А. Я. ДОРОГОВЦЕВ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

ЧАСТИНА 2

А.Я. ДОРОГОВЦЕВ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

У ДВОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 2

Затверджено Міністерством освіти України як підручник для студентів вищих навчальних закладів, що вивчають дисципліну «Математичний аналіз»

КИЇВ
«ЛИБІДЬ»
1994

ББК 22.161я73
Д69

УДК 517(031)

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. М. Борок* (Харківський університет), д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. М. Лянце* (Львівський університет)

Головна редакція літератури з природничих та технічних наук

Головний редактор *Л. В. Маришева*

Редактор *О. М. Миронець*

Дороговцев А. Я.

Д69 Математичний аналіз: Підручник. У двох частинах. Частина 2.— К. : Либідь, 1994.— 304 с.
ISBN 5-325-00351-X

Підручник містить стислий, але досить повний за охопленням матеріал нормативного курсу математичного аналізу. Враховано сучасні тенденції розвитку математики, модернізовано виклад ряду традиційних розділів, використано елементи сучасної математичної символіки.

Друга частина підручника присвячена елементам аналізу в метричних просторах, диференціальному численню функцій кількох змінних та відображень, невласним інтегралам, зокрема теорії Г-функції, теорії міри Жордана та кратним інтегралам, інтегралам по многовидах та загальній теоремі Стокса, а також основам теорії рядів Фур'є та інтегралу Фур'є.

Для студентів університетів і технічних вузів.

Д $\frac{1602070000-018}{224-94}$ БЗ-22-32-93 ББК 22.161я73

ISBN 5-325-00351-X

ЗМІСТ

Глава 15. Інтеграли по многовидах і теорема Стокса

Глава 16. Елементи теорії рядів Фур'є та інтеграла Фур'є

Глава 10 ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІЗУ В МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ

§ 1. МЕТРИЧНИЙ ПРОСТІР

1.1. ВИЗНАЧЕННЯ МЕТРИКИ Й МЕТРИЧНОГО ПРОСТОРУ

Логічний аналіз понять границі послідовності дійсних чисел, границі функції у точці, неперервності та ряду найважливіших, пов'язаних з цими поняттями теорем показує, що всі ці поняття спираються на використання віддалі між точками на прямій. Перелік необхідних властивостей віддалі досить короткий і складається з таких тверджень:

1°. $\forall \{x, y\} \subset \mathbf{R}: |x - y| \geqslant 0$, причому $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2°. $\forall \{x, y\} \subset \mathbf{R}: |x - y| = |y - x|$;
3°. $\forall \{x, y, z\} \subset \mathbf{R}: |x - y| \leqslant |x - z| + |z - y|$.

Тут $|x - y|$ — віддаль між точками на прямій з координатами x і y. Властивості 1°—3° має також звичайна віддаль у тривимірному просторі. Формальне введення віддалі з властивостями 1°—3° на множині елементів довільної природи приводить до можливості побудови ряду понять аналізу в цій множині.

Нехай X — деяка множина; далі завжди припускається, що $X \neq \varnothing$. Елементи множини X називаються також ***точками***, а сама множина X — ***простором***.

Означення. Віддаллю (*метрикою*) ρ на просторі X називається функція $\rho : X \times X \to \mathbf{R}$, що задовольняє умовам:

1) $\forall \{x, y\} \subset X: \rho(x, y) \geqslant 0$, причому $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\forall \{x, y\} \subset X: \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\forall \{x, y, z\} \subset X: \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Множина X з метрикою ρ називається ***метричним простором***[1] і позначається символом (X, ρ).

---

[1] Поняття метричного простору та ряд інших понять сучасного математичного аналізу (компактність, повнота, сепарабельність, похідна Фреше) ввів у 1906 р. відомий французький математик *М. Р. Фреше* (1878—1973). Значний внесок у розробку теорії метричних просторів зробив німецький математик *Ф. Хаусдорф* (1868—1942).

Зауваження 1. Умови 1)—3) називаються також аксіомами: умова 2) — ***аксіомою симетрії***, а 3) — ***нерівністю трикутника.***

2. Нехай ρ_1 і ρ_2 — метрики на множині X. Метричні простори (X, ρ_1) і (X, ρ_2), взагалі кажучи, різні.

3. Нехай (X, ρ) — метричний простір і $Y \subset X$; (Y, ρ) — також метричний простір, який, взагалі кажучи, відрізняється від (X, ρ).

4. Умова 2) в означенні віддалі є наслідок умови 3′)

$$\forall \{x, y, z\} \subset X : \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z).$$

Таким чином, умови 1) — 3) рівносильні умовам 1) і 3′).

1.2. ПРИКЛАДИ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Приклади. 1. Нехай $X = \mathbf{R}$ і $\rho(x, y) = |x - y|$, $\{x, y\} \subset \mathbf{R}$. Тоді $(\mathbf{R}, \rho)$ — метричний простір — числова пряма із звичайною віддаллю.

2. ***Простір*** $(\mathbf{R}^m, \rho)$. Нехай для фіксованого $m \in \mathbf{N}$

$$X = \mathbf{R}^m := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in \mathbf{R}, 1 \leqslant i \leqslant m\}$$

і

$$\forall \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m)\} \subset \mathbf{R}^m$$

нехай

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}.$$

Покажемо, що ρ — метрика на $\mathbf{R}^m$. Умови 1) і 2), очевидно, виконані. Згідно з нерівністю Коші для $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^m$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbf{R}^m$, маємо

$$\rho^2(x, y) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 =$$

$$= \rho^2(x, z) + 2\sum_{i=1}^{m} (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \rho^2(z, y) \leqslant$$

$$\leqslant \rho^2(x, z) + 2\rho(x, z)\rho(z, y) + \rho^2(z, y) = (\rho(x, z) + \rho(z, y))^2.$$

Звідси, враховуючи умову 1), одержимо потрібну нерівність 3). Таким чином, ρ — метрика на $\mathbf{R}^m$, а $(\mathbf{R}^m, \rho)$ — метричний простір. Далі, щоб не виписувати явно вираз для ρ, віддаль ρ будемо називати ***звичайною*** (або ***евклідовою***).

3. ***Простір*** $(\mathbf{l}_2, \rho)$. Нехай

$$X = \mathbf{l}_2 := \left\{ x = \{x_n\} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall n \geqslant 1 : x_n \in \mathbf{R}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \end{array} \right\}$$

і $\forall x = \{x_n\} \in l_2 \quad \forall y = \{y_n\} \in l_2 \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$.

Для перевірки умов 1) — 3) спочатку зауважимо, що

$$x = \{x_n\} \in l_2 \text{ і } y = \{y_n\} \in l_2 \Rightarrow x - y = \{x_n - y_n\} \in l_2.$$

4. Простір $(C([a, b]), \rho)$. Нехай $X = C([a, b])$ і $\forall \{x, y\} \subset C([a, b])$

$$\rho(x, y) := \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|.$$

Віддаль ρ між функціями x і y має простий геометричний зміст. Властивості 1) — 3) для ρ легко перевіряються.

Вправи

1. Нехай $X = \mathbf{R}$ і для $\forall \{x, y\} \subset \mathbf{R}$, $\rho(x, y) = \min(1, |x - y|)$. Довести, що ρ — метрика на $\mathbf{R}$, а $(\mathbf{R}, \rho)$ — метричний простір.

2. Нехай $X = \mathbf{R}$ і для $\forall \{x, y\} \subset \mathbf{R}$ $d(x, y) = |x^3 - y^3|$. Чи є функція d метрикою на $\mathbf{R}$?

3. Нехай $X = [0, +\infty)$ і для $\{x, y\} \subset X$ $d(x, y) = |x^2 - y^2|$. Чи є d метрикою на X?

4. Нехай $X = \{x = (\cos\theta, \sin\theta) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ і

$\forall x = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$, $\forall y = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$ $d(x, y) = |\theta_1 - \theta_2|$.

Чи є d метрикою на X?

5. Довести, що кожна з функцій

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|, \quad d_2(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - y_i|,$$

де $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$ є метрикою на $\mathbf{R}^m$.

6. Довести, що кожна з функцій

$$d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt, \quad d_2(x, y) = \left\{\int_a^b (x(t) - y(t))^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

де $\{x, y\} \subset C([a, b])$, є метрикою на $C([a, b])$.

7. Нехай $X = \{x = \{x_n\} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall n \geqslant 1 : x_n \in \mathbf{R};$ $\sup_{n \geqslant 1} |x_n| < +\infty\}$

$$\rho(x, y) = \sup_{n \geqslant 1} |x_n - y_n| \text{ для } x = \{x_n\} \in X,\ y = \{y_n\} \in X.$$

Довести, що (X, ρ) — метричний простір.

8. Нехай X — довільна множина і $\rho(x, y) = 1$, якщо $x \neq y$, і $\rho(x, y) = 0$, якщо $x = y$. Впевнитися в тому, що (X, ρ) — метричний простір. Метрика ρ називається ***дискретною***.

9. Нехай для $x = \{x_n\} \in l_2$, $y = \{y_n\} \in l_2$

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{n}.$$

Довести, що (l_2, d) — метричний простір.

1.3. ВЛАСТИВОСТІ ВІДДАЛІ

Нехай (X, ρ) — метричний простір. З аксіом віддалі легко одержати ряд властивостей її, звичайних для віддалі в тривимірному просторі. Встановимо ті з них, які найчастіше використовуються у подальшому.

Властивість 1° (нерівність трикутника).

$$\forall \{x, y, z\} \subset X: |\rho(x, z) - \rho(z, y)| \leqslant \rho(x, y).$$

⌐ Дійсно, на підставі аксіом 3) і 2) маємо

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, y) + \rho(z, y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho(x, z) - \rho(z, y) \leqslant \rho(x, y). \qquad (1)$$

Так само

$$\rho(z, y) \leqslant \rho(z, x) + \rho(x, y) = \rho(x, z) + \rho(x, y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho(z, y) - \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y). \qquad (2)$$

Згідно з визначенням абсолютної величини числа нерівності (1) і (2) разом рівносильні потрібному

$$|\rho(x, z) - \rho(z, y)| \leqslant \rho(x, y).$$ ⌙

Властивість 2° (довжина відрізка прямої, що сполучає дві точки, не більше довжини будь-якої ламаної, що з'єднує ці ж точки). Для будь-якого скінченного набору x_1, $x_2, \ldots, x_n$ точок із X має місце нерівність.

$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_3, x_4) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n).$$

⌐ Доведення одержимо послідовним застосуванням аксіоми 3). ⌙

Властивість 3° (нерівність чотирикутника). Для будь-яких елементів x, y, u, v з X виконується нерівність

$$|\rho(x, u) - \rho(y, v)| \leqslant \rho(x, y) + \rho(u, v).$$

⌐ Дійсно, на підставі аксіом 3) і 2) маємо

$$\rho(x, u) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, u) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, v) + \rho(v, u) =$$
$$= \rho(x, y) + \rho(y, v) + \rho(u, v) \Rightarrow \rho(x, u) - \rho(y, v) \leqslant \qquad (3)$$
$$\leqslant \rho(x, y) + \rho(u, v).$$

Таким же чином

$$\rho(y, v) - \rho(x, u) \leqslant \rho(x, y) + \rho(u, v). \qquad (4)$$

Нерівності 3) і 4) разом рівносильні потрібному. —|

Зауваження **1.** Властивість 1° — окремий випадок властивості 3° (візьмемо $u = v = z$).

1.4. ДЕКАРТІВ ДОБУТОК МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Нехай (X_i, ρ_i), $i = 1, 2$ — метричні простори і $X = X_1 \times \times X_2$ — декартів добуток множин X_1 і X. Для будь-яких $x = (x_1, x_2) \in X$, $y = (y_1, y_2) \in X$ нехай

$$\rho(x, y) = \rho(x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2)}.$$

Функція ρ є віддаллю на X, а (X, ρ) — метричний простір (перевірте аксіоми віддалі !), який називається ***декартовим добутком метричних просторів*** (X_1, ρ_1) і (X_2, ρ_2).

Метрика на X може бути визначена і іншим чином. Можна, наприклад, покласти

$$d(x, y) = \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2).$$

Аналогічно визначається декартів добуток будь-якого скінченного числа метричних просторів.

Вправа

10. Нехай $X = \mathbf{R}$ і $\rho(x, y) = |x - y|$. Одержати простір $(\mathbf{R}^m, \rho)$ прикладу 2 п. 1.2 як декартів добуток просторів $(\mathbf{R}, \rho)$.

1.5. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ МЕТРИЧНОГО ПРОСТОРУ

Нехай (X, ρ) — метричний простір і $\{x_n : n \geqslant 1\}$ — послідовність елементів із X.

Означення. Послідовність елементів $\{x_n : n \geqslant 1\}$ простору (X, ρ) ***збігається*** в (X, ρ), якщо існує елемент $x \in X$ такий, що $\rho(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$. При цьому елемент x називається ***границею послідовності*** $\{x_n : n \geqslant 1\}$ в (X, ρ) і пишуть

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \text{ або } x_n \to x, \ n \to \infty.$$

Вправи

11. Якщо $x_n \to x$, $n \to \infty$ в (X, ρ), то для будь-якої підпослідовності $\{x_{n(k)} : k \geqslant 1\}$ $x_{n(k)} \to x$, $k \to \infty$ в (X, ρ). Довести це твердження.

12. Нехай послідовність елементів $\{x_n : n \geqslant 1\}$ із X така, що будь-яка її підпослідовність містить підпослідовність, що збігається в (X, ρ) до деякого фіксованого елемента $x \in X$. Довести, що $x_n \to x$, $n \to \infty$ в (X, ρ).

ТЕОРЕМА 1 (про єдиність границі послідовності). Якщо $x_n \to x$, $n \to \infty$ в (X, ρ) і $x_n \to y$, $n \to \infty$ в (X, ρ), то $x = y$.

Згідно з аксіомами віддалі, маємо

$$0 \leqslant \rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y)$$

при будь-якому $n \geqslant 1$. Оскільки $\rho(x, x_n) \to 0$, $\rho(y, x_n) \to 0$, $n \to \infty$, то $\rho(x, y) = 0$. Отже, за аксіомою 1) $x = y$.

ТЕОРЕМА 2. Нехай $x_n \to x$, $y_n \to y$, $n \to \infty$, в (X, ρ). Тоді

$$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y), n \to \infty.$$

Вказівка. Використати нерівність чотирикутника для оцінки різниці $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)|$.

Наслідок. Нехай $x_n \to x$, $n \to \infty$ в (X, ρ). Для будь-якого $y \in X$ має місце співвідношення

$$\rho(x_n, y) \to \rho(x, y), \ n \to \infty.$$

Вправа

13. Які послідовності метричного простору з вправи 8 є збіжними?

1.6. ЗБІЖНІСТЬ В ДЕЯКИХ КОНКРЕТНИХ ПРОСТОРАХ

Приклади. 1. Збіжність у просторі $(\mathbf{R}^m, \rho)$ рівносильна покоординатній збіжності. Нехай

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \to (x_1, x_2, \ldots, x_m) = x, \quad n \to \infty,$$

в $(\mathbf{R}^m, \rho)$, тобто

$$\rho(x^{(n)}, x) = \left\{\sum_{k=1}^{m} (x_k^{(n)} - x_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \to 0, \ n \to \infty.$$

Оскільки $\rho(x^{(n)}, x) \geqslant |x_k^{(n)} - x_k|$, $n \geqslant 1$, для кожного $1 \leqslant k \leqslant m$, то $x_k^{(n)} \to x_k$, $n \to \infty$, для кожного $1 \leqslant k \leqslant m$. Обернене твердження випливає з властивостей збіжних послідовностей.

2. Збіжність у метричному просторі $(C([a, b]), \rho)$ рівносильна збіжності, рівномірній на $[a, b]$.

Вправа

14. Нехай (X, ρ) — декартів добуток метричних просторів із п. 1.4. Упевнитися в тому, що

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \to (x_1, x_2) = x, \ n \to \infty \text{ в } (X, \rho) \Leftrightarrow x_1^{(n)} \to x_1, \ n \to \infty \text{ в}$$

$$(X_1, \rho_1) \text{ і } x_2^{(n)} \to x_2, \ n \to \infty \text{ в } (X_2 \rho_2).$$

1.7. КУЛІ, ОБМЕЖЕНІ МНОЖИНИ, ГРАНИЧНА ТОЧКА

Нехай (X, ρ) — метричний простір, x_0 — фіксований елемент із X і r — додатне число.

Означення 1. Замкненою кулею $\overline{B}(x_0, r)$ з центром у точці x_0 і радіусом $r > 0$ називається множина

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) \leqslant r\}.$$

Означення 2. Відкритою кулею $B(x_0, r)$ з центром у точці x_0 і радіусом r називається множина

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}.$$

Означення 3. Множина $A \subset X$, $A \neq \varnothing$ називається ***обмеженою***, якщо

$$d(A) := \sup_{x \in A, y \in A} \rho(x, y) < +\infty.$$

Число $d(A)$ називається ***діаметром множини*** A. Множина $\varnothing$ обмежена і $d(\varnothing) := 0$.

Зауваження 1. Легко перевірити, що множина обмежена тоді й тільки тоді, коли вона міститься в деякій кулі.

2. Той факт, що $x_n \to x$, $n \to \infty$, в (X, ρ), можна сформулювати в рівносильній формі

$$\forall r > 0 \quad \exists n \in \mathbf{N} : \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subset B(x, r).$$

Вправи

15. У просторі $(\mathbf{R}, \rho)$ (числова пряма із звичайною віддаллю) зобразити кулі: $\overline{B}(1, 2)$, $B(2, \frac{1}{2})$.

16. У просторі $(\mathbf{R}^2, \rho)$ (площина із звичайною віддаллю) зобразити кулі $B((1,1), 2)$, $B((1,0), 3)$. У просторі $(\mathbf{R}^2, d_i)$, де

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

$$d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$$

зобразити кулі $\overline{B}((1,1), 2)$, $B((1,0), 3)$.

17. Довести, що $d(\overline{B}(x_0, r)) \leqslant 2r$.

Чи можливий випадок, коли $d(\overline{B}(x_0, r)) < 2r$?

18. Для простору $(C([a, b]), \rho)$ і функції $x_0(t) = 0$, $t \in [a, b]$ описати кулі $B(x_0, 1)$, $B(x_0, 1)$.

19. Нехай $A \subset X$, $A \neq \varnothing$, $x \in X$ і

$$\rho(x, A) := \inf_{y \in A} \rho(x, y).$$

Довести, що $\rho(x_n, A) \to \rho(x, A)$, $n \to \infty$ для будь-якої послідовності $x_n \to x$, $n \to \infty$ в (X, ρ).

Означення 4. Нехай $A \subset X, x_0 \in X$. Точка x_0 **називається** ***граничною точкою множини*** A, якщо

$$\forall r > 0 \ \exists x \in A, x \neq x_0 : x \in B(x_0, r).$$

Приклади. 1. Для множини $A = [0, 1) \cup \{2\}$ в $(\mathbf{R}, \rho)$ множиною всіх граничних точок є $[0, 1]$.

2. Нехай для простору $(\mathbf{R}^2, \rho)$

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbf{Q}, i = 1, 2\}.$$

Множина граничних точок множини A є $\mathbf{R}^2$.

3. Нехай для простору $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$ множина A є множина всіх многочленів, що розглядаються на $[a, b]$. Множиною граничних точок A згідно з теоремою Вейєрштрасса є $\mathbf{C}([a, b])$.

Вправи

20. Які точки простору (X, ρ), введеного у вправі 8, є граничними точками множини $A = X$?

21. Нехай $x_n \to x, n \to \infty$ в (X, ρ). При якій умові точка x є граничною точкою множини $\{x_1, x_2, \ldots, \}$ — множини значень послідовності?

22. Навести приклад множини в $(\mathbf{R}, \rho)$, що має рівно три граничні точки.

ТЕОРЕМА 1. Точка x_0 є граничною точкою множини A тоді й тільки тоді, коли існує послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\}$, що задовольняє умовам

1) $\forall n \geqslant 1 : x_n \in A, \quad x_n \neq x_0$;
2) $x_n \to x_0, \ n \to \infty$, в (X, ρ).

⌈Необхідність. Нехай x_0 — гранична точка множини A. Згідно з означенням граничної точки для кулі $B(x_0, 1)$ маємо

$$\exists x_1 \in A \quad x_1 \neq x_0 : \ x_1 \in B(x_0, 1) \Leftrightarrow \rho(x_0, x_1) < 1.$$

Вибравши $r = \frac{1}{2}\rho(x_0, x_1)$ для кулі $B(x_0, r)$, знову використаємо визначення граничної точки

$$\exists x_2 \in A, x_2 \neq x_0 : \ x_2 \in B(x_0, r) \Leftrightarrow \rho(x_0, x_2) < \frac{1}{2}$$

і так далі. Продовжуючи аналогічно, одержимо послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\}$, що задовольняє умовам 1) і 2).

Достатність. Нехай $\{x_n : n \geqslant 1\}$ — послідовність, що задовольняє умовам 1) і 2). Оскільки $\rho(x_n, x_0) \to 0, \ n \to \infty$ то

$$\forall r > 0 \ \exists \bar{n} \ \forall n \geqslant \bar{n} : \rho(x_n, x_0) < r \Leftrightarrow x_n \in B(x_0, r).$$

Згідно з умовою 1) $x_n \neq x_0, \ x_n \in A$ для всіх $n \geqslant 1$.

1.8. ВІДКРИТІ МНОЖИНИ

Нехай (x, ρ) — метричний простір і $A \subset X$.

Означення 1. Точка $x_0 \in A$ називається ***внутрішньою точкою множини*** A, якщо

$$\exists r > 0 : B(x_0, r) \subset A.$$

Приклади. 1. Для множини $A = [0, 1)$ в $(\mathbf{R}, \rho)$ множина внутрішніх точок є $(0, 1)$.

2. Множина $A = \{(x_1, x_2) | x_1 = x_2\}$ в $(\mathbf{R}_2, \rho)$ внутрішніх точок не має

Означення 2. Множина $A \subset X$ називається ***відкритою*** в (X, ρ), якщо кожна точка множини A є внутрішня точка множини A.

Згідно з цим означенням множина X є відкритою (вона містить всі кулі); $\varnothing$ також будемо вважати відкритою (як таку, що не містить невнутрішніх точок).

Приклад 3. Множина $A = (0, 1)$ відкрита в $(\mathbf{R}, \rho)$.

Вправи

23. Довести, що множина $[0, 1)$ відкрита в просторі $([0, +\infty), \rho)$, ρ — звичайна віддаль.

24. Описати всі відкриті множини в просторі, що заданий у вправі 8.

25. Довести, що для відкритої множини A і будь-якого скінченного набору точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ з X множина $A \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ також відкрита.

26. Показати, що в просторі $(C([0, 1]), \rho)$ множина $\{x | x(0) > 1\}$ відкрита.

27. Довести, що класи відкритих множин простору $(\mathbf{R}^2, \rho)$ і просторів $(\mathbf{R}^2, d_1)$, $(\mathbf{R}^2, d_2)$, введених у вправі 16, збігаються.

ТЕОРЕМА 1. Відкрита куля є відкрита множина в метричному просторі.

$\ulcorner$ Нехай $B(x_0, r)$ — деяка відкрита куля і точка $z \in B(x_0, r) \Leftrightarrow \rho(z, x_0) < r$. Візьмемо $r_1 := r - \rho(z, x_0)$ і доведемо, що

$$B(z, r_1) \subset B(x_0, r) \Leftrightarrow \forall y : \rho(y, z) < z_1 \Rightarrow \rho(y, x_0) < r.$$

Дійсно, використовуючи аксіому 3), маємо

$$\rho(y, x_0) \leqslant \rho(y, z) + \rho(z, x_0) < r_1 + \rho(z, x_0) = r. \qquad \lrcorner$$

ТЕОРЕМА 2. Об'єднання довільної системи відкритих множин є відкрита множина.

