_{n+p}\} \subset \mathbf{R},$$

$$\sigma(n, n+1) := 0, \ \sigma(k, n+1) = \sum_{i=n+1}^{k} b_i, \quad k \geqslant n+1.$$

ЛЕМА (тотожність Абеля[1]). Має місце рівність

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \sigma(k, n+1)(a_k - a_{k+1}) + \sigma(n+p, n+1) a_{n+p}.$$

⌈ Для доведення використаємо зображення

$$b_k = \sigma(k, n+1) - \sigma(k-1, n+1), \ k \geqslant n+1$$

і перегрупування доданків. ⌋

2°. **Ознака Діріхле.** Припустимо, що послідовності чисел $\{a_n : n \geqslant 1\}$, $\{b_n : n \geqslant 1\}$ задовольняють умовам:

1) $\{a_n : n \geqslant 1\}$ монотонна;

2) $a_n \to 0, \ n \to \infty$;

3) $\exists C > 0 \ \forall n \geqslant 1: \ \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant C.$

Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{8}$$

збігається.

⌈ Для доведення збіжності ряду (8) використаємо критерій Коші. За оцінкою

$$|\sigma(k, n+1)| \leqslant 2C, \quad k \geqslant n+1,$$

---

[1] *Абель Нільс Генрік* (1802—1829) — норвезький математик. Довів неможливість розв'язку загального алгебраїчного рівняння вище четвертого степеню за допомогою явних формул, аналогічних формулам розв'язку квадратного рівняння.

яка випливає із умови 3), і тотожністю Абеля, маємо

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant 2C \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| + 2C|a_{n+p}|.$$

Враховуючи умову 1), маємо

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1})\right| = |a_{n+1} - a_{n+p}| \leqslant$$

$$\leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+p}|.$$

Тому

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant 2C\,(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|).$$

Звідси, враховуючи умову 2), одержимо умову критерію Коші збіжності ряду (8). ⌋

Приклад 1. Доведемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ збігається для будь-якого $x \in \mathbf{R}$.

⌈ Якщо $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, то твердження очевидне. Нехай $x \neq k\pi$, де $k \in \mathbf{Z}$. Покладемо в 2°

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \sin nx, \quad n \geqslant 1.$$

Тоді умови 1) і 2) виконані. Крім того,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right| =$$

$$= \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \quad n \geqslant 1,$$

тому й умова 3) теж виконана. ⌋

Зауваження 2. Ознака Лейбніца випливає з ознаки Діріхле.

Вправи

8. Довести збіжність рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x \cdot \sin nx}{n}, \quad x \in \mathbf{R};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 x \cdot \sin nx}{n}, \quad x \in \mathbf{R}.$

9. Довести збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \sin nx}{n}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

10. Довести, що для $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ збігається умовно.

Вказівка. Використати нерівність $|\sin \alpha| \geqslant \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, ознаку Діріхле і розбіжність гармонічного ряду.

11*. Визначити, при яких $x \in \mathbf{R}$ збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x \cdot \cos nx}{n}.$$

3°. Ознака Абеля. Припустимо, що послідовності чисел $\{a_n : n \geqslant 1\}$, $\{b_n : n \geqslant 1\}$ задовольняють умовам:

1) $\{a_n : n \geqslant 1\}$ монотонна;
2) $\{a_n : n \geqslant 1\}$ обмежена;
3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається. Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{9}$$

збігається.

⌈Ознака Абеля випливає із ознаки Діріхле, яку потрібно застосувати до послідовностей

$$\{a_n - a : n \geqslant 1\}, \ \{b_n : n \geqslant 1\},$$

де a — границя послідовності $\{a_n : n \geqslant 1\}$. Із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n$ і умови 3) випливає збіжність ряду (9). ⌋

Вправа

12. Довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}$.

§ 4. ІНШІ ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ РЯДІВ. ДОБУТОК РЯДІВ

4.1. ГРУПУВАННЯ ЧЛЕНІВ РЯДУ

Значення скінченної суми не змінюється при виконанні таких операцій: групування доданків, переставлення їх, розкриття дужок. При розгляді нескінченних рядів ситуація дещо інша. Деякі операції у загальному випадку неприпустимі. Наприклад, у нескінченному ряді не можна розкривати дужки, точніше якщо члени ряду є скінченними сумами, то ряд, членами якого є доданки цих сум, веде себе інакше, ніж вихідний. Так, ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots$$

збігається. Проте ряд $1-1+1-1+\ldots$ розбігається. Для ряду Лейбніца в п. 3.1 було доведено, що його сума залежить від порядку доданків.

Означення 1. Нехай $\{m(k),\ k \geqslant 1\}$ — строго зростаюча послідовність натуральних чисел і

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

деякий ряд. Покладемо

$$b_1 := a_1+a_2+\ldots+a_{m(1)}; \qquad b_2 := a_{m(1)+1}+\ldots+a_{m(2)}, \ldots .$$

Будемо казати, що ряд

$$b_1+b_2+\ldots+b_k+\ldots \qquad (2)$$

одержано з вихідного ряду (1) ***групуванням членів*** (без зміни порядку) або ***розстановкою дужок***, а ряд (1) одержується з ряду (2) ***розкриттям дужок***.

ТЕОРЕМА. У збіжному ряді припустима довільна розстановка дужок (групування членів без зміни порядку). Одержаний ряд збігається і має ту саму суму, що й вихідний.

⌈Нехай $s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$, $n \geqslant 1$ — часткові суми збіжного ряду (1). Розглянемо ряд (2), отриманий з допомогою групування членів ряду (1). Для $n \geqslant 1$

$$b_1+b_2+\ldots+b_n = s_{m(n)}.$$

Отже, часткові суми ряду (2) являють собою підпослідовність послідовності $\{s_n : n \geqslant 1\}$. ⌋

Вправи

1. Довести, що дужки можна розкривати, якщо одержаний в результаті ряд збігається.

2. Для довільного ряду допустиме групування членів з однаковими знаками (без заміни порядку розташування!). Наприклад, ряди

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots,$$

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{4}+\ldots$$

збігаються до однієї суми. Довести це твердження.

4.2 ПЕРЕСТАВЛЕННЯ ЧЛЕНІВ РЯДУ

Означення 2. Нехай $m : \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ — деяка бієкція (кажуть також, що $m(1)$, $m(2)$ ... є переставленням чисел 1, 2, ...) і

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots -$$

деякий ряд. Будемо казати, що ряд

$$a_{m(1)}+a_{m(2)}+\ldots+a_{m(n)}+\ldots$$

отримано за допомогою ***переставлення членів*** вихідного ряду

ТЕОРЕМА 1 (Діріхле). У ряді з невід'ємними членами припустиме довільне переставлення членів ряду. Точніше, ряд, отриманий після переставлення доданків, збігається до тієї ж суми (розбігається), якщо вихідний ряд збігається (розбігається).

$\ulcorner$ Нехай $m(1), m(2), \ldots, m(k), \ldots$ — деяке переставлення чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$, тобто

$$\forall k\in\mathbf{N}:\ m(k)\in\mathbf{N};\qquad \forall n\in\mathbf{N}\ \exists!\, k\in\mathbf{N}:\ m(k)=n.$$

Припустимо, що $a_n\geqslant 0$, $n\geqslant 1$. Розглянемо ряди

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots; \tag{3}$$

$$a_{m(1)}+a_{m(2)}+\ldots+a_{m(k)}+\ldots \tag{4}$$

і відповідні їм часткові суми

$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\quad n\geqslant 1;$$

$$\tilde{s}_k=a_{m(1)}+a_{m(2)}+\ldots+a_{m(k)},\quad k\geqslant 1.$$

Якщо ряд (3) збігається, то

$$\forall n\geqslant 1:\ s_n\leqslant s=\lim_{i\to\infty} s_i,$$

і тому

$$\forall k \geqslant 1: \tilde{s}_k \leqslant s_N \leqslant s; \qquad N_1 = \max(m(1), m(2), \ldots, m(k)).$$

Тому ряд (4) також збігається до деякого числа $\tilde{s}$ і $\tilde{s} \leqslant s$. Проте можна вважати, що ряд (3) отримано з ряду (4) за допомогою переставлення його членів. Тому згідно з доведеним $s \leqslant \tilde{s}$.

Таким чином, ряди (3) і (4) збігаються одночасно і $s = \tilde{s}$. ⌋

ТЕОРЕМА 2. У абсолютно збіжному ряді припустиме довільне переставлення членів.

⌈ Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно. Використаємо позначення і результат теореми 2 п. 3.2. Одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

де $u_n \geqslant 0$, $v_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Згідно з теоремою 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{m(k)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{k=1}^{\infty} v_{m(k)}. \qquad ⌋$$

Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{m(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} v_{m(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m(k)}.$$

Вправи

3*. Теорема Рімана. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно і $s \in \mathbf{R} \cup \cup \{-\infty, +\infty\}$. Існує таке переставлення $\{m(k): k \geqslant 1\}$ множини $\mathbf{N}$, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m(k)}$ збігається до s. Довести це твердження. Чи існує переставлення, для якого часткові суми переставленого ряду обмежені, але не мають границі?

4. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — розбіжний ряд з додатними членами, причому $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Довести, що для будь-якого числа $s \in \mathbf{R}$ існує послідовність $\{\varepsilon_n: n \geqslant 1\}$ чисел таких, що кожне $\varepsilon_n = 1$ або $\varepsilon_n = -1$, і таких, що ряд

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots = s$$

збігається до суми s.

5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ має таку властивість: для будь-якого переставлення $\{m(k)\colon k \geqslant 1\}$ множини N ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m(k)}$ збігається. Довести, що вихідний ряд збігається абсолютно.

4.3. МНОЖЕННЯ РЯДІВ

Добутком двох сум

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

є сума всіх добутків із схеми

$$\begin{array}{cccc} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0\,b_2 \ldots & a_0b_n \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1\,b_2 \ldots & a_1b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \ldots & \cdot \\ a_nb_0 & a_nb_1 & a_nb_0 \ldots & a_nb_n, \end{array} \tag{1}$$

порядок розташування доданків при цьому не істотний. При переході до рядів аналог схеми (1) містить нескінченно багато рядків і стовпців. Природно визначити добуток двох рядів як ряд, зіставлений із добутків доповненої схеми (1), але при цьому порядок підсумовування є істотним.

Означення. Добутком в сенсі Коші рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tag{2}$$

називається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \right). \tag{3}$$

Вправи

6. Довести, що якщо ряди (2) збігаються, то ряд (3) не обов'язково збігається. Навести приклад.

7. Довести, що якщо для збіжних рядів (2) ряд (3) збігається, то його сума дорівнює добутку сум рядів (2).

ТЕОРЕМА (Коші). Нехай ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$$

збігаються абсолютно.

Тоді ряд складений із добутків $a_i b_j$, $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$, занумерованих у довільному порядку, зокрема, ряд — добуток за Коші, збігається абсолютно і його сума дорівнює $a \cdot b$.

$\ulcorner$ За умовою теореми

$$\exists C \in \mathbf{R}\ \forall N \geqslant 1\colon \sum_{n=0}^{N} |a_n| \leqslant C, \quad \sum_{n=0}^{N} |b_n| \leqslant C.$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{i(n)} b_{j(n)}, \tag{4}$$

складений із занумерованих в якому-небудь порядку добутків $a_i b_j$: $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$. Доведемо, що ряд (4) збігається абсолютно. Дійсно,

$$\forall m \geqslant 1\colon \sum_{n=0}^{m} |a_{i(n)} b_{j(n)}| \leqslant \sum_{i,j=0}^{N} |a_i|\,|b_j| =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} |a_i| \sum_{j=0}^{N} |b_j| \leqslant C^2,$$

де $N = \max\{i(n), j(n) \mid 0 \leqslant n \leqslant m\}$.

Таким чином, ряд (4) збігається абсолютно і його сума не залежить від порядку доданків. Зокрема, за теоремою п. 4.1

$$s = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2 +$$

$$+ a_1 b_2 + a_0 b_2) + \ldots .$$

Часткова сума s_n з номером n останнього ряду

$$s_n = \sum_{i,j=0}^{n-1} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{j=0}^{n-1} b_j.$$

Тому $s_n \to ab$, $n \to \infty$. $\lrcorner$

Вправи

8. Для будь-якого $x \in \mathbf{R}$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} =: a(x).$$

збігається абсолютно. Довести, що

$$\forall \{x, y\} \subset \mathbf{R}\colon\ a(x+y) = a(x)\,a(y).$$

9. Довести, що при умовах теореми

$$\lim_{n\to\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0) = 0.$$

§ 5. НЕСКІНЧЕННІ ДОБУТКИ

5.1. ОЗНАЧЕННЯ. ЗВ'ЯЗОК З РЯДАМИ

Нехай $\{a_n: n \geqslant 1\}$ — послідовність дійсних чисел. Добуток $p_n := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ називається n-м ***частковим добутком***, $n \geqslant 1$. Зауважимо, що

$$p_{n+1} = p_n a_{n+1}, \quad n \geqslant 1.$$

Означення. Дві послідовності $\{a_n: n \geqslant 1\}$ і $\{p_n: n \geqslant 1\}$ називаються ***нескінченним добутком*** і позначаються символом

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Якщо послідовність $\{p_n : n \geqslant 1\}$ збігається до числа $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, то добуток (1) називається ***збіжним***, а число a — його ***значенням*** і позначається символом

$$a = \prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

У всіх інших випадках добуток (1) називається ***розбіжним***.

Зауваження 1. Якщо добуток (1) збігається, то $\exists n\ \forall k \geqslant n$: $p_k \neq 0$; отже, $\forall m \geqslant 1$: $a_m \neq 0$.

2. Якщо добуток (1) збігається, то $a_n \to 1$, $n \to \infty$.

Дійсно, якщо $p_n \to a$, $n \to \infty$ і $a \neq 0$, то

$$a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \to \frac{a}{a} = 1, \quad n \to \infty.$$

Далі розглядатимемо добуток (1) тільки для $a_n > 0$, $n \geqslant 1$.

ТЕОРЕМА. Для того щоб добуток (1) збігався до значення a, необхідно й достатньо, щоб збігався ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n = s;$$

при цьому

$$a = e^s.$$

⌈ Покладемо

$$s_n = \ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n = \ln p_n, \quad n \geqslant 1.$$

Тоді

$$p_n = e^{s_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Якщо $p_n \to a > 0$, $n \to \infty$, то $\ln p_n = s_n \to \ln a$, $n \to \infty$, за неперервністю логарифмічної функції на $(0, +\infty)$. Якщо ж $s_n \to s$, $n \to \infty$, то $e^{s_n} = p_n \to e^s$, $n \to \infty$, за неперервністю показникової функції. ⌋

Вправи

1. Довести, що для x, $|x| < 1$, добуток

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots$$

збігається і знайти його значення.

2. Довести, що добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ розбігається.

3. Знайти значення добутку $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)$.

5.2. ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ

ТЕОРЕМА 1. Нехай $u_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) \tag{1}$$

збігається тоді й тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{2}$$

⌈ Добуток (1) збігається тоді й тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+u_n). \tag{3}$$

Нехай ряд (3) збігається, тоді $\ln(1+u_n) \to 0$, $n \to \infty$, тому $u_n = e^{\ln(1+u_n)} - 1 \to 0$, $n \to \infty$. Отже,

$$\ln(1+u_n) \sim u_n, \quad n \to \infty \tag{4}$$

і ряд (2) збігається за 2° п. 2.2.

Якщо збігається ряд (2), то $u_n \to 0$, $n \to \infty$ і знову виконане співвідношення (4), згідно з яким, як і раніше, випливає збіжність ряду (3). ⌋

Зауваження. Теорема 1 має місце і тоді, коли $-1 < u_n \leqslant 0$, $n \geqslant 1$.

Вправи

4. Довести збіжність добутка $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

5. Визначити значення $x \geqslant 0$, для яких добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)$ збігається.