$\ulcorner$ Нехай T — довільна множина індексів і для кожного $\alpha \in T$ A_α — відкрита множина. Припустимо, що

$$x_0 \in \bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha.$$

Маємо

$$x_0 \in \bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha_0 \in T: A_{\alpha_0} \ni x_0,$$

а оскільки A_{α_0} відкрита, то

$$\exists r > 0: B(x_0, r) \subset A_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha. \qquad \lrcorner$$

ТЕОРЕМА 3. Перетин скінченного числа відкритих множин є відкрита множина.

$\ulcorner$ Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — відкрита множина і точка $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k$. Маємо

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k \Leftrightarrow \forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant n: x_0 \in A_k,$$

і оскільки A_k є відкрита множина, то

$$\exists r_k > 0: B(x_0, r_k) \subset A_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Нехай $r := \min\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}, r > 0$. Тоді

$$\forall k, 1 \leqslant k \leqslant n: B(x_0, r) = \bigcap_{k=1}^{n} B(x_0, r_k) \subset B(x_0, r_k) \subset A_k.$$

Тому

$$B(x_0, r) \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_k. \qquad \lrcorner$$

Вправа

28. Нехай $A_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ — відкрита в $(\mathbf{R}, \rho)$ множина, $n \geqslant 1$. Довести, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ не є відкритою в $(\mathbf{R}, \rho)$.

1.9. СТРУКТУРА ВІДКРИТИХ МНОЖИН НА ПРЯМІЙ $(\mathbf{R}, \rho)$ І В ПРОСТОРІ $(\mathbf{R}^m\ \rho)$

ТЕОРЕМА 1. Будь-яка непуста відкрита множина в $(\mathbf{R}, \rho)$ є об'єднання не більше як зліченної системи відкритих інтервалів, які попарно не перетинаються.

$\ulcorner$ Нехай A — відкрита в $(\mathbf{R}, \rho)$ множина і $x_0 \in A$. Оскіль-

ки A відкрито, існує інтервал, що містить точку x_0 і міститься в A.

Нехай $J(x_0)$ — об'єднання всіх таких інтервалів. За теоремою 2 п. 1.8 $J(x_0)$ — відкрита множина, крім того, $J(x_0) \subset \subset A$ і $J(x_0)$ — інтервал (як об'єднання інтервалів із спільною точкою x_0). Таким чином, $J(x_0)$ — відкритий інтервал.

Нехай тепер $J(x_1)$ і $J(x_2)$ — відкриті інтервали, що відповідають точкам x_1 і x_2 з A. Покажемо, що або

$$J(x_1) \cap J(x_2) \neq \varnothing, \text{ або } J(x_1) = J(x_2).$$

Дійсно, якщо $J(x_1) \cap J(x_2) \neq \varnothing$, то $J(x_1) \cup J(x_2)$ — відкритий інтервал, що містить точки x_1 і x_2. Тому за побудовою

$$J(x_1) = J(x_1) \cup J(x_2) = J(x_2).$$

Таким чином, A складається з об'єднання попарно неперетинних інтервалів, система яких на прямій не більше як зліченна. ⌋

ТЕОРЕМА 2. Будь-яка непуста відкрита множина в $(\mathbf{R}^m, \rho)$ є об'єднання зліченної системи відкритих куль.

⌈ Вказівка. Нехай

$$P = \{B(z, r) \mid z = (z_1, \ldots, z_m) : z_i \in \mathbf{Q}; \quad 1 \leqslant i \leqslant m, r \in \mathbf{Q}\},$$

P—зліченна система відкритих куль. Для довільної точки x із відкритої множини A довести існування кулі $B(z_x, r_x) \in P$ такої, що $x \in B(z_x, r_x) \subset A$. ⌋

1.10. ЗАМКНЕНІ МНОЖИНИ

Нехай (X, ρ) — метричний простір і $A \subset X$.

Означення 1. Множина A називається ***замкненою в*** (X, ρ), якщо вона містить усі свої граничні точки.

Множина X замкнена, $\varnothing$ замкнена (не має граничних точок). Множина, складена із скінченного числа точок, замкнена (не має граничних точок).

Вправи

29. Визначити замкнені множини у просторі, введеному у вправі 8.

30. Довести, що замкнена куля є замкнена множина.

ТЕОРЕМА 1. Множина A замкнена в (X, ρ) тоді й тільки тоді, коли множина $X \setminus A$ відкрита в (X, ρ).

⌈ Необхідність. Нехай A замкнена. Маємо:

$x \in X \setminus A \Leftrightarrow x \bar{\in} A$. Тому x не є граничною точкою множини A і

$$\exists r > 0 : B(x, r) \cap A = \varnothing \Rightarrow B(x, r) \subset X \setminus A.$$

Таким чином, будь-яка точка $x \in X \setminus A$ є внутрішньою.

Достатність. Нехай $X \setminus A$ відкрита. Тоді будь-яка точка $x \in X \setminus A$ є внутрішньою, тобто

$$\exists r > 0 : B(x, r) \subset X \setminus A \Rightarrow B(x, r) \cap A = \varnothing.$$

Тому x не є граничною точкою множини A. ⌋

ТЕОРЕМА 2. Перетин будь-якої системи замкнених множин є замкнена множина. Об'єднання скінченного числа замкнених множин є замкнена множина.

⌈Доведення випливає із правил двоїстості і теорем 1, 2, 3 п. 1.8.

Означення 2. Множина $\bar{A}$, яка складається із всіх точок множини A і всіх граничних точок множини A, називається ***замиканням*** множини A.

Вправи

31. Нехай A замкнена, $A \neq \varnothing$ і $x \bar{\in} A$. Довести, що $\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x, y) > 0$.

32. Довести, що для будь-якої множини A її замкнення $\bar{A}$ є замкненою множиною.

33. Довести, що $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

34. У просторі $(\mathbf{R}, \rho)$ при будь-якому $n \geqslant 1$ множина $\left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ замкнена. Чи буде замкненою множина $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$?

35. Довести, що $\bar{A} = \{x \in X \mid \rho(x, A) = 0\}$.

36. Довести, що $\bar{A} = \bigcap\limits_{(F \supset A, F \text{—замкнена})} F$.

1.11. СЕПАРАБЕЛЬНІ МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

Нехай (X, ρ) — метричний простір і $A \subset X$.

Означення 1. Множина A називається ***скрізь щільною*** в (X, ρ), якщо

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 1. Наступні твердження рівносильні.

1) A — скрізь щільна в (X, ρ);

2) A — має непустий перетин з кожною відкритою кулею;
3) $\forall x \in X \ \exists \{x_n : n \geqslant 1\} \subset A : x_n \to x, n \to \infty$;
4) $\bar{A} = X$.

Означення 2. Метричний простір (X, ρ) називається ***сепарабельним***, якщо він містить зліченну і скрізь щільну підмножину.

Приклади. 1. Простір $(\mathbf{R}, \rho)$ сепарабельний, множина раціональних чисел $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ зліченна і скрізь щільна в $(\mathbf{R}, \rho)$.

2. Простір $(\mathbf{R}^m, \rho)$ сепарабельний, множина $\mathbf{Q}^m$ зліченна і скрізь щільна в $(\mathbf{R}^m, \rho)$.

3. Простір $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$ сепарабельний, зліченною і скрізь щільною множиною є множина всіх многочленів з раціональними коефіцієнтами.

Вправи

37. В якому випадку простір вправи 8 є сепарабельним?

38. Довести, що декартів добуток сепарабельних метричних просторів є сепарабельним.

39. Довести, що непуста відкрита множина в сепарабельному метричному просторі є об'єднання зліченної системи відкритих куль.

40. Довести, що простір $(\mathbf{l}_2, \rho)$ сепарабельний.

41. Довести, що метричний простір вправи 7 не є сепарабельним.

1.12. ПОВНІ МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

При вивченні границі послідовності дійсних чисел фундаментальну роль відіграє критерій Коші: послідовність дійсних чисел збігається тоді й тільки тоді, коли вона фундаментальна. Поняття фундаментальної послідовності елементів можна вивести в будь-якому метричному просторі. Проте критерій Коші не має місця в будь-якому метричному просторі (наприклад, просторі $(\mathbf{Q}, \rho)$ (розглянути послідовність наближень до числа $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$)). У просторах, в яких критерій Коші не має місця, гублять силу багато тверджень аналізу, тому природно виділити клас метричних просторів, в яких критерій Коші має місце.

Означення 1. Послідовність елементів $\{x_n : n \geqslant 1\}$ метричного простору (X, ρ) називається ***фундаментальною*** або ***послідовністю Коші***, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall m \geqslant N \ \forall n \geqslant N : \rho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Вправи

42. Фундаментальна послідовність обмежена (тобто в (X, ρ) обмежена множина значень послідовності).

43. Збіжна послідовність елементів метричного простору фундаментальна.

44. Нехай $\{x_n : n \geqslant 1\}$ — фундаментальна послідовність у (X, ρ),

Довести, що для будь-якого $x \in X$ числова послідовність $\{\rho(x_n, x) : n \geqslant 1\}$ збігається в $(\mathbf{R}, \rho)$.

Означення 2. Метричний простір (X, ρ) називається ***повним***, якщо кожна фундаментальна послідовність елементів цього простору збігається до деякого елемента цього простору.

Приклади. 1. Простір $(\mathbf{R}, \rho)$ повний згідно з критерієм Коші.

2. Простір $(\mathbf{R}^m, \rho)$ повний, оскільки фундаментальна в $(\mathbf{R}^m, \rho)$ послідовність векторів покоординатно фундаментальна і навпаки.

3. Простір $([\mathbf{C}(a, b]), \rho)$ повний згідно з критерієм Коші рівномірної збіжності послідовності функцій.

4. Простір $((0, 1), \rho)$, де $\rho(x, y) = |x - y|$, $x \in (0, 1)$, $y \in (0, 1)$ не є повним.

5. Простір $(\mathbf{Q}, \rho)$, де $\rho(x, y) = |x - y|$ $x \in \mathbf{Q}$, $y \in \mathbf{Q}$ не є повним.

Вправи

45. Добуток метричних просторів повний тоді й тільки тоді, коли всі множники є повні метричні простори. Довести це.

46. Довести, що простір (l_2, ρ) повний.

47. Нехай $X = \mathbf{R}$, $d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, $\{x, y\} \subset \mathbf{R}$. Чи є метричний простір $(\mathbf{R}, d)$ повним?

48. Нехай (X, ρ) — повний метричний простір і A — замкнена множина в (X, ρ). Довести, що (A, ρ) — повний метричний простір.

48.1.* Довести, що в повному метричному просторі об'єднання послідовності замкнених множин, які не мають внутрішніх точок, також не має внутрішніх точок.

ТЕОРЕМА 1 (узагальнення принципу відрізків, які стискуються). Нехай $\{\bar{B}(x_n, r_n) : n \geqslant 1$ — послідовність замкнених куль у повному метричному просторі (X, ρ), що задовольняють умовам:

1) $\forall n \geqslant 1 : \bar{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \bar{B}(x_n, r_n)$;

2) $r_n \to 0$, $n \to \infty$.

Тоді

$$\exists!\, x \in X \ \forall n \geqslant 1 : \ x \in \bar{B}(x_n, r_n) \text{ або } \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}(x_n, r_n) = \{x\}.$$

$\vdash$ Доведемо, що послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\}$ центрів куль фундаментальна. Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Згідно з умовою 2) $\exists N \ \forall n \geqslant N : r_n < \varepsilon$. Далі, враховуючи умову 1), маємо

$$\forall m \geqslant N \ \forall n > m : \bar{B}(x_n, r_n) \subset \bar{B}(x_m, r_m) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leqslant r_m < \varepsilon. \tag{1}$$

Таким чином, послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\}$ фундаментальна, а оскільки (X, ρ) є повний простір, то існує елемент $x \in X$ такий, що $x_n \to x$, $n \to \infty$ в (X, ρ). Перейдемо при $n \to \infty$ до

границі в нерівності (1), беручи до уваги наслідок п. 1.5. Одержимо нерівність

$$\rho(x, x_m) \leqslant r_m < \varepsilon, \ m \geqslant N,$$

з якої випливає, що $x \in \overline{B}(x_m, r_m), n \geqslant N$. Звідси згідно з умовою 1) $x \in \overline{B}(x_n, r_n), \ n \geqslant 1$.

Залишилося встановити єдиність точки x. Нехай $y \in X$ такий елемент, що $y \in \overline{B}(x_n, r_n), \ n \geqslant 1$. Тоді

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \leqslant 2r_n \to 0, n \to \infty.$$

Тому $x = y$. ⌋

Зауваження. Має місце також і твердження, обернене до теореми 1: якщо будь-яка послідовність замкнених куль, що задовольняють умовам 1) і 2), має непустий перетин, то метричний простір (X, ρ) є повним. Пряме й обернене твердження складають ***теорему Кантора.***

Вправа

49. Нехай (X, ρ) — повний метричний простір. Для $\forall n \geqslant 1: A_n \neq \neq \varnothing$, A_n — замкнена, $A_{n+1} \subset A_n$ і $d(A_n) \to 0 \ n \to \infty$. Довести, що

$$\exists! x \in X : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}.$$

1.13. ПОПОВНЕННЯ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Означення 1. Два метричних простори (X_1, ρ_1) і (X_2, ρ_2) називаються ***ізометричними***, якщо існує бієкція $f: X_1 \to X_2$ така, що

$$\forall \{x, y\} \subset X_1: \ \rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y).$$

Функція f називається ***ізометрією***.

Вправа

50. Нехай (X_1, ρ_1) і (X_2, ρ_2) — ізометричні простори і простір (X_1, ρ_1) повний. Довести, що простір (X_2, ρ_2) повний.

ТЕОРЕМА (про поповнення). Нехай (X, ρ) — довільний метричний простір. Існує повний метричний простір $(Y, \tilde{\rho})$ з підмножиною $\tilde{X} \subset Y$ такий, що:

1) (X, ρ) ізометричний $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$;

2) $\tilde{X}$ скрізь щільно в $(Y, \tilde{\rho})$.

Доведення цієї теореми, що виходить за межі програми, тут не наводиться.

Простір $(Y, \tilde{\rho})$ називається ***поповненням*** простору (X, ρ).

Вправи

51 Побудувати поповнення простору, що заданий у прикладі 4 п. 1.12.

52 Побудувати поповнення простору $(\mathbf{R}, d)$, що заданий у вправі 47.

53. Нехай X — множина всіх многочленів p на відрізку $[0, 1]$, $\rho(p_1, \rho_2) = \max\{|\rho_1(x) - p_2(x)| \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Простір (X, ρ) неповний. Знайти поповнення для (X, ρ).

54.* Довести, що будь-яку непусту відкриту множину в $(\mathbf{R}^m, \rho)$ можна зобразити у вигляді зліченного об'єднання «замкнених інтервалів» виду

$$[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times \ldots \times[a_m, b_m],\ \{a_i, b_i\} \subset \mathbf{R},\ a_i < b_i;\ 1 \leqslant i \leqslant m$$

без спільних внутрішніх точок.

55. Нехай A скрізь щільна в $(\mathbf{R}, \rho)$ множина, $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ і $\beta \in \mathbf{R}$ — фіксовані числа. Довести, що множина $B = \{\alpha x + \beta \mid x \in A\}$ скрізь щільна в $(\mathbf{R}, \rho)$.

§ 2. ФУНКЦІЇ НА МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ

2.1. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ

Нехай (X, ρ), (Y, σ) — метричні простори, $A \subset X$, x_0 — гранична точка множини A. Далі розглядаємо функції f: $A \to Y$. Найбільш важливими є випадки:

1) $X = Y = \mathbf{R}$; f: $A \to \mathbf{R}$ — дійсна функція, визначена на множині A дійсних чисел;

2) $X = \mathbf{R}^m$, $Y = \mathbf{R}$; f: $A \to \mathbf{R}$ — дійсна функція m-змінних;

3) $X = \mathbf{R}^m$, $Y = \mathbf{R}^n$, f: $A \to \mathbf{R}^n$ — векторна функція m-змінних;

4) (X, ρ) — метричний простір, $Y = \mathbf{R}$; f: $A \to \mathbf{R}$ — дійсна функція, яка задана на множині A метричного простору.

Далі x_0 — гранична точка множини A.

Означення 1. Елемент $p \in Y$ називається ***границею функції f у точці x_0***, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A, x \neq x_0, \rho(x, x_0) < \delta:\ \sigma(f(x), p) < \varepsilon.$$

Позначення: $f(x) \to p$, $x \to x_0$, або $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

ТЕОРЕМА 1. Елемент p є границею функції f у точці x_0 тоді й тільки тоді, коли для будь-якої послідовності $\{x_n : n \geqslant 1\}$ такої, що $\forall n \geqslant 1$: $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$ і $x_n \to x_0$, $n \to \infty$ в (X, ρ), маємо:

$$f(x_n) \to p, n \to \infty \text{ в } (Y, \sigma).$$

Доведення теореми повністю повторює доведення аналогічної теореми для дійсних функцій.

ТЕОРЕМА 2 (про єдиність границі). Якщо $f(x) \to p$, $x \to x_0$ і $f(x) \to q$, $x \to x_0$, то $p = q$.

Доведення випливає з теореми 1 і теореми 1 п. 1.5.

Вправа

1. Нехай $Y = \mathbf{R}$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$. Довести, що існує куля $B(x_0, r)$ така, що

$$\forall x \in B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > 0.$$

2.2. ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЦЬ ДІЙСНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай (X, ρ) — метричний простір, $A \subset X$, x_0 — гранична точка множини A, $Y = \mathbf{R}$ і $\sigma(x, y) = |x - y)$ для $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. Нехай $f: A \to \mathbf{R}$, $g: A \to \mathbf{R}$ — дві функції. Твердження наступної теореми доводиться за допомогою теореми 1 п. 2.1 і властивостей збіжних послідовностей дійсних чисел.

ТЕОРЕМА. Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = p \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = q \in \mathbf{R}$. Тоді:

а) $\forall c \in \mathbf{R}: \lim\limits_{x \to x_0} (cf(x)) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

б) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

в) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

г) якщо додатково $q \neq 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Вправа

2. Нехай $Y = \mathbf{R}^m$, σ — звичайна віддаль в $\mathbf{R}^m$. Довести, що

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \to (p_1, \ldots, p_m) = p, \; x \to x_0$$

в

$$(\mathbf{R}^m, \sigma) \Leftrightarrow \forall i, \; 1 \leqslant i \leqslant m \quad f_i(x) \to p_i, \; x \to x_0.$$

2.3. ПОНЯТТЯ ПРО ПОВТОРНІ ГРАНИЦІ

Нехай (X_i, ρ_i), $i = 1, 2$ — метричні простори, $X = X_1 \times X_2$ і $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2)}$ для $(x_1, x_2) \in X$, $(y_1, y_2) \in X$. Зауважимо, що

$$(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \to (x_1, x_2), \; n \to \infty \text{ в } (X, \rho) \Leftrightarrow x_i^{(n)} \to x_i, \; n \to \infty \text{ в}$$

$$(X_i, \rho_i), \quad i = 1, 2.$$

Нехай $(x_1^0, x_2^0) \in X$ — фіксований елемент,

$$f: X \setminus \{(x_1^0, x_2^0)\} \to \mathbf{R}.$$

Означення 1. Границя

$$\lim_{(x_1, x_2)\to(x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = p \text{ в } (X, \rho)$$

називається ***подвійною границею***. Використовують також позначення

$$p = \lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0}} f(x_1, x_2).$$

Зафіксуємо значення $x_1 \neq x_1^0$ і розглянемо функцію $f(x_1, \cdot)$: $X_2 \to \mathbf{R}$ як функцію від $x_2 \in X_2$. Припустимо, що існує границя

$$\lim_{x_2\to x_2^0} f(x_1, x_2) = g(x_1) \text{ в } (X_2, \rho_2).$$

Означення 2. Якщо існує

$$\lim_{x_1\to x_1^0} g(x_1) = q \text{ в } (X_1, \rho_1),$$

то q називається ***повторною границею*** функції f у точці (x_1^0, x_2^0) і позначається

$$q = \lim_{x_1\to x_1^0} \lim_{x_2\to x_2^0} f(x_1, x_2).$$

Таким же чином визначається друга повторна границя

$$\lim_{x_2\to x_2^0} \lim_{x_1\to x_1^0} f(x_1, x_2).$$

Подвійна границя і повторні границі в точці (x_1^0, x_2^0), взагалі кажучи, різні.

Вправа

3. Нехай $X_1 = X_2 = \mathbf{R}$, $\rho_1 = \rho_2$ — звичайна віддаль, $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$ і

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

для $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

Чи існує подвійна границя в точці $(0, 0)$? Чому дорівнюють повторні границі в точці $(0, 0)$?

2.4. НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ

Нехай $(X, \rho), (Y, \sigma)$ — два метричні простори, $A \subset X$, $x_0 \in A$. Нехай $f: A \to Y$.

Означення 1. Точка $x_0 \in A$ називається ***ізольованою точкою множини*** A, якщо

$$\exists r > 0: \ B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}.$$

Означення 2. Нехай $x_0 \in A$ — гранична точка множини A. Функція $f: A \to Y$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо $f(x) \to (x_0)$, $x \to x_0$, тобто якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A, \rho(x, x_0) < \delta: \ \sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Означення 3. Нехай x_0 — ізольована точка множини A. Умовимося вважати, що кожна функція $f: A \to Y$ неперервна в точці x_0.

Означення 4. Функція $f: A \to Y$ ***неперервна на множині*** A, якщо f неперервна в кожній точці множини A. *Позначення*: $f \in \mathbf{C}(A, Y)$ та $f \in \mathbf{C}(A)$ для $Y = \mathbf{R}$.

Приклади. 1. Нехай $y_0 \in Y$ — фіксований елемент і $x \in X$: $f(x) = y_0$. Функція f неперервна на X ($\sigma(f(x_1), f(x_2)) = 0$ для будь-яких $\{x_1, x_2\} \subset X$).

2. Нехай $a \in X$ — фіксований елемент, $Y = \mathbf{R}$ і $f(x) = \rho(x, a)$, $x \in X$. Функція f неперервна на X згідно з нерівністю

$$|\rho(x, a) - \rho(y, a)| \leqslant \rho(x, y).$$

В означенні 2 можна покласти $\delta = \varepsilon$.

Зауваження. Нехай x_0 — внутрішня точка множини A. Означення неперервності функції $f: A \to Y$ у точці x_0 припускає таке еквівалентне формулювання:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon).$$

Вправи

4. Довести, що функція f з означення 1 п. 1.13 неперервна на X_1.

5. Нехай $A \subset X$, $A \neq \varnothing$ — фіксована множина і для $x \in X$

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y).$$

Довести, що функція $f(x) = \rho(x, A)$, $x \in X$ неперервна на X.

2.5. ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $Y = \mathbf{R}$, $\sigma(x, y) = |x - y|$, $\{x, y\} \subset \mathbf{R}$.

ТЕОРЕМА 1. Нехай $f: X \to \mathbf{R}$, $g: X \to \mathbf{R}$ — функції, неперервні в точці $x_0 \in X$.

Тоді:

а) $\forall\ c \in \mathbf{R}$ функція cf неперервна в точці x_0;

б) функція $f + g$ неперервна в точці x_0;

в) функція $f \cdot g$ неперервна в точці x_0;

г) якщо додатково $g(x_0) \neq 0$, то функція $\dfrac{f}{g}$ неперервна в точці x_0.

Доведення випливає з означення неперервності і теореми п. 2.2.

Нехай $Y = \mathbf{R}^m$, σ — звичайна віддаль в $\mathbf{R}^m$.

ТЕОРЕМА 2. Нехай функція $f: X \to \mathbf{R}^m$ (тобто $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, де $f_i: X \to \mathbf{R}$, $1 \leqslant i \leqslant m$). Функція f неперервна в точці $x_0 \Leftrightarrow \forall i$, $1 \leqslant i \leqslant m$: f_i неперервна в точці x_0.

Для доведення треба використати те, що збіжність у $(\mathbf{R}^m, \rho)$ рівносильна покоординатній збіжності.

ТЕОРЕМА 3 (про неперервність складної функції). Нехай (X, ρ), (Y, σ) і (Z, τ) — метричні простори і $f: X \to Y$; $g: Y \to Z$. Нехай $h(x) := g(f(x))$ для $x \in X$. Функція $h = g(f)$ називається ***складною функцією*** або ***суперпозицією функцій*** f і g. Нехай для деякого значення $x_0 \in X$ функція f неперервна в точці x_0, функція g неперервна в точці $y_0 = f(x_0)$. Тоді функція h неперервна в точці x_0.

Доведення безпосередньо випливає із теореми 1 п. 2.1.

2.6. ПРИКЛАДИ ДІЙСНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА $\mathbf{R}^m$

Нехай $X = \mathbf{R}^m$ і $Y = \mathbf{R}$ із звичайними віддалями.

Приклади .1. Постійна функція. Нехай $y_0 \in \mathbf{R}$ — фіксоване число і $f(x) = y_0$, $x \in \mathbf{R}^m$.

Функція f неперервна на $\mathbf{R}^m$.

2. Неперервність координат. Нехай k, $1 \leqslant k \leqslant m$ — фіксоване і функція $\pi_k: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ визначена таким чином:

$$\pi_k(x) = \pi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) := x_k,$$

для $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$. Згідно з нерівністю

$$|\pi_k(x) - \pi_k(y)| = |x_k - y_k| \leqslant \sigma(x, y)$$

для $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$, функція π_k неперервна на $\mathbf{R}^m$ (в означенні неперервності можна взяти $\delta = \varepsilon$). Таким чином, координата точки є неперервна функція точки.

3. Неперервність многочленів. ***Многочленом від*** m ***змінних*** $x_1, x_2, \ldots, x_m$ називається функція $P: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, що визначена за допомогою набору невід'ємних цілих чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$ і дійсних чисел

$$\{a(i_1, i_2, \ldots, i_m) \mid 0 \leqslant i_j \leqslant n_j,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}$$

таким чином:

$$P(x) = P(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n_1 \\ \dots \\ 0 \leqslant i_m \leqslant n_m}} a(i_1, \dots, i_m) x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$$

для $x = (x_1, \dots, x_m)$. Важливим окремим випадком многочлена від m змінних є лінійна функція від m змінних:

$$P(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m, \; x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m,$$

де $a_1, a_2, \dots, a_m$ — дійсні числа.

Будь-який многочлен від m змінних є неперервною функцією на $\mathbf{R}^m$. Дійсно, оскільки π_k неперервна на $\mathbf{R}^m$ функція, то потрібне твердження випливає з теореми 1 п. 2.5.

4. Раціональні функції від m змінних. Нехай P і Q—два многочлени від m змінних і $A = \{x \in \mathbf{R}^m | \; Q(x) \neq 0\}$. Функція $S: A \to \mathbf{R}$, що визначається рівністю

$$S(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in A,$$

називається ***раціональною функцією від m змінних***. З теореми 1 п. 2. випливає, що раціональна функція неперервна на множині визначення,

5. Функція

$$f(x_1, x_2) = e^{\sqrt{x_1^2 + x_2^4}} \sin(x_1 + x_2^3 \operatorname{arctg} x_1), \; (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

неперервна на $\mathbf{R}^2$.

Вправа

5.1. Довести, що функція $f: \mathbf{C}([0, 1]) \to \mathbf{R}$:

а) $f(x) = \int_0^1 t x(t)^2 \, dt$; б) $f(x) = x(0) + \max_{1/2 \leqslant t \leqslant 1} x(t)$

є неперервною на $\mathbf{C}([0, 1])$ з рівномірною віддаллю.

2.7. ТЕОРЕМА ПРО ХАРАКТЕРИЗАЦІЮ НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай (X, ρ), (Y, σ) — метричні простори і $f: X \to Y$. Для множини $A \subset X$ її ***образ*** при відображенні f є множина

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\}.$$

Для множини $B \subset Y$ її ***прообраз*** при відображенні f є множина

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid \exists y \in B : f(x) = y\}.$$

ТЕОРЕМА. Функція $f: X \to Y$ неперервна на X тоді й тільки тоді, коли для будь-якої відкритої в (Y, σ) множини G множина $f^{-1}(G)$ відкрита в (X, ρ).

$\vdash$ Необхідність. Нехай f — неперервна на X. Припустимо, що G відкрита множина, $G \subset Y$ і $G \neq \varnothing$. Нехай $x_0 \in f^{-1}(G)$ — довільна фіксована точка. Нехай $y_0 := f(x_0) \in G$. Оскільки G відкрита, то

$$\exists \varepsilon > 0: \ B(y_0, \varepsilon) \subset G.$$

З неперервності функції f в точці x_0 випливає також, що

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in B(x_0, \delta): \ f(x) \in B(y_0, \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon)).$$

Таким чином, $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon)) \subset f^{-1}(G)$. Якщо $G = \varnothing$, то $f^{-1}(G) = \varnothing$ — відкрита.

Достатність. Нехай $x_0 \in X$ — фіксована точка і $\varepsilon > 0$ задане. Множина $G = B(y_0, \varepsilon)$, де $y_0 = f(x_0)$, відкрита в (Y, σ). Отже, за умовою множина $f^{-1}(G) = f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ відкрита в (X, ρ). Тому для $x_0 \in f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$

$$\exists \delta > 0: \ B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon)) \Rightarrow f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon). \ \dashv$$

Вправи

6. Довести, що $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ тоді й тільки тоді, коли для будь-якої замкненої в (Y, σ) множини F множина $f^{-1}(F)$ замкнена в (X, ρ).

7. Навести приклад просторів X, Y функції $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ і відкритої в (X, ρ) множини A, для яких множина $f(A)$ не є відкритою.

8. Нехай $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, σ — метрика на Y. Визначити функції класу $\mathbf{C}(X, Y)$. Розглянути випадок $X = \mathbf{R}$.

9. Нехай (Y, σ) — простір із дискретною метрикою. Описати клас функцій $\mathbf{C}(\mathbf{R}, Y)$.

9.1. Довести, що множина:

а) $\{x \in \mathbf{C}([0, 1]) \mid \forall t \in [0, 1]: \ x(t) \geqslant 0\}$,

б) $\left\{x \in \mathbf{C}([0, 1]) \,\middle|\, \int_0^1 t x^2(t)\, dt \geqslant 0\right\}$

є замкненою в $(\mathbf{C}([0, 1]), \rho)$.

9.2. Довести, що множина:

а) $\left\{x \in \mathbf{C}([0, 1]) \mid x(0) + \int_0^1 x(t)\, dt > 0\right\}$,

б) $\left\{x \in \mathbf{C}([0, 1]) \mid x(0) > 1, \int_0^1 x(t)\, dt < 0\right\}$

є відкритою в $\mathbf{C}([0, 1]), \rho)$.

Означення. Відображення $f: X \to Y$ називається ***гомеоморфізмом***, якщо: 1) f—бієкція між X і Y; 2) $f \in \mathbf{C}(X, Y)$; 3) $f^{-1} \in \mathbf{C}(Y, X)$.

Вправа

10. Бієкція $f: X \to Y$ є гомеоморфізмом тоді й тільки тоді, коли: A відкрита в (X, ρ) тоді й тільки тоді, коли $f(A)$ відкрита в (Y, σ).

2.8. РІВНОМІРНО НЕПЕРЕРВНА НА МНОЖИНІ ФУНКЦІЯ

Нехай (X, ρ), (Y, σ) — метричні простори, $A \subset X$.

Означення. Функція $f: A \to Y$ називається ***рівномірно неперервною на множині*** A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \{x', x''\} \subset A, \rho(x', x'') < \delta : \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

Вправа

11. Довести, що функції, задані у вправі 4.5 § 2 і у прикладі 2 п. 2.6, рівномірно неперервні на множині визначення.

§ 3. КОМПАКТНІ МНОЖИНИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

3.1. ОЗНАЧЕННЯ

Нехай (X, ρ) — метричний простір, T — довільна непуста множина індексів і $A \subset X$.

Означення 1. Система множин

$$O = \{O_\alpha \mid \forall \alpha \in T : O_\alpha \subset X\}$$

називається ***покриттям множини*** A, якщо

$$\forall x \in A \ \exists \alpha \in T : O_\alpha \ni x \left(\Leftrightarrow A \subset \bigcup_{\alpha \in T} O_\alpha\right).$$

Для підмножини $T' \subset T$ система

$$O' = \{O_\alpha \mid \alpha \in T'\}$$

є ***підпокриття*** покриття O, якщо O' покриття для A.

Якщо множина T скінченна, то покриття O називається ***скінченним***.

Покриття $\{O_\alpha | \alpha \in T\}$ називається ***відкритим***, якщо для кожного $\alpha \in T$ множина O_α є відкритою в (X, ρ).

Вправа

1. Нехай $(\mathbf{R}, \rho)$ — пряма із звичайною віддаллю. Чи є система множин

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right) \middle| n \geqslant 1\right\}$$

покриттям (відкритим покриттям) множини:

а) $(0, 1)$; б) $[0, 1)$?

Означення 2. Нехай $F \subset X$. Множина F називається ***компактною*** в (X, ρ), якщо будь-яке відкрите покриття множини F містить скінченне підпокриття.

Приклади. 1. Довільна скінченна множина $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ компактна.

2. Множина $\mathbf{Z}$ у просторі $(\mathbf{R}, \rho)$ не є компактною.

Вказівка. Розглянути покриття $\left\{\left(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right) | n \in \mathbf{Z}\right\}$.

3. Множина $(0, 1]$ не є компактною в $(\mathbf{R}, \rho)$.

Вказівка. Розглянути покриття

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) | n \in \mathbf{N}\right\}.$$

4. Множина $\left\{\frac{1}{n} : n \geqslant 1\right\} \cup \{0\}$ компактна в $(\mathbf{R}, \rho)$.

5. Відкрита куля $B(x, r)$ у просторі $(\mathbf{R}^m, \rho)$ не є компактною множиною.

Вказівка. Розглянути покриття

$$\{B(x, r_i) \mid 0 < r_i < r, i \geqslant 1; r_i \to r, i \to \infty\}.$$

Означення 3. Якщо X компактна в (X, ρ), то ***метричний простір*** (X, ρ) називається ***компактним***.

3.2. ВЛАСТИВОСТІ КОМПАКТНИХ МНОЖИН

ТЕОРЕМА 1. Компактна множина обмежена.

$\vdash$ Нехай F — компактна в (X, ρ) множина. Для будь-якого $x \in F$ розглянемо відкриту множину $B(x, 1)$. Система $\{B(x, 1) | x \in F\}$ за означенням є відкритим покриттям F. Згідно з означенням компактної множини існує скінченне покриття

$$\{B(x_1, 1), B(x_2, 1), \dots, B(x_n, 1)\}, \text{ тобто } F \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1).$$

Нехай

$$C := 1 + \max\{\rho(x_1, x_k) \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Покажемо, що $F \subset B(x_1, C)$. Дійсно, для $x \in F$

$$\exists i: B(x_i, 1) \ni x \Rightarrow \rho(x, x_1) \leqslant \rho(x, x_i) + \rho(x_i, x_1) < C. \quad \lrcorner$$

ТЕОРЕМА 2. Компактна множина замкнена.

$\ulcorner$ Нехай F — компактна в (X, ρ) множина. Доведемо, що множина $X \setminus F$ відкрита в (X, ρ).

Нехай $x_0 \in X \setminus F$ — фіксована точка. Кожній точці $x \in F$ зіставимо дві відкриті кулі $B(x_0, r(x))$ і $B(x, r(x))$, де $r(x) = \frac{1}{3}\rho(x_0, r) > 0$. Система $\{B(x, r(x)) \mid x \in F\}$ є відкрите покриття компактної множини F. Тому існує скінченне підпокриття

$$\{B(x_1, r_1), B(x_2, r_2), \dots, B(x_n, r_n)\};$$

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i); \quad r_i := r(x_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Нехай $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Зауважимо, що

$$B(x_0, r) = \bigcap_{i=1}^{n} B(x_0, r_i), \quad B(x_0, r) \cap \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i) = \varnothing,$$

оскільки $B(x_0, r) \cap B(x_i, r_i) = \varnothing$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Тому

$$B(x_0, r) \cap F = \varnothing, \text{ тобто } B(x_0, r) \subset X \setminus F. \quad \lrcorner$$

ТЕОРЕМА 3. Замкнена підмножина компактної множини компактна.

$\ulcorner$ Нехай F — компактна в (X, ρ), $G \subset F$ і G — замкнена в (X, ρ). Нехай $O = \{O_\alpha \mid \alpha \in T\}$ — відкрите покриття множини G. Система $O \cup \{X \setminus G\}$ є відкрите покриття компактної множини F. Тому існує скінченне підпокриття

$$O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \dots, O_{\alpha_n}, X \setminus G.$$

Тоді $\{O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \dots, O_{\alpha_n}\}$ — скінченне підпокриття для G. $\lrcorner$

ТЕОРЕМА 4 (узагальнення теореми Больцано—Вейєрштрасса). Нехай F — компактна множина в (X, ρ). Кожна нескінченна послідовність елементів з F містить збіжну в (X, ρ) до деякого елемента з F підпослідовність.

Зауваження. В умовах теореми для послідовності $\{x_n : n \geqslant 1\} \subset F$ не припускається, що $x_m \neq x_n$ для $m \neq n$.

$\ulcorner$ Нехай $\{x_n : n \geqslant 1\} \subset F$ — довільна послідовність. Якщо для точки x існує підпослідовність $\{x_{m_{(k)}} : k \geqslant 1\}$ така що $x_{n_{(k)}} \to x$, $k \to \infty$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ нерівність $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ виконується для нескінченного числа індексів n. Тому той факт, що для точки x потрібної підпослідовності не існує, означає, що існує $\varepsilon(x) > 0$ таке, для якого нерівність $\rho(x_n, x) < \varepsilon(x)$ виконується тільки для скінченного числа номерів n.

Припустимо, що твердження теореми 4 не має місця, тобто що для будь-якої точки $x \in F$ не існує збіжної до неї підпослідовності. Тоді

$$\forall x \in F \ \exists \varepsilon(x) > 0 \ \exists N = N(x) \ \forall n \geqslant N : \ \rho(x_n, x) \geqslant \varepsilon(x).$$

Система куль $\{B(x, \varepsilon(x)) \mid x \in F\}$ є відкрите покриття компактної множини F. Нехай набір

$$\{B(x_1, \varepsilon(x_1)), B(x_2, \varepsilon(x_2)), \ldots, B(x_m, \varepsilon(x_m))\}$$

утворює скінченне підпокриття F:

$$F \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k, \varepsilon(x_k)).$$

За побудовою

$$x_n \bar{\in} \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k, \varepsilon(x_k))$$

для $n \geqslant \max\{N_1(x), N_2(x), \ldots, N_m(x)\}$, тобто $x_n \bar{\in} F$. Отримали протиріччя з умовою теореми. $\lrcorner$

Приклад 1. Доведемо, що замкнена куля в просторі $(C([a, b]), \rho)$ не є компактною множиною.

$\ulcorner$ Достатньо розглянути випадок $[a, b] = [0, 1]$, $x_0(t) = 0$, $t \in [0, 1]$ і кулю $B(x_0, 1)$. Послідовність функцій

$$\{t^n, t \in [0, 1]\}, \ n \geqslant 0 \tag{1}$$

належить $B(x_0, 1)$. Припустимо, що куля $B(x_0, 1)$ компактна. Тоді за теоремою 4 послідовність (1) містить рівномірно на $[0, 1]$ збіжну підпослідовність

$$\{t^{n(k)}, t \in [0, 1]\}, \quad k \geqslant 1$$

до деякої функції $f \in \overline{B}(x_0, 1)$. Тому

$$\rho(f, t^{n(k)}) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t) - t^{n(k)}| \to 0, \quad k \to \infty$$

і

$$|f(1) - 1| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t) - t^{n(k)}| \to 0, \quad k \to \infty,$$

а також для кожного $t \in [0, 1)$

$$|f(t) - t^{n(k)}| \leqslant \rho(f, t^{n(k)}) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Отже, $f(1) = 1$ і $f(t) = 0$, $t \in [0, 1)$, що неможливо, оскільки $f \in \overline{B}(x_0, 1) \subset \mathbf{C}([0, 1])$. ⌋

Вправи

2. Нехай (X_i, ρ_i), $i = 1, 2$ — метричні простори і (X, ρ) — їх декартів добуток. Припустимо, що F_i — компактні множини в (X_i, ρ_i), $i = 1, 2$. Довести, що множина $F_1 \times F_2$ компактна в (X, ρ).

3. Довести, що замкнена куля в (l_2, ρ) не є компактною множиною.

4. Довести, що замкнена куля в $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$ не є компактною множиною.

Зауваження. Із тверджень вправ 3 і 4 випливає, що компактні множини в цих просторах не можуть містити куль (відкритих чи замкнених).

5. Довести, що компактний метричний простір повний і сепарабельний.

3.3. КРИТЕРІЙ КОМПАКТНОСТІ

Нехай (X, ρ) — метричний простір і $A \subset X$. Нехай $\varepsilon > 0$ задане.

Означення. Множина $C \subset X$ називається ***ε-сіткою*** для множини A, якщо

$$\forall x \in A \ \exists y \in C: \ \rho(x, y) < \varepsilon \left(\Leftrightarrow \bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon) \supset A\right).$$

ТЕОРЕМА 1 (критерій Хаусдорфа [1]). Для того щоб замкнена множина F метричного простору (X, ρ) була компактною, необхідно, а для повного метричного простору (X, ρ) і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ існувала скінченна ε-сітка для множини F.

⌈ Необхідність. Нехай F — компактна. Тоді за теоремою 2 п. 3.2 F — замкнена. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Відкрите покриття $\{B(x, \varepsilon) \mid x \in F\}$ множини F повинно містити скінченне підпокриття: $\{B(x_1, \varepsilon), \ldots, B(x_n, \varepsilon)\}$. Тоді множина $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ є скінченною ε-сіткою для F.

Достатність. Нехай (X, ρ) — повний, а F — замкнена. Припустимо, що F не є компактною. Згідно з означенням це значить, що існує відкрите покриття $O = \{O_\alpha | \alpha \in T\}$, яке не містить скінченного підпокриття для F. Нехай для $\varepsilon = 1$ C_1 — скінченна 1 — сітка для F (вона існує згідно з умовами теореми 1). Хоча б одна із множин $\{B(x, 1) \cap F$

[1] *Хаусдорф Фелікс* (1868—1942) — німецький математик. Отримав фундаментальні результати в теорії множин, топології, теорії неперервних груп, функціональному аналізі, теорії чисел.

$| x \in C_1\}$ не може бути покрита скінченним набором множин із O. Припустимо, що це множина $F_1 := B(x_1, 1) \cap F$. Нехай для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ C_2 — скінченна $\frac{1}{2}$ — сітка для F, отже і для F_1. Хоча б одна з множин $\{B(x, \frac{1}{2}) \cap F_1 \mid x \in C_2\}$ не може бути покрита скінченним набором множин із O. Нехай це множина $F_2 := B(x_2, \frac{1}{2}) \cap F_1$. Продовжуючи аналогічно, одержимо послідовність множин $\{F_n : n \geqslant 1\}$ таких, що:

1) $F_n \subset F, \quad n \geqslant 1;$

2) $F_n \subset B(x_n, 2^{-n+1}), \quad n \geqslant 1;$

3) F_n не може бути покрита скінченним набором множин з O (зокрема, F_n нескінченна), $n \geqslant 1$. Розглянемо тепер послідовність $\{y_n : n \geqslant 1\}$ таких елементів, що:

$$y_1 \in B(x_1, 1) \cap F = F_1;$$

$$y_2 \in B\left(x_2, \frac{1}{2}\right) \cap F_1 = F_2, \quad y_2 \neq y_1;$$

. . . . . .

$$y_n \in B(x_n, 2^{-n+1}) \cap F_{n-1} = F_n, y_n \neq y_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1;$$

. . . . . .

Послідовність $\{y_n : n \geqslant 1\}$ фундаментальна. Це випливає з нерівності $\rho(y_m, y_n) < \frac{1}{2^{m-1}}$, $m < n$. Оскільки (X, ρ) повний, то існує елемент $y \in X$ такий, що $y_n \to y$, $n \to \infty$ в (X, ρ). Із замкненості F випливає включення: $y \in F$. Відкрите покриття O множини F містить множину $O_{\tilde{\alpha}} \ni y$. Оскільки $O_{\tilde{\alpha}}$ відкрита, то $\exists \delta > 0$: $B(y, \delta) \subset O_{\tilde{\alpha}}$. Нехай n таке, що

$$2^{-n+1} < \frac{\delta}{3}, \quad \rho(y_n, y) < \frac{\delta}{3}.$$

Тоді

$$F_n \subset B(x_n, 2^{-n+1}) \subset B(y, \delta),$$

оскільки для будь-якого $x \in F_n$

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) < \frac{1}{2^{n-1}} + \rho(x_n, y_n) +$$

$$+ \rho(y_n, y) < \frac{2}{2^{n-1}} + \rho(y_n, y) < \delta.$$

Таким чином, множина F_n покривається одною множиною $O_{\tilde{\alpha}}$ із O. Одержане протиріччя доводить теорему. ⌋

ТЕОРЕМА 2. Нехай (X, ρ) — метричний простір і $F \subset \subset X$. Якщо кожна послідовність елементів із F містить підпослідовність, що збігається до деякого елемента із F, то множина F компактна.

$\ulcorner F$ замкнена, оскільки містить всі свої граничні точки. Доведемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує скінченна ε-сітка. Припустимо, що для деякого $\varepsilon^* > 0$ не існує скінченної ε^*-сітки для F. Нехай x_1 — будь-який елемент із F, множина $\{B(x_1, \varepsilon^*)\}$ не є покриттям для F. Тому існує $x_2 \in F$, $x_2 \bar{\in} \bar{\in} B(x_1, \varepsilon^*)$. Набір $\{B(x_1, \varepsilon^*), B(x_2, \varepsilon^*)\}$ також не утворює покриття для F та ін. Отримаємо послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\} \subset \subset F$ таку, що $\rho(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon^*$ для $m \neq n$. Послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\}$ не може містити збіжної підпослідовності (протиріччя з фундаментальністю). Одержане протиріччя з умовою теореми показує, що припущення, що скінченна ε^*-сітка не існує, не має місця. Далі дивись доведення теореми 1. $\lrcorner$

Зауваження. Теорема 4 п. 3.2 і теорема 2 дають ще один критерій компактності в метричному просторі.

Вправа

5. Нехай для кожного $\alpha \in T$ множина F_α компактна і для будь-якого скінченного набору

$$F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_n} : F_{\alpha_1} \cap F_{\alpha_2} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n} \neq \varnothing.$$

Довести, що $\bigcap\limits_{\alpha \in T} F_\alpha \neq \varnothing$.

3.4. КОМПАКТНІ МНОЖИНИ В $(\mathbf{R}^m, \rho)$

ТЕОРЕМА. Підмножина F метричного простору $(\mathbf{R}^m, \rho)$ компактна тоді й тільки тоді, коли вона замкнена і обмежена.

$\ulcorner$Необхідність. Згідно з теоремами 1 і 2 п. 3.2 компактна множина в будь-якому метричному просторі замкнена й обмежена.

Достатність. Нехай F замкнена й обмежена. Використаємо критерій Хаусдорфа. Припустимо, що $\varepsilon > 0$ задане. Множина

$$\bar{C} = \left\{\left(\frac{\varepsilon k_1}{\sqrt{m}}, \frac{\varepsilon k_2}{\sqrt{m}}, \ldots, \frac{\varepsilon k_m}{\sqrt{m}}\right) \middle| k_i \in \mathbf{Z}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m\right\}$$

є ε-сітка для $\mathbf{R}^m$. Оскільки F обмежена, то вона міститься

в гіперкубі вигляду $J = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_i \mid \leqslant p, 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Множина $C = \tilde{C} \cap J$ скінченна і є ε-сіткою для F. ⌋

Вправи

5.1. Довести, що множина

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leqslant 1, x_1 x_2 \geqslant 1\right\}$$

є компактною в $(\mathbf{R}^2, \rho)$.