ТЕОРЕМА 2. Нехай числа u_n, $n \geqslant 1$ задовольняють умови:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ збігається.

Тоді добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ збігається.

$\ulcorner$ Доведемо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln (1 + u_n). \tag{5}$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - \ln (1 + u_n)) \tag{6}$$

збігається, оскільки

$$u_n - \ln (1 + u_n) \sim \frac{1}{2} u_n^2, \ n \to \infty.$$

(згідно з умовою 1) $u_n \to 0$, $n \to \infty$). Враховуючи умову 2), застосуємо зараз ознаку порівняння 2° п. 2.2. Збіжність ряду (5) випливає з умови 1) і збіжності ряду (6). $\lrcorner$

Вправи

6. Визначити значення $x \in \mathbf{R}$, для яких збігається добуток заданий у вправі 5.

7. Дослідити на збіжність добутки:

а) $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$; б) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n}\right)$;

в) $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$; г) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$;

д) $\prod_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{x^2 dx}{1+x^2}$.

Добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***абсолютно збіжним,*** якщо є абсолютно збіжним ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n.$$

Для абсолютно збіжного добутка можливе довільне переставлення співмножників без зміни значення добутка.

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Глава 8

§ 1. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ФУНКЦІЙ

1.1. ВИЗНАЧЕННЯ

Нехай $A \subset \mathbf{R}$ і для кожного $n \in \mathbf{N}$ f_n: $A \to \mathbf{R}$; f: $A \to \mathbf{R}$

Означення 1. Послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in A\colon n \geqslant 1\}$ ***збігається поточково на множині*** A до функції f, якщо

$$\forall x \in A\colon\ f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty.$$

Нехай $B \subset A$.

Означення 2. Послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in A\colon n \geqslant 1\}$ ***збігається рівномірно на множині*** B до функції f, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall x \in B\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Означення 2 рівносильне наступному.

Означення 3. Послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in A\colon n \geqslant 1\}$ ***збігається рівномірно на множині*** B до функції f, якщо числова послідовність

$$d_n := \sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Зауваження 1. При наших припущеннях $d_n \leqslant +\infty$, $n \geqslant 1$. Зауважимо також, що з рівномірної на множині B збіжності послідовності випливає її поточкова збіжність на множині B.

Приклад 1. Нехай для $n \geqslant 1$ і $A = [0, 1]$ $f_n(x) = x^n$, $x \in A$; $f(x) = 0$ для $x \in [0, 1)$ і $f(1) = 1$. Послідовність $\{x^n,\ x \in [0, 1]\colon n \geqslant 1\}$ збігається поточково до f. Ця збіжність на множині $B = [0, 1]$ не є рівномірною, оскільки

$$d_n = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1)} |x^n - 0| = 1 \not\to 0, \quad n \to \infty.$$

На множині $B_\alpha = [0, \alpha]$, $0 < \alpha < 1$ послідовність $\{x^n,\ x \in [0, \alpha]\colon n \geqslant 1\}$ збігається до f рівномірно, оскільки

$$d_n = \sup_{x \in [0,\alpha]} x^n = \alpha^n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Зауваження 2. Зауважимо, що в прикладі 1 поточкова границя f послідовності неперервних на $[0, 1]$ функцій не є неперервною функцією.

Приклади. 2. Послідовність $\left\{\frac{1}{n^2+x^2},\ x \in \mathbf{R};\ n \geqslant 1\right\}$ збігається поточково на $\mathbf{R}$ до $f(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$. Ця збіжність рівномірна $\mathbf{R}$, оскільки

$$d_n = \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \frac{1}{n^2+x^2} - 0 \right| = \sup_{x \in \mathbf{R}} \frac{1}{n^2+x^2} = \frac{1}{n^2} \to 0, \quad n \to \infty$$

3. Послідовність

$$\left\{\frac{2nx}{1+n^2x^2},\ x \in [0,\ 1]:\ n \geqslant 1\right\}$$

збігається поточково на $[0, 1]$. Ця збіжність не є рівномірною на $[0,1]$, оскільки

$$d_n = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{2nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \max_{x \in [0,1]} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 1 \not\to 0, \quad n \to \infty,$$

збіжність рівномірна на множині $B_\alpha = [\alpha, 1]$, $0 < \alpha < 1$, оскільки

$$d_n = \max_{x \in [\alpha,1]} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = \frac{2n\alpha}{1+n^2\alpha^2}, \quad n > \frac{1}{\alpha},$$

і тому $d_n \to 0$, $n \to \infty$.

Вправи

1. Нехай $A = \mathbf{R}$, $f_n(x) = 0$ для $x \leqslant n$ і $f_n(x) = 1$ для $x > n$. Довести, що послідовність $\{f_n(x),\ x \in \mathbf{R}:\ n \geqslant 1\}$ збігається рівномірно на будь-якій обмеженій множині B і не збігається рівномірно на $\mathbf{R}$.

2. Нехай $f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$, $x \geqslant 0$, $n \geqslant 1$.

Знайти поточкову границю послідовності на $[0, +\infty)$ і довести, що збіжність є рівномірною на будь-якій множині $B = [0, c]$, де $c > 0$, і не є рівномірною на $[0, +\infty)$.

1.2. ВЛАСТИВОСТІ РІВНОМІРНО ЗБІЖНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

ТЕОРЕМА (критерій Коші рівномірної збіжності послідовності функцій). Для того щоб послідовність функцій $\{f_n(x),\ x \in A : n \geqslant 1\}$ збігалася рівномірно на множині A, необхідно й достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall m \geqslant N\ \forall n \geqslant N\ \forall x \in A:$$

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{1}$$

|‾ Необхідність. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. За означенням 2

$$\exists N \ \forall n \geqslant N \ \forall x \in A: \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді

$$\forall m \geqslant N \ \forall n \geqslant N \ \forall x \in A:$$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Достатність. Нехай $x \in A$ фіксоване. Виконання умови теореми для x означає фундаментальність послідовності чисел $\{f_n(x): n \geqslant 1\}$. Таким чином,

$$\exists f(x) \in \mathbf{R}: \ f_n(x) \to f(x), \ n \to \infty.$$

Нехай тепер $\varepsilon > 0$ задано. Перейшовши до границі при $m \to \infty$ в нерівності (1), одержимо

$$\forall n \geqslant N \ \forall x \in A: \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \qquad \_|$$

ЛЕМА 1. Нехай $\{f_n(x), \ x \in A: n \geqslant 1\}$, $f: A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$. Припустимо, що виконані умови:

1) $\{f_n(x), \ x \in A: n \geqslant 1\}$ збігається рівномірно на A до f;

2) $\forall n \geqslant 1$ функція f_n неперервна в точці x_0. Тоді f неперервна в точці x_0.

|‾ Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Згідно з умовою 1)

$$\exists N \ \forall n \geqslant N \ \forall x \in A: \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

За умовою 2)

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in A, |x - x_0| < \delta: \ |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тоді

$$\forall x \in A, \ |x - x_0| < \delta: \ |f(x) - f(x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad \_|$$

ЛЕМА 2. Нехай $\{f_n(x), \ x \in [a, b]: n \geqslant 1\}$, $f: [a, b] \to \mathbf{R}$. Припустимо, що виконані умови:

1) $\{f_n(x), \ x \in [a, b]: n \geqslant 1\}$ — збігається рівномірно на $[a, b]$ до f;

2) $\forall n \geqslant 1: f_n \in \mathbf{R}([a, b])$.

Тоді $f \in \mathbf{R}([a, b])$.

|‾ Лема 2 була доведена в п. 4.2 глави 6. _|

Вправа

3. Довести, що рівномірна на осі границя послідовності многочленів є многочлен.

§ 2. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РЯДУ

2.1. ОЗНАЧЕННЯ

Нехай $A \subset \mathbf{R}$; a_n: $A \to \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$. Для $x \in A$ розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x). \tag{1}$$

Нехай $s_n(x) := a_1(x) + \ldots + a_n(x)$, $x \in A$, $n \geqslant 1$.

Означення 1. Множина всіх тих точок $x \in A$, для яких ряд (1) збігається, називається ***множиною збіжності ряду (1).***

Зауваження 1. Множина збіжності ряду (1) є множина, на якій послідовність часткових сум збігається поточково.

Вправа

1. Визначити множини збіжності і абсолютної збіжності ряду:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \dfrac{x}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^x}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$; д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3^{-n(1+x)} + 2^{nx})$.

Означення 2. Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $x \in A$ називається ***рівномірно збіжним на множині*** $B \subset A$, якщо послідовність $\{s_n(x),\ x \in A : n \geqslant 1\}$ збігається рівномірно на множині B.

Зауваження 2. Рівномірно збіжний на множині B ряд збігається на цій множині. Тому при дослідженні рівномірної збіжності на даній множині можна обмежитися розглядом рядів, які збігаються на цій множині.

Покладемо

$$a(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad r_m(x) := \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n(x), \quad x \in A.$$

Наступне означення рівносильне означенню 2, але зручніше для використання.

Означення 3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a(x), \quad x \in A$$

збігається рівномірно на множині $B \subset A$, якщо

$$d_n := \sup_{x \in B} |s_n(x) - a(x)| = \sup_{x \in B} |r_n(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Приклад 1. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1)$$

збігається рівномірно на будь-якій множині $B_\alpha = [-\alpha, \alpha]$, де $0 < \alpha < 1$, оскільки

$$d_n = \sup_{x \in [-\alpha, \alpha]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| = \sup_{x \in [-\alpha, \alpha]} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leqslant \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \to 0, \quad n \to \infty.$$

На множині $(-1, 1)$ рівномірної збіжності немає, оскільки $d_n = +\infty$, $n \geqslant 1$.

Безпосереднім наслідком теореми п. 1.2 є наступне твердження.

ТЕОРЕМА (критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $x \in A$ збігається рівномірно на множині $B \subset A$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N \ \forall p \in \mathbf{N} \ \forall x \in B:$$
$$|a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Вправи

2. Якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad x \in A \tag{2}$$

збігається рівномірно на множині A, то послідовність $\{a_n(x), x \in A : n \geqslant 1\}$ збігається рівномірно на A до 0. Довести це.

3. Якщо ряд (2) збігається рівномірно на A, а функція $b: A \to \mathbf{R}$ обмежена на A, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b(x)\, a_n(x)), \quad x \in A \tag{3}$$

збігається рівномірно на множині A. Якщо ряд (3) збігається рівномірно на A, а функція $\frac{1}{b}$ обмежена на A, то ряд (2) збігається рівномірно на A. Довести це.

4. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, $x \in A$ збігаються рівномірно на A, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) + b_n(x))$$

збігається рівномірно на A. Довести це.

5. Якщо ряд (2) збігається рівномірно на кожній із множин A і B, то він збігається рівномірно на $A \cup B$. Довести це.

2.2. ОЗНАКИ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ

1°. Ознака Вейєрштрасса. Нехай a_n: $A \to \mathbf{R}$, $c_n \in \mathbf{R}$; $n \geqslant 1$ задовольняють умовам:

1) $\forall n \geqslant 1 \ \forall x \in A$: $|a_n(x)| \leqslant c_n$;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається.

Тоді функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad x \in A \tag{1}$$

збігається рівномірно на множині A.

$\vdash$ Із умов 1), 2) і ознаки порівняння 1° п 2.2 глави 7 випливає збіжність ряду (1) для всіх $x \in A$. Окрім того,

$$d_n = \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| \leqslant \sup_{x \in A} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \to 0,$$

$$n \to \infty. \qquad \dashv$$

Приклад 1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad x \in \mathbf{R}$$

збігається рівномірно на осі.

Вправи

6. Довести, що наступні ряди збігаються рівномірно на осі:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2x^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx^2)}{1+n^3x^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n|x|} \sin(x^2\sqrt{n})$.

7. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

збігається рівномірно на $\mathbf{R}$.

Вказівка. При кожному $x \in \mathbf{R}$ цей ряд є рядом Лейбніца і припускає просту оцінку залишка. Звернути увагу на те, що ряд збігається умовно при кожному $x \in \mathbf{R}$ і тому до нього ознаку Вейєрштрасса застосувати не можна, бо ця ознака дає рівномірну й абсолютну збіжність ряду.

8. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n(x-n)^2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

збігається рівномірно на осі.

2°. **Ознака Діріхле.** Нехай функції a_n: $A \to \mathbf{R}$, b_n: $A \to \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$ задовольняють умовам:

1) $\forall x \in A$ послідовність $\{a_n(x)$: $n \geqslant 1\}$ монотонна;

2) послідовність $\{a_n(x)$, $x \in A$: $n \geqslant 1\}$ збігається рівномірно на A до 0, тобто

$$d_n = \sup_{x \in A} |a_n(x)| \to 0, \quad n \to \infty;$$

3) $\exists c \in \mathbf{R}\ \forall n \geqslant 1\ \forall x \in A$: $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leqslant C$.

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ збігається рівномірно на A.

⌈ Із тотожності Абеля випливає нерівність

$$\forall n \geqslant 1\ \forall p \in \mathbf{N}\ \forall x \in A:$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\, b_k(x)\right| \leqslant 2C\,(d_{n+1} + 2d_{n+p}).$$

Згідно з умовою 2) і критерієм Коші рівномірної збіжності функціонального ряду одержимо твердження ознаки Діріхле. ⌋

Зауваження 1. Напрямок монотонності в умові 1) ознаки 2° при різних x може бути різним.

Приклад 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbf{R}$ збігається рівномірно на будь-якій множині вигляду $B = [2\pi k + \delta, 2\pi(k+1) - \delta]$, де $k \in \mathbf{Z}$, $0 < \delta < \pi$. Дійсно, згідно з ознакою 2° для $a_n(x) = \frac{1}{n}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$ і $b_n(x) = \sin nx$, $x \in \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$, а також для множини B всі умови виконані. Зокрема

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leqslant \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}, \quad x \in B, \quad n \geqslant 1.$$

Вправи

6. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x \cdot \sin nx}{n + x^2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

збігається рівномірно на осі.

7. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbf{R}$$

збігається рівномірно на $[\delta, 2\pi - \delta]$, де $0 < \delta < \pi$.

8. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \operatorname{arctg} nx}{n}, \quad x \in \mathbf{R}$$

збігається рівномірно на $[\delta, 2\pi - \delta]$, де $0 < \delta < \pi$.

3°. **Ознака Абеля.** Нехай функції $a_n : A \to \mathbf{R}$ і $b_n : A \to \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$ задовольняють умовам:

1) $\forall x \in A$ послідовність $\{a_n(x), n \geqslant 1\}$ монотонна;
2) $\exists C \in \mathbf{R}$ $\forall n \geqslant 1$ $\forall x \in A$: $|a_n(x)| \leqslant C$;
3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ збігається рівномірно на A.

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ збігається рівномірно на A.

⌈ Доведення цієї ознаки базується на тотожності Абеля і аналогічне доведенню ознаки 2°. ⌋

Приклади. 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, $x \in (-1, 1]$ збігається рівномірно на множині $[0, 1]$. Для доведення покладемо, що в ознаці 3°

$$A = [0, 1]; \qquad a_n(x) = x^n, \quad b_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$x \in [0, 1], \ n \geqslant 1.$$

Тоді умови 1) — 3) виконані.

4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, $x > 0$ збігається рівномірно на множині $[\alpha, +\infty)[$, де $\alpha > 0$.

Для доведення покладемо, що в ознаці 3°

$$a_n(x) = \frac{1}{n^{x-\frac{\alpha}{2}}}, \quad b_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad x \geqslant \alpha, \quad n \geqslant 1.$$

Тоді умови 1) — 3) виконані.

Вправи

9. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + x^2} \operatorname{arctg} nx, \quad x \in \mathbf{R}$$

збігається рівномірно на осі.