6*. Описати компактні множини в (l_2, ρ).

3.5. КОМПАКТНІ МНОЖИНИ В $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$

Нехай $A \subset \mathbf{C}([a, b])$.

Означення 1. Множина функцій A називається ***рівномірно обмеженою***, якщо

$$\exists L \in \mathbf{R} \ \forall x \in A \ \forall t \in [a, b] : |x(t)| \leqslant L,$$

тобто якщо множина A обмежена в метричному просторі $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$.

Означення 2. Множина функцій A називається ***рівностепенево неперервною***, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \ \forall \{t', t''\} \subset [a, b], |t' - t''| < \delta :$$
$$|x(t') - x(t'')| < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА (теорема Асколі—Арцела [1]). Для того щоб замкнена множина $F \subset \mathbf{C}([a, b])$ була компактною в $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$, необхідно й достатньо, щоб:

1) система F була рівномірно обмежена;

2) система F була рівностепенево неперервною.

⌈Необхідність. Нехай F — компактна підмножина в просторі $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$. Тоді F — обмежена множина і тому умова 1) теореми виконана. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Згідно з критерієм Хаусдорфа існує скінченна $\frac{\varepsilon}{3}$-сітка $\{x_1, \ldots, x_n\}$ для F, $n = n(\varepsilon)$. Згідно з теоремою Кантора

$$\exists \delta > 0 \ \forall k, 1 \leqslant k \leqslant n \ \forall \{t', t''\} \subset [a, b], |t' - t''| < \delta :$$
$$|x_k(t') - x_k(t'')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

---

[1] *Асколі Джуліо* (1843—1896) і *Арцела Чезаро* (1847—1912) — італійські математики.

Нехай тепер $x \in F$ задано. Тоді для деякого k, $1 \leqslant k \leqslant n$ маємо $\rho(x, x_k) < \frac{\varepsilon}{3}$, тобто

$$\forall t \in [a, b] : |x(t) - x_k(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тому для $t' \in [a, b], t'' \in [a, b], |t' - t''| < \delta$:

$$|x(t') - x(t'')| = |x(t') - x_k(t') + x_k(t') - x_k(t'') + x_k(t'') - x(t'')| \leqslant |x(t') - x_k(t')| + |x_k(t') - x_k(t'')| + |x_k(t'') - x(t'')| < \varepsilon.$$

Таким чином, умова 2) також виконана.

Достатність. Нехай F — замкнена множина, що задовольняє умовам 1) і 2) теореми. Використаємо теорему 2 п. 3.3. Припустимо, що $\{x_n : n \geqslant 1\} \subset F$, $\{r_n : n \geqslant 1\}$ — множина всіх раціональних чисел відрізка $[a, b]$, що занумеровані в якому-небудь порядку. Послідовність чисел $\{x_n(r_1) : n \geqslant 1\}$ обмежена за умовою 1), отже, вона містить збіжну до деякого числа $x(r_1)$ підпослідовність $x_{n(k)}(r_1) \to x(r_1)$, $k \to \infty$. Позначимо: $x_{n(k)} = x_{1k} : k \geqslant 1$. Послідовність $\{x_{1k} : k \geqslant 1\} \subset F$ і така, що

$$x_{1k}(r_1) \to x(r_1), \quad k \to \infty.$$

Розглянемо тепер послідовність чисел $\{x_{1k}(r_2) : k \geqslant 1\}$, яка теж обмежена. Тому існує підпослідовність $\{x_{1k(i)}(r_2) : i \geqslant 1\}$, що збігається до деякого числа $x(r_2)$; $x_{1k(i)}(r_2) \to x(r_2)$, $i \to \infty$. Позначимо $x_{1k(i)} = x_{2i}$, $i \geqslant 1$. Для послідовності $\{x_{2n} : n \geqslant 1\}$ маємо:

$$x_{2n}(r_1) \to x(r_1), \; x_{2n}(r_2) \to x(r_2), \; n \to \infty.$$

Продовжуючи таким же чином, побудуємо для кожного $m \in \mathbf{N}$ послідовність $\{x_{mn} : n \geqslant 1\}$, яка є підпослідовністю вихідної і для якої

$$\forall i, 1 \leqslant i \leqslant m : \; x_{mn}(r_i) \to x(r_i) \in \mathbf{R}, \; n \to \infty.$$

Послідовність $\{x_{nn} : n \geqslant 1\}$ є підпослідовністю вихідної, причому $x_{nn} \in \{x_{nk} : k \geqslant 1\}$, $n \geqslant 1$. Тому

$$\forall i \geqslant 1 : \; x_{nn}(r_i) \to x(r_i), \quad n \to \infty.$$

Дійсно, для заданого i

$$x_{in}(r_i) \to x(r_i), \quad n \to \infty$$

і тому для $\varepsilon > 0$ тільки для скінченного числа номерів $|x_{in}(r_i) - x(r_i)| \geqslant \varepsilon$. Усі послідовності $\{x_{mn} : n \geqslant 1\}$, $m > i$, $\{x_{nn} : n \geqslant i\}$ за побудовою є частинами послідовності $\{x_{in} :$

$n \geqslant 1\}$. Тому нерівність $|x_{nn}(r_i) - x(r_i)| \geqslant \varepsilon$ може виконуватися для скінченного числа номерів n.

Нехай тепер $\varepsilon > 0$ задано, а $\delta > 0$ — відповідне число з означення рівностепеневої неперервності F. Нехай для числа $\delta > 0$ $r_{k(1)}, r_{k(2)}, \ldots, r_{k(s)}$ є δ-сітка для $[a, b]$ із раціональних чисел. Для $t \in [a, b]$ позначимо через $r(t)$ елемент цієї δ-сітки такий, що $|t - r(t)| < \delta$. Тоді

$$\forall t \in [a, b] \ \forall \{m, n\} \subset \mathbf{N}: \ |x_{mm}(t) - x_{nn}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant |x_{mm}(t) - x_{mm}(r(t))| + |x_{mm}(r(t)) - x_{nn}(r(t))| +$$
$$+ |x_{nn}(r(t)) - x_{nn}(t)| < 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{s} |x_{mm}(r_{k(i)}) - x_{nn}(r_{k(i)})|.$$

Таким чином, послідовність $\{x_{nn} : n \geqslant 1\}$ задовольняє критерію Коші рівномірної збіжності і тому збігається до неперервної на $[a, b]$ функції, що міститься в F (згідно з її замкненістю). ⌋

Вправа

7. Довести, що умову 1) теореми можна замінити більш простою:

$$\exists L \in \mathbf{R} \ \forall x \in F : |x(a)| \leqslant L.$$

§ 4. ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА КОМПАКТАХ

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ

ТЕОРЕМА 1. Нехай (X, ρ) — компактний метричний простір, (Y, σ) — метричний простір. Нехай $f \in \mathbf{C}(X, Y)$. Тоді множина $f(X)$ компактна в (Y, σ).

⌈Нехай $O = \{O_\alpha\}$ — відкрите покриття множини $f(X)$ в (Y, σ). Згідно з теоремою п. 2.7 множина $f^{-1}(O_\alpha)$ відкрита при кожному α. Система множин $\{f^{-1}(O_\alpha)\}$ є відкрите покриття компактної множини X. Тому існує скінченне підпокриття

$$\{f^{-1}(O_{\alpha_1}), f^{-1}(O_{\alpha_2}), \ldots, f^{-1}(O_{\alpha_n})\},$$

тобто

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(O_{\alpha_k}) \Rightarrow f(X) \subset f\Big(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(O_{\alpha_k})\Big) =$$
$$= \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(O_{\alpha_k})) \subset \bigcup_{k=1}^{n} O_{\alpha_k}.$$ ⌋

Зауваження. Нехай (X, ρ) і (Y, σ) — метричні простори, F — компактна множина в (X, ρ) і $f \in C(F, Y)$. Тоді $f(F)$ компактна.

Розглянемо зараз за простір (Y, σ) числову пряму $\mathbf{R}$ із звичайною віддаллю.

ТЕОРЕМА 2. Нехай (X, ρ) — метричний простір, F — компактна підмножина X і $f \in \mathbf{C}(F)$.

Тоді:

а) $\exists L \in \mathbf{R}\ \forall x \in F : |f(x)| \leqslant L$;
б) $\exists x_* \in F : f(x_*) = \inf\limits_{x \in F} f(x)$; $\exists x^* \in F : f(x^*) = \sup\limits_{x \in F} f(x)$.

|¯Доведення випливає з компактності множини $f(F)$ і того, що компактна множина обмежена і замкнена. _|

ТЕОРЕМА 3. Нехай (X, ρ) і (Y, σ) — два метричних простори. Припустимо, що:

1) X — компактна множина в (X, ρ);
2) f — бієкція між X і Y;
3) $f \in \mathbf{C}(X, Y)$.

Тоді обернена функція $f^{-1} \in \mathbf{C}(Y, X)$.

|¯Обернена функція $f^{-1}: Y \to X$ існує згідно з умовою 2). Нехай A — відкрита множина в (X, ρ). Прообразом множини A при відображенні f^{-1} є множина

$$(f^{-1})^{-1}(A) = \{y \mid \exists x \in A : f^{-1}(y) = x\} =$$
$$= \{y \mid y = f(x), x \in A\} = f(A).$$

Замкнена підмножина $X \setminus A$ компактної за умовою 1) множини X є компактною. Оскільки $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ за умовою 3), то $f(X \setminus A)$ компактна в (Y, σ). Тому $f(X \setminus A) = f(X) \setminus (A) = Y \setminus f(A)$ замкнена, а $f(A)$ відкрита в (Y, σ). _|

ТЕОРЕМА 4 (теорема Кантора). Нехай (X, ρ) і (Y, σ) — два метричні простори. Припустимо, що:

1) X — компактна в (X, ρ);
2) $f \in \mathbf{C}(X, Y)$.

Тоді функція f рівномірно неперервна на X.

|¯Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Згідно з означенням неперервності в точці, маємо:

$$\forall x \in X\ \exists \delta = \delta(x) > 0\ \forall z \in B(x, \delta(x)) : \sigma(f(z), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Система куль $\{B(x, \frac{1}{2}\delta(x)) \mid x \in X\}$ є відкритим покриттям компактної за умовою 1) множини X. Тому існує скінченне підпокриття

$$\left\{B\left(x_1, \frac{1}{2}\delta(x_1)\right), \ldots, B\left(x_n, \frac{1}{2}\delta(x_n)\right)\right\},$$

тобто

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{n} B\left(x_k, \frac{1}{2}\delta(x_k)\right).$$

Нехай $\delta := \frac{1}{2}\min\{\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)\} > 0$ і $x' \in X, x'' \in X$, $\rho(x', x'') < \delta$. Для точки x'

$$\exists k: B\left(x_k, \frac{1}{2}\delta(x_k)\right) \ni x' \Leftrightarrow \rho(x', x_k) < \frac{1}{2}\delta(x_k).$$

Тому $x'' \in B(x_k, \delta(x_k))$. І тому

$$\sigma(f(x'), f(x'')) \leqslant \sigma(f(x'), f(x_k)) + \sigma(f(x''), f(x_k)) < \varepsilon. \quad \lrcorner$$

Означення. Нехай (X, ρ) — метричний простір і $S \subset X$. ***Множина*** S називається ***зв'язною*** множиною в (X, ρ), якщо не існує відкритих множин A і B, які задовольняють умовам:

$$1)\ A \cap B = \varnothing,\ 2)\ A \cap S \neq \varnothing,\ 3)\ B \cap S \neq \varnothing,$$

$$4)\ S \subset A \cup B.$$

Приклад 1. У просторі $(\mathbf{R}, \rho)$ множини (a, b), $(a, +\infty)$ і $\mathbf{R}$ зв'язні, а множина $[0, 1] \cup [2, 3]$ незв'язна.

⌈Доведемо, що інтервал (a, b), $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$ зв'язна множина. Припустимо, що (a, b) незв'язна. Досить розглянути випадок, коли $a \in A$, $b \in B$, де A і B — множини з наведеного вище означення. Тоді непуста множина $A \cap (a, b)$ обмежена зверху числом b і тому має точну верхню межу

$$c = \sup(A \cap (a, b)).$$

Оскільки $A \cap (a, b)$ відкрита, то $c \in A \cap (a, b)$, зокрема, $c > a$. Таким же чином, оскільки $B \cap (a, b)$ відкрита, то $c \in B \cap (a, b)$ і $c < b$. Тому точка $c \in (a, b)$, але $c \in (A \cap (a, b)) \cup (B \cap (a, b)) = (a, b)$.

Вправи

1. Описати зв'язні множини простору $(\mathbf{R}, \rho)$.
2. Нехай S_1 і S_2 — зв'язні множини, причому $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$. Довести, що $S_1 \cup S_2$ також зв'язна.

ТЕОРЕМА 5. Нехай (X, ρ), (Y, σ) — метричні простори. Припустимо, що:

1) X — зв'язна множина;
2) $f \in \mathbf{C}(X, Y)$.

Тоді множина $f(X)$ зв'язна в (Y, σ).

⌈ Припустимо, що $f(X)$ незв'язна. Тоді існують відкриті в (Y, σ) множини A і B такі, що

$$A \cap B = \varnothing, f(X) \cap A \neq \varnothing, f(X) \cap B \neq \varnothing$$

і

$$f(X) \subset A \cup B.$$

Переходячи до прообразів, одержимо

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \varnothing, \quad X \cap f^{-1}(A) \neq \varnothing, \quad X \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing$$

і

$X \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Крім того, множини $f^{-1}(A)$ і $f^{-1}(B)$ є відкритими, тому X не є зв'язною, що суперечить умові. $\rfloor$

Вправи

3. Нехай $Y = \mathbf{R}\ \sigma$ — звичайна віддаль. Довести, що при цьому теорема 5 твердить, що $f(X)$ — інтервал (можливо нескінченний, що може містити один або обидва кінці).

4. Нехай $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^m)$ і $\exists \alpha \in \mathbf{R} : \{x \in \mathbf{R}^m \mid f(x) \leqslant \alpha\} \neq \varnothing$ і обмежена. Тоді

$$\exists x_* \in \mathbf{R}^m : \min_{\mathbf{R}m} f = f(x_*).$$

5.* Нехай (X, ρ) — повний сепарабельний метричний простір і $f: X \to \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{C}(X)$. ***Функція*** f називається ***компактною***, якщо для кожного $\alpha \in \mathbf{R}$ множина $\{x \in X \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ компактна. Побудувати приклади компактних функцій.

§ 5. ПРИНЦИП СТИСКАЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

5.1. ОЗНАЧЕННЯ

Нехай (X, ρ) — метричний простір і $f: X \to X$ — відображення цього простору в себе.

Означення 1. Точка $x \in X$ називається ***нерухомою точкою*** відображення f, якщо $f(x) = x$.

Означення 2. Відображення f називається ***стискаючим (відображенням стиску)***, якщо

$$\exists \lambda, 0 \leqslant \lambda < 1 \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y : \rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda \rho(x, y).$$

Вправи

1. У просторі $(\mathbf{R}^2, \rho)$ перетворення

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 3), (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

не має нерухомих точок і не є відображенням стиску. Довести ці твердження.

2. Довести, що в просторі $(\mathbf{R}^2, \rho)$ перетворення

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi), (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

де $\varphi \in \mathbf{R}$ — фіксовано, має нерухому точку, але не є перетворенням стиску.

3. Нехай у просторі $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$: а) $f(x) = -x$; б) $f(x) = |x|$; $x \in \mathbf{C}([a, b])$. Чи має f нерухомі точки? Чи є f перетворенням стиску?

4. Нехай у просторі $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$

$$f(x)(t) = \int_a^t x(s)\,ds, \quad a \leqslant t \leqslant b; \quad x \in \mathbf{C}([a, b]).$$

Визначити нерухомі точки f. Чи є f перетворенням стиску?

5. Довести, що відображення стиску простору X в себе є рівномірно неперервним на X.

5.2. ПРИНЦИП СТИСКАЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

ТЕОРЕМА (Банаха [1]). Нехай (X, ρ) — повний метричний простір і $f: X \to X$ — відображення стиску.

Тоді відображення f має єдину нерухому точку.

⌈Нехай x_0 — довільний елемент з X. Розглянемо послідовність

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots .$$

Елемент x_n — результат n-кратного застосування перетворення f до елемента x_0: $x_n = f^n(x_0)$.

Доведемо, що послідовність $\{x_n : n \geqslant 1\}$ елементів X фундаментальна. Для цього спочатку встановимо нерівність

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant \lambda\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \ldots$$
$$\leqslant \lambda^n \rho(x_1, x_0), \quad n \geqslant 1.$$

Враховуючи цю нерівність для будь-яких $m, n, m \leqslant n$, одержимо

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda^m \rho(x_1, x_0) + \lambda^{m+1}\rho(x_1, x_0) + \ldots + \lambda^{n-1}\rho(x_1, x_0) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda^m}{1-\lambda}\rho(x_1, x_0). \tag{1}$$

З нерівності (1) випливає фундаментальність послідовності $\{x_n : n \geqslant 1\}$.

Оскільки (X, ρ) повний, то існує елемент $x^* \in X$ такий, що $x_n \to x^*$, $n \to \infty$ в (X, ρ). Перейшовши в нерівності (1) до гра-

---

[1] *Банах Стефан* (1892—1945) — видатний польський математик, один із творців сучасного функціонального аналізу.

ниці при $n \to \infty$, отримаємо нерівність

$$\rho(x^*, x_m) \leqslant \frac{\lambda^m}{1-\lambda} \rho(x_1, x_0). \qquad (2)$$

Елемент x^* є нерухомою точкою f, оскільки з неперервності f згідно з рівністю

$$x_{n+1} = f(x_n), n \geqslant 1$$

при $n \to \infty$ одержимо

$$x^* = f(x^*).$$

Елемент x^* єдина нерухома точка. Дійсно, якщо для деякого $z \in X : f(z) = z$, то

$$\rho(x^*, z) = \rho(f(x^*), f(z)) \leqslant \lambda\rho(x^*, z).$$

Таким чином, $x^* = z$. ⌋

Зауваження. Слід звернути увагу на конструктивний характер доведення. Елементи послідовності $\{x_n : n \geqslant 1\}$ є наближеннями до нерухомої точки x^*, причому точність наближення характеризується нерівністю (2)

Наслідок. Нехай (X, ρ) — повний метричний простір, $f: X \to X$. Припустимо, що для деякого $m \in \mathbf{N}$ відображення f^m є відображенням стиску. Тоді відображення f має єдину нерухому точку.

⌈Відображення f може мати тільки одну нерухому точку, оскільки нерухома точка для f є нерухомою точкою і для f^m. Нехай x^* — нерухома точка f^m: $f^m(x^*) = x^*$. Тоді

$$\rho(x^*, f(x^*)) = \rho(f^m(x^*), f^{m+1}(x^*)) \leqslant \lambda\rho(x^*, f(x^*)).$$

Звідси $x^* = f(x^*)$. ⌋

Вправи

6. Нехай $X = [a, b]$, $\rho(x, y) = |x - y|$; (X, ρ) — повний метричний простір і $f: [a, b] \to [a, b]$ — диференційовна на $[a, b]$ функція. Довести, що f є перетворення стиску тоді й тільки тоді, коли

$$\exists \lambda < 1 : \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| \leqslant \lambda.$$

7. Довести, що умова теореми Банаха, щоб $\lambda < 1$, істотна. Розглянути в просторі $(\mathbf{R}, \rho)$ перетворення

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x + x, \quad x \in \mathbf{R},$$

для якого $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ при $x \neq y$.

8. Перевірити, що f^2 для перетворення f з вправи 4 є перетворенням стиску, якщо $b - a < 1$.

5.3. ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ СТИСКАЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

(i) **Розв'язок рівняння вигляду $f(x) = x$.**

Означення. Функція f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ задовольняє на $[a, b]$ ***умові Ліпшица***[1] ***порядку*** $\alpha > 0$ із ***сталою*** L, якщо

$$\forall \{x, y\} \subset [a, b]: |f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|^{\alpha}.$$

Клас функцій, що задовольняє на $[a, b]$ умові Ліпшица порядку α, будемо позначати символом $\mathbf{Lip}_{\alpha}([a, b])$.

Вправи

9. Описати клас $\mathbf{Lip}_{\alpha}([a, b])$, $\alpha > 1$.

10. Показати, що $C^1([a, b]) \subset \mathbf{Lip}_1([a, b])$ і що обернене включення місця не має.

11. Довести, що з $f \in \mathbf{Lip}_{\alpha}([a, b])$ випливає рівномірна неперервність f на $[a, b]$.

ТЕОРЕМА. Нехай f: $[a, b] \to [a, b]$ і $f \in \mathbf{Lip}_1([a, b])$ із сталою $L < 1$. Тоді

$\exists!\ x^* \in [a, b]: f(x^*) = x^*$.

⌈**Вказівка.** Застосувати теорему Банаха до простору $X = [a, b]$ із звичайною віддаллю і відображення f. Зауважити, що твердження цієї теореми може бути одержано елементарно, проте теорема Банаха фактично дає більше: починаючи з будь-якої точки $x_0 \in [a, b]$, ми отримуємо послідовність $\{x_n: n \geqslant 1\}$, що збігається до x^*, причому

$$|x^* - x_n| \leqslant \frac{L^n}{1 - L}|f(x_0) - x_0|, \quad n \geqslant 1. \qquad ⌋$$

(ii) **Розв'язок рівняння вигляду $F(x) = 0$.**

ТЕОРЕМА. Нехай F: $[a, b] \to \mathbf{R}$, причому $F(a) < 0 < F(b)$; $\exists m\ \exists M$, $0 < m \leqslant M$ $\forall x \in [a, b]$: $m \leqslant F'(x) \leqslant M$. Тоді

$$\exists!\ x^* \in [a, b]: F(x^*) = 0.$$

⌈**Вказівка.** Застосувати теорему Банаха до простору $([a, b], \rho)$ і до перетворення $f(x) = x - \lambda F(x)$, $x \in [a, b]$ з числом λ, $0 < \lambda < M^{-1}$. При цьому також є справедливим зауваження, аналогічне (i). ⌋

(iii) **Розв'язок системи лінійних рівнянь.** Нехай $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m}$ — матриця розміру $m \times m$ із дійсними елемен-

---

[1] *Ліпшиц Рудольф* (1832—1903) — німецький математик.

тами такими, що

$$\lambda^2 = \sum_{i,j=1}^{m} (a_{ij} + \delta_{ij})^2 < 1, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Зручно користуватися векторними позначеннями. Нехай $\vec{x}$ — вектор-стовпець із m компонентами $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $\vec{x} \in \mathbf{R}^m$.

ТЕОРЕМА. Для будь-якого $\vec{a} \in \mathbf{R}^m$ існує єдиний розв'язок системи

$$A\vec{x} = \vec{a}.$$

⌈ У повному метричному просторі $(\mathbf{R}^m, \rho)$ відображення $\vec{f}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, що визначається формулою

$$\vec{f}(\vec{x}) := A\vec{x} + \vec{x} - \vec{a}, \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^m,$$

є перетворенням стиску, оскільки для будь-яких $\vec{x}$ і $\vec{y}$ із компонентами $x_1, \ldots, x_m$ і $y_1, \ldots, y_m$ відповідно маємо нерівність

$$\rho^2(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y})) = \sum_{i=1}^{m} (f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{y}))^2 = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j + x_i -$$

$$- a_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j - y_i + a_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} + \delta_{ij})(x_i - y_i)\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} + \delta_{ij})^2 \sum_{j=1}^{m} (x_j - y_j)^2 = \lambda^2 \rho^2 (\vec{x}, \vec{y}).$$

Згідно з теоремою Банаха існує єдина нерухома точка $\vec{x}^*$ перетворення $\vec{f}$

$$\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{x}^*,$$

тобто

$$A\vec{x}^* = \vec{a}.$$

Причому

$$\vec{x}^* = \lim_{n \to \infty} \vec{x}^{(n)} \text{ в } (\mathbf{R}^m, \rho),$$

де $\vec{x}^{(0)} \in \mathbf{R}^m$ — довільна точка,

$$\vec{x}^{(n+1)} = A\vec{x}^{(n)} + \vec{x}^{(n)} - \vec{a}, \quad n \geqslant 0.$$

Крім того, для будь-якого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, маємо

$$|x_i^* - x_i^{(n)}| \leqslant \rho(\vec{x}^*, \vec{x}^{(n)}) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \rho(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(0)}), \ n \geqslant 1. \quad \_|$$

(iv) **Теорема про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння.**

ТЕОРЕМА. Нехай функція F: $[a, b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ така, що:

1) $F \in \mathbf{C}([a, b]) \times \mathbf{R})$;

2) $\exists L \in \mathbf{R} \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall \{y_1, y_2\} \subset \mathbf{R}$:

$$:|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|.$$

Тоді для будь-якого $y_0 \in \mathbf{R}$ існує єдиний розв'язок рівняння

$$\begin{aligned} &\frac{dy(x)}{dx} = F(x, y(x)), \ a \leqslant x \leqslant b; \\ &y(a) = y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

|¯Зауважимо, що розв'язання рівняння (1) рівносильно розв'язанню інтегрального рівняння

$$y(x) = y_0 + \int_a^x F(u, y(u))\, du, \ a \leqslant x \leqslant b$$

відносно функції $y \in \mathbf{C}([a, b])$.