10. Нехай $A \subset \mathbf{R}$ і функції f_n: $A \to \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$ задовольняють умови:

1) $\forall n \geqslant 1 \ \forall x \in A$: $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \geqslant 0$;
2) $\sup\limits_{x \in A} f_1(x) < +\infty$;
3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in A$ збігається рівномірно на A.

Довести, що для довільного $\alpha > 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{1+\alpha}(x), \quad x \in A$$

збігається рівномірно на A.

§ 3. ВЛАСТИВОСТІ РІВНОМІРНО ЗБІЖНИХ РЯДІВ

3.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ

ТЕОРЕМА 1 (про неперервність суми функціонального ряду). Нехай функції $a_n : A \to \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$ задовольняють умовам:

1) $\forall n \geqslant 1$: $a_n \in \mathbf{C}(A)$;
2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a(x)$ збігається рівномірно на A.

Тоді $a \in \mathbf{C}(A)$.

$\ulcorner$ Досить довести неперервність функції a в точці $x_0 \in A$. Ця неперервність є наслідком леми 1 п 1.2. $\lrcorner$

Зауваження. При умовах теореми 1 для $x_0 \in A$ маємо

$$a(x) \to a(x_0), \quad x \to x_0$$

або

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0).$$

Вправи

1. Довести, що:

а) $\lim\limits_{x \to 1-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

б) $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

2*. Нехай функції a_n: $[a, b] \to \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$, задовольняють умовам:
1) $\forall n \geqslant 1 \ \forall x \in [a, b]$: $a_n(x) \geqslant 0$;
2) $\forall n \geqslant 1$: $a_n \in \mathbf{C}([a, b])$.
Довести, що рівномірна на $[a, b]$ збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad x \in [a, b]$$

є необхідною і достатньою умовою неперервності на $[a, b]$ його суми.

3. Нехай $a_1(x) = x, \ldots, a_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}} - x^{\frac{1}{2n-3}}$, $x \in [-1, 1]$, $n \geqslant 2$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $x \in [-1, 1]$ не збігається рівномірно на $[-1, 1]$.

Вказівка. Показати, що гранична функція дорівнює $\operatorname{sign} x$, $x \in [-1, 1]$.

ТЕОРЕМА 2 (про почленне інтегрування функціонального ряду). Нехай функції a_n: $[\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$ задовольняють умовам:
1) $\forall n \geqslant 1$: $a_n \in \mathbf{R}([\alpha, \beta])$;
2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a(x)$, $x \in [\alpha, b]$ збігається рівномірно на $[\alpha, \beta]$.
Тоді $a \in \mathbf{R}([\alpha, \beta])$ і

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n(x)\, dx,$$

тобто

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n(x)\, dx.$$

⊢ Для доведення зауважимо, що $s_n \in R([\alpha, \beta])$, $n \geqslant 1$, де $s_n(x) := a_1(x) + \ldots + a_n(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, $n \geqslant 1$. Далі використаємо лему 2 п. 1.2 і теорему про граничний перехід під знаком інтеграла. ⊣

Приклад 1. Доведемо, що

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1].$$

⊢ Якщо $|u| < 1$, то

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n, \tag{1}$$

причому ряд (1) збігається рівномірно на відрізку $[-\alpha, \alpha]$ для будь-якого α, $0 < \alpha < 1$. Нехай $x \in (-1,1)$ фіксоване, далі, наприклад, $x > 0$. До ряду (1) на відрізку $[0, x]$ можна застосувати теорему 2

$$\int_0^x \frac{du}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n u^n du,$$

тому

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1). \tag{2}$$

Окрім того, з неперервності логарифмічної функції

$$\lim_{x \to 1} \ln(1+x) = \ln 2, \tag{3}$$

а з рівномірної на $[0, 1]$ збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

і теореми 1

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{4}$$

З рівностей (3), (4) і (2) можна зробити висновок, що формула (2) має місце і при $x = 1$. ⊣

Вправа

4. Знайти суми рядів:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$, $|x| < 1$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$, $|x| < 1$.

Відповідь: а) $(1-x)^{-2}$; б) $x(1-x)^{-2}$.

ТЕОРЕМА 3 (про почленне диференціювання функціонального ряду). Нехай функції $a_n : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$ задовольняють умовам:

1) $\exists x_0 \in [\alpha, \beta]$, для якого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ збігається;

2) $\forall n \geqslant 1$: $a_n \in \mathbf{C}^{(1)}([\alpha, \beta])$;

3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ збігається рівномірно на $[\alpha, \beta]$.

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ збігається на $[\alpha, \beta]$, причому його сума $a \in \mathbf{C}^{(1)}([\alpha, \beta])$ і виконується рівність

$$a'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x), \quad x \in [\alpha, \beta],$$

тобто

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n(x), \quad x \in [\alpha, \beta].$$

$\vdash$ Нехай

$$b(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x), \quad x \in [\alpha, \beta]. \tag{5}$$

З умов 2) і 3) і теореми 1 випливає, що $b \in \mathbf{C}([\alpha, \beta])$.

Нехай $z \in [\alpha, \beta]$ фіксоване і, наприклад, $z > x_0$. До ряду (5) на відрізку $[x_0, z]$ можна застосувати теорему 2, з якої випливає рівність

$$\int_{x_0}^{z} b(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{z} a_n'(x)\,dx.$$

Застосувавши формулу Ньютона — Лейбніца і умову 1), одержимо

$$\int_{x_0}^{z} b(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) + c, \quad c := -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0).$$

Із цієї формули випливають обидва твердження теореми 3. $\dashv$

Вправи

5. Довести, що при умовах теореми 3 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad x \in [\alpha, \beta]$$

збігається рівномірно на $[\alpha, \beta]$.

6. Нехай добуток $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ збігається. Знайти

$$\lim_{x\to 1}\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n x^n).$$

7. Нехай $a(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$, $x\in\mathbf{R}$.

Довести, що a' можна одержати за допомогою почленного диференціювання.

§ 4. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

4.1. МНОЖИНА ЗБІЖНОСТІ

Нехай $\{a_n\colon n\geqslant 0\}$ — послідовність дійсних чисел $x_0\in\mathbf{R}$. ***Степеневим рядом*** називається функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad x\in\mathbf{R}.$$

Замість нього розглянемо ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad x\in\mathbf{R}, \tag{1}$$

який одержано з попереднього лінійною заміною змінної. Часткові суми ряду (1) є многочлени. Зауважимо, що ряд (1) завжди збігається при $x=0$.

Вправа

1. **Лема Абеля.** Нехай $\{a_n : n\geqslant 0\}$, $x_0\neq 0$ такі, що послідовність $\{a_n x_0^n : n\geqslant 1\}$ обмежена. Тоді ряд (1) збігається абсолютно для $x\in(-|x_0|, |x_0|)$. Довести.

Покладемо

$$\rho:=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|},\quad 0\leqslant\rho\leqslant+\infty; \tag{2}$$

$$r:=\begin{cases}0, & \rho=+\infty;\\ \frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty;\\ +\infty, & \rho=0.\end{cases} \tag{3}$$

ТЕОРЕМА (**Коші — Адамара** [1]). Нехай $\{a_n\colon n \geqslant 0\}$ — послідовність дійсних чисел, ρ і r — числа, визначені за цією послідовністю формулами (2) і (3).

Тоді:

а) при $r = 0$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4}$$

розбігається для будь-якого $x \neq 0$;

б) при $r = +\infty$ ряд (4) збігається абсолютно для будь-якого $x \in \mathbf{R}$;

в) при $0 < r < +\infty$ ряд (4) збігається абсолютно для x, $|x| < r$ і розбігається для x, $|x| > r$.

$\ulcorner$ а) $r = 0 \Leftrightarrow \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$. Отже, існує підпослідовність, для якої

$$\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} \to +\infty, \quad k \to \infty.$$

Нехай $x \neq 0$ фіксоване. Тоді

$$\exists k_0\ \forall k \geqslant k_0\colon \sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} > \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow |a_{n(k)} x^{n(k)}| > 1,$$

тому $a_n x^n \not\to 0$, $n \to \infty$.

б) $r = +\infty \Leftrightarrow \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Нехай $x \neq 0$. Тоді

$$\exists n_0\ \forall n \geqslant n_0\colon \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|} \Leftrightarrow |a_n x^n| < \frac{1}{2^n}.$$

З ознаки порівняння 1° глави 7 випливає абсолютна збіжність ряду (4).

в) $0 < r < +\infty \Leftrightarrow 0 < \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$. Нехай x, $|x| > r$, тобто $\rho > \frac{1}{|x|}$. Тоді існує така підпослідовність, що

$$\forall k \geqslant 1\colon \sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} > \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow |a_{n(k)} x^{n(k)}| > 1.$$

Таким чином, $a_n x^n \not\to 0$, $n \to \infty$.

Нехай зараз $x \neq 0$ таке, що $|x| < r$, тобто $|x|\rho < 1$. Розглянемо α таке, що $|x|\rho < \alpha < 1$. Оскільки $\rho < \frac{\alpha}{|x|}$, то

$$\exists n_0\ \forall n \geqslant n_0\colon \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\alpha}{n} \Leftrightarrow |a_n x^n| < \alpha^n.$$

---

[1] *Адамар Жак* (1865—1963) — французький математик і педагог. Йому належить ряд видатних результатів і ідей в багатьох розділах сучасної математики.

Звідси, як і вище, одержимо абсолютну збіжність ряду (4). ∎

Означення. Величина r, визначена формулами (2) і (3), називається ***радіусом збіжності ряду*** (4).

Вправи

2. Довести, що для рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} x^n$$

радіус збіжності дорівнює 0.

3. Довести, що для рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

радіус збіжності дорівнює $+\infty$.

Зауваження. Таким чином, ці ряди збігаються абсолютно для кожного $x \in \mathbf{R}$.

4. Довести, що ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \qquad \sum_{n=0}^{n} \frac{x^n}{n^2}$$

мають радіус збіжності 1 і множини збіжності $(-1, 1)$, $[-1,1)$, $[-1,1]$ відповідно.

5. Визначити радіус збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} x^n$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^n}\right)^n x^n$.

6. Нехай послідовність $\{a_n : n \geqslant 0\}$ така, що $\forall n \geqslant 0$: $a_n \neq 0$ і існує $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Довести, що $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

7. Нехай $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ має радіус збіжності $r > 0$. Довести, що радіус збіжності кожного з рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)\, a_n x^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+3} x^n$$

також дорівнює r. Визначити радіус збіжності рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n x^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} x^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

8. Знайти множини збіжності рядів:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\sqrt{n}} x^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+1)^{n^2}$.

9. Нехай r_1 і r_2 — радіуси збіжності рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Яким може бути радіус збіжності ряду:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$?

4.2. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ

Розглядаємо степеневі ряди з додатним радіусом збіжності.

ТЕОРЕМА. Степеневий ряд збігається рівномірно на будь-якому відрізку виду $[\alpha, \beta]$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$, який міститься в множині збіжності.

$\vdash$ Нехай r — радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{1}$$

Якщо $\alpha \in (0, r)$, то ряд (1) збігається рівномірно на $[-\alpha, \alpha]$ за ознакою Вейєрштрасса 1° п. 2.2, оскільки

$$\forall n \geqslant 0 \ \ \forall x \in [-\alpha, \alpha]: \ |a_n x^n| \leqslant |a_n \alpha^n|$$

і для $x = \alpha$ ряд (1) збігається абсолютно.

Якщо ряд (1) збігається для $x = r$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n.$$

Рівномірну збіжність ряду (1) на $[0, r]$ одержимо за допомогою ознаки Абеля 3° п. 2.2. $\dashv$

Вправа

10. Знайти всі степеневі ряди, які збігаються рівномірно на осі.

4.3. ВЛАСТИВОСТІ СУМИ СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ

ТЕОРЕМА 1. Сума степеневого ряду неперервна на множині збіжності. ⌋

⌈Теорема 1 є наслідком неперервності членів ряду, теореми п. 4. 2 і теореми про неперервність суми функціонального ряду.

ТЕОРЕМА 2. Нехай $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x)$, $x \in A$ — степеневий ряд з радіусом збіжності r і множиною збіжності A. Тоді

$$\forall x \in A\colon \int\limits_0^x a(u)\,du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (1)$$

причому радіус збіжності ряду в (1) дорівнює r.

⌈Доведення випливає з теореми п. 4.2 і теореми про почленне інтегрування функціонального ряду. Твердження про радіус збіжності випливає з теореми Коші—Адамара:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}. \qquad ⌋$$

Наслідок 1. На множині збіжності степеневий ряд можна інтегрувати почленно довільне число раз, одержані при цьому степеневі ряди будуть мати той же радіус збіжності, що і вихідний ряд.

ТЕОРЕМА 3. Нехай $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x)$ — степеневий ряд з радіусом збіжності r. Тоді $a \in \mathbf{C}^{(1)}((-r, r))$ і

$$\forall x \in (-r, r)\colon a'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad (2)$$

причому степеневий ряд у рівності (3) має радіус збіжності r.

⌈Степеневий ряд в (2) має радіус збіжності r за теоремою Коші—Адамара:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Твердження теореми 3 випливає з теореми п. 4.2 і теореми про почленне диференціювання ряду, які застосовані до відрізку $[-\alpha, \alpha]$, де $0<\alpha<r$. ⌋

Наслідок 2. Сума a степеневого ряду з радіусом збіжності r належить $\mathbf{C}^{(\infty)}((-r, r))$. Похідні функції a можна одержати за допомогою почленного диференціювання вихідного ряду.

Вправа

11. Нехай P — многочлен степеня n. Довести, що для будь-якого $x_0 \in \mathbf{R}$ виконано

$$\forall x \in \mathbf{R}: \ P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{P^{(n)}(x^0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

ТЕОРЕМА 4. Нехай

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x) \tag{3}$$

— степеневий ряд з радіусом збіжності $r > 0$. Тоді

$$\forall n \geqslant 0: \ a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}. \tag{4}$$

⌈При $x = 0$ в формулі (3) маємо $a_0 = a(0)$. Після почленного диференціювання (3) одержимо формулу (2), з якої при $x = 0$ знайдемо $a_1 = a'(0)$ і так далі. ⌋

Зауваження. Таким чином, сума степеневого ряду є функція класу $C^{(\infty)}$, яка має таку властивість, що її значення на інтервалі $(-r, r)$ відновляються за допомогою формул (4) за значеннями функції і її похідних в одній точці.

ТЕОРЕМА 5. Нехай для степеневих рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x); \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b(x)$$

існує послідовність $\{t_k;\ k \geqslant 1\}$ чисел, яка належить множинам збіжності обох рядів і таких, що $\forall k \geqslant 1$: $t_k \neq 0$, $a(t_k) = b(t_k)$ і $t_k \to 0$, $k \to \infty$. Тоді

$$\forall n \geqslant 0: \ a_n = b_n.$$

⌈ Рівність $a_0 = b_0$ одержимо, перейшовши до границі при $k \to \infty$ в умові $a(t_k) = b(t_k)$, $k \geqslant 1$, за теоремою 1 п. 4.3. Враховуючи рівність, маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t_k^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n t_k^{n-1}, \quad k \geqslant 1.$$

Далі, як і вище, знаходимо $a_1 = b_1$ і т. д. ⌋

Вправи

11.1. Нехай $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geqslant 2$. Довести, що степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =: s(x)$$

має додатний радіус збіжності і визначити функцію s.

11.2. Нехай $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)\, a_{n-2}$, $n \geqslant 2$. Довести, що степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} =: s(x)$$

має додатний радіус збіжності і знайти функцію s.

11.3. У сукупності послідовностей $\{a_n : n \geqslant 0\}$ дійсних чисел, що задовольняють умову

$$a_0 = 1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$$

знайти ті послідовності, для яких:

1) $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 2^n, \quad n \geqslant 0;$

2) $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = (n+1)\, a_{n+1}, \quad n \geqslant 0.$

4.4. РЯД ТЕЙЛОРА

Згідно з наслідком 2 і теоремою 4 п. 4.3 сума степеневого ряду є функцією класу $C^{(\infty)}$, а часткова сума ряду є головною частиною формули Тейлора для суми ряду. Внаслідок того, що степеневі ряди є найпростішими функціональними рядами і властивості їх сум особливо прості і тому легко можуть бути використані, виникає питання: які функції є сумами степеневих рядів? Або інакше, які функції можна подати степеневим рядом? Належність до класу $C^{(\infty)}$ не є достатня.

Приклад 1. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{1}{x^2}\right\}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Довести, що $f \in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$ і що $f^{(n)}(0) = 0, \quad n \geqslant 0.$

Означення. Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$, $0 < r \leqslant +\infty$ і $f \in \mathbf{C}^{(\infty)}((x_0 - r, x_0 + r))$. Степеневий ряд

$$f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

називається ***рядом Тейлора*** (при $x_0 = 0$ інколи ***рядом Маклорена***) функції f в околі точки x_0.

Зауваження 1. Ряд Тейлора многочлена в околі точки x_0 збігається з розкладом цього многочлена по степенях $x - x_0$. Ряд Тейлора функції f прикладу 1 в околі точки 0 дорівнює 0. Степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми згідно з теоремою 4 п. 4.3.

ТЕОРЕМА. Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$, $0 < r \leqslant +\infty$. Припустимо, що функція f задовольняє умовам:

1) $f \in \mathbf{C}^{(\infty)}((x_0 - r, x_0 + r))$;

2) $\exists C \in \mathbf{R}\ \forall n \geqslant 1\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r): |f^{(n)}(x)| \leqslant C^n$.

Тоді

$$\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r): f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad (1)$$

причому для $r < +\infty$ збіжність ряду рівномірна на $(x_0 - r, x_0 + r)$, а для $r = +\infty$ збіжність рівномірна на будь-якому відрізку вигляду $[x_0 - \tilde{r}, x_0 + \tilde{r}]$, $\tilde{r} < +\infty$.

$\vdash$ Згідно з формулою Тейлора для будь-якого $n \in \mathbf{N}$

$$\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r): f(x) = s_n(x) + \rho_n(x), \qquad (2)$$

де

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k;$$

$$\rho_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Для $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, враховуючи умову 2), маємо

$$|\rho_n(x)| \leqslant \frac{C^{n+1}}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тому формула (1) випливає з (2) при $n \to \infty$. Твердження щодо рівномірної збіжності одержуємо аналогічно. $\dashv$

Приклади. 2. Нехай $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$; $x_0 = 0$, $r = +\infty$. Оскільки

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N}:$$

$$|f^{(n)}(x)| = \left|\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1,$$

то умови теореми виконані і

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots, x \in \mathbf{R}.$$

3. Аналогічно

$$\sin = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

4. Нехай $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$; $x_0 = 0$. Доведемо, що

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Для заданого $x \in \mathbf{R}$ нехай r таке, що $|x| < r$. Тоді

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in [-r, r]: |f^{(n)}(x)| = e^x \leqslant e^r$$

і можна застосувати теорему. ⌋

Вправи

12. Припустимо, що функцію f можна подати рядом Тейлора на $(-r, r)$. Яку властивість має ряд Тейлора, якщо: а) f — парна функція на $(-r, r)$? б) f — непарна функція на $(-r, r)$?

12.1. Довести, що $e \notin \mathbf{Q}$.

Наведена теорема дає метод розкладу функцій у ряд Тейлора. Проте умови теореми не завжди виконуються або не можуть бути просто перевірені. Тоді ефективним методом одержання розкладу є використання властивостей степеневих рядів та їх сум. При цьому використовуються теореми 1—5 п. 4.3. Розглянемо приклади.

Приклади. 5. Має місце зображення

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots, x \in (-1, 1].$$

Зазначеним вище методом цей розклад отримано в п 3.1.

6. Доведемо, що

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots, \quad x \in [-1, 1].$$

$\vdash$ Оскільки $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$, то

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^k x^{2k} + \ldots, \; x \in (-1, 1).$$

Використовуючи теорему про почленне інтегрування степеневого ряду, маємо

$$\int_0^x \operatorname{arctg}' u\,du = \int_0^x du - \int_0^x u^2 du + \ldots + (-1)^k \int_0^x u^{2k} du + \ldots, \; x \in (-1, 1)$$

або

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots, \; x \in (-1, 1). \quad (3)$$

Степеневий ряд (3) збігається на $[-1, 1]$. Тому його сума за теоремою 1 п. 4.3 неперервна на $[-1, 1]$. Отже, враховуючи неперервність arctg і рівність (3), одержимо, що рівність (3) виконується і при $x = -1$, $x = 1$. $\dashv$

Зауваження 2. Із рівності (3) при $x = 1$ одержимо

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \ldots.$$

Вправи

13. Довести, що

$$\int_0^x \frac{\sin u}{u} du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

14. Розкласти в ряд Тейлора в околі $x_0 = 0$ функції:

а) $\operatorname{sh} x$, $x \in \mathbf{R}$; б) $\operatorname{ch} x$; $x \in \mathbf{R}$; в) $\sin x^3$, $x \in \mathbf{R}$;

г) $\sin^3 x$, $x \in \mathbf{R}$; д) $\frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$, $x \in (-1, 1)$;

е) $\ln(1 - x^2)$, $x \in (-1, 1)$; ж) $\ln(1 + x + x^2)$, $x \in (-1, 1)$;

з) $(1 + x) \sin x^2$, $x \in \mathbf{R}$; і) $\frac{1}{1 + x + x^2}$, $x \in (-1, 1)$;

к) $(1 - 5x + 6x^2)^{-1}$, $|x| < \frac{1}{3}$.

15*. Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, $x \in \mathbf{R}$.

16. Знайти суму рекурентного степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n;$$

$$a_0 = a_1 = 1, \; a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0, \; n \geqslant 2.$$

17. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n;$$

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2;\ a_n - \frac{1}{2} a_{n-1} - \frac{1}{2} a_{n-2} = 0, \quad n \geqslant 2.$$

Приклад 7. Біноміальний ряд. Нехай $\alpha \in \mathbf{R}$. Доведемо, що

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha}^{n} x^n, \quad x \in (-1, 1), \tag{4}$$

де

$$C_{\alpha}^{0} := 1, \quad C_{\alpha}^{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad n \geqslant 1.$$

Зауваження 3. Часткові суми ряду (4) фігурують у формулі Тейлора для функції $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $x > -1$. Якщо $\alpha \in \mathbf{N}$, то $\forall n > \alpha$: $C_{\alpha}^{n} = 0$ і тоді рівність (4) перетворюється в формулу бінома Ньютона. Ньютон першим одержав формулу (4) для цілих від'ємних α.

$\vdash$ Нехай $\alpha \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Радіус збіжності ряду (4) дорівнює 1, оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{\alpha}^{n}}{C_{\alpha}^{n+1}} \right| = 1.$$

Нехай

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha}^{n} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Доведемо, що функція f задовольняє рівнянню

$$(1+x) f'(x) = \alpha f(x),\ x \in (-1, 1). \tag{5}$$

Згідно з теоремою 3 п. 4.3

$$(1+x) f'(x) = (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} n C_{\alpha}^{n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n C_{\alpha}^{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n C_{\alpha}^{n} x^n =$$

$$= C_{\alpha}^{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n C_{\alpha}^{n} + (n+1) C_{\alpha}^{n+1}) x^n = C_{\alpha}^{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha C_{\alpha}^{n} x^n = \alpha f(x),$$

$$x \in (-1, 1),$$

оскільки

$$n C_{\alpha}^{n} + (n+1)\ C_{\alpha}^{n+1} = \alpha C_{\alpha}^{n}, \quad n \geqslant 1.$$

Домноживши рівність (5) на $(1+x)^{-\alpha-1}$, одержимо

$$(1+x)^{-\alpha} f'(x) = \alpha (1+x)^{-\alpha-1} f(x), \quad x \in (-1, 1).$$

Звідси

$$((1+x)^{-\alpha}f(x))' = 0, \quad x \in (-1, 1).$$

Тому

$$\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall x \in (-1, 1): \ (1+x)^{-\alpha}f(x) = c.$$

Число $c = 1$, оскільки $f(0) = 1$. Таким чином,

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}, \quad x \in (-1, 1). \qquad \_|$$

Вправи

18. Використовуючи метод, розглянутий у прикладі 7, одержати ряд Тейлора для $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

19. Розкласти в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ функції:

а) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$; б) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $|x| < 1$;

в) $f(x) = \dfrac{3-4x+2x^2}{1-3x+4x^3}$, $|x| < \dfrac{1}{2}$.

20. Довести, що

$$\arcsin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Одержати аналогічну формулу для функції arccos.

Вказівка. Розглянути похідні й використати біноміальний ряд.

21*. Функція

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\cos(n^2 x), \quad x \in \mathbf{R}$$

належить класу $C^{(\infty)}$ і має ту властивість, що її ряд Тейлора в точці 0 збігається тільки в одній точці. Довести це.

§ 5. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧЛЕНАМИ

5.1. ОЗНАЧЕННЯ

Позначимо через $\mathbf{C}$ множину комплексних чисел. Число $z \in \mathbf{C}$ має вигляд

$$z = a + bi, \quad \{a, b\} \subset \mathbf{R}, \quad i = \sqrt{-1}; \quad a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z;$$

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Мають місце нерівності

$$\max(|a|, |b|) \leqslant |z| \leqslant |a| + |b|. \qquad (1)$$

Означення 1. Нехай $\{z_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{C}, z \in \mathbf{C}$. Число z називається ***границею послідовності комплексних чисел*** $\{z_n : n \geqslant 1\}$ (при цьому також кажуть, що послідовність $\{z_n : n \geqslant 1\}$ ***збігається до*** z), якщо $|z_n - z| \to 0$, $n \to \infty$.

Позначення: $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$; $z_n \to z$, $n \to \infty$.

Нехай $z_n = a_n + ib_n$, $n \geqslant 1$; $z = a + ib$. З нерівності (1) випливає твердження:

$$1^\circ.\ z_n \to z, n \to \infty \Leftrightarrow a_n \to a, b_n \to b, n \to \infty. \tag{2}$$

Означення 2. Ряд з комплексними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{3}$$

називається ***збіжним***, якщо

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} z_k \to z \in \mathbf{C}, \quad n \to \infty.$$

Число z — ***сума ряду*** (3). В усіх інших випадках ряд (3) називається ***розбіжним***.

2°. Ряд (3) збігається тоді й тільки тоді, коли збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n; \quad z_n = a_n + ib_n, \quad n \geqslant 1,$$

причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Означення 3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{4}$$

збігається абсолютно, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

3°. Ряд (4) з $z_n = a_n + ib_n$, $n \geqslant 1$, збігається абсолютно тоді й тільки тоді, коли збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|; \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|.$$

4°. В абсолютно збіжному ряді можливе довільне переставлення членів ряду.

Нехай $G \subset \mathbf{C}$; $a_n : G \to \mathbf{C}$, $n \geqslant 1$.

Означення 4. Функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z), \quad z \in G \tag{5}$$

збігається рівномірно на G, якщо

$$\sup_{z \in G} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z) \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

5°. **Ознака Вейєрштрасса.** Якщо

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall z \in G: \ |a_n(z)| \leqslant c_n \in \mathbf{R},$$

причому $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається, то ряд (5) збігається рівномірно на G.

Вправа

1. Довести, що якщо ряд (4) збігається, то $z_n \to 0$, $n \to \infty$.

Означення 5. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{6}$$

$a_n \in \mathbf{C}$, $n \geqslant 0$; $z \in \mathbf{C}$ називається ***степеневим.***

Враховуючи означення 3, результат вправи 1 і теорему п. 4.1, одержимо наступне твердження.

6°. **Теорема Коші—Адамара.** Нехай ρ і r визначені формулами (2) і (3) п. 4.1. Тоді:

а) при $r = 0$ ряд (6) розбігається для будь-якого $z \neq 0 + i0$;

б) при $r = +\infty$ ряд (6) збігається абсолютно для будь-якого $z \in \mathbf{C}$;

в) при $0 < r < +\infty$ ряд (6) збігається абсолютно для z, $|z| < r$ і розбігається для z, $|z| > r$. Величина r називається ***радіусом збіжності*** ряду (6).

7°. Має місце теорема про добуток абсолютно збіжних рядів.

Вправи

2. Лема Абеля. Нехай $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{C}$, $z_0 \in \mathbf{C}$, $|z_0| \neq 0$ такі, що послідовність $\{|a_n z_0^n| : n \geqslant 0\}$ обмежена. Тоді для будь-якого $z \in \mathbf{C}$, $|z| < |z_0|$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ збігається абсолютно. Довести.

3. Визначити множину збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+i)^n (z-i)^n$, $z \in \mathbf{C}$.

5.2. ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ В КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

Показникова функція $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, має такі властивості:

1) $e^0 = 1$; $\forall \{x, y\} \subset \mathbf{R}$: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$;

2) показникова функція неперервна на $\mathbf{R}$;

3) $\forall x \in \mathbf{R}$: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Легко перевірити, що умови 1) і 2) визначають показникову функцію з точністю до основи.

Означення. Показниковою функцією на $\mathbf{C}$ називається функція

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{1}$$

Ряд у формулі (1) збігається абсолютно для будь-якого $z \in \mathbf{C}$.

1°. Якщо $z = x + i0 = x \in \mathbf{R}$, то визначена функція збігається з показниковою функцією e^x, $x \in \mathbf{R}$.

2°. $\forall \{z_1, z_2\} \subset \mathbf{C}$: $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

$\ulcorner$ Згідно з теоремою про добуток абсолютно збіжних рядів, маємо

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!} = 1 + (z_1 + z_2) +$$

$$+ \left(\frac{z_1^2}{2!} + z_1 z_2 + \frac{z_2^2}{2!}\right) + \ldots = e^{z_1+z_2}. \qquad \lrcorner$$

3°. Формули Ейлера. $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x; \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x;$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

$\ulcorner$ Нехай

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

За означенням показникової функції маємо

$$e^{ix} = \lim_{n\to\infty} s_n(ix) = \lim_{n\to\infty} s_{4n}(ix) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} + \right.$$

$$\left. + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}\right)\right) =$$

$$= \cos x + i\sin x,\ x \in \mathbf{R}.$$

Як наслідок зазначимо, що

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y),\ z = x + iy;\ \{x, y\} \subset \mathbf{R}.$$ ⌋

Вправа

4. Довести, що ряд $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ збігається абсолютно для тих z, для яких $\operatorname{Re} z > 1$.

Глава 9 ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ ТА ІНТЕГРАЛ СТІЛЬТЬЄСА

§ 1. МОНОТОННІ ФУНКЦІЇ

1.1. НАЙПРОСТІШІ ВЛАСТИВОСТІ

Означення 1. Функція $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ називається ***монотонно неспадною***, якщо

$$\forall \{x_1, x_2\} \subset [a, b]\colon\ x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Покладемо за означенням

$$f(a-) := f(a), \quad f(b+) := f(b).$$

Якщо для точки $x_0 \in [a, b]$ $f(x_0+) - f(x_0-) > 0$, то величина $f(x_0+) - f(x_0-)$ називається ***стрибком функції*** f у точці x_0.

У цьому параграфі розглянемо монотонно неспадні функції.

ЛЕМА 1. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — різні точки відрізка $[a, b]$, $n \in \mathbf{N}$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} (f(x_k+) - f(x_k-)) \leqslant f(b) - f(a).$$

⌈Припустимо, що $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Потрібна нерівність є наслідком нерівностей

$$f(a) \leqslant f(x_1-), f(x_n+) \leqslant f(b),$$

$$f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) \leqslant f(x_k-) \leqslant f(x_k+) \leqslant f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$$

для $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Дійсно,

$$\sum_{k=1}^{n} (f(x_k+) - f(x_k-)) \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \left(f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) - f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\right) +$$

$$+ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1-) + f(x_n+) - f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) =$$

$$= f(x_n+) - f(x_1-) \leqslant f(b) - f(a). \qquad ⌋$$

ЛЕМА 2. Множина точок розриву монотонної функції не більш як зліченна.