Для застосування теореми Банаха в просторі $\mathbf{C}([a, b])$ введемо метрику

$$\sigma(f, g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{e^{-k(x-a)} |f(x) - g(x)|\},$$

де $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([a, b])$ і $k > 0$ — фіксоване число, яке буде вибране пізніше. Слід звернути увагу на нерівності:

$$\mu\rho(f, g) \leqslant \sigma(f, g) \leqslant \rho(f, g), \ \mu := e^{-k(b-a)},$$

з яких отримуємо, що $(\mathbf{C}([a, b]), \sigma)$ — повний метричний простір при будь-якому $k > 0$. У просторі $(\mathbf{C}([a, b]), \sigma)$ перетворення A: $\mathbf{C}([a, b]) \to \mathbf{C}([a, b])$, що задається формулою

$$(Af)(x) = y_0 + \int_a^x F(u, f(u))\, du, \ a \leqslant x \leqslant b, \ f \in \mathbf{C}([a, b]),$$

є перетворенням стиску для відповідним чином вибраного значення k. Дійсно, оскільки для будь-якого $x \in [a, b]$ має

місце нерівність

$$|(Af)(x)-(Ag)(x)|=\left|\int_a^x (F(u, f(u))-F(u, g(u))\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant L\int_a^x |f(u)-g(u)|\,du,\ \{f, g\}\subset \mathbf{C}([a, b]),$$

то

$$e^{-k(x-a)}|(Af)(x)-(Ag)(x)|\leqslant L\int_a^x e^{-k(x-u)}e^{-k(u-a)}|f(u)-$$

$$-g(u)|\,du\leqslant L\sigma(f, g)\frac{1}{k}|e^{-k(x-a)}-1|\leqslant\frac{L}{k}\sigma(f, g).$$

Звідси випливає, що

$$\sigma(Af, Ag)\leqslant\lambda\sigma(f, g),\ \{f, g\}\subset \mathbf{C}([a, b]),$$

де $\lambda:=\frac{L}{k}$. Якщо k таке, що $\lambda<1$, то A — перетворення стиску. Застосовуючи теорему Банаха, отримаємо твердження теореми. Зауважимо також, що теорема Банаха дозволяє в складніх ситуації (коли відсутні алгоритмічні способи визначення точного розв'язку рівняння (1)) просто будувати наближення до невідомого розв'язку із довільною точністю. ⌋

(V) Дослідження інтегрального рівняння Фредгольма[1] другого роду.

ТЕОРЕМА. Нехай функція $K:[a, b]\times[a, b]\to\mathbf{R}$ є елемент $\mathbf{C}([a, b]\times[a, b])$ і число $\lambda\in\mathbf{R}$ таке, що

$$|\lambda|<(M(b-a))^{-1},\ M=\max\{|K(x, y)|\,|(x, y)\in[a, b]^2\}.$$

Тоді для будь-якого $g\in\mathbf{C}([a, b])$ існує єдина функція $f\in\mathbf{C}([a, b])$, така, що

$$f(x)=\lambda\int_a^b K(x, y)f(y)\,dy+g(x),\ a\leqslant x\leqslant b. \qquad (1)$$

Зауваження. При заданих функціях K і g рівняння (1) щодо функції f називається ***інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду***.

⌈Вказівка. До повного метричного простору $(\mathbf{C}[a, b]), \rho)$ і перетворення стиску A, що задається формулою

[1] *Фредгольм Ерік Івар* (1866—1927) — шведський математик, засновник теорії інтегральних рівнянь.

$$(Af)(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy + g(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad f \in \mathbf{C}([a, b]),$$

застосувати теорему Банаха. ⌋

Вправи

12. Нехай (X, ρ) — компактний метричний простір, а перетворення $f: X \to X$ таке, що

$$\forall \{x, y\} \subset X, \ x \neq y: \ \rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y). \tag{2}$$

Довести, що f має єдину нерухому точку.

13. Нехай (X, ρ) — метричний простір, $f: X \to X$ — перетворення, що задовольняє умову (2) і таке, що $f(X)$ компактна в (X, ρ). Довести, що f має єдину нерухому точку.

14*. Нехай (X, ρ) — компактний метричний простір, а перетворення $f: X \to X$ таке, що

$$\forall \{x, y\} \subset X: \ \rho(f(x), f(y)) \geqslant \rho(x, y).$$

Довести, що $f(X) = X$ і що f — ізометрія.

5.4. ТЕОРЕМА ПРО НЕЯВНУ ФУНКЦІЮ

ТЕОРЕМА. Нехай $F: [a, b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ така, що:

1) $F \in \mathbf{C}([a, b]) \times \mathbf{R})$;

2) $\exists\, m\ \exists\, M,\ 0 < m \leqslant M\ \ \forall\, x \in [a, b]\ \forall \{y_1, y_2\} \subset \mathbf{R},\ y_1 \neq y_2$:

$$m \leqslant (F(x, y_1) - F(x, y_2))(y_1 - y_2)^{-1} \leqslant M.$$

Тоді

$$\exists!\, f \in \mathbf{C}([a, b]): F(x, f(x)) = 0, \ x \in [a, b].$$

⌈ У повному метричному просторі $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$ перетворення A, що визначається формулою

$$(Ag)(x) = g(x) - \frac{2}{m + M} F(x, g(x)), \ a \leqslant x \leqslant b; \ g \in \mathbf{C}([a, b]),$$

є перетворенням стиску. ⌋

5.5. ТЕОРЕМА СТОУНА—ВЕЙЄРШТРАССА

Нехай (X, ρ) — компактний метричний простір. Введемо на просторі неперервних функцій $\mathbf{C}(X)$ віддаль

$$\sigma(f, g) := \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|, \ \{f, g\} \subset \mathbf{C}(X).$$

Простір $(\mathbf{C}(X), \sigma)$ — повний метричний простір. Доведення цього твердження аналогічне доведенню повноти простору $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$.

Означення 1. Нехай $A \subset \mathbf{C}(X)$. Множина A називається ***алгеброю***, якщо $\forall \{f, g\} \subset A$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}$:

$$(\alpha f) \in A, \ (f + g) \in A, \ (f \cdot g) \in A.$$

Означення 2. Нехай $A \subset \mathbf{C}(X)$ — алгебра. ***Алгебра*** A ***відділяє точки*** множини X, якщо

$$\forall \{x, y\} \subset X, \ x \neq y \ \exists f \in A: f(x) \neq f(y).$$

ТЕОРЕМА (Стоуна[1]—Вейєрштрасса). Нехай (X, ρ) — компактний метричний простір, $(\mathbf{C}(X), \sigma)$ — простір неперервних дійсних функцій на X з рівномірною метрикою, $A \subset \mathbf{C}(X)$. Припустимо, що:

1) A — алгебра;
2) A — віддаляє точки множини X;
3) функція f, що визначається рівністю $f(x) = 1$, $x \in X$, належить A.

Тоді множина A скрізь щільна в $(\mathbf{C}(X), \sigma)$.

⌈Доведемо, що замикання $\bar{A}$ дорівнює $\mathbf{C}(X)$. У силу теореми Вейєрштрасса для функції $g(t) = \sqrt{t}$, $t \in [0, 1]$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P$ — многочлен від t $\forall t \in [0, 1]$: $|\sqrt{t} - P(t)| < \varepsilon$. Тому для функції $f \in A$ зі значенням $\|f\| := \max\limits_{x \in X} |f(x)| > 0$

$$\forall x \in X: \left| \frac{|f(x)|}{\|f\|} - P\left(\frac{f^2(x)}{\|f\|^2}\right) \right| =$$

$$= \left| \sqrt{\frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2}} - P\left(\frac{f^2(x)}{\|f\|^2}\right) \right| < \varepsilon.$$

Тому $|f| \in \bar{A}$.

Оскільки для $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$:

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|),$$

$$\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|),$$

то для $f \in A$, $g \in A$ маємо, на основі доведеного, що функції

---

[1] Ця теорема, що являє собою елегантне й глибоке узагальнення теореми Вейєрштрасса про рівномірне на відрізку наближення неперервної функції многочленами, одержана американським математиком М. Г. Стоуном, відомим спеціалістом в галузі топології і функціонального аналізу.

$X \ni x \mapsto \max(f(x), g(x))$; $X \ni x \mapsto \min(f(x), g(x))$ належать $\bar{A}$.

Якщо $x \in X$, $y \in X$ і $x \neq y$, а $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$, то $\exists f \in A$: $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$. Дійсно, за умовою $\exists g \in A$: $g(x) \neq g(y)$. Покладемо

$$f(z) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)} (g(z) - g(x)), \quad z \in X.$$

Нехай $f \in \mathbf{C}(X)$ і $\varepsilon > 0$ задано. Зафіксуємо $x \in X$, для $z \in X$ покладемо $\alpha = f(x)$, $\beta = f(z)$. Згідно з доведеним

$$\exists h_z \in A: h_z(x) = \alpha = f(x), \quad h_z(z) = \beta = f(z),$$

а оскільки $(h_z - f) \in \mathbf{C}(X)$, то

$$\exists r(z) > 0 \ \forall y \in B(z, r(z)): h_z(y) \leqslant f(y) + \varepsilon.$$

Система $\{B(z, r(z)) \mid z \in X\}$ є відкритим покриттям компакта X і тому містить скінченне підпокриття

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(z_k, r(z_k)).$$

Визначимо функцію g_x:

$$g_x(y) := \min_{1 \leqslant k \leqslant n} (h_{z_k}(y)), \quad y \in X.$$

Зауважимо, що $g_x \in \bar{A}$, $g_x(x) = f(x)$ і що

$$\forall y \in X: g_x(y) \leqslant f(y) + \varepsilon.$$

Оскільки $(g_x - f) \in \mathbf{C}(X)$, то

$$\exists s(x) > 0 \ \forall y \in B(x, s(x)): g_x(y) \geqslant f(y) - \varepsilon.$$

Система $\{B(x, s(x)) \mid x \in X\}$ утворює відкрите покриття X і містить скінченне підпокриття

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, s(x_k)).$$

Нехай

$$h(y) := \max_{1 \leqslant k \leqslant N} (g_{x_k}(y)), \quad y \in X.$$

Тоді $h \in \bar{A}$ і

$$\forall y \in X: f(y) - \varepsilon \leqslant h(y) \leqslant f(y) + \varepsilon.$$

Таким чином, $\bar{A} = \mathbf{C}(X)$. ∎

Розглянемо найбільш важливі застосування теореми Стоуна — Вейєрштрасса.

Приклад 1. Нехай X — компактна множина в $(\mathbf{R}^m, \rho)$, A є множина всіх многочленів від m змінних, що розглядаються на X. Множина A задовольняє всім умовам 1), 2), 3) теореми Стоуна—Вейєрштрасса.

Отже, ***неперервна функція від m змінних на компакті є рівномірною на цьому компакті границею послідовності многочленів від m змінних.***

Приклад 2. Нехай $X = [0, 2\pi]$, причому точки 0 і 2π вважаються рівними. Для $\{x, y\} \subset [0, 2\pi]$ покладемо $\rho(x, y) = \min\{|x - y|, 2\pi - |x - y|\}$. (X, ρ) — компактний метричний простір. Тоді множина

$$\mathbf{C}(X) = \mathbf{C}([0, 2\pi]) \cap \{f \mid f(0) = f(2\pi)\}.$$

Її можна розглядати, як звуження на $[0, 2\pi]$ множини неперервних на $\mathbf{R}$ 2π-періодичних функцій. Множина

$$A = \left\{ p \;\middle|\; \begin{array}{l} p(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\},\ \{a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\} \subset \mathbf{R} \end{array} \right\}$$

так званих ***тригонометричних многочленів*** задовольняє умовам 1) — 3) теореми Стоуна—Вейєрштрасса. Таким чином, ***неперервна на $\mathbf{R}$ 2π-періодична функція є рівномірною на $\mathbf{R}$ границею послідовності тригонометричних многочленів.*** Це твердження вперше було доведене Вейєрштрассом і звичайно називається ***теоремою Вейєрштрасса.***

Вправи

15. Нехай $\{f_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{C}([a, b])$ — послідовність функцій, що розділяють точки $[a, b]$. Довести, що для будь-якої функції $f \in \mathbf{C}([a, b])$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbf{N}\ \exists F\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R},\ F \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^m);$$

$$\forall x \in [a, b]\colon |f(x) - F(f_1(x), \ldots, f_m(x)| < \varepsilon.$$

16. Нехай $[a, b] \subset [0, +\infty)$ і A — система всіх скінченних лінійних комбінацій функцій $\{[a, b] \ni x \to x^{2n},\ n \geqslant 0\}$. Застосувати теорему Стоуна — Вейєрштрасса до множини A в просторі $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$.

17. Дві функції $f(x) = 1$, $x \in [a, b]$ і $g(x) = x$, $x \in [a, b]$, розділяють точки $[a, b]$. Побудувати алгебру функцій, що включає f і g.

Глава 11 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ДІЙСНИХ ФУНКЦІЙ ВІД КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

§ 1. ПОХІДНА ЗА НАПРЯМКОМ. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ

1.1. ОЗНАЧЕННЯ

У цій і наступних главах розглядаються властивості функцій, визначених на підмножинах простору $\mathbf{R}^m$, $m \in \mathbf{N}$. Оскільки в подальшому будуть використовуватися координати векторів із $\mathbf{R}^m$, то доцільно дещо змінити позначення. Елемент із $\mathbf{R}^m$ будемо позначати символом $\vec{x}$. Таким чином, $\mathbf{R}^m = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_i \in \mathbf{R}, 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Простір $\mathbf{R}^m$ розглядатимемо як лінійний із звичайними (покоординатними) операціями додавання, а також множення на дійсні числа. На $\mathbf{R}^m$ розглядатимемо звичайну віддаль

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \Big(\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2\Big)^{1/2},$$

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m, \ \vec{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m.$$

$(\mathbf{R}^m, \rho)$ — повний метричний простір. Для $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ число

$$\|\vec{x}\| := \Big(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\Big)^{1/2}$$

називається ***довжиною***, або ***нормою вектора*** $\vec{x}$. Зауважимо, що:

1) $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$, $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \mathbf{R}^m$;
2) $\forall\, \alpha \in \mathbf{R} \ \forall\, \vec{x} \in \mathbf{R}^m$: $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\,\|\vec{x}\|$;
3) $\forall\, \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \mathbf{R}^m$: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

$(\Leftrightarrow \rho(\vec{x}, -\vec{y}) \leqslant \rho(\vec{x}, \vec{0}) + \rho(\vec{0}, -\vec{y}),\ \vec{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^m)$.

Нехай $A \subset \mathbf{R}^m$ і $f\colon A \to \mathbf{R}$. Функція f звичайно називається ***дійсною функцією від*** m ***змінних***. Значення функції

f в точці $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \in A$ позначимо як

$$f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m).$$

Фіксований вектор $\vec{a} \in \mathrm{R}^m$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, будемо називати також ***напрямком***, множину

$$\{\vec{x} = \vec{x}^0 + t\vec{a} \mid t \in \mathrm{R}\} —$$

прямою лінією, що проходить через точку $\vec{x}^0 \in \mathrm{R}^m$ ***у напрямку*** $\vec{a}$. Зауважимо, що

$$\rho(\vec{x}^0 + t\vec{a}, \vec{x}_0) = |t| \cdot \|\vec{a}\|.$$

Вправа

1. У просторі R^2 зобразити пряму, що проходить через точку $\vec{x}^0 = (2, 1)$ у напрямку $\vec{a} = (1, 3)$.

Означення 1. Нехай $f: A \to \mathrm{R}$, $\vec{x}^0$ — внутрішня точка множини A і $\vec{a}$ — напрямок.

Похідною функції f в точці $\vec{x}^0$ ***за напрямком*** $\vec{a}$ називається границя

$$f'_{\vec{a}}(\vec{x}^0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{a}) - f(\vec{x}^0)}{t},$$

якщо вона існує. Зручно покласти $f'_{\vec{0}}(\vec{x}) := 0$.

Означення 2. Нехай A — відкрита множина в R^m. Якщо для будь-якого $\vec{x} \in A$ існує $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$, то кажемо, що похідна $f'_{\vec{a}}$ за напрямком $\vec{a}$ визначена на множині A; $f'_{\vec{a}}: A \to \mathrm{R}$.

Далі припускаємо, що A — відкрита множина.

Вправи

2. Для функції $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2$, точки $(x_1^0, x_2^0) = (2, 1)$ і напрямку $\vec{a} = (1, 1)$ обчислити $f'_{\vec{a}}(x_1^0, x_2^0)$.

3. Нехай $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1^2 - x_2^2|}$, $(x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2$ і $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$. Визначити ті напрямки $\vec{a}$, для яких існує $f'_{\vec{a}}(0, 0)$, і обчислити її значення.

Зауваження. Припустимо, що виконані умови означення 2. Оскільки точка $\vec{x}^0$ внутрішня для множини A, то існує $\delta > 0$ таке, що

$$\forall \tau, |\tau| < \delta: \vec{x}^0 + \tau\vec{a} \in A.$$

Визначимо функцію φ: $(-\delta, \delta) \to \mathbf{R}$ таким чином:

$$\varphi(\tau) = f(\vec{x}^0 + \tau\vec{a}) = f(x_1^0 + \tau a_1, \ldots, x_m^0 + \tau a_m), \ \tau \in (-\delta, \delta),$$

де $\vec{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$, $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m)$. Для $\tau \in (-\delta, \delta)$ маємо

$$\varphi'(\tau) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + (\tau + t)\vec{a}) - f(\vec{x}^0 + \tau\vec{a})}{t} = f'_{\vec{a}}(\vec{x}^0 + \tau\vec{a}).$$

Отже,

$$\varphi'(\tau) = f'_{\vec{a}}(\vec{x}^0 + \tau\vec{a}), \ \tau \in (-\delta, \delta), \tag{1}$$

зокрема

$$\varphi'(0) = f'_{\vec{a}}(\vec{x}^0).$$

Формула (1) часто використовується у подальшому.

1.2. ВЛАСТИВОСТІ ПОХІДНИХ ЗА НАПРЯМКОМ. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

ТЕОРЕМА 1. Нехай f: $A \to \mathbf{R}$, g: $A \to \mathbf{R}$, $\vec{x} \in A$, $\vec{a}$ — напрямок. Припустимо, що існують похідні $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$ і $g'_{\vec{a}}(\vec{x})$.

Тоді існують наведені нижче похідні за напрямком $\vec{a}$ і мають місце рівності:

1) $\forall c \in \mathbf{R}$: $(cf)'_{\vec{a}}(\vec{x}) = cf'_{\vec{a}}(\vec{x})$;

2) $(f + g)'_{\vec{a}}(\vec{x}) = f'_{\vec{a}}(\vec{x}) + g'_{\vec{a}}(\vec{x})$;

3) $(f \cdot g)'_{\vec{a}}(\vec{x}) = f'_{\vec{a}}(\vec{x})\, g(\vec{x}) + f(\vec{x})\, g'_{\vec{a}}(\vec{x})$;

4) Якщо додатково $g(\vec{x}) \neq 0$, то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_{\vec{a}}(\vec{x}) = g^{-2}(\vec{x})\,(f'_{\vec{a}}(\vec{x})\, g(\vec{x}) - f(\vec{x})\, g'_{\vec{a}}(\vec{x})).$$

⌈ Перейти до функції φ, визначеної у зауваженні, і використати властивості похідних дійсних функцій, визначених на відрізку. ⌋

ТЕОРЕМА 2 (про середнє значення). Припустимо, що для деяких $t > 0$ точки $\vec{x}$ і напрямку $\vec{a}$:

$$\forall \tau,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\colon\ \vec{x} + \tau\vec{a} \in A \ \text{ і існує } f'_{\vec{a}}(\vec{x} + \tau\vec{a}).$$

Тоді

$$\exists\theta \in (0, 1): f(\vec{x} + t\vec{a}) - f(\vec{x}) = f'_{\vec{a}}(\vec{x} + \theta t\vec{a}) \cdot t.$$

$\ulcorner$ Розглянемо функцію $\varphi(\tau) = f(\vec{x} + \tau\vec{a})$, $\tau \in [0, t]$, для якої згідно із припущенням існує

$$\varphi'(\tau) = f'_{\vec{a}}(\vec{x} + \tau\vec{a}), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t.$$

Застосуємо теорему Лагранжа до функції φ на відрізку $[0, t]$. Отримаємо

$$\exists\theta \in (0, 1): \varphi(t) - \varphi(0) = \varphi'(\theta t) \cdot t. \qquad \lrcorner$$

Означення. Частинною похідною за k-ю змінною (або за змінною x_k) називається похідна $f'_{\vec{e}_k}$, де $\vec{e}_k := (0, .., 0, \underset{k}{1}, 0, ... 0)$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Частинна похідна функції f в точці $\vec{x}$ за k-ю змінною позначається одним із символів:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}, \; f'_k(\vec{x}), \; D_k f(\vec{x}).$$

Таким чином,

$$f'_k(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + t, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_m)}{t},$$

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m).$$

Використовуючи теорему 1, отримаємо правила обчислення частинних похідних:

1) $\forall c \in \mathbf{R}$: $\dfrac{\partial(cf)}{\partial x_k} = c\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$;

2) $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + \dfrac{\partial g}{\partial x_k}$;

3) $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k} g + f\dfrac{\partial g}{\partial x_k}$;

4) Якщо $g(\vec{x}) \neq 0$, то

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_k} = g^{-2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} g - f\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)$$

в точці $\vec{x}$.

1.3. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ПОХІДНІ ЗА НАПРЯМКОМ

ТЕОРЕМА 1. Нехай точка $\vec{x}$ і напрямок $\vec{a}$ фіксовані. Якщо існує $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$, то для будь-якого $c \in \mathbf{R}$ існує $f'_{c\vec{a}}(\vec{x})$ і

$$f'_{c\vec{a}}(\vec{x}) = cf'_{\vec{a}}(\vec{x}). \tag{2}$$

⌈ Доведення випливає із означення. ⌋

ТЕОРЕМА 2. Нехай $\vec{x} \in A$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — два напрямки. Припустимо, що

1) $\exists \delta > 0\ \forall z \in B(\vec{x}, \delta)$ існує $f'_{\vec{a}}(\vec{z})$;

2) $f'_{\vec{a}}$ неперервна в точці $\vec{x}$;

3) існує $f'_{\vec{b}}(\vec{x})$.