⌈Точки розриву монотонної функції можуть бути тільки точками стрибка. Нехай для заданого $\varepsilon > 0$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є n точок, стрибок в кожній з яких не менше ε. Враховуючи лему 1, маємо

$$f(b) - f(a) \geqslant \sum_{k=1}^{n} (f(x_k +) - f(x_k -)) \geqslant n\varepsilon.$$

З цієї нерівності випливає, що число точок, в яких стрибок не менше за ε, скінченне. Нехай A_k для $k \in \mathbf{N}$ є множина точок із стрибком не меншим, ніж $\frac{1}{k}$. Тоді $A = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k$ — множина всіх точок розриву функції f на $[a, b]$, причому множина A не більш як зліченна.⌋

Наслідок 1. Нехай $\{x_n; n \geqslant 1\}$ — множина всіх точок стрибка функції f на $[a, b]$. Тоді

$$\sum_{k \geqslant 1} (f(x_k +) - f(x_k -)) \leqslant f(b) - f(a). \qquad (1)$$

Зауваження. Функція f може бути неперервною на $[a, b]$. Тоді множина точок стрибка порожня і в цьому випадку вважаємо, що ліва частина нерівності (1) дорівнює 0. Ліва частина нерівності (1), взагалі кажучи, є ряд з додатними членами.

Означення 2. Нехай $\{x_n, n \geqslant 1\}$ — множина всіх точок стрибка функції f на $[a, b]$. Якщо

$$\sum_{k \geqslant 1} (f(x_k +) - f(x_k -)) = f(b) - f(a),$$

то функція f називається ***функцією стрибків.***

Вправи

1. Нехай $c \in (a, b)$. Знайти

$$\lim_{x \to c-} f(x +); \quad \lim_{x \to c+} f(x -).$$

2. Нехай $\{r_n : n \geqslant 1\}$ — послідовність усіх раціональних чисел відрізка $[0, 1]$. Покладемо

$$f(0) = 0, \quad f(x) = \sum_{n: r_n < x} \frac{1}{2^n}, \quad 0 < x \leqslant 1.$$

Довести, що функція f: 1) строго зростає на $[0, 1]$; 2) розривна в раціональних точках, а саме: $f(r_n +) - f(r_n -) = \frac{1}{2^n}$, $n \geqslant 1$; 3) f — функція стрибків на $[a, b]$.

1.2. ТЕОРЕМА ПРО РОЗКЛАД

ТЕОРЕМА. Нехай f — монотонно неспадна на $[a, b]$ функція. Має місце розклад

$$f(x) = g(x) + h(x), \; x \in [a, b],$$

в якому g — функція стрибків, яка має стрибки в тих же точках і тієї ж величини, що й функція f, а h — монотонно не спадна й неперервна на $[a, b]$ функція.

⌈Нехай $\{x_n: n \geqslant 1\}$ — всі точки стрибка f. Покладемо:

$$g(a) := 0;$$

$$g(x) := \sum_{n: x_n < x} (f(x_n+) - f(x_n-)) + f(x) - f(x-),$$

$$a < x \leqslant b;$$

$$h(x) = f(x) - g(x), \quad x \in [a, b].$$

Якщо $a \leqslant x' < x'' \leqslant b$, то

$$g(x'') - g(x') = f(x'+) - f(x') +$$

$$+ \sum_{n: x' < x_n < x''} (f(x_n+) - f(x_n-)) + f(x'') - f(x''-). \qquad (2)$$

Звідси згідно з лемою 1 п. 1.1 маємо

$$0 \leqslant g(x'') - g(x') \leqslant f(x'') - f(x'); \qquad (3)$$

$$f(x') - g(x') \leqslant f(x'') - g(x'').$$

Тому g і h монотонно не спадають на $[a, b]$. Наслідком рівності (2) є також нерівність

$$g(x'') - g(x') \geqslant f(x'+) - f(x'). \qquad (4)$$

З нерівностей (3) і (4) при $x'' \to x'+$ одержимо:

$$g(x'+) - g(x') \leqslant f(x'+) - f(x');$$

$$g(x'+) - g(x') \geqslant f(x'+) - f(x').$$

Отже,

$$g(x'+) - g(x') = f(x'+) - f(x')$$

і

$$h(x') = h(x'+).$$

Так само доводиться, що $h(x') = h(x'-)$. Тому $h \in C([a, b])$ (неперервність у точці b доводиться аналогічно). ⌋

§ 2. ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

2.1. ОЗНАЧЕННЯ І ПРИКЛАДИ

Означення. Функція $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ називається ***функцією обмеженої варіації*** (або ***обмеженої зміни***) на відрізку $[a, b]$, якщо

$$\exists L \in \mathbf{R}\ \forall \lambda([a, b]) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} : \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant L.$$

Позначення:

$f \in \mathbf{BV}([a, b]) \Leftrightarrow f$ має обмежену варіацію на $[a, b]$.

Для $f \in \mathbf{BV}([a, b])$ ***варіація функції*** f на $[a, b]$ є

$$\mathbf{V}(f, [a, b]) := \sup_{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|,$$

де верхня межа береться по всім можливим розбиттям $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ відрізка $[a, b]$.

$\mathbf{V}(f, [a, b]) := +\infty$, якщо f не має обмеженої варіації на $[a, b]$.

Приклади. 1. Нехай f монотонна на $[a, b]$ функція. Тоді

$$f \in \mathbf{BV}([a,b]) \text{ і } \mathbf{V}(f, [a, b]) = |f(b) - f(a)|.$$

$\vdash$ Нехай f моногонно не спадає на $[a, b]$. Для будь-якого розбиття $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ відрізка $[a, b]$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(x_n) - f(x_0) =$$

$$= f(b) - f(a). \qquad \dashv$$

2. Функція f визначена на $[0, 1]$ таким чином: $f(0) = 0$,

$$f\left(\frac{1}{2k-1}\right) = 0; \quad f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k}, \quad k \in \mathbf{N},$$

і лінійна на кожному із відрізків

$$\left[\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right]; \quad \left[\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}\right], \quad k \in \mathbf{N}.$$

Доведемо, що $\mathbf{V}(f, [0, 1]) = +\infty$.

$\vdash$ Дійсно, для довільного $n \in \mathbf{N}$ розглянемо розбиття

$$\lambda = \left\{0, \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Для нього

$$\left|f\left(\frac{1}{2n+1}\right)-f(0)\right|+\left|f\left(\frac{1}{2n}\right)-f\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right|+$$
$$+\left|f\left(\frac{1}{2n-1}\right)-f\left(\frac{1}{2n}\right)\right|+\ldots+\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{3}\right)\right|+$$
$$+\left|f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1.$$

Зауважимо, що $f\in \mathbf{C}([0, 1])$. ⌋

Вправи

1. Довести, що

$$\mathbf{V}(f, [a, b])=0 \Leftrightarrow \forall x\in[a, b]: f(x)=f(a).$$

2. Знайти варіацію функцій:

а) $f(x)=\sin x$, $x\in[0, \pi)$; б) $f(x)=x^2$, $x\in[-1, 1]$.

3. Довести, що $\mathbf{V}(f, [a, b])=f(b)-f(a) \Leftrightarrow f$ монотонно не спадає на $[a, b]$.

4. Нехай

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Довести, що $\mathbf{V}(f, [0, 1])=+\infty$.

5. Нехай $f\in \mathbf{BV}([a, b])$. Для $\{\alpha, \beta\}\in \mathbf{R}$ визначити варіацію функції $g(x)=\alpha f(x)+\beta$, $x\in[a, b]$ через $\mathbf{V}(f, [a, b])$.

6. Довести, що $f\in \mathbf{BV}([a, b]) \Rightarrow |f|\in \mathbf{BV}([a, b])$.

7*. Довести, що для $f\in \mathbf{C}([a, b])$

$$|f|\in \mathbf{BV}([a, b]) \Rightarrow f\in \mathbf{BV}([a, b)].$$

Навести приклад, який показує, що умовою неперервності знехтувати не можна.

2.2. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ І ВАРІАЦІЇ

1°. $\mathbf{V}(f, [a, b])\geqslant 0$.

2°. $|f(b)-f(a)|\leqslant \mathbf{V}(f, [a, b])$.

⌈ Випливає з означення для розбиття $\lambda=\{a, b\}$. ⌋

3°. Функція $f\in \mathbf{BV}([a, b])$ обмежена.

⌈ Нехай $x\in(a, b]$. Тоді

$$|f(x)|\leqslant|f(a)|+|f(x)-f(a)|\leqslant|f(a)|+|f(x)|-f(a)|+$$
$$+|f(b)-f(x)|\leqslant|f(a)|+\mathbf{V}(f, [a, b]).$$

Таким чином,

$$\forall x \in [a, b]: |f(x)| \leqslant |f(a)| + \mathbf{V}(f, [a, b]).$$ ⌋

4°. Якщо $\{f, g\} \subset \mathbf{BV}([a, b])$, то:

а) $\forall c \in \mathbf{R}: (cf) \in \mathbf{BV}([a, b])$;

б) $(f \pm g) \in \mathbf{BV}([a, b])$; $(f \cdot g) \in \mathbf{BV}([a, b])$;

в) якщо додатково $\exists \alpha > 0 \ \forall x \in [a, b]: g(x) \geqslant \frac{1}{\alpha}$, то $\frac{f}{g} \in \mathbf{BV}([a, b])$.

⌈Доведення тверджень а)—в) прості й однакові. Наприклад, доведення твердження в) випливає з оцінки

$$\left| \frac{f(x'')}{g(x'')} - \frac{f(x')}{g(x')} \right| \leqslant \frac{1}{\alpha^2} |f(x'') g(x') - f(x') g(x'')| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha^2} \cdot (|f(x'') g(x') - f(x') g(x')| + |f(x') g(x'') - f(x') g(x'')|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha^2} (\sup_{[a,b]} |g| \cdot |f(x'') - f(x')| + \sup_{[a,b]} |f| \cdot |g(x'') - g(x')|)$$

і властивості 3°. ⌋

Вправи

8. Довести, що $f \in \mathbf{Lip}_1([a, b]) \Rightarrow f \in \mathbf{BV}([a, b])$.

9. Нехай функція f має похідну f' на $[a, b]$, причому $f' \in \mathbf{R}([a, b])$. Довести, що

$$f \in \mathbf{BV}([a, b]), \ \mathbf{V}(f, [a, b]) = \int_a^b |f'(x)| \, dx.$$

Вказівка. Використати нерівність для $x' < x''$

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \int_{x'}^{x''} f'(u) \, du \right| \leqslant \int_{x'}^{x''} |f'(u)| \, du$$

і теорему Лагранжа

$$|f(x'') - f(x')| = |f'(\xi)| (x'' - x'), \quad \xi \in [x', x''].$$

10. Нехай $\varphi \in \mathbf{R}([a, b])$ і $f(x) = \int_a^x \varphi(u) \, du$, $x \in [a, b]$. Довести, що

$$\mathbf{V}(f, [a, b]) = \int_a^b |\varphi(u)| \, du.$$

5°. **Адитивність варіації.** Нехай $f \in \mathbf{BV}([a, b])$ і $a < c < b$. Тоді $f \in \mathbf{BV}([a, c])$, $f \in \mathbf{BV}([c, b])$ і

$$\mathbf{V}(f, [a, b]) = \mathbf{V}(f, [a, c]) + \mathbf{V}(f, [c, b]).$$

$\ulcorner$ Нехай $\lambda_1 = \lambda_1([a, c]) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n(1)}\}$, $\lambda_2 = \lambda_2([c, b]) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n(2)}\}$ і $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$ — розбиття відрізка $[a, b]$. З нерівності

$$\sum_{k=0}^{n(1)-1} |f(u_{k+1}) - f(u_k)| + \sum_{k=0}^{n(2)-1} |f(v_{k-1}) - f(v_k)| \leqslant \mathbf{V}(f, [a, b]) \tag{1}$$

випливає, що

$$\sum_{k=0}^{n(1)-1} |f(u_{k+1}) - f(u_k)| \leqslant \mathbf{V}(f, [a, b]);$$

$$\sum_{k=0}^{n(2)-1} |f(v_{k+1}) - f(v_k)| \leqslant \mathbf{V}(f, [a, b]),$$

і цим перше твердження доведене. Крім того, згідно з нерівністю (1)

$$\mathbf{V}(f, [a, c]) + \mathbf{V}(f, [c, b]) \leqslant \mathbf{V}(f, [a, b]). \tag{2}$$

Нехай тепер $\lambda = \lambda([a, b]) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ — розбиття відрізка $[a, b]$, причому $c \in (x_\nu, x_{\nu+1})$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{\nu-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| +$$

$$+ |f(x_{\nu+1}) - f(c) + f(c) - f(x_\nu| +$$

$$+ \sum_{k=\nu+1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{\nu-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| +$$

$$+ |f(c) - f(x_\nu)| + |f(x_{k+1}) - f(c)| +$$

$$+ \sum_{k=\nu+1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]).$$

Звідси

$$\mathbf{V}(f, [a, b]) \leqslant \mathbf{V}(f, [a, c]) + \mathbf{V}(f, [c, b]). \tag{3}$$

Потрібну рівність одержимо з нерівностей (2) і (3). $\lrcorner$

Зауваження. Друга частина доведення властивості 5° показує, що: $f \in \mathbf{BV}([a, c])$ і $f \in \mathbf{BV}([c, b]) \Rightarrow f \in \mathbf{BV}([a, b])$.

Вправи

11. Обчислити варіацію функцій:

а) $f(x) = \sin 2x$, $x \in [0, 2\pi]$; б) $f(x) = |\sin x|$, $x \in [0, 10\pi]$.

12. Нехай

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x\neq 0,\\ 0, \quad x=0; & \{\alpha,\beta\}\subset \mathbf{R},\ \beta>0.\end{cases}$$

Довести, що $\mathbf{V}(f,[0,1])<+\infty$, якщо $\alpha>\beta$, і $\mathbf{V}(f,[0,1])=+\infty$, якщо $\alpha\leqslant\beta$.

13. Нехай $f\colon [a,+\infty)\to\mathbf{R}$ і $\forall b>a\colon f\in\mathbf{BV}([a,b])$. Визначимо

$$\mathbf{V}(f,[a,+\infty)):=\lim_{b\to+\infty}\mathbf{V}(f,[a,b])\leqslant+\infty.$$

Довести, що з нерівності $\mathbf{V}(f,[a,+\infty))<+\infty$ випливає існування скінченної границі $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Обернене твердження не має місця. Навести приклад.

6°. **Теорема Жордана**[1]. Функція $f\in\mathbf{BV}([a,b])$ тоді й тільки тоді, коли f можна подати у вигляді різниці монотонно неспадних на $[a,b]$ функцій.

⌈Достатність. Випливає із властивості 4° і результату прикладу 1 п. 2.1.

Необхідність. Нехай $f\in\mathbf{BV}([a,b])$. Визначимо функції

$$g(a)=0;\quad g(x)=\mathbf{V}(f,[a,x]),\ x\in[a,b];$$

$$h(x)=g(x)-f(x),\quad x\in[a,b].$$

Функція g монотонно не спадає на $[a,b]$, оскільки для $a\leqslant x'<x''\leqslant b$ маємо згідно з властивістю 5°

$$g(x'')=\mathbf{V}(f,[a,x''])=\mathbf{V}(f,[a,x'])+\mathbf{V}(f,[x',x''])\geqslant$$
$$\geqslant\mathbf{V}(f,[a,x'])=g(x').$$

Функція h монотонно не спадає на $[a,b]$, оскільки для $a\leqslant x'<x''\leqslant b$ згідно з властивостями 5° і 2°

$$h(x'')-h(x')=g(x'')-f(x'')-g(x')+f(x')=$$
$$=\mathbf{V}(f,[x',x''])-(f(x'')-f(x'))\geqslant 0.$$ ⌋

Вправи

14*. Довести, що множини точок розриву функцій f і g з теореми Жордана збігаються. Довести, що функція $f\in\mathbf{BV}([a,b])$ може мати не більш як зліченну множину точок розриву першого роду.