Тоді існує похідна за напрямком $\vec{a} + \vec{b}$ в точці $\vec{x}$ і

$$f'_{\vec{a}+\vec{b}}(\vec{x}) = f'_{\vec{a}}(\vec{x}) + f'_{\vec{b}}(\vec{x}).$$

⌈ Використовуючи умови 1) і теорему 2 п. 1. 2, маємо

$$f(\vec{x} + t(\vec{a} + \vec{b})) - f(\vec{x}) =$$

$$= f((\vec{x} + t\vec{b}) + t\vec{a}) - f(\vec{x} + t\vec{b}) + f(\vec{x} + t\vec{b}) - f(\vec{x}) =$$

$$= f'_{\vec{a}}((\vec{x} + t\vec{b}) + \theta t\vec{a})\, t + f(\vec{x} + t\vec{b}) - f(\vec{x}), \quad \theta \in (0, 1).$$

Поділивши отриману рівність на t, можна у правій частині перейти до границі при $t \to 0$, враховуючи умови 2) і 3). ⌋

Наслідок. Нехай A — відкрита множина, $\vec{x}^0 \in A$, $f: A \to \mathbf{R}$ і $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant m$ $\forall \vec{x} \in A$ існує похідна $D_i f(\vec{x})$ і функція $D_i f$ неперервна в точці $\vec{x}^0$.

Тоді для будь-якого напрямку $\vec{a}$ існує $f'_{\vec{a}}(\vec{x}^0)$ і

$$f'_{\vec{a}}(\vec{x}^0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i} a_i; \qquad \vec{a} = (a_1, \ldots, a_m). \tag{3}$$

Означення. Похідною функції f ***в точці*** x називається ***вектор-градієнт функції*** f у точці $\vec{x}$

$$\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_m}\right),$$

який позначається одним із символів

$$f'(\vec{x}), \quad \operatorname{grad} f(\vec{x}), \quad \nabla f(\vec{x}).$$

Для двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ із $\mathbf{R}^m$ їх скалярний добуток $(\vec{a}, \vec{b})$ згідно з нерівністю Коші задовольняє нерівності

$$|(\vec{a}, \vec{b})| \leqslant \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|.$$

Якщо $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \neq 0$, то величина $(\vec{a}, \vec{b})(\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|)^{-1}$ називається ***косинусом кута між векторами*** $\vec{a}$, $\vec{b}$ і позначається символом $\cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$. Формулу (3) можна записати у вигляді

$$f'_{\vec{a}}(\vec{x}) = \|\operatorname{grad} f(\vec{x})\| \cdot \|\vec{a}\| \cos \widehat{(\vec{a}, \operatorname{grad} f(\vec{x}))}.$$

Зауваження. Нехай точка $\vec{x}$ фіксована. Розглянемо різні напрямки $\vec{a}$ одиничної довжини, тобто такі, що $\|\vec{a}\| = 1$. Тоді

$$f'_{\vec{a}}(\vec{x}) = \|\operatorname{grad} f(\vec{x})\| \cos \widehat{(\vec{a}, \operatorname{grad} f(\vec{x}))}.$$

Тому напрямок градієнта функції f у точці $\vec{x}$ є напрямком, для якого похідна по напрямку в точці $\vec{x}$ максимальна.

Вправи

4. Для функцій $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$, $g(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$; $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\{a_i, a_{ij}\} \subset \mathbf{R}$ знайти похідні f', g'.

5. Довести формули:

1) $\nabla(cf) = c\nabla f$, $c \in \mathbf{R}$; 2) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;

3) $\nabla(f \cdot g) = g\nabla f + f\nabla g$;

4) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{1}{g^2}(g\nabla f - f\nabla g)$, $g \neq 0$,

припускаючи, що існують похідні у правих частинах рівностей.

6. Нехай $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2}{x_2}$, якщо $x_2 \neq 0$, і $f(x_1, 0) = 0$. Знайти $f'(0, 0)$. Переконатися у тому, що функція f не є неперервною в точці $(0, 0)$.

7. Довести, що:

1) $\vec{a} \to \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{a}\| \to 0$;

2) $\vec{x} \to \vec{x}^0 \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{x}^0 \to \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{x} - \vec{x}^0\| \to 0$.

§ 2. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ ФУНКЦІЇ

2.1. ПОНЯТТЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ

Означення 1. Функція L: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ називається ***лінійною,*** якщо

1) $\forall \alpha \in \mathbf{R}\ \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^m$: $L(\alpha\vec{x}) = \alpha L(\vec{x})$;

2) $\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \mathbf{R}^m$: $L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$.

Легко довести, що для функції L існують числа $L_1, L_2, \ldots$ $\ldots, L_m$ з $\mathbf{R}$ такі, що

$$\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_m): L(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} L_i x_i.$$

Вправа

1. Визначити лінійні функції L такі, що

$$L(\vec{x}) = o(\|\vec{x}\|), \quad \vec{x} \to \vec{0}.$$

Означення 2. Нехай $A \subset \mathbf{R}^m$, $\vec{x}$ — внутрішня точка множини A і f: $A \to \mathbf{R}$. Функція f називається ***диференційовною в точці*** $\vec{x}$, якщо існує лінійна функція

$$L(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{m} L_i a_i, \quad \vec{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m; \ \{L_i\} \subset \mathbf{R}$$

така, що

$$f(\vec{x} + \vec{a}) - f(\vec{x}) - L(\vec{a}) = o(\|\vec{a}\|), \ \|\vec{a}\| \to 0, \tag{1}$$

або, що рівносильне (1),

$$\lim_{\vec{a} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x} + \vec{a}) - f(\vec{x}) - L(\vec{a})}{\|\vec{a}\|} = 0.$$

Функція L називається ***диференціалом*** (інколи ***повним диференціалом***) функції f у точці $\vec{x}$ і позначається символом

$$df(\vec{x}) = df(\vec{x}; \vec{a}) = L(\vec{a})$$

або

$$df(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} L_i dx_i$$

із заміною a_i на dx_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Диференціал визначається єдиним чином (див. вправу 1).

Зауваження. Функція L (визначаючі її числа $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_m$) залежить, взагалі кажучи, від $\vec{x}$.

ТЕОРЕМА 1. Нехай f — диференційовна в точці x функція. Тоді для будь-якого напрямку $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ існує $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$, зокрема існують $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. При цьому

$$\forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant m:\ L_k = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k};\ f'_{\vec{a}}(\vec{x}) = L(\vec{a}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} a_k.$$

|— Нехай напрямок $\vec{a} \neq 0$ заданий. Зауважимо, що $L(\tau\vec{a}) = \tau L(\vec{a})$ для $\tau \in \mathbf{R}$ і що $\tau\vec{a} \to \vec{0}$, якщо $\tau \to 0$. Оскільки f диференційовна в точці $\vec{x}$, то

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{f(\vec{x} + \tau\vec{a}) - f(\vec{x}) - \tau L(\vec{a})}{|\tau| \cdot \|\vec{a}\|} = 0.$$

Звідси випливає, що $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$ існує і

$$f'_{\vec{a}}(\vec{x}) = L(\vec{a}).$$

Далі, поклавши $\vec{a} = \vec{e}_k$, отримаємо $L_k = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}$, $1 \leqslant k \leqslant m$. —|

ТЕОРЕМА 2. Нехай f диференційовна в точці $\vec{x}^0$ функція. Тоді f неперервна в точці $\vec{x}^0$.

|— Дійсно,

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L(\vec{x} - \vec{x}^0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|), \quad \vec{x} - \vec{x}^0 \to \vec{0}.$$

Крім того, згідно з нерівністю Коші

$$|L(\vec{x} - \vec{x}^0)| \leqslant \|L\| \cdot \|\vec{x} - \vec{x}^0\|,$$

де

$$\|L\| := \left(\sum_{i=1}^{m} L_i^2\right)^{1/2}.$$

Тому

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)| \leqslant \|L\| \cdot \|\vec{x} - \vec{x}^0\| + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|), \quad \vec{x} \to \vec{x}^0.$$

Звідси

$$f(\vec{x}) \to f(\vec{x}^0), \quad \vec{x} \to \vec{x}^0.$$ —|

Вправи

2. Нехай $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 \cdot x_2|}$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Показати, що $f \in C(\mathbf{R}^2)$. Знайти $f_1'(0, 0)$, $f_2'(0, 0)$. Довести, що f не є диференційовною в точці $(0, 0)$.

3. Нехай

$$f(\vec{x}) = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{\alpha/2}, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m, \quad \alpha \geqslant 0.$$

Для яких значень α функція f диференційовна в точці $(0, \ldots, 0)$?

2.2. ДОСТАТНІ УМОВИ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ

Нехай $f\colon A \to \mathbf{R}$ і $\vec{x}$ — фіксована точка з A.

ТЕОРЕМА. Припустимо, що:

1) $\exists \varepsilon > 0\ \forall z \in B(\vec{x}, \varepsilon)\ \forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant m$, існує $\dfrac{\partial f(\vec{z})}{\partial x_k}$;

2) $\forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant m$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ неперервна в точці $\vec{x}$.

Тоді функція f диференційовна в точці $\vec{x}$.

$\vdash$ Для будь-якого $\vec{a} \in \mathbf{R}^m$, для якого $\|\vec{a}\| < \varepsilon$, маємо

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{a}) - f(\vec{x}) = \\ = (f(x_1 + a_1, \ldots, x_m + a_m) - f(x_1, x_2 + a_2, \ldots, x_m + a_m)) + \\ + (f(x_1, x_2 + a_2, \ldots, x_m + a_m) - f(x_1, x_2, x_3 + a_3, \ldots \\ \ldots, x_m + a_m)) + \ldots + (f(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m + a_m) - \\ - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)), \end{aligned} \tag{1}$$

де $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m)$.

Застосовуючи до кожної різниці в правій частині (1) теорему 2 п. 1.2, отримаємо

$$f(\vec{x} + \vec{a}) - f(\vec{x}) - L(\vec{a}) = \sum_{k=1}^{m} \delta_k a_k,$$

де

$$L(\vec{a}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} a_k, \quad \delta_k! = \frac{\partial f(\vec{x} + \vec{u}^{(k)})}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k},$$

$\vec{x}+\vec{u}^{(k)}:=(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k+\theta_k a_k, x_{k+1}+a_{k+1}, \ldots, x_m+a_m)$, $\theta_k \in (0, 1)$ для $k=1, 2, \ldots, m$.

Зауважимо тепер, що $\|\vec{u}^{(k)}\| \leqslant \|\vec{a}\|$. Тому $\delta_k \to 0$, $\vec{a} \to \vec{0}$; $1 \leqslant k \leqslant m$.

Таким чином,

$$|f(\vec{x}+\vec{a})-f(\vec{x})-L(\vec{a})| \leqslant \delta \|\vec{a}\|,$$

де

$$\delta:=\left(\sum_{k=1}^{m} \delta_k^2\right)^{1/2} \to 0, \quad \vec{a} \to \vec{0}. \qquad \lrcorner$$

Наслідок. Нехай A — відкрита множина, $f: A \to \mathbf{R}$. Припустимо, що

$$\forall k, \quad 1 \leqslant k \leqslant m: \frac{\partial f}{\partial x_k} \in \mathbf{C}(A).$$

Тоді: а) f диференційовна в кожній точці множини A; б) $f \in \mathbf{C}(A)$.

Вправи

4. Нехай функція $f: B(\vec{u}, r) \to \mathbf{R}$ задовольняє умовам:

1) $\forall \vec{z} \in B(\vec{u}, r)$ f диференційовна в точці $\vec{z}$;

2) $\exists c \in \mathbf{R}$ $\forall \vec{z} \in B(\vec{u}, r)$: $\|\nabla f(\vec{z})\| \leqslant c$.

Тоді

$$\forall \{\vec{z}', \vec{z}''\} \subset B(\vec{u}, r): |f(\vec{z}')-f(\vec{z}'')| \leqslant c\|\vec{z}'-\vec{z}''\|.$$

5. Нехай функція $f: B(\vec{u}, r) \to \mathbf{R}$ задовольняє умовам:

1) $\forall \vec{z} \in B(\vec{u}, r)$ f диференційовна в точці $\vec{z}$;

2) $\forall \vec{z} \in B(\vec{u}, r)$ $\forall k$, $1 \leqslant k \leqslant m$: $\dfrac{\partial f(\vec{z})}{\partial x_k}=0$.

Довести, що

$$\exists c \in \mathbf{R} \ \forall \vec{z} \in B(\vec{u}, r): f(\vec{z})=c.$$

Визначення класу функцій $\mathbf{C}^{(1)}(A)$. Нехай A — відкрита множина і розглядаються функції $f: A \to \mathbf{R}$.

$$f \in \mathbf{C}^{(1)}(A) \Leftrightarrow \forall k, \ 1 \leqslant k \leqslant m: \frac{\partial f}{\partial x_k} \in \mathbf{C}(A).$$

Зауважимо, що $\mathbf{C}^{(1)}(A) \subset \mathbf{C}(A)$.

2.3. ВЛАСТИВОСТІ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

ТЕОРЕМА 1. Нехай $f\colon A \to \mathbf{R}$, $g\colon A \to \mathbf{R}$ — функції, диференційовні в точці $\vec{x} \in A$.

Тоді функції $c f, c \in \mathbf{R}$; $f + g$; $f \cdot g$; $\frac{f}{g}$, якщо $g(\vec{x}) \neq 0$, диференційовні в точці $\vec{x}$.

|— Вказівка. Використати вираз (1) п. 2.1 для функцій f і g. —|

ТЕОРЕМА 2. Нехай функція $f\colon A \to \mathbf{R}$ диференційовна в точці $\vec{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in A$. Припустимо, що функція $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_m)\colon (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to A$ така, що $\forall k$, $1 \leqslant k \leqslant m$: $g_k(t_0) = x_k^0$, існує $g_k'(t_0)$; $t_0 \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ фіксоване.

Тоді складна функція

$$h(t) := f(g_1(t), \ldots, g_m(t)), \quad t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

диференційовна в точці t_0, причому

$$h'(t_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_k} g_k'(t_0).$$

|— Оскільки f диференційовна в точці $\vec{x}^0$, то

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_k} (x_k - x_k^0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|),$$

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \to \vec{x}^0.$$

Із цього співвідношення, поклавши $\vec{x} = \vec{g}(t_0 + \Delta t)$, $\vec{x}^0 = \vec{g}(t_0)$, $\Delta t \neq 0$ і розділивши на Δt, отримаємо

$$\frac{h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)}{\Delta t} = \frac{f(\vec{g}(t_0 + \Delta t)) - f(\vec{g}(t_0))}{\Delta t} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_k} \frac{g_k(t_0 + \Delta t) - g_k(t_0)}{\Delta t} + \frac{o(\|\vec{x} - \vec{x}^0\|)}{\Delta t}, \quad \Delta t \to 0.$$

Зауважимо, що

$$\|\vec{x} - \vec{x}^0\| = O(\Delta t), \quad \Delta t \to 0.$$ —|

Похідні й диференціали, які було введено в § 1, 2, називаються ще відповідно ***похідними*** й ***диференціалами першого порядку.***

§ 3. ПОХІДНІ Й ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

3.1. ПОХІДНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Нехай A — відкрита множина в $(\mathbf{R}^m, \rho)$, а $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — фіксовані напрямки. Припустимо, що $\forall \vec{x} \in A$ існує $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$. Тоді $f'_{\vec{a}}: A \to \mathbf{R}$.

Означення 1. Похідна функції $f'_{\vec{a}}$ у точці $\vec{x} \in A$ за напрямком $\vec{b}$, якщо вона існує, називається ***похідною другого порядку функції*** f у точці $\vec{x}$ за напрямками $\vec{a}$ і $\vec{b}$. *Позначення*:

$$(f'_{\vec{a}})'_{\vec{b}}(\vec{x}) = f''_{\vec{a}\vec{b}}(\vec{x}).$$

Означення 2. Частинними похідними другого порядку функції f в точці $\vec{x}$ називаються похідні

$$f''_{\vec{e}_i \vec{e}_j}(\vec{x}), \quad \vec{e}_i = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m.$$

Позначення:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \, \partial x_j}, \quad f''_{ij}(\vec{x}).$$

Приклад. Нехай $A = \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}$ для $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ і $f(0, 0) = 0$. Похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_2 \partial x_1}$$

існують, але різні.

ТЕОРЕМА. Припустимо, що $f''_{\vec{a}\vec{b}} \in \mathbf{C}(A)$, $f''_{\vec{b}\vec{a}} \in \mathbf{C}(A)$. Тоді

$$f''_{\vec{a}\vec{b}}(\vec{x}) = f''_{\vec{b}\vec{a}}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in A.$$

$\ulcorner$ Нехай $\vec{x} \in A$ — фіксована точка. При всіх досить малих t і s маємо

$$(\vec{x} + s\vec{a}) \in A, \quad (\vec{x} + t\vec{b}) \in A, \quad (\vec{x} + s\vec{a} + t\vec{b}) \in A.$$

Покладемо

$$g(\vec{x}) := f(\vec{x} + s\vec{a}) - f(\vec{x}), \quad h(\vec{x}) := f(\vec{x} + t\vec{b}) - f(\vec{x}).$$

Застосовуючи двічі теорему 2 п. 1.2, отримаємо

$$g(\vec{x} + t\vec{b}) - g(\vec{x}) = tg'_{\vec{b}}(\vec{x} + \theta_1 t\vec{b}) =$$

$$= t(f'_{\vec{b}}(\vec{x} + s\vec{a} + \theta_1 t\vec{b}) - f'_{\vec{b}}(\vec{x} + \theta_1 t\vec{b})) =$$

$$= stf''_{\vec{b}\vec{a}}(\vec{x} + \theta_2 s\vec{a} + \theta_1 t\vec{b}), \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1.$$

Так само

$$h(\vec{x} + s\vec{a}) - h(\vec{x}) = stf''_{\vec{a}\vec{b}}(\vec{x} + \eta_2 t\vec{b} + \eta_1 s\vec{a}), \quad 0 < \eta_1, \eta_2 < 1.$$

Зауважимо, що

$$h(\vec{x} + s\vec{a}) - h(\vec{x}) = g(\vec{x} + t\vec{b}) - g(\vec{x}).$$

Таким чином,

$$f''_{\vec{b}\vec{a}}(\vec{x} + \theta_2 s\vec{a} + \theta_1 t\vec{b}) = f''_{\vec{a}\vec{b}}(\vec{x} + \eta_2 t\vec{b} + \eta_1 s\vec{a}).$$

Отже, враховуючи умови теореми, отримаємо

$$f''_{\vec{b}\vec{a}}(\vec{x}) = f''_{\vec{a}\vec{b}}(\vec{x}). \qquad \dashv$$

Означення 3. Нехай A — відкрита множина.

$$f \in \mathbf{C}^{(2)}(A) \Leftrightarrow \forall i, j, \ 1 \leqslant i, j \leqslant m$$

існує $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ на A і $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbf{C}(A)$.

Зауважимо, що

$$\mathbf{C}^{(2)}(A) \subset \mathbf{C}^{(1)}(A) \subset \mathbf{C}(A).$$

Означення 4. Похідною другого порядку функції f в точці $\vec{x}$ називається матриця

$$f''(\vec{x}) := \left(\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{m}.$$

Зауваження. Нехай $f \in \mathbf{C}^{(2)}(A)$ і $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ — два напрямки. Тоді

$$f''_{\vec{a}\vec{b}}(x) = f''_{\vec{b}\vec{a}}(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} a_i b_j$$

(матриця $f''(\vec{x})$ симетрична). Зокрема,

$$f''_{\vec{a}\vec{a}}(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} a_i a_j.$$

Означення 5. Для функції $f \in C^{(2)}(A)$ ***диференціал другого порядку в точці*** $\vec{x}$ є форма

$$d^2 f(\vec{x}) := \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} a_i a_j, \quad \vec{a} \in R^m$$

або після заміни a_i на dx_i

$$d^2 f(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Треба мати на увазі, що

$$d^2 f(\vec{x}) = d(f'_{\vec{a}}(\vec{x})) = f''_{\vec{a}\vec{a}}(\vec{x}).$$

Вправа

1. Для функції

$$f(\vec{x}) = c_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij} x_i x_j, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m,$$

$$\{c_0, c_i, c_{ij}\} \subset R$$

знайти $f'(\vec{x})$, $f''(\vec{x})$.

3.2. ПОХІДНІ ПОРЯДКУ n

Нехай A — відкрита множина в (R^m, ρ), $\vec{a}(1)$, $\vec{a}(2), \ldots, \vec{a}(n)$ — деякі напрямки. Припустимо, що для будь-якого $\vec{x} \in A$ визначено похідну порядку $n-1$ за напрямками $\vec{a}(1), \ldots, \vec{a}(n-1)$:

$$f^{(n-1)}_{\vec{a}(1),\ldots,\vec{a}(n-1)}(\vec{x}).$$

Похідною порядку n функції f у точці $\vec{x}$ ***за напрямками*** $\vec{a}(1), \ldots, \vec{a}(n)$ називається похідна

$$\left(f^{(n-1)}_{\vec{a}(1)\ldots\vec{a}(n-1)}\right)'_{\vec{a}(n)}(\vec{x}) = f^{(n)}_{\vec{a}(1)\ldots\vec{a}(n)}(\vec{x}),$$

якщо вона існує.

Частинними похідними порядку n функції f у точці $\vec{x}$ називаються похідні

$$f^{(n)}_{\vec{e}_{i(1)},\dots,\vec{e}_{i(n)}}(\vec{x}) =: \frac{\partial^n f(\vec{x})}{\partial x_{i(1)} \dots \partial x_{i(n)}} =: f^{(n)}_{i(1)\dots i(n)}(\vec{x}),$$

$$1 \leqslant i(1),\ i(2), \dots,\ i(n) \leqslant m;\ \vec{e}_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots 0),\ 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Похідною порядку n функції f ***у точці*** $\vec{x}$ називається n-вимірна матриця

$$f^{(n)}(\vec{x}) := \left(\frac{\partial^n f(\vec{x})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}\right)^m_{i_1,\dots,i_n=1}.$$

Клас функцій $\mathbf{C}^{(n)}(A)$ визначається таким чином:

$$f \in \mathbf{C}^{(n)}(A) \Leftrightarrow \forall 1 \leqslant i_1, \dots, i_n \leqslant m:\ f^{(n)}_{i_1 \dots i_n} \in \mathbf{C}(A).$$

Із теореми п. 3.1 випливає, що для функції $f \in \mathbf{C}^{(n)}(A)$ значення похідної

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}}$$

не залежить від порядку $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$.

Зауважимо, що

$$\mathbf{C}^{(n)}(A) \subset \mathbf{C}^{(n-1)}(A) \subset \dots \subset \mathbf{C}^{(1)}(A) \subset \mathbf{C}(A).$$

Зауваження 1. Нехай $f \in \mathbf{C}^{(n)}(A)$ і $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$ — деякий напрямок. Тоді для $\vec{x} \in A$ маємо

$$f^{(n)}_{\vec{a} \dots \vec{a}}(\vec{x}) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{m} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} a_{i_1} \dots a_{i_n}.$$

2. Для похідної $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}$ часто використовують позначення $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$. Так само у спрощеному вигляді використовується позначення похідних вищих порядків.

3. Доцільно ввести позначення

$$f^{(n)}(\vec{x})\vec{a}^n := \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{m} \frac{\partial^n f(\vec{x})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} a_{i_1} \dots a_{i_n}. \qquad (1)$$

3.3. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

ТЕОРЕМА. Нехай функція $f \in C^{(n)}(A)$ і точка $\vec{x} \in A$ та напрямок $\vec{a} \in R^m$ такі, що

$$\forall t,\ t \in [0, 1]:\ \vec{x} + t\vec{a} \in A.$$

Тоді існує число $\theta \in (0,1)$ таке, що

$$f(\vec{x} + \vec{a}) = f(\vec{x}) + f'(\vec{x})\vec{a} + \frac{1}{2} f''(\vec{x})\vec{a}^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\vec{x})\vec{a}^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\vec{x} + \theta\vec{a})\vec{a}^n. \qquad (2)$$

Зауваження 1. За зовнішнім виглядом формула (2) нагадує формулу Тейлора для функцій однієї змінної. Проте слід мати на увазі, що кожен доданок суми (2) являє собою суму (див. позначення (1)).

⌈ Для функції $\varphi(t) = f(\vec{x} + t\vec{a})$, $t \in [0, 1]$ згідно з п. 1.1 маємо для $t \in [0, 1]$

$$\varphi^{(i)}(t) = f^{(i)}_{\vec{a}\ldots\vec{a}}(\vec{x} + t\vec{a}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \qquad (3)$$

Для функції φ відносно точки $t = 0$ запишемо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta), \quad \theta \in (0, 1). \qquad (4)$$

Формулу (2) отримаємо, підставляючи в рівність (4) значення похідних (3). ⌋

Зауваження 2. Із нерівності Коші випливає, що

$$\left| \frac{1}{s!} f^{(s)}(\vec{x})\vec{a}^s \right| \leqslant L(s)\,\|\vec{a}\|^s$$

з деяким числом $L(s)$, залежним від $f^{(s)}(\vec{x})$. Зокрема, $\frac{1}{s!} f^{(s)}(\vec{x})\vec{a}^s = O(\|\vec{a}\|^s)$, $\vec{a} \to \vec{0}$.

3. Таким же чином із нерівності Коші випливає, що при умовах теореми формулу (2) можна записати у вигляді

$$f(\vec{x} + \vec{a}) = f(\vec{x}) + f'(\vec{x})\vec{a} + \frac{1}{2!} f''(\vec{x})\vec{a}^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\vec{x})\vec{a}^n + r_n(\vec{a}), \qquad (5)$$

де $r_n(\vec{a}) = o(\|\vec{a}\|^n)$, $\vec{a} \to \vec{0}$.

Вправи

2. Довести, що для $f \in C^{(s)}(A)$

$$\frac{1}{s!} f^{(s)}(\vec{x})\vec{a}^s = o(\|\vec{a}\|^s), \quad \vec{a} \to \vec{0} \Leftrightarrow \forall 1 \leqslant i_1, \ldots, i_s \leqslant m:$$

$$\frac{\partial^s f(\vec{x})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}} = 0.$$

3. Припустити додатково до умов теореми, що

$$\exists C \in R \ \forall 1 \leqslant i_1, \ldots, i_s \leqslant m \ \forall \vec{x} \in A: \left| f^{(s)}_{i_1 \ldots i_s}(\vec{x}) \right| \leqslant C.$$

Довести нерівність

$$\left| \frac{1}{s!} f^{(s)}(\vec{x})\vec{a}^s \right| \leqslant C \frac{m^{s/2}}{s!} \|\vec{a}\|^s.$$

Зауваження 4. Для відкритої множини A визначимо клас функцій $C^{(\infty)}(A)$:

$$C^{(\infty)}(A) := \bigcap_{k=1}^{\infty} C^{(k)}(A).$$

Таким чином, $f \in C^{(\infty)}(A) \Leftrightarrow \forall k \in N: f \in C^{(k)}(A)$.

Нехай $f \in C^{(\infty)}(A)$, $\vec{x}$ і $\vec{a}$ задовольняють умовам теореми і

$$\exists C \in R \ \forall k \geqslant 1 \ \forall 1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant m \ \forall \vec{x} \in A: \left| \frac{\partial^k f(\vec{x})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right| \leqslant C^k.$$

Тоді має місце розклад у ряд Тейлора

$$f(\vec{x} + \vec{a}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\vec{x})\vec{a}^k,$$

де $f^{(0)} := f$.

Довести це можна за допомогою формули (5), перейшовши до границі при $n \to \infty$ і враховуючи оцінки вправи 3.

Вправа

4. Нехай $f \in C^{(1)}(R^2)$. Довести формулу

$$f(x_1, x_2) = f(0, 0) + \int_0^1 (f'_1(tx_1, tx_2)\, x_1 + f'_2(tx_1, tx_2)\, x_2)\, dt.$$

3.4. ЕКСТРЕМУМ

Нехай $A \subset R^m$, $f: A \to R$.

Означення 1. Якщо існує точка $\vec{x}^0 \in A$, така, що

$$\forall \vec{x} \in A: f(\vec{x}) \leqslant f(\vec{x}^0),$$

то f має в точці $\vec{x}^0$ ***абсолютний максимум.*** Значення

$$f(\vec{x}^0) = \max_{\vec{x} \in A} f(\vec{x})$$

називається ***найбільшим значенням функції*** f ***на*** A.

Таким же чином визначається поняття ***абсолютного мінімуму*** і ***найменшого значення*** f ***на*** A.

Означення 2. Функція f має в точці $\vec{x}^0$ ***локальний максимум,*** якщо $\exists r > 0$:

1) $B(\vec{x}^0, r) \subset A$,

2) $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, r)$: $f(\vec{x}) \leqslant f(\vec{x}^0)$.

Локальний максимум називається ***строгим***, якщо $\exists r > 0$:

1) $B(\vec{x}^0, r) \subset A$,

2) $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, r) \setminus \{\vec{x}^0\}$: $f(\vec{x}) < f(\vec{x}^0)$.

Таким же чином визначається поняття ***локального мінімуму*** і ***строгого локального мінімуму.*** Точки локального максимуму й локального мінімуму називаються також ***точками локального екстремуму.***

ТЕОРЕМА 1 (необхідна умова локального екстремуму). Припустимо, що:

1) $\vec{x}^0$ є точкою локального екстремуму функції f;

2) існує $f'(\vec{x}^0)$ (а тому існують усі часткові похідні першого порядку функції f у точці $\vec{x}^0$). Тоді $f'(\vec{x}^0) = \vec{0}$.

$\ulcorner$ Припустимо, наприклад, що $\vec{x}^0$ — точка локального максимуму. Тоді

$$\exists r > 0\colon\ B(\vec{x}^0, r) \subset A, \quad \forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, r)\colon\ f(\vec{x}) \leqslant f(\vec{x}^0).$$

Нехай k, $1 \leqslant k \leqslant m$ — фіксоване. Функція

$$g_k(t) := f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, \quad x_k^0 + t, \ x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0), \quad t \in (-r, r),$$

має такі властивості: $g_k(t) \leqslant g_k(0)$, $t \in (-r, r)$; існує $g_k' = (0) = f_k'(\vec{x}^0)$.

Таким чином, функція g_k у точці $t = 0$ має локальний максимум і існує $g_k'(0)$. Тоді $g_k'(0) = 0$. Тому $f_k'(\vec{x}^0) = 0$. $\lrcorner$

Означення 3. Точка $\vec{x}^0$, внутрішня точка для множини A, в якій $f'(\vec{x}^0) = \vec{0}$, називається ***критичною.***

Зауваження 1. Критична точка не обов'язково є точкою екстремуму. Наприклад, при $m = 2$ функція $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ в точці $\vec{x}_0 = (0, 0)$ не має екстремуму, але

$$f_1'(0, 0) = f_2'(0, 0) = 0.$$

2. Точки, в яких f' не існує, можуть бути точками екстремуму. Наприклад, для $m = 2$ точка $(0, 0)$ є точкою абсолютного мінімуму для функцій

$$f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|, \quad g(x_1, x_2) = |x_1| + x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

3.5. ДОСТАТНЯ УМОВА СТРОГОГО ЛОКАЛЬНОГО ЕКСТРЕМУМУ

Означення 1. Нехай $D = (d_{ij})_{i,j=1}^m$ — матриця розміру $m \times \times m$ із дійсними елементами.

Матриця D називається ***додатно визначеною,*** якщо

$$\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^m, \ \vec{a} \neq \vec{0}: \ \vec{a}^t D \vec{a} > 0$$

(добуток матриць, $\vec{a}$ — вектор-стовпець, $\vec{a}^t$ — вектор-рядок). ***Матриця*** D називається ***від'ємно визначеною,*** якщо $-D$ є додатно визначена матриця. ***Матриця*** D називається ***невизначеною,*** якщо

$$\exists \vec{a} \in \mathbf{R}^m: \ \vec{a}^t D \vec{a} > 0 \ \text{ і } \ \exists \vec{b} \in \mathbf{R}^m: \ \vec{b}^t D \vec{b} < 0.$$

Треба звернути увагу на те, що в позначеннях (1) п. 3. 2 $a^t D \vec{a} = D\vec{a}^2$.

Вважаємо відомим такий *критерій Сільвестра*[1]. Покладемо

$$d_1 := d_{11}, \quad d_2 := \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ d_m := \det D. \qquad (1)$$

Критерій Сільвестра. Матриця D додатно визначена тоді й тільки тоді, коли $d_k > 0$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

ЛЕМА. Нехай A — відкрита множина:

$$\{d_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant m\} \subset \mathbf{C}(A); \qquad D(\vec{x}) = (d_{ij}(\vec{x}))_{i,j=1}^m, \quad \vec{x} \in A;$$

---

[1] *Сільвестр Джемс Джозеф* (1814—1897) — англійський математик. Найважливіші його роботи пов'язані із алгеброю та теорією чисел. Він ввів кілька загальноприйнятих термінів алгебри: «інваріант», «дискримінант» та ін.

$\vec{x}^0 \in A$. Припустимо, що матриця $D(\vec{x}^0)$ додатно визначена.

Тоді

$\exists r > 0$: $B(\vec{x}^0, r) \subset A$ $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, r)$: $D(\vec{x})$ — додатно визначена.

|⁻ Функції d_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, визначені формулою (1), належать класу $\mathbf{C}(A)$. Згідно з критерієм Сільвестра $D(\vec{x}_0)$ додатно визначена тоді й тільки тоді, коли

$\forall k$, $1 \leqslant k \leqslant m$: $d_k(\vec{x}^0) > 0$. Тому

$$\forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant m\ \ \exists r_k > 0\ \ \forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, r_k):\ d_k(\vec{x}) > 0.$$

Покладемо

$$r := \min\{r_1, r_2, \ldots, r_m\} > 0; \qquad B(\vec{x}_0, r) = \bigcap_{k=1}^{m} B(\vec{x}^0, r_k),$$

Отримаємо

$$\forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant m \quad \forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, r):\ d_k(\vec{x}) > 0.$$

Тому для $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, r)$ матриця $D(\vec{x})$ додатно визначена. _|

ТЕОРЕМА. Нехай A — відкрита множина, $\vec{x}^0 \in A$. Припустимо, що $f \in \mathbf{C}^{(2)}(A)$ і що $\vec{x}^0$ — критична точка f, тобто що $f'(\vec{x}^0) = \vec{0}$.

Тоді:

а) якщо матриця $f''(\vec{x}^0) = \left(\frac{\partial^2 f(\vec{x}^0)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{m}$ додатно визначена, то точка $\vec{x}^0$ є точкою строгого локального мінімуму;

б) якщо матриця $f''(\vec{x}^0)$ від'ємно визначена, то точка $\vec{x}^0$ є точкою строгого локального максимуму;

в) якщо матриця $f''(\vec{x}^0)$ не визначена, то точка $\vec{x}^0$ не є точкою локального екстремуму.

|⁻ а) Нехай $B(\vec{x}^0, \delta)$ — така куля, що $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, \delta)$ матриця $f''(\vec{x})$ додатно визначена. Така куля існує за лемою. Для кожного $\vec{x} \in B(\vec{x}^0, \delta)$ розглянемо формулу Тейлора (див. (1) п. 3.2), поклавши $n = 2$, $\vec{a} = \vec{x} - \vec{x}_0$:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} f''(\vec{x}^0 + \theta(\vec{x} - \vec{x}^0))(\vec{x} - \vec{x}^0)^2,$$

де $\theta = \theta(\vec{x}) \in (0,1)$. Оскільки $\vec{x}^0 + \theta(\vec{x} - \vec{x}^0) \in B(\vec{x}^0, \delta)$, то матриця $f''(\vec{x}^0 + \theta(\vec{x} - x^0))$ додатно визначена і тому

$$\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, \delta), \quad \vec{x} \neq \vec{x}^0 \Rightarrow f(\vec{x}) > f(\vec{x}^0).$$

б) Застосувати доведене твердження а) до функції $-f$.

в) Зауважити, що в цьому випадку для будь-якої кулі $B(\vec{0}, \delta)$

$$\exists \vec{a} \in B(\vec{0}, \delta): f''(\vec{x}^0)\vec{a}^2 > 0$$

і

$$\exists \vec{b} \in B(\vec{0}, \delta): f''(\vec{x}^0)\vec{b}^2 < 0. \quad \lrcorner$$

Наведемо формулювання доведеної теореми для окремого випадку $m = 2$.

Наслідок. Нехай A — відкрита множина у $\mathbf{R}^2$, $\vec{x}^0 \in A$. Припустимо, що $f \in \mathbf{C}^{(2)}(A)$, $f_1'(\vec{x}^0) = 0$, $f_2'(\vec{x}_0) = 0$.

Тоді:

а) якщо $f_{11}''(\vec{x}^0) > 0$ і $f_{11}''(\vec{x}^0) f_{22}''(\vec{x}^0) - (f_{12}''(\vec{x}^0))^2 > 0$, то $\vec{x}^0$ — точка строгого локального мінімуму;

б) якщо $f_{11}''(\vec{x}^0) < 0$ і $f_{11}''(\vec{x}^0) f_{22}''(\vec{x}^0) - (f_{12}''(\vec{x}^0))^2 > 0$, то $\vec{x}^0$ — точка строгого локального максимуму;

в) якщо $f_{11}''(\vec{x}^0) f_{22}''(\vec{x}^0) - (f_{12}''(\vec{x}^0))^2 < 0$, то точка $\vec{x}^0$ не є точкою локального екстремуму.

Вправи

5. Знайти точки екстремуму функції

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2(x_2 - 1)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

6. Знайти найменше й найбільше на $\mathbf{R}^2$ значення функції

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)\, e^{-x_1^2 - x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

7. Нехай $\{\vec{a}^{(1)}, \ldots, \vec{a}^{(n)}\} \subset \mathbf{R}^m$. Знайти найменше в $\mathbf{R}^m$ значення функції

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \|\vec{x} - \vec{a}^{(k)}\|^2, \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^m.$$

8. Нехай A і B — точки на графіках функцій $y = x^2$ і $y = x - 6$, $x \in \mathbf{R}$ відповідно. Для яких A і B віддаль між A і B є найменшою?

9. Довести, що сума, добуток і суперпозиція функцій класу $\mathbf{C}^{(n)}(A)$ належить класу $\mathbf{C}^{(n)}(A)$.

3.6. ОПУКЛІ ФУНКЦІЇ

Означення 1. Множина $A \subset \mathbf{R}^m$ називається ***опуклою,*** якщо

$$\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset A: \{\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \mid \alpha \in [0, 1]\} \subset A.$$

Зауваження 1. Нагадаємо, що множина $\{\alpha\vec{x}+(1-\alpha)\vec{y} \mid \alpha \in [0,1]\}$ є множина точок відрізка прямої з кінцями $\vec{x}$ і $\vec{y}$. Таким чином, множина A є опуклою, якщо для довільних точок $\vec{x}$, $\vec{y}$ з A відрізок, що їх сполучає, також належить A. Вважатимемо, що $\varnothing$ є опуклою.

Вправи

10. Нехай $\{a_1, a_2, \ldots, a_m; b\} \subset \mathbf{R}$. Довести, що множина

$$\{\vec{x} \in \mathbf{R}^m \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m \leqslant b\}$$

є опуклою.

11. Довести, що кулі $B(\vec{x}, r)$ і $\overline{B}(\vec{x}, r)$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^m$, $r > 0$ є опуклими множинами.

12. Довести, що перетин довільної кількості опуклих множин є опуклою множиною.

13. Нехай A є опукла множина, $\vec{x} \in \mathbf{R}^m$ і $\vec{x} + A := \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{y} \in A\}$. Довести, що $\vec{x} + A$ є опуклою множиною.

14. Нехай $A = \{\vec{x} \mid \|\vec{x}\| \leqslant 1\}$. Довести, що для кожного $\vec{y}$ з $\|\vec{y}\| = 1$ півпростір $H_y := \{\vec{x} \mid \vec{x}^t\vec{y} \leqslant 1\}$ містить множину A і

$$A = \bigcap_{\vec{y}, \|\vec{y}\|=1} H_y.$$

15. Нехай A — опукла множина, $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\} \subset A$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset [0, +\infty)$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. Довести, що $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\vec{x}_k \in A$.

Зауваження 2. Таким чином, множина A є опуклою тоді й тільки тоді, коли

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \forall \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\} \subset A\ \forall \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset [0, +\infty),\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1:$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\vec{x}_k \in A.$$

16. Нехай A — опукла множина, A^0 — множина всіх внутрішніх точок множини A і $\overline{A}$ — замикання A. Довести, що множини A^0 і $\overline{A}$ опуклі.

17. Нехай A — замкнена підмножина $\mathbf{R}^m$ така, що множини A і $\mathbf{R}^m \setminus A$ опуклі. Довести, що множина A є півпростір.

Означення 2. Нехай $A \subset \mathbf{R}^m$ — опукла і відкрита множина. ***Функція*** $f\colon A \to \mathbf{R}$ називається ***опуклою (вниз) на множині*** A, якщо

$$\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset A\ \forall \alpha \in [0,1]:$$

$$f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) \leqslant \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{y}).$$

Функція називається ***строго опуклою на множині*** A, якщо

$$\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset A, \ \vec{x} \neq \vec{y} \ \forall \alpha \in (0,1):$$

$$f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) < \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{y}).$$

ЛЕМА. Функція f опукла (строго опукла) на множині A тоді й тільки тоді, коли для довільних $\{\vec{a}, \vec{x}\} \subset A$, $\vec{a} \neq \vec{x}$ функція

$$\varphi(t) := f(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a})), \quad t \in [0, 1]$$

опукла (строго опукла) на відрізку $[0, 1]$.

⌈Необхідність. Нехай функція f є опуклою на множині A. Для $\{t_1, t_2\} \subset [0, 1]$ і $\alpha \in [0, 1]$ маємо

$$\varphi(\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2) = f(\vec{a} + (\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2)(\vec{x} - \vec{a})) =$$

$$= f(\alpha(\vec{a} + t_1(\vec{x} - \vec{a})) + (1-\alpha)(\vec{a} + t_2(\vec{x} - \vec{a}))) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha f(\vec{a} + t_1(\vec{x} - \vec{a})) + (1-\alpha) f(\vec{a} + t_2(\vec{x} - \vec{a})) =$$

$$= \alpha\varphi(t_1) + (1-\alpha)\varphi(t_2).$$

Достатність. Розглянемо довільні точки $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset A$ і $\alpha \in [0, 1]$. Припустимо, що функція

$$\varphi(t) := f(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})), \quad t \in [0, 1]$$

опукла на $[0,1]$. Тоді

$$\varphi(1-\alpha) = \varphi(\alpha \cdot 0 + (1-\alpha) \cdot 1) \leqslant \alpha\varphi(0) + (1-\alpha)\varphi(1).$$

Звідси

$$f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) \leqslant \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{y}).$$ ⌋

ТЕОРЕМА. Нехай A — відкрита опукла множина, функція $f \in C^2(A)$ і друга похідна f'' додатно визначена на множині A. Тоді функція f строго опукла вниз на множині A.

⌈За лемою досить встановити, що для довільних $\{\vec{a}, \vec{x}\} \subset A$, $\vec{a} \neq \vec{x}$ функція

$$\varphi(t) = f(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a})), \quad t \in [0, 1]$$

є строго опуклою вниз на $[0, 1]$. Але

$$\varphi''(t) = f''(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a}))(\vec{x} - \vec{a})^2$$

і тому $\varphi''(t) > 0$, $t \in [0, 1]$. ⌋

Зауваження 3. Приклад функції

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

показує, що обернене до теореми твердження не є вірним (справедливо тільки що $f'' \geqslant 0$ на A).

Вправи

18. Нехай $A \neq \varnothing$ є опукла множина і

$$f(\vec{x}) := \inf_{\vec{y} \in A} \|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^m.$$

Довести, що функція f є опуклою на $\mathbf{R}^m$.

19. Довести, що строго опукла на множині A функція може мати не більше одного мінімуму.

20. Нехай $f: A \to \mathbf{R}$ є опукла на множині A функція. Довести, що для довільного $c \in \mathbf{R}$ множина

$$\{\vec{x} \in A \mid f(\vec{x}) < c\}$$

є опуклою і відкритою.

21*. Функція f опукла на множині A. Довести, що $f \in \mathbf{C}(A)$.

22. Функції f і g опуклі на множині A і число $c > 0$. Довести, що функції

$$cf; \quad f + g; \qquad \max(f(\vec{x}), g(\vec{x})), \quad \vec{x} \in A$$

опуклі на A.

23. Нехай A — відкрита і опукла множина і $f \in \mathbf{C}^2(A)$. Довести, що функція f опукла на множині A тоді й тільки тоді, коли f'' невід'ємно визначена на A.

Глава 12 ВЕКТОРНІ ФУНКЦІЇ ВІД КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

§ 1. НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

1.1. ЛІНІЙНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

У цій главі розглядається ряд основних понять диференціального числення функцій, або відображень (перетворень), одного скінченновимірного простору в інший. Нехай m і n — фіксовані натуральні числа. Простори $\mathbf{R}^m$ і $\mathbf{R}^n$ будемо розглядати як лінійні метричні простори із звичайною віддаллю, а елементи цих просторів — як вектори-стовпці. Звичайну віддаль в просторах $\mathbf{R}^m$ і $\mathbf{R}^n$ будемо іноді позначати ρ_m і ρ_n відповідно. Множення матриць на число та їх додавання здійснюються звичайним чином. Нехай $A \subset \mathbf{R}^m$ і відображення

$$\vec{f}: A \to \mathbf{R}^n.$$

Задати відображення $\vec{f}$ означає для кожного вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)^t \in A$ поставити у відповідність вектор

$$\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}))^t \in \mathbf{R}^n.$$

Таким чином, визначення відображення $\vec{f}$ на A рівносильно визначенню впорядкованого набору із n дійсних функцій $f_1, f_2, \ldots, f_n$ на A, f_i є i-та компонента відображення $\vec{f}$.

Приклад 1 (постійне відображення). Нехай $A = \mathbf{R}^m$ і $\vec{y}^0 \in \mathbf{R}^n$ — фіксований елемент, а $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}^0$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^m$, $\vec{f}$ — ***постійне відображення.***

Приклад 2 (лінійне відображення). Відображення $\vec{f}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ називається лінійним, якщо:

1) $\forall c \in \mathbf{R}\ \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^m$: $\vec{f}(c\vec{x}) = c\vec{f}(\vec{x})$;

2) $\forall \{\vec{u}, \vec{v}\} \subset \mathbf{R}^m$: $\vec{f}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v})$.

Легко перевірити (доведення є в курсі лінійної алгебри), що відображення $\vec{f}$ лінійно тоді й тільки тоді, коли існує матриця $D = (d_{ij})_{i=1,\,j=1}^{n\,m}$ розміру $n \times m$ із дійсними елементами $\{d_{ij}\}$ така, що

$$\vec{f}(\vec{x}) = D\vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^m,$$

тобто коли для будь-якого $x = (x_1, \ldots, x_m)^t \in \mathbf{R}^m$ i-та компонента f_i відображення $\vec{f}$ задається рівністю

$$f_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{m} d_{ij} x_j.$$

Нехай $\vec{f}$: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ і $\vec{g}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ — лінійні відображення з матрицями $D(\vec{f})$ і $D(\vec{g})$ відповідно. Тоді їх суперпозиція

$$\vec{h}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})), \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^m$$

є лінійне відображення з матрицею

$$D(\vec{h}) = D(\vec{g}) \cdot D(\vec{f}).$$

У випадку, коли $\vec{f}$: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ — лінійне відображення із такою матрицею D, що $\det D \neq 0$, відображення $\vec{f}$ є взаємно однозначним, а обернене відображення $\vec{f}^{-1}$ — лінійним із матрицею D^{-1}.

Зауваження. Для матриці $D = (d_{ij})_{i=1, j=1}^{n \quad m}$ визначимо норму

$$\| D \| := \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Згідно з нерівністю Коші для лінійного відображення f з матрицею D маємо

$$\| \vec{f}(\vec{x}) \| \leqslant \| D \| \cdot \| \vec{x} \|, \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^m.$$

Зауважимо, що $\| \vec{f} \|$ є нормою $\vec{f}$ в $\mathbf{R}^n$, а $\| \vec{x} \|$ — нормою $\vec{x}$ в $\mathbf{R}^m$. Далі в подібних ситуаціях застереження робитися не буде.