---

[1] *Жордан Каміль Марі Едмон* (1838—1892) — французький математик. Йому належить ряд нових фундаментальних понять та ідей сучасної математики (жорданова форма матриці, крива Жордана, міра Жордана, функції обмеженої варіації та ін.). Автор курсів з теорії груп, теорії Галуа, «Трактата про підстановки», тритомного «Курсу аналізу», широко відомих у свій час і зробивших істотний вплив на розвиток математики.

15. Нехай $f \in C^{(1)}([a, b])$. Довести, що

$$\frac{d}{dx} V(f, [a, x]) = |f'(x)|, \quad x \in [a, b].$$

16. Зобразити у вигляді різниці монотонно не спадних функцій такі функції:

а) $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$; б) $f(x) = \sin^2 x$, $x \in [0, 2\pi]$;
в) $f(x) = x - [x]$, $x \in [0, 3]$; г) $f(x) = \sin x - x \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

17. Нехай $f \in BV([a, b])$ і

$$g(a) := f(a); \quad g(x) := \frac{1}{x-a} \int_a^x f(u)\, du, \quad x \in (a, b].$$

Довести, що $g \in BV([a, b])$.

18. Нехай $f \in BV([a, b]) \cap C([a, b])$. Довести, що f можна зобразити у вигляді різниці двох неперервних і монотонно неспадних на відрізку $[a, b]$ функцій.

2.3. СПРЯМЛЮВАНІ КРИВІ

Означення 1. Множина точок в R^3

$$\Gamma = \{(x, y, z) \mid x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t), z = \varphi_3(t);\ t \in [\alpha, \beta]\},$$

де $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subset C([\alpha, \beta])$, називаються ***неперервною кривою*** в R^3.

Нехай $\lambda = \lambda([\alpha, \beta]) = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ — розбиття відрізка $[\alpha, \beta]$ і $(\varphi_1(t_j), \varphi_2(t_j), \varphi(t_j))$, $0 \leqslant j \leqslant n$ — точки на Γ. Для кожного j, $0 \leqslant j \leqslant n-1$ з'єднаємо точки

$$(\varphi_1(t_j), \varphi_2(t_j), \varphi_3(t_j)), (\varphi_1(t_{j+1}), \varphi_2(t_{j+1}), \varphi_3(t_{j+1}))$$

відрізком прямої. Нехай $\Gamma(\lambda)$ — одержана ламана і $l(\Gamma(\lambda))$ — її довжина. За теоремою Піфагора

$$l(\Gamma(\lambda)) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k))^2}\ .$$

Означення 2. Неперервна крива Γ називається ***спрямлюваною***, якщо

$$l(\Gamma) := \sup l(\Gamma(\lambda)) < +\infty,$$

де верхня межа береться за всіма можливими розбиттями λ відрізка $[\alpha, \beta]$. Число $l(\Gamma)$ називається ***довжиною кривої*** Γ.

Вправа

19. Довести, що $\sup\limits_{\lambda} l(\Gamma(\lambda)) = \lim\limits_{|\lambda| \to 0} l(\Gamma(\lambda))$

ТЕОРЕМА (Жордана). Крива Γ спрямлювана тоді й тільки тоді, коли

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subset \mathbf{BV}([\alpha, \beta]).$$

$\ulcorner$Доведення випливає із означення функції обмеженої варіації і нерівностей

$$\max_{i=1,2,3} \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)| \leqslant l(\Gamma(\lambda)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)|. \qquad \lrcorner$$

§ 3. ІНТЕГРАЛ СТІЛЬТЬЄСА

3.1. ОЗНАЧЕННЯ

Нехай $[a, b]$ — відрізок на $\mathbf{R}$; f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ — функція, обмежена на $[a, b]$; α: $[a, b] \to \mathbf{R}$ — монотонно не спадна функція на $[a, b]$. Для розбиття

$$\lambda = \lambda([a, b]) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

і функції f покладемо для $0 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$\Delta x_k := x_{k+1} - x_k,$$

$$m_k := \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f, \quad M_k := \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f$$

і $|\lambda| := \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}\}$.

Означення 1. Нижньою сумою Дарбу — Стільтьєса називається сума

$$L(f, \alpha; \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)),$$

Верхньою сумою Дарбу — Стільтьєса — сума

$$U(f, \alpha; \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)).$$

Для $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ сума

$$S(f, \alpha; \lambda, \{\xi_i \mid \lambda\}) = S(f, \alpha; \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)).$$

називається ***інтегральною.***

Зауваження. При $\alpha(x) = x$, $x \in [a, b]$ означення 1 містить як окремий випадок суми Дарбу і інтегральні суми, введені раніше при визначенні інтеграла Рімана.

Якщо нерівності

$$\inf_{[a,b]} \leqslant m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k \leqslant \sup_{[a,b]} f$$

помножити на $\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k) \geqslant 0$ і підсумувати одержані нерівності по k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, то матимемо таку властивість введених сум:

$$\forall \lambda = \lambda([a, b]) \quad \forall \{\xi_i \mid \lambda\} : \inf_{[a,b]} f \cdot (\alpha(b) - \alpha(a)) \leqslant L(f, \alpha; \lambda) \leqslant$$
$$\leqslant S(f, \alpha; \lambda) \leqslant U(f, \alpha; \lambda) \leqslant \sup_{[a,b]} f \cdot (\alpha(\beta) - \alpha(a)),$$

з якої випливає, що множини чисел

$$\{L(f, \alpha; \lambda) \mid \lambda\}, \{U(f, \alpha; \lambda) \mid \lambda\}$$

обмежені.

Означення 2. Нижнім інтегралом Рімана—Стільтьєса називається число

$$\underline{\int} f(x)\, d\alpha(x) := \sup_{\lambda} L(f, \alpha; \lambda),$$

верхнім інтегралом Рімана — Стільтьєса — число

$$\overline{\int} f(x)\, d\alpha(x) := \inf_{\lambda} U(f, \alpha; \lambda).$$

Якщо $\underline{\int} f(x)\, d\alpha(x) = \overline{\int} f(x)\, d\alpha(x)$, то функція f називається ***інтегровною відносно функції*** α ***по відрізку*** $[a, \beta]$, а число

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) := \underline{\int} f(x)\, d\alpha(x) = \overline{\int} f(x)\, d\alpha(x) -$$

інтегралом Рімана—Стільтьєса функції f відносно функції α на $[a, b]$.

Позначення $f \in RS(\alpha, [a, b]) \Leftrightarrow f$ — інтегровна відносно α на $[a, b]$.

Вправи

1. Для функції Діріхле f на $[0, 1]$ і функції α такої, що $\alpha(1) - \alpha(0) > 0$ і довільного розбиття визначити суми Дарбу—Стільтьєса, а також верхній і нижній інтеграли.

2. Функції f і α на $[-1, 1]$ визначені таким чином:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}; \quad \alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Довести, що $\underline{\int} f d\alpha = -1$, $\overline{\int} f d\alpha = 1$.

3.2. ВЛАСТИВОСТІ НИЖНІХ І ВЕРХНІХ СУМ

1°. Якщо λ' — підрозбиття λ, то

$$L(f, \alpha; \lambda) \leqslant L(f, \alpha; \lambda'); \quad U(f, \alpha, \lambda') \leqslant U(f, \alpha; \lambda).$$

Доведення цього твердження використовує монотонність α і збігається з доведенням аналогічного твердження для сум Дарбу.

2°. Для будь-яких розбиттів λ' і λ''

$$L(f, \alpha; \lambda') \leqslant U(f, \alpha; \lambda'').$$

3°.

$$\underline{\int} f(x)\, d\alpha(x) \leqslant \overline{\int} f(x)\, d\alpha(x).$$

4°. Критерій інтегровності. $f \in \mathrm{RS}(\alpha, [a, b])$ тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \lambda: \ U(f, \alpha; \lambda) - L(f, \alpha; \lambda) < \varepsilon.$$

⌈Доведення таке саме, як і для інтеграла Рімана. ⌋

Вправи

3. Довести, що для кожного $C \in \mathrm{R}$

$$\int_a^b C d\alpha(x) = C(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

4. Довести, що якщо $\alpha(a) = \alpha(b)$, то

$$\forall f: \ \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = 0.$$

5. Нехай $\{f, g\} \subset \mathrm{RS}(\alpha, [a, b])$. Довести, що

$$\forall c \in \mathrm{R}: \ cf \in \mathrm{RS}(\alpha, [q, b]);$$
$$|f| \in \mathrm{RS}(\alpha, [a, b]);$$
$$(f \pm g) \in \mathrm{RS}(\alpha, [a, b]);$$
$$fg \in \mathrm{RS}(\alpha, [a, b]).$$

3.3. КЛАСИ ІНТЕГРОВНИХ ФУНКЦІЙ

1°. $\mathbf{C}([a, b]) \subset \mathbf{RS}(\alpha, [a, b])$. При цьому

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \lambda, |\lambda| < \delta \quad \forall \{\xi_i | \lambda\}:$$

$$: \left| S(f, \alpha; \lambda, \{\xi_i | \lambda\}) - \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \right| < \varepsilon$$

або

$$\lim_{|\lambda| \to 0} S(f, \alpha; \lambda) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

⌐Нехай $f \in \mathbf{C}([a, b])$ і $\alpha(b) - \alpha(a) > 0$. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. За теоремою Кантора f рівномірно неперервна на $[a, b]$. Тому

$$\forall \delta > 0 \quad \forall \{x', x''\} \subset [a, b], \ |x' - x''| < \delta :$$

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}.$$

Для розбиття $\lambda, |\lambda| < \delta$ маємо

$$U(f, \alpha; \lambda) - L(f, \alpha; \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) = \varepsilon.$$

Згідно з критерієм інтегровності, $f \in \mathbf{RS}(\alpha, [a, b])$. Крім того, оскільки

$$L(f, \alpha; \lambda) \leqslant \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \leqslant U(f, \alpha; \lambda);$$

$$L(f, \alpha; \lambda) \leqslant S(f, \alpha; \lambda) \leqslant U(f, \alpha; \lambda),$$

то $\left| \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) - S(f, \alpha; \lambda) \right| < \varepsilon.$ ⌙

Вправа

6. Обчислити інтеграл за допомогою твердження 1°:

$$\int_0^1 x^2 d\alpha(x), \quad \alpha(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 2, & 0 < x < 1, \\ 3, & x = 1, \end{cases}$$

2°. Нехай функція f монотонна на $[a, b]$, а α монотонно не спадає на $[a, b]$ і неперервна на $[a, b]$. Тоді $f \in \mathrm{RS}(\alpha, [a, b])$ і

$$\lim_{|\lambda| \to 0} S(f, \alpha; \lambda) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

$\ulcorner$Припустимо, що f монотонно не спадає і $f(b) - f(a) > 0$. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. За теоремою Кантора

$$\exists \delta > 0 \ \forall \{x', x''\} \subset [a, b], \quad |x' - x''| < \delta:$$

$$|\alpha(x') - \alpha(x'')| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Для будь-якого $\lambda, |\lambda| < \delta$ маємо

$$U(f, \alpha; \lambda) - L(f, \alpha; \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k))(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \varepsilon. \qquad \lrcorner$$

Вправа

6.1. Функції f і α задовольняють умови п. 2° і $\alpha(a) \geqslant 0$. Довести, що для довільного $p > 1$ функція α^p монотонно не спадаюча на $[a, b]$ і

$$\int_a^b f d(\alpha^p) = p \int_a^b f \alpha^{p-1} d\alpha.$$

3.4 ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛА СТІЛЬТЬЄСА

Доведення наступних тверджень аналогічні доведенням відповідних тверджень для інтеграла Рімана і тому не наводяться.

1. Якщо $f \in \mathrm{RS}(\alpha, [a, b])$ і $c \in \mathbf{R}$, то $cf \in \mathrm{RS}(\alpha, [a, b])$ і

$$\int_a^b cf(x)\, d\alpha(x) = c \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

2°. Нехай функції f_1, f_2 і α задовольняють умовам 1° п. 3. 3 або 2° п. 3. 3. Тоді

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\, d\alpha(x) = \int_a^b f_1(x)\, d\alpha(x) + \int_a^b f_2(x)\, d\alpha(x).$$

3°. Якщо $f \in \mathbf{RS}(\alpha, [a, b])$ і $a < c < a$, то

$$f \in \mathbf{RS}(\alpha, [a, c]), \quad f \in \mathbf{RS}(\alpha, [c, b]);$$

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^c f(x)\, d\alpha(x) + \int_c^b f(x)\, d\alpha(x).$$

4°. Якщо $\{f_1, f_2\} \subset \mathbf{RS}(\alpha, [a, b])$ і $\forall x \in [a, b]$: $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, то

$$\int_a^b f_1(x)\, d\alpha(x) \leqslant \int_a^b f_2(x)\, d\alpha(x).$$

5°. Якщо $f \in \mathbf{RS}(\alpha, [a, b])$, то

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (\alpha(b) - \alpha(a)) \leqslant \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \leqslant \sup_{[a,b]} f \cdot (\alpha(b) - \alpha(a));$$

$$|f| \in \mathbf{RS}(\alpha, [a, b])$$

і

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, d\alpha(x).$$

6°. Нехай α_i монотонно неспадна на $[a, b]$ функція і $f \in \mathbf{RS}(\alpha_i, [a, b])$, $i = 1, 2$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\, d(\alpha_1(x) + \alpha_2(x)) = \int_a^b f(x)\, d\alpha_1(x) + \int_a^b f(x)\, d\alpha_2(x).$$

Вправи

7. Якщо $f \in \mathbf{C}([a, b])$ і $\forall x \in [a, b]$: $f(x) > 0$, а $\alpha(b) - \alpha(a) > 0$, то $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) > 0$.

8. Якщо $f \in \mathbf{C}([a, b])$, то

$$\exists \theta \in [a, b]: \quad \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(\theta)(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

9. Нехай $\int_0^\pi \sin x\, d\alpha(x) = \alpha(\pi) - \alpha(0)$. Довести, що функція α постійна, виключаючи точку $\frac{\pi}{2}$, в якій $\alpha\left(\frac{\pi}{2} +\right) - \alpha\left(\frac{\pi}{2} -\right) = \alpha(\pi) - \alpha(0)$.

10. Нехай $\forall f \in \mathbf{C}([0,1])$: $\int_0^1 f(x)\, d\alpha(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Довести, що функ-

ція α постійна, виключаючи точку $\frac{1}{2}$, в якій $\alpha\left(\frac{1}{2}+\right)-\alpha\left(\frac{1}{2}-\right)=$ $=1$.

11. Для функції $f \in C([a, b])$ і будь-якої монотонно неспадної на $[a, b]$ функції α

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Довести, що $\forall x \in [a, b]$: $f(x) = 1$.

12. Нехай $f \in C([a, b])$, функція α монотонно не спадає і неперервна на $[a, b]$, а

$$F(x) = \int_a^x f(u)\, d\alpha(u), \quad x \in [a, b].$$

Довести, що $F \in C([a, b]) \cap BV([a, b])$. Чи буде вірне це твердження для $\alpha \notin C([a, b])$?

13. Якщо в точці c, $a < c < b$ хоча б одна із функцій f, α неперервна, то із існування інтегралів $\int_a^c f(x)\, d\alpha(x)$; $\int_c^b f(x)\, d\alpha(x)$ випливає існування інтеграла $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$.

14. Якщо послідовність $\{f_n : n \geqslant 1\} \subset C([a, b])$ збігається рівномірно на $[a, b]$ до функції f, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

15. Припустимо, що

$$\int_0^1 x(1-x)\, d\alpha(x) = 0, \quad \int_0^1 x\, d\alpha(x) = \frac{1}{3}(\alpha(1) - \alpha(0)).$$

Визначити функцію α.

3.5. ІНТЕГРАЛ СТІЛЬТЬЄСА ВІДНОСНО ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

Якщо $\alpha \in BV([a, b])$, то згідно з теоремою Жордана $\alpha =$ $= \beta - \gamma$, де β і γ — монотонно неспадні на $[a, b]$ функції. Тому $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ природно визначити як різницю

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) := \int_a^b f(x)\, d\beta(x) - \int_a^b f(x)\, d\gamma(x). \tag{1}$$

Проте означення (1) потребує пояснень. По-перше, розклад Жордана $\alpha = \beta - \gamma$ не є єдиним, по-друге, слід вимагати інтегровність f відносно всіх компонент розкладу Жордана. За допомогою тверджень 1° і 2° п. 3.3 існування інтеграла можна гарантувати у двох випадках:

1) $f \in \mathbf{C}([a, b])$, $\alpha \in \mathbf{BV}([a, b])$;

2) $f \in \mathbf{BV}([a, b])$, $\alpha \in \mathbf{BV}([a, b]) \cap \mathbf{C}([a, b])$,

коли має місце інтегровність f відносно компонент розкладу. Різниця (1) не залежить від різних розкладів α. Дійсно, нехай $\alpha = \tilde{\beta} - \tilde{\gamma}$. Тоді $\beta + \tilde{\gamma} = \tilde{\beta} + \gamma$ і, отже,

$$\int_a^b f(x)\, d(\beta(x) + \tilde{\gamma}(x)) = \int_a^b f(x)\, d(\tilde{\beta}(x) + \gamma(x)).$$

Враховуючи властивість 6°, одержимо

$$\int_a^b f(x)\, d\beta(x) - \int_a^b f(x)\, d\gamma(x) = \int_a^b f(x)\, d\tilde{\beta}(x) - \int_a^b f(x)\, d\tilde{\gamma}(x).$$

Зазначимо, що в обох випадках інтеграл (1) є границя інтегральних сум.

Вправи

16*. Довести, що

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dv(x) \leqslant \sup_{[a,b]} |f|\, \mathbf{V}(\alpha, [a, b]),$$

де $v(x) := \mathbf{V}(\alpha, [a, x])$, $x \in [a, b]$.

17. Правило інтегрування за частинами. Нехай

$$f \in \mathbf{BV}([a, b]) \cap \mathbf{C}([a, b]), \quad \alpha \in \mathbf{BV}([a, b]).$$

Довести, що

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(b)\,\alpha(b) - f(a)\,\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\, df(x).$$

Вказівка.

$$\lim_{|\lambda| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) = f(b)\,\alpha(b) -$$

$$- f(a)\,\alpha(a) - \lim_{|\lambda| \to 0} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha(x_k)\,(f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})),$$

$$a = \xi_0, \quad b = \xi_n.$$

3.6. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА СТІЛЬТЬЄСА

ТЕОРЕМА 1. Нехай $f \in \mathbf{R}[(a, b])$, $\alpha \in C([a, b])$ і, виключаючи скінченне число точок відрізка $[a, b]$, існує α' і $\alpha' \in \mathbf{R}([a, b])$.

Тоді існує границя

$$\lim_{|\lambda| \to 0} S(f, \alpha; \lambda) = \int_a^b f(x)\, \alpha'(x)\, dx.$$

⌐Для розбиття $\lambda = \{x_0, \ldots, x_n\}$, що містить точки, в яких α' не існує, маємо

$$S(f, \alpha; \lambda, \{\xi_i \mid \lambda\}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\, \alpha'(\eta_k)\, \Delta x_k,$$

де $\eta_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. З цієї рівності одержимо твердження теореми, враховуючи, що $f\alpha' \in \mathbf{R}([a, b])$. ⌙

ЛЕМА 1. Нехай $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ неперервна в точці c, $a \leqslant c \leqslant b$ і

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(c-), & x < c, \\ \alpha(c), & x = c, \\ \alpha(c+), & x > c; \end{cases}$$

$$\alpha(c-) \leqslant \alpha(c) \leqslant \alpha(c+).$$

Тоді

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(c)(\alpha(c+) - \alpha(c-)).$$

⌐ Дійсно, $S(f, \alpha; \lambda, \{\xi_i \mid \lambda\})$ дорівнює

$$f(\xi_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)), \quad c \in (x_k, x_{k+1})$$

або

$$f(\xi_{k-1})(\alpha(c) - \alpha(x_{k-1})) + f(\xi_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(c)), \quad c = x_k. \quad ⌙$$

ЛЕМА 2. Нехай $f \in C([a, b])$, $a = z_1 < z_2 < \ldots < z_m = b$ і функція $\alpha: [a, b] \to \mathbf{R}$ постійна на кожному із інтервалів (z_k, z_{k+1}), $1 \leqslant k \leqslant m-1$.

Тоді

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{m} f(z_k)(\alpha(z_k+) - \alpha(z_k-).$$

⌈ Лема 2 є наслідком леми 1 і властивості 3°. ⌋

ТЕОРЕМА 2. Нехай $f \in \mathbf{C}([a, b])$; α неперервна на $[a, b]$, крім скінченного числа точок $z_1, \ldots, z_m$ — точок розриву першого роду; за винятком скінченного числа точок існує α', причому $\alpha' \in \mathbf{R}([a, b])$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\, \alpha'(x)\, dx + \sum_{k=1}^{m} f(z_k)\, (\alpha(z_k +) - \alpha(z_k -)).$$

⌈ Вказівка. Зобразити α у вигляді суми функцій із теореми 1 і леми 2. ⌋

Вправа

18. Обчислити інтеграл $\int_0^2 2^x d\,(x \operatorname{sign} \cos \pi x)$.

3.7. ТЕОРЕМА ПРО ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД

ТЕОРЕМА (Хеллі)[1]. Нехай $f \in \mathbf{C}([a, b])$, а α і α_n, $n \geqslant 1$ монотонно не спадні на $[a, b]$ функції. Припустимо, що $\alpha_n(x) \to \alpha(x)$, $n \to \infty$ для всіх тих точок $x \in [a, b]$, в яких функція α неперервна, і що $\alpha_n(a) \to \alpha(a)$, $\alpha_n(b) \to \alpha(b)$, $n \to \infty$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x). \tag{1}$$

⌈ Зауважимо, що всі інтеграли в (1) визначені. Для розбиття $\lambda = \lambda([a, b]) = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$, в якому $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ — точки неперервності функції α, розглянемо допоміжну нерівність:

$$\Delta_n := \left| \int_a^b f(x)\, d\alpha_n(x) - \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{m-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, d\alpha_n(x) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, d\alpha(x) \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))\, d\alpha_n(x) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\, d\alpha_n(x) - \right.\right.$$

[1] *Хеллі Едуард* (1884—1943) — австрійський математик, автор праць з топології та функціонального аналізу.

$$- \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\, d\alpha(x) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))\, d\alpha(x) \Big\} \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)|\, d\alpha_n(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_k)| \left(|\alpha_n(x_{k+1}) - \alpha(x_{k+1})| + |\alpha_n(x_k) - \alpha(x_k)| \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)|\, d\alpha(x). \qquad (2)$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Оскільки $f \in C([a, b]$, то за теоремою Кантора

$$\exists \delta > 0 \ \forall \{x', x''\} \subset [a, b], \quad |x' - x''| < \delta:$$

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3(1 + \alpha(b) - \alpha(a))}.$$

Припустимо додатково, що розбиття λ в нерівності (2) має розмір $|\lambda| < \delta$ і фіксоване. Тоді

$$\Delta_n \leqslant \frac{\varepsilon}{3(1 + \alpha(b) - \alpha(a))} (\alpha_n(b) - \alpha_n(a)) +$$

$$+ \sup_{[a,b]} |f| \sum_{k=0}^{m-1} \left(|\alpha_n(x_{k+1}) - \alpha(x_{k+1})| + |\alpha_n(x_k) - \alpha(x_k)| + \right.$$

$$+ \frac{\varepsilon}{3(1 + \alpha(b) - \alpha(a))} (\alpha(b) - \alpha(a)).$$

Виберемо число N таким чином, щоб:

1) $\forall n \geqslant N$: $\alpha_n(b) - \alpha_n(a) < \alpha(b) - \alpha(a) + 1$;
2) $\forall n \geqslant N$:

$$\sup_{[a,b]} |f| \sum_{k=0}^{m-1} \left(|\alpha_n(x_{x+1}) - \alpha(x_{k+1})| + |\alpha_n(x_k) - \alpha(x_k)| \right) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тоді $\forall n \geqslant N$, $\Delta_n < \varepsilon$. ⌋

Приклад. Нехай α — монотонно неспадна на відрізку $[a, b]$ функція стрибків, а x_n, $n \geqslant 1$ — всі точки стрибків функції α, причому $\alpha(a) = 0$, $\alpha(b-) = \alpha(b)$. Тоді

$$\alpha(x) = \sum_{k: x_k < x} (\alpha(x_k +) - \alpha(x_k -) + \alpha(x) - \alpha(x -)$$

для $x \in [a, b]$. Для $n \in \mathbf{N}$ введемо функцію

$$\alpha_n(x) := \sum_{\substack{k: x_k < x \\ k \leqslant n}} (\alpha(x_k +) - \alpha(x_k -)), \quad x \in [a, b].$$

Зауважимо, що для будь-якої $x \in [a, b]$ — точки неперервності α

$$\alpha_n(x) \to \alpha(x), \quad n \to \infty,$$

оскільки

$$|\alpha(x) - \alpha_n(x)| = \Big| \sum_{\substack{k: x_k < x \\ k > n}} (\alpha(x_k +) - \alpha(x_k -)) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k > n} (\alpha(x_k +) - \alpha(x_k -)) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Ми використали те, що ряд із додатних стрибків збігається. Згідно з лемою 2 п. 3.5 і теоремою Хеллі маємо для $f \in C([a, b])$ формулу

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)\, (\alpha(x_k +) - \alpha(x_k -)),$$

причому ряд в правій частині збігається абсолютно.

Зауваження. Приклад показує, що сума будь-якого абсолютного збіжного ряду може бути подана у вигляді інтеграла Стільтьєса.

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛІВ 5—9

1. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0; \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Довести, що функції f і g мають первісні на $\mathbf{R}$, а для функції h не існує первісної на $\mathbf{R}$.

2. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$ і $h(x) = \inf\limits_{a \leqslant t \leqslant x} f(t)$, $H(x) = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant x} f(x)$, $x \in [a, b]$. Довести, що $\{h, H\} \subset \mathbf{R}([a, b])$.

3. Функція $f \in \mathbf{R}([0, 1])$ задовольняє співвідношенню

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f\left(\frac{x+2}{3}\right)\right), \quad x \in [0, 1],$$

причому $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$. Визначити f.

Відповідь. $f(x) = 1$, $x \in [0, 1]$.

4. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)$.

Відповідь. а) $1 - \cos 1$; б) $\frac{1}{2}$.

5. Нехай $f \in \mathrm{Lip}_1([0, 1], L)$, $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$. Довести, що

$$\forall n \geqslant 1: \quad \left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2} L.$$

6. Нехай $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$. Довести, що f непарна на $\mathbf{R}$ тоді й тільки тоді, коли

$$\exists c \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathbf{R}: \int\limits_{-x}^{x} f(t)\,dt = c.$$

7. Визначити функцію $f \in \mathbf{C}([0, 1])$, яка задовольняє рівності

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3} + \int\limits_0^1 f^2(x^2)\,dx.$$

Відповідь. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

8. Нехай функція $f \in \mathbf{C}([a, b])$ опукла вгору на $[a, b]$ і невід'ємна на $[a, b]$. Довести нерівність

$$\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{2} \max_{[a,b]} f.$$

9. Довести, що для зростаючої на (a, b) функції f функція

$$F(x) = \int\limits_c^x f(t)\,dt, \quad x \in (a, b), \quad c \in (a, b),$$

опукла вниз на (a, b).

10. Для функції $f \in \mathbf{BV}([a, b])$ покладемо

$$g(x) := \frac{1}{x-a} \int\limits_a^x f(u)\,du, \quad x \in (a, b];$$

$$g(a) := f(a).$$

Довести, що $g \in \mathbf{BV}([a, b])$.

Вказівка. Використати теорему Жордана.

11. Функція $f \in \mathbf{C}^1([0,1])$ строго зростає на відрізку $[0,1]$ і $f(0) = 0$; g — функція, обернена до f. Довести, що

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt + \int\limits_0^{f(x)} g(t)\,dt = xf(x), \quad x \in [0, 1].$$

12. Для функції $f \in C([a, b])$, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$. Довести, що

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx \leqslant mM(b-a),$$

де $m := -\min\limits_{[a,b]} f$, $M := \max\limits_{[a,b]} f$.

13. Нехай $f \in C([0,2\pi])$. Довести, що послідовність функцій

$$\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right),\quad x \in [0, 1]: n \geqslant 1\right\}$$

збігається рівномірно на відрізку $[0, 1]$, і знайти граничну функцію.

Відповідь. $\int\limits_0^1 f(x+t)\,dt$, $x \in [0, 1]$.

14. Нехай функція $f \in C^{(1)}([a,b])$ і монотонна на відрізку $[a, b]$, а $g \in C([a, b])$. Довести, що

$$\exists \theta \in (a, b): \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\theta g(x)\,dx + f(b)\int\limits_\theta^b g(x)\,dx$$

Вказівка. Спочатку в лівій частині проінтегрувати за частинами, потім до одержаного інтеграла застосувати теорему про середнє значення.

15*. Довести, що

$$\forall a > 0\ \forall x > 0: \left|\int\limits_x^{x+a} \sin t^3\,dt\right| < \frac{4}{3x^2}.$$

16*. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n} = \int\limits_0^1 \ln x\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\varepsilon^1 \ln x\,dx.$$

За допомогою цієї рівності встановити, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}$.

17*. Нехай

$$D = \{f \in C^{(2)}([0,1]) \mid f(0) = f(1) = 0,\ f'(0) = a\},$$

$a \in R$ фіксоване. Знайти значення $\min\limits_{f\in D}\int\limits_0^1 (f''(x))^2\,dx$ і функцію, на якій досягається мінімум.

Відповідь. $3a^2$; $f(x) = \frac{a}{2}(x^3 - 3x^2 + 2x)$, $x \in [0, 1]$.

18*. Для функції f, яка диференційовна в деякому околі точки x і для якої f' неперервна в точці x, довести рівність

$$\lim_{n\to\infty} 2\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(x+\frac{k}{k^2+n^2}\right)-f(x)\right)=f'(x)\ln 2.$$

19*. Нехай $f\in C^{(1)}([0,1])$, причому $f'(0)\neq 0$. Для кожного $x\in(0,1]$ нехай $\theta(x)$ — яке-небудь число з теореми про середнє значення

$$\int_0^x f(t)\,dt=f(\theta(x))\,x.$$

Довести, що

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\theta(x)}{x}=\frac{1}{2}.$$

20. Нехай $\{f,g\}\subset C([0,1])$. Довести нерівність

$$\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2+\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right)^2\leqslant\left(\int_0^1\sqrt{f^2(t)+g^2(t)}\;dt\right)^2.$$

Вказівка. Розглянути в площині криву $x=F(t)$, $y=G(t)$, $t\in[0,1]$, де F і G — первісні f і g відповідно. Нерівність означає, що довжина хорди, що з'єднує точки $(F(0), G(0))$ і $(F(1), G(1))$, не більша за довжину кривої.

21. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{(1+t)^{\frac{1}{13}}-1}{t}\,dt.$$

Відповідь. $\frac{1}{13}$.

22. Функція $f\in R([0,b])$ і має границю $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=p$. Для $0<a<b$ обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a/n}^{b/n}\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Відповідь. $p\ln\frac{b}{a}$.

23. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(u)\,du$ для функцій:

а) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}\sin^2\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Відповідь. а) 0; б) $\frac{1}{2}$.

24. Нехай $\{f, g\} \subset C([0, 1))$; $g(x) > 0$, $x \in [0, 1]$;

$$\lim_{x \to 1-} \int_0^x g(t)\, dt = +\infty; \qquad \lim_{x=1-} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

Довести, що

$$\lim_{x \to 1-} \frac{\int_0^x f(t)\, dt}{\int_0^x g(t)\, dt} = a.$$

25. Знайти границю

$$\lim_{x \to \infty} \left(\int_0^x e^{u^2} du \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Відповідь. e.

26. Нехай $f \in C([0, +\infty))$ і $f(x) \to a$, $x \to +\infty$. Довести, що

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A} \int_0^A f(x)\, dx = a.$$

Навести приклад функції $f \in C([0, +\infty))$, для якої існує остання границя і яка не має границі при $x \to +\infty$.

27. Знайти границю $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$.

Відповідь. 0.

28. Нехай функція f: $R \to R$ така, що

$$\forall x \in R: f(x + 1) = f(x); \qquad f \in R([0, 1]);$$

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0.$$

Довести, що для будь-яких a, b, $a < b$, $\lambda > 0$ виконується нерівність

$$\left| \int_a^b f(\lambda x)\, dx \right| \leqslant \frac{2}{\lambda} \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

29. Для функції $f \in C^{(1)}([a, b])$ довести співвідношення

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \cos nx\, dx = 0.$$

Вказівка. Проінтегрувати за частинами.

30. $f \in C^{(1)}([a, b])$. Довести, що

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)\, dx.$$

31*. Для $f \in C([0, 1])$ довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)(\sin \pi xn)_+ dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(x)\, dx,$$

де $f_+(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0, \\ 0, & f(x) < 0. \end{cases}$

32. Нехай $f \in C([0, 1])$. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)\, dx$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \int_0^1 x^n f(x)\, dx\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \int_0^1 e^{-nx} f(x)\, dx\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\int_0^1 x^n f(x)\, dx}{\int_0^1 x^n e^{x^2} dx}$;

д)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\int_0^1 f(x) \sin^{2n} 2\pi x dx}{\int_0^1 e^{x^2} \sin^{2n} 2\pi x dx}$;

Відповідь. а) 0; б) $f(1)$; в) $f(0)$; г) $\dfrac{f(1)}{e}$;

д) $\dfrac{f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)}{e^{\frac{1}{16}} + e^{\frac{9}{16}}}$.

33. Нехай $f \in C([0, 1])$. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(\sin^{2n} x)\, dx.$$

Відповідь. $2\pi f(0)$.

34. Для функції $f \in C([-1, 1])$ довести рівності:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \int_0^n f(\sin x)\, dx = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sin x)\, dx$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \int_0^n f(|\sin x|)\, dx = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \int_0^n x f(\sin x)\, dx = \dfrac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\sin x)\, dx$.

35*. Для функції $f \in C([-1, 1])$ обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 xf(\sin 2\pi nx)\,dx$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \cos x \cdot f(\sin 2\pi nx)\,dx$.

Відповідь. а) $\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(\sin 2\pi x)\,dx$; б) $\int\limits_0^1 f(\sin 2\pi x)\,dx \sin 1$.

Вказівка. а) Привести інтеграл до вигляду

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^1 \frac{k+z}{n} f(\sin 2\pi z)\,dz.$$

36. Нехай $f \in R([0, 1])$ і $a_k = \int\limits_0^1 x^k f(x)\,dx$, $k \geqslant 1$. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$.

Відповідь. $-\int\limits_0^1 f(x)\ln(1-x)\,dx := \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_0^{1-\varepsilon} f(x\ \ln(1-x)\,dx$.

37. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно. Довести, що існує збіжна до нуля послідовність $\{b_n,\ n \geqslant 1\}$, для якої ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ розбігається. Чи існує така послідовність додатних чисел?

38*. Числа a_n, $n \geqslant 1$ відмінні від 0 і такі, що $\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \to 1$, $n \to \infty$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ збігається.

39. Дослідити ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-4} V(f, [0, \pi n])$; $f(x) = x\sin^2 x$, $x \geqslant 0$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (V(f, [n, n+1]))^3$, $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (V(f, [0, n]))^{-1}$, $f(x) = \sin x^2$, $x \geqslant 0$.

40. Нехай для $a_1 = 1$, $\alpha \in (0, 1)$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n^{\alpha}}, \quad n \geqslant 1.$$

Довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Вказівка. Перевірити, що $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall n \geqslant 1$: $a_n \leqslant \frac{c}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$.

41. Дослідити на абсолютну збіжність ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_{n}^{n^2} \frac{dx}{1 + x^4}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_{n-1}^{n+1} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^3}\, dx$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_{0}^{1} x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{n}\, dx$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\mathrm{V}(\sin, [0, \pi n]))^{-1}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_{n}^{2n} \frac{dx}{\sqrt{x^5 + n}}$.

42. Нехай ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ збігається. Довести, що існує границя

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Вказівка. Виразити члени послідовності через часткові суми ряду.

43. Припустимо, що :

1) $\forall n \geqslant 1$: $a_{Nn} \to a_n$, $N \to \infty$;

2) $\forall n \geqslant 1\ \forall N \geqslant 1$: $|a_{Nn}| \leqslant b_n$;

3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається.

Довести, що

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{Nn} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

44. Дослідити на рівномірну збіжність ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{x/n} \ln(1+t^2)\,dt, \quad x \in [0, 3];$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-x/\sqrt{n}}^{x/\sqrt{n}} \sin t^2 dt, \quad x \in [-3, 3];$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{nx}^{(n+1)x} \frac{dt}{1+t^{3/2}}, \quad x \in [0, 3];$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{nx^2}^{(n+1)x^2} e^{-t^2} dt, \quad x \in [0, \infty);$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{x\sqrt{n}}^{x\sqrt{n+1}} \frac{\sin t^2}{1+t^2}\,dt, \quad x \in [0, 3].$

45. Довести, що сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \ln^n (x+1)$ належить класу $C^{(\infty)}\left(\left(\frac{1}{e}-1,\ e-1\right)\right)$.

46. Нехай

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}, \quad x \geqslant 0.$$

Довести, що $a \in C([0, +\infty))$ і $a \in C^{(\infty)}((0, +\infty))$.

47. Довести, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

48. Довести, що послідовність чисел $\{a_n : n \geqslant 1\}$ є послідовністю коефіцієнтів степеневого ряду з радіусом збіжності $r = +\infty$ для деякої функції f тоді й тільки тоді, коли $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

49. Функція f — сума степеневого ряду з радіусом збіжності $r > 0$ задовольняє рівнянню

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > r^{-1}$$

для деякого $n \in \mathbf{N}$ і умовам $f^{(k)}(0) = 1$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Знайти функцію f.

Відповідь. $f(x) = e^x$, $x \in (-r, r)$.

50*. Нехай $a_0 > 0$, $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ такі, що

$$A_n \to +\infty, \quad \frac{a_n}{A_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

де $A_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. Довести, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ має радіус збіжності 1.

Вказівка. Звернути увагу на таке:
$\frac{a_n}{A_n} \to 0,\ n \to \infty \Rightarrow \frac{A_n}{A_{n-1}} \to 1,\ n \to \infty \Rightarrow \sqrt[n]{A_n} \to 1,\ n \to \infty,\ a_n = A_n - A_{n-1}$.

51*. Нехай $a_n \in \mathbf{C}$, $\lambda_n \in \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$. Припустимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $z \in \mathbf{C}$ збігається абсолютно в деяких точках $z_1, \ldots, z_m$ площини $\mathbf{C}$. Довести, що цей ряд збігається абсолютно і рівномірно на замкненому опуклому многокутнику, натягнутому на точки $z_1, \ldots, z_m$.

52*. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty} |\cos^n z + \cos^n (z+i) + \cos^n (z+3i)|^{1/n}$$

для $z = a + bi$, $a \in \mathbf{R}$, $b > 0$.

Відповідь. $\sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2(b+3) + \cos 2a)}$.

53. Нехай $A \subset \mathbf{C}$, $f\colon A \to \mathbf{C}$. Функція f називається ***аналітичною*** в точці $x_0 \in A$, якщо

$$\exists \delta > 0\colon B(z_0, \delta) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < \delta\} \subset A$$

і f на $B(z_0, \delta)$ є сумою степеневого ряду по степенях $z - z_0$. Функція f аналітична на множині A, якщо вона аналітична в кожній точці множини A. Нехай f — сума степеневого ряду, радіус збіжності якого $r > 0$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n; \qquad a_n \in \mathbf{C}, \quad n \geqslant 0.$$

Довести, що f є аналітичною функцією на множині $A = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < r\}$. Зокрема, функції $f(z) = e^z$; $f(z) = \cos z$; $f(z) = \sin z$ аналітичні на $\mathbf{C}$.

54. Довести, що аналітична в точці z_0 функція f неперервна в точці z_0. Переконатися в тому, що функція

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

визначена на $\mathbf{C}$, не є аналітичною в точці 0. Довести, що звуження $\tilde{f}$ функції f на $\mathbf{R}$ є функція класу $\mathbf{C}^{(\infty)}(\mathbf{R})$, причому $\tilde{f}^{(n)}(0) = 0$, $n \geqslant 1$.

Зауваження. Таким чином, $\tilde{f}$ не є сумою ряду Тейлора (якщо $\tilde{f}$ — сума степеневого ряду в деякому околі $(-\delta, \delta)$, то цей же степеневий ряд збігається для $z \in \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < \delta\}$).

Вказівка. Функція f розривна в точці 0. Розглянути значення на уявній осі.

55. Визначити множину точок збіжності добутка:

а) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{x^2+n^2}$; б) $\prod_{n=1}^{\infty} (1+x^{\ln n})$.

56. Нехай $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ і добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) = p$ збігається. Знайти границю

$$\lim_{x\to 1-} \prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n x^n).$$

Відповідь. p.

Вказівка. Спочатку довести, що існує

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} \ln (1+a_n x^n).$$

57. Визначити множину A точок збіжності добутку

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1+e^{nx}) = p(x)$$

і довести, що $p \in \mathbf{C}(A)$.

58. Визначити множину A точок збіжності добутку

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{n^2}{x^{2n}}\right) = p(x)$$

і довести існування $p'(x)$ для $x \in A$.

59. Послідовність додатних чисел $\{a_n : n \geqslant 1\}$ така, що

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \to 1, \quad n \to \infty.$$

Довести, що добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ розбігається.

60. Довести, що існує функція $f \in \mathbf{C}([0, 1]) \cap \mathbf{BV}([0,1])$, яка не задовольняє умові Ліпшица на $[0, 1]$ ні з яким показником $\alpha \in [0, 1]$.

61. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{BV}([a,b])$ і

$$h(x) = \max(f(x), g(x)), \quad x \in [a, b].$$

Довести, що $h \in \mathbf{BV}([a, b])$.

62. Функції

$$f(x) = x^3 - x, \quad x \in [-1, 2];$$

$$g(x) = \sin 2\pi x, \quad x \in [-1, 2]$$

зобразити у вигляді різниці монотонно неспадних на відрізку $[-1,2]$ функцій.

63. Обчислити інтеграли Стільтьєса:

а) $\int\limits_0^1 x d(\operatorname{sign}\sin 4\pi k)$; б) $\int\limits_0^1 x d(x^2 \operatorname{sign}\sin 4\pi x)$.

64. Нехай $f \in C([0, +\infty))$ і $f(x) > 0$, $x \geqslant 0$. Довести, що для будь-якого $\alpha > 0$ функція

$$g(x) = f(x) \int\limits_0^x \frac{du}{f(u)^\alpha}, \quad x \geqslant 0$$

не обмежена на $[0, +\infty)$.

Вказівка. Розглянути припущення, що функція g^α обмежена на $[0, +\infty)$.

65. Нехай $f \in C^{(n)}([a, b])$. Довести, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує многочлен P такий, що

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n} \max_{x \in [-1,1]} |f^{(i)}(x) - P^{(i)}(x)| < \varepsilon.$$

Вказівка. Нехай Q — многочлен, який рівномірно наближує $f^{(n)}$. Розглянути многочлен

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x (x-t)^{n-1} Q(t)\, dt, \quad x \in [-1, 1], \quad a \in [-1, 1].$$

66. Нехай функція $f\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ спадає на $[1, +\infty)$ і $f(x) \to 0$, $x \to +\infty$. Довести існування границі

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int\limits_1^n f(x)\, dx \right).$$

При додатковій умові опуклості вниз функції f на $[1, +\infty)$ довести, що для $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{1}{2} f(n+1) < \lim_{N\to\infty} \left(\int\limits_n^N f(x)\, dx - \sum_{k=n+1}^N f(k) \right) < \frac{1}{2} f(n).$$

67. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \prod_{k=1}^n e^{-\frac{1}{k}} \right).$$

68. Довести, що для $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{1}{2(n+1)} < \lim_{N\to\infty} \frac{N}{n} \prod_{k=n+1}^N e^{-\frac{1}{k}} < \frac{1}{2n}.$$

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\mathbf{N}$ — множина всіх натуральних чисел, 7

$\mathbf{Z}$ — множина всіх цілих чисел, 8

$\mathbf{Q}$ — множина всіх раціональних чисел, 8

$\mathbf{R}$ — множина всіх дійсних чисел, 22

$\varnothing$ — пуста множина, 9

$\inf(A)$ ($\operatorname{Sup} A$) — точна нижня (верхня) межа множини A, 25

$B(x, \varepsilon)$ — ε-окіл точки x, 39

$\mathbf{R}^m$ — m-вимірний простір, $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ 22

$f(x-)$, $f(x+)$ — ліва та права границі функції f в точці x, 81

O — відношення підпорядкування, 85

o — відношення нехтування, 87

$f \sim g$ — відношення еквівалентності, 89

$\mathbf{C}(A)$ — множина всіх дійсних функцій, неперервних в точках множини A, 95

$\max f$ ($\min f$) — найбільше (найменше) значення f на A, 105

$\mathbf{C}^{(n)}(A)$, $\mathbf{C}^{\infty}(A)$ — 137, 138

$\mathbf{R}([a, b])$ — множина всіх дійсних функцій, інтегровних за Ріманом на відрізку, 184

$\mathbf{BV}([a, b])$ — множина всіх функцій обмеженої варіації на відрізку $[a, b]$, 284

$\mathbf{RS}(\alpha, [a, b])$ — множина всіх функцій f, інтегровних відносно функції α на $[a, b]$, 291

$\ulcorner$ — початок доведення

$\lrcorner$ — кінець доведення

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Ч

Ш

ЗМІСТ ЧАСТИНИ 2

Підручник

Дороговцев Анатолій Якович

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

У двох частинах

Частина 1

Художник обкладинки *Г. Т. Задніпряний*
Художній редактор *Т. О. Щур*
Технічний редактор *Т. М. Піхота*
Коректори *О. С. Фурман, М. М. Янчицька, З. П. Чиркова, М. Г. Єхлакова*

Здано до складання 30.03.93. Підп. до друку 03.11.93. Формат 84×108/32. Папір друк. № 2. Літ. гарн. Вис. друк. Ум. друк. арк. 16,8. Ум. фарбовідб. 17,12. Обл.-вид. арк. 19,31. Вид. № 3445. Зам. № 3-612.

Видавництво «Либідь» при Київському університеті.
252001 Київ, Хрещатик, 10

Київська книжкова друкарня наукової книги
252004 Київ, вул. Терещенківська, 4