1.2. НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Нехай $A \subset \mathbf{R}^m$ — відкрита множина.

Означення. Нехай $\vec{f}$: $A \to \mathbf{R}^n$, $\vec{x}^0 \in A$. ***Відображення*** $\vec{f}$ називається ***неперервним в точці*** $\vec{x}^0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \vec{x}, \quad \rho_m(\vec{x}, \vec{x}^0) < \delta: \quad \rho_n(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x}^0)) < \varepsilon.$$

Відображення $\vec{f}$ ***неперервне на множині*** A, якщо воно неперервне в кожній точці множини A.

Наведене означення є переформулюванням загального означення 2 п. 2.4 глави 10 для випадку, коли $X = \mathbf{R}^m$, $Y = \mathbf{R}^n$ із звичайними віддалями.

Приклади. 1. Постійне відображення неперервне на $\mathbf{R}^m$.

2. Лінійне відображення $\vec{f}(\vec{x}) = D(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^m$, рівномірно неперервне на $\mathbf{R}^m$, оскільки

$$\rho_n(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x}^0)) = \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0)\| = \|D(\vec{x} - \vec{x}^0)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|D\| \, \|\vec{x} - \vec{x}^0\| = \|D\| \, \rho_m(\vec{x}, \vec{x}^0).$$

ТЕОРЕМА. Нехай $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)^t$: $A \to \mathbf{R}^n$. Відображення f неперервне на A тоді й тільки тоді, коли

$$\forall i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n: \ f_i \in \mathbf{C}(A).$$

$\ulcorner$ Оскільки збіжність в $(\mathbf{R}^n, \rho_n)$ рівносильна покоординатній збіжності, то

$$\vec{f} \text{ неперервне в точці } \vec{x}^0 \Leftrightarrow \vec{f}(\vec{x}) \to \vec{f}(\vec{x}^0), \ \vec{x} \to \vec{x}^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n: \ f_i(\vec{x}) \to f_i(\vec{x}^0), \quad \vec{x} \to \vec{x}^0. \qquad \lrcorner$$

Наслідок. Нехай $\vec{f}$: $A \to \mathbf{R}^n$ неперервне на A, D — матриця розміру $k \times n$ із дійсними елементами. Тоді відображення $D\vec{f}$: $A \to \mathbf{R}^k$ неперервне на A.

Вправи

1. Нехай D — матриця розміру $n \times m$, $\vec{y}^0 \in \mathbf{R}^n$ — фіксований вектор. Перетворення $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}^0 + D\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^m$ називається ***афінним***. Довести, що афінне перетворення неперервне на $\mathbf{R}^m$.

2. Нехай $\vec{f}$: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ таке, що $\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \mathbf{R}^m$: $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Перетворення $\vec{f}$ називається ***ізометричним***. Довести, що $\vec{f}$ неперервне на $\mathbf{R}^m$.

Можна довести, що $\vec{f}$ є афінним перетворенням із ортогональною матрицею D.

§ 2. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

2.1. ОЗНАЧЕННЯ

Нехай $A \subset \mathbf{R}^m$ — відкрита множина.

Означення 1. Нехай $\vec{f}$: $A \to \mathbf{R}^n$, $\vec{x} \in A$. Відображення $\vec{f}$ називається ***диференційовним у точці*** $\vec{x}$, якщо існує лі-

нійне відображення R^m в R^n в матрицею $D = (d_{ij})_{i=1,j=1}^{n\ \ m}$ таке, що

$$\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}) - D\vec{a}\| = o(\|\vec{a}\|), \quad \vec{a} \to \vec{0}.$$

Матриця D називається ***похідною відображення*** $\vec{f}$ ***у точці*** $\vec{x}$ і позначається символом $D = \vec{f}'(\vec{x})$.

Вправи

3. Розглянути окремі випадки означення 1: а) $m = n = 1$; б) $n = 1$.

4. Визначити похідну $\vec{f}'$ афінного відображення $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}^\circ + D\vec{x}$, $\vec{x} \in R^m$.

5. Впевнитися, що похідна диференційовної в точці функції визначається єдиним чином.

ТЕОРЕМА. Відображення $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)^t$ є диференційовним у точці $\vec{x}$ тоді й тільки тоді, коли $\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$: f_i диференційовна функція в точці $\vec{x}$. Похідна

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j}\right)_{i=1,j=1}^{n\ \ m}.$$

Диференційовне в точці $\vec{x}$ відображення неперервне в цій точці.

Дійсно,

$\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$: f_i — диференційовна в точці $\vec{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant n:\ f_i(\vec{x}+\vec{a}) - f_i(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j} a_j = r_i \|\vec{a}\|,$$

$$r_i \to 0, \quad \vec{a} = (a_1, \dots, a_m)^t \to \vec{0}.$$

Очевидно $\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$ мають місце нерівності

$$\left| f_i(\vec{x}+\vec{a}) - f_i(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j} a_j \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\vec{f}(\vec{x}+\vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}'(\vec{x})\vec{a}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2\right)^{1/2} \cdot \|\vec{a}\|.$$

Звідси випливають перші два твердження теореми. Враховуючи теорему п. 1. 2 і неперервність компонент в точці $\vec{x}$, маємо неперервність $\vec{f}$ у точці $\vec{x}$.

Вправи

6. Нехай $\vec{f}$ і $\vec{g}$ — диференційовні в точці $\vec{x}$ відображення. Довести, що:

1) $\forall c \in \mathbf{R}$: $(c\vec{f})'(\vec{x}) = c\vec{f}'(\vec{x})$; 2) $(\vec{f}+\vec{g})'(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{x}) + \vec{g}'(\vec{x})$;

3) якщо h — дійсна й диференційовна в точці $\vec{x}$ функція, то

$$(h\vec{f})'(\vec{x}) = h(\vec{x})\vec{f}'(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{x})\, h'(\vec{x})$$

($h'(\vec{x})$ — вектор-рядок).

7. Нехай $\vec{f}$: $A \to \mathbf{R}^n$ — диференційовне в точці $\vec{x}$ відображення. D — матриця розміром $k \times n$ із дійсними сталими коефіцієнтами. Тоді $D\vec{f}$: $A \to \mathbf{R}^k$. Довести, що $(D\vec{f})'(\vec{x}) = D\vec{f}'(\vec{x})$.

Означення 2. Нехай $\vec{f}$: $A \to \mathbf{R}^n$ — диференційовна у точці $\vec{x}$ функція. Матриця

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j}\right)_{i=1,j=1}^{n \quad m}$$

називається також ***матрицею Якобі***[1]. Якщо $m = n$, то визначник

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(\vec{x}) := \det \vec{f}'(\vec{x})$$

називається ***якобіаном***. Точка $\vec{x}$, де $\det \vec{f}'(\vec{x}) = 0$, інколи називається ***точкою виродження.***

Означення 3. Нехай $A \subset \mathbf{R}^m$ — відкрита множина. Розглянемо функції $\vec{f}$: $A \to \mathbf{R}^n$ і $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

$$\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)^t \in \mathbf{C}^{(k)}(A, \mathbf{R}^n) \Leftrightarrow \forall i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\colon f_i \in \mathbf{C}^{(k)}(A).$$

Вправи

8. Нехай при $m = n = 2$, $A = \{(r, \varphi) \mid r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ і $\vec{f}(r, \varphi) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)^t$. Довести, що $\det \vec{f}' = r$.

9. Нехай при $m = n = 3$, $A = \{(r, \varphi, z) \mid r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ z \in \mathbf{R}\}$ і $\vec{f}(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)^t$. Довести, що $\det \vec{f}' = r$.

10. Нехай при $m = n = 3$, $A = \{(r, \theta, \varphi) \mid r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta < \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$, $\vec{f}(r, \theta, \varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)^t$. Довести, що $\det \vec{f}' = r^2 \sin\theta$.

---

[1] *Якобі Карл Густав Якоб* (1804—1851) — німецький математик. Творець теорії еліптичних функцій: зробив вагомий внесок у розробку математичних методів механіки.

2.2. ВЛАСТИВОСТІ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

ТЕОРЕМА 1 (правило диференціювання складної функції). Нехай A — відкрита множина в $\mathbf{R}^m$, B — відкрита множина в $\mathbf{R}^n$; $\vec{f}: A \to B$ — функція, диференційовна в точці $\vec{x}^0 \in A$; $\vec{g}: B \to \mathbf{R}^k$ — функція, диференційовна в точці $\vec{y}^0 = \vec{f}(\vec{x}^0)$.

Тоді функція $\vec{h} = \vec{g}(\vec{f}): A \to \mathbf{R}^k$ диференційовна в точці $\vec{x}^0$, і

$$\vec{h}'(\vec{x}^0) = \vec{g}'(\vec{f}(\vec{x}^0)) \cdot \vec{f}'(\vec{x}^0).$$

$\vdash$ Оскільки функція $\vec{f}$ диференційовна в точці $\vec{x}^0$, то

$$\|\vec{f}(\vec{x}^0 + \vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}^0) - \vec{f}'(\vec{x}^0)\vec{a}\| = o(\|\vec{a}\|), \quad \vec{a} \to \vec{0}. \qquad (1)$$

Аналогічно з диференційовності функції $\vec{g}$ в точці $\vec{y}^0$ випливає, що

$$\|\vec{g}(\vec{y}^0 + \vec{b}) - \vec{g}(\vec{y}^0) - \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{b}\| = o(\|\vec{b}\|), \quad \vec{b} \to \vec{0}. \qquad (2)$$

Нехай $\vec{b} = \vec{f}(\vec{x}^0 + \vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}^0)$. Зазначимо, що за теоремою п. 1. 2 $\vec{b} \to \vec{0}$ при $\vec{a} \to \vec{0}$. З рівностей (1) і (2) випливає

$$\|\vec{h}(\vec{x}^0 + \vec{a}) - \vec{h}(\vec{x}^0) - \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\vec{a}\| =$$

$$= \|\vec{g}(\vec{y}^0 + \vec{b}) - \vec{g}(\vec{y}^0) - \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{b} + \vec{g}'(\vec{y}^0)\vec{b} - \vec{g}(\vec{y}^0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\vec{a}\|$$

$$\leqslant o(\|\vec{b}\|) + \|\vec{g}'(\vec{y}^0)\|\, o(\|\vec{a}\|), \ \vec{a} \to \vec{0}. \qquad (3)$$

Крім того,

$$\|\vec{b}\| \leqslant o(\|\vec{a}\|) + \|\vec{f}'(\vec{x}^0)\| \cdot \|\vec{a}\|, \quad \vec{a} \to \vec{0}. \qquad (4)$$

З формул (3) та (4) маємо

$$\|\vec{h}(\vec{x}^0 + \vec{a}) - \vec{h}(\vec{x}^0) - \vec{g}'(\vec{y}_0)\vec{f}'(\vec{x}^0)\vec{a}\| = o(\|\vec{a}\|), \quad \vec{a} \to \vec{0}. \ \dashv$$

Якщо $m = n = k$, то з теореми 1 і правила обчислення визначника добутку матриць отримаємо наступне твердження для якобіанів.

Наслідок. Нехай виконані умови теореми 1 і $m = n = k$. Тоді

$$\frac{\partial(h_1, \ldots, h_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} = \frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(f_1, \ldots, f_m)} \cdot \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)};$$

тут

$$\vec{h} = (h_1, \dots, h_m)^t = (g_1(\vec{f}), \dots, g_m(\vec{f}))^t,$$

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)^t.$$

Вправи

1. При виконанні умов теореми 1 припустимо, що $\{f, g\} \subset C^{(r)}$ для деякого $r \in N$. Довести, що $\vec{h} \in C^{(r)}$.

2. Визначимо $\vec{f}$: $[0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to R^2$ таким чином:

$$\vec{f}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, \ r\sin\varphi)^t, \quad (r, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi].$$

Нехай g: $R^2 \to R$, $g \in C^{(2)}(R^2)$ і $h(r, \varphi) = g(\vec{f}(r, \varphi))$ для $(r, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$. Довести рівність

$$g''_{11} + g''_{22} = h''_{11} + \frac{1}{r^2} h''_{22} + \frac{1}{r} h'_{\varphi}, \quad r > 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Нехай A — відкрита множина в (R^m, ρ), f: $A \to R^n$, $\vec{f} \in C^{(1)}(A, R^n)$ і точки $\vec{x}$ і $\vec{a}$ такі, що $\{\vec{x} + \tau\vec{a} \mid 0 \leqslant \tau \leqslant 1\} \subset A$.

Тоді

$$\|\vec{f}(\vec{x} + \vec{a}) - \vec{f}(\vec{x})\| \leqslant \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} \|\vec{f}'(\vec{x} + \tau\vec{a})\| \cdot \|\vec{a}\|.$$

⌈Для будь-якого фіксованого $\vec{z} \in R^m$ розглянемо дійсну функцію

$$\varphi(\tau) = \vec{z}^t \vec{f}(\vec{x} + \tau\vec{a}), \quad \tau \in [0, 1],$$

для якої

$$\varphi'(\tau) = \vec{z}^t \vec{f}'(\vec{x} + \tau\vec{a})\vec{a}, \quad \varphi' \in C([0, 1]).$$

За теоремою Лагранжа для деякого $\theta \in (0, 1)$ маємо

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| = |\varphi'(\theta)| \leqslant \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} |\varphi'(\tau)|. \qquad (5)$$

Тому

$$|\vec{z}^t(\vec{f}(\vec{x} + \vec{a}) - \vec{f}(\vec{x})| \leqslant \|\vec{z}\| \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} \|\vec{f}'(\vec{x} + \tau\vec{a})\| \cdot \|\vec{a}\|.$$

Якщо $\|\vec{f}(\vec{x} + \vec{a}) - \vec{f}(\vec{x})\| = 0$, то шукана нерівність виконана. Якщо $\|\vec{f}(\vec{x} + \vec{a}) - \vec{f}(\vec{x})\| \neq 0$, то вибравши $\vec{z} = \vec{f}(\vec{x} + \vec{a}) - \vec{f}(\vec{x})$, за формулою (5) після скорочення на $\|\vec{z}\|$ також отримаємо шукану нерівність. ⌋

Вправи

3. Довести, що при умовах теореми 2 має місце нерівність

$$\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{a})-\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}'(\vec{x})\vec{a}\| \leqslant \sup_{0\leqslant\tau\leqslant 1} \|\vec{f}'(\vec{x}+\tau\vec{a})-\vec{f}'(\vec{x})\| \cdot \|\vec{a}\|.$$

4. Нехай $\vec{f}(x)=(\sin x, \cos x)^t$, $x \in [0, 2\pi]$. Довести, що не існує $\theta \in [0, 2\pi]$ такого, що

$$\vec{f}(2\pi)-\vec{f}(0)=\vec{f}'(\theta)(2\pi-0).$$

2.3. ТЕОРЕМИ ПРО НЕЯВНУ І ОБЕРНЕНУ ФУНКЦІЇ

Наступні дві теореми є найбільш важливими і найбільш уживаними твердженнями про диференційовні відображення.

ЛЕМА. Нехай A — відкрита множина в $(\mathbf{R}^m, \rho)$, $\vec{f}: A \to \mathbf{R}^m$, $\vec{f} \in \mathbf{C}^{(1)}(A, \mathbf{R}^m)$, $\vec{x}^0 \in A$ і $\det \vec{f}'(\vec{x}^0) \neq 0$. Тоді $\vec{f}$ є гомеоморфізмом деякої відкритої множини в $\mathbf{R}^m$, яка містить точку $\vec{x}^0$, на деяку відкриту множину в $\mathbf{R}^m$, яка містить точку $\vec{y}^0 = \vec{f}(\vec{x}^0)$.

$\vdash$ I. Нехай довільне число $\alpha \in (0, 1)$ фіксовано. З умов леми випливає, що

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, \varepsilon) \Leftrightarrow \|\vec{x}-\vec{x}^0\| < \varepsilon:$$

$$\|E-\vec{f}'(\vec{x}^0)^{-1}\vec{f}'(\vec{x})\| \leqslant \alpha, \quad E:=(\sigma_{ij})_{i,j=1}^m \tag{1}$$

і

$$\|\vec{f}'(\vec{x}^0)^{-1}(\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{x}^0)-\vec{f}'(\vec{x}^0)(\vec{x}-\vec{x}^0))\| \leqslant \alpha\|\vec{x}-\vec{x}^0\|. \tag{2}$$

II. Покладемо

$$\eta := (1-\alpha)\varepsilon/\|\vec{f}'(\vec{x}^0)^{-1}\|, \quad \eta > 0, \tag{3}$$

а також

$$\forall \vec{y}, \ \|\vec{y}-\vec{y}^0\| = \|\vec{y}-\vec{f}(\vec{x}^0)\| < \eta:$$

$$\vec{g}_{\vec{y}}(\vec{x}) := \vec{x}+\vec{f}'(\vec{x}^0)^{-1}(\vec{y}-\vec{f}(\vec{x})), \quad \vec{x} \in \bar{B}(\vec{x}^0, \varepsilon).$$

Доведемо, що для кожного $\vec{y} \in B(\vec{y}^0, \eta)$ відображення $\vec{g}_{\vec{y}}$ переводить кулю $\bar{B}(\vec{x}^0, \varepsilon)$ в себе. Дійсно, з (2) і (3) маємо

$$\|\vec{g}_{\vec{y}}(\vec{x})-\vec{x}^0\| = \|\vec{x}-\vec{x}^0+\vec{f}'(\vec{x}^0)^{-1}(\vec{y}-\vec{f}(\vec{x}))\| =$$

$$= \|\vec{f}'(\vec{x}^0)^{-1}(\vec{f}'(\vec{x}^0)(\vec{x}-\vec{x}^0)+\vec{f}(\vec{x}^0)-\vec{f}(\vec{x}))+$$

$$+\vec{f}'(\vec{x}^0)^{-1}(\vec{y}-\vec{f}(\vec{x}^0))\| <$$

$$<\alpha\|\vec{x}-\vec{x}^0\|+\|\vec{f}'(\vec{x}^0)^{-1}\|\eta\leqslant(1-\alpha)\varepsilon+\alpha\varepsilon=\varepsilon.$$

Крім того, для кожного $\vec{y}\in B(\vec{y}^0, \eta)$ відображення $\vec{g}_{\vec{y}}$ є відображення стиску, оскільки

$$\forall\{\vec{x}', \vec{x}''\}\subset\bar{B}(\vec{x}^0, \varepsilon):$$

$$\|\vec{g}_{\vec{y}}(\vec{x}')-\vec{g}_{\vec{y}}(\vec{x}'')\|=\|\vec{x}'-\vec{x}''-\vec{f}'(\vec{x}^0)^{-1}(\vec{f}(\vec{x}')-\vec{f}(\vec{x}''))\|\leqslant$$

$$\leqslant\alpha\|\vec{x}'-\vec{x}''\|.$$

III. Таким чином, за теоремою Банаха для кожного $\vec{y}\in$ $\in B(\vec{y}^0, \eta)$

$$\exists!\ \vec{x}\in\bar{B}(\vec{x}_0, \varepsilon):\ \vec{g}_{\vec{y}}(\vec{x})=\vec{x}\Leftrightarrow\vec{f}(\vec{x})=\vec{y}.$$

Тому на відкритій множині

$$\vec{f}^{-1}(B(\vec{y}^0, \eta))\cap B(\vec{x}^0, \varepsilon)$$

функція $\vec{f}$ є взаємно однозначним відображенням і має обернену функцію $\vec{f}^{-1}$.

IV. Перевіримо, що обернена функція неперервна на множині $B(\vec{y}^0, \eta)$. Дійсно, нехай для довільних $\{\vec{y}', \vec{y}''\}\subset$ $\subset B(\vec{y}^0, \eta)$ вектори $\{\vec{x}', \vec{x}''\}\subset B(\vec{x}^0, \varepsilon)\cap\vec{f}^{-1}(B(\vec{y}^0, \eta))$ такі, що $\vec{f}(\vec{x}')=\vec{y}'$, $\vec{f}(\vec{x}'')=\vec{y}''$.

Тоді з урахуванням II

$$\|\vec{x}'-\vec{x}''\|=\|\vec{g}_{\vec{y}'}(\vec{x}')-\vec{g}_{\vec{y}''}(\vec{x}'')\|\leqslant$$

$$\leqslant\|\vec{g}_{\vec{y}'}(\vec{x}')-\vec{g}_{\vec{y}'}(\vec{x}'')\|+\|\vec{g}_{\vec{y}'}(\vec{x}'')-\vec{g}_{\vec{y}''}(\vec{x}'')\|\leqslant$$

$$\leqslant\alpha\|\vec{x}'-\vec{x}''\|+\|\vec{f}'(\vec{x}^0)^{-1}\|\cdot\|\vec{y}'-\vec{y}''\|,$$

звідки випливає нерівність

$$\|\vec{x}'-\vec{x}''\|\leqslant\frac{\|\vec{f}'(\vec{x}^0)^{-1}\|}{1-\alpha}\|\vec{y}'-\vec{y}''\|. \qquad (4)$$

ТЕОРЕМА 1 (про існування оберненої функції). Нехай A — відкрита в $\mathbf{R}^m$ множина, $\vec{x}^0 \in A$, $\vec{f}: A \to \mathbf{R}^m$ і $\vec{f}(\vec{x}^0) = \vec{y}^0$. Припустимо, що:

1) $\vec{f} \in \mathbf{C}^{(1)}(A, \mathbf{R}^m)$;

2) $\det \vec{f}'(\vec{x}^0) \neq 0$.

Тоді існує відкрита в $\mathbf{R}^m$ множина $O(\vec{x}^0) \subset A$, що містить точку $\vec{x}^0$, і куля $B(\vec{y}^0, r)$ такі, що:

а) відображення $\vec{f}: O(\vec{x}^0) \to B(\vec{y}^0, r)$ є гомеоморфізм;

б) обернена до $\vec{f}$ функція $g = \vec{f}^{-1}: B(\vec{y}^0, r) \to O(\vec{x}^0)$ така, що $\vec{g} \in \mathbf{C}^{(1)}(B(\vec{y}^0, r), \mathbf{R}^m)$;

в) $\forall \vec{y} \in B(\vec{y}^0, r)$: $\vec{g}'(\vec{y}) = (\vec{f}'(\vec{g}(\vec{y})))^{-1}$.

I. Твердження а) теореми 1 міститься в лемі.

II. Зауважимо, що при доведенні леми число $\varepsilon > 0$ можна було вважати таким, щоб матриця $\vec{f}'(\vec{x})$ була невиродженою для кожного $\vec{x} \in B(\vec{x}^0, \varepsilon)$. Далі вважатимемо, що таке число $\varepsilon > 0$ фіксовано, і покладемо $r := \eta$ і

$$O(\vec{x}^0) := \vec{f}^{-1}(B(\vec{y}^0, \eta)) \cap B(\vec{x}^0, \varepsilon).$$

Нехай $\vec{g}: B(\vec{y}^0, \eta) \to O(\vec{x}^0)$ є обернена до $\vec{f}$ функція і довільне значення $\vec{y}^1 \in B(\vec{y}^0, \eta)$ фіксовано. Доведемо, що відображення $\vec{g}$ диференційовне в точці $\vec{y}^1$ і справджується рівність в) теореми 1. Покладемо

$$\vec{x}^1 := \vec{g}(\vec{y}^1); \quad \vec{x} := \vec{g}(\vec{y}), \quad \vec{y} \in B(\vec{y}^0, \eta), \tag{5}$$

тоді

$$\vec{f}(\vec{x}^1) = \vec{y}^1; \quad \vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}, \quad \vec{x} \in O(\vec{x}^0). \tag{6}$$

За умовою теореми 1 функція $\vec{f}$ є диференційовною в точці $\vec{x}^1$ і тому

$$\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^1) - \vec{f}'(\vec{x}^1)(\vec{x} - \vec{x}^1) = \|\vec{x} - \vec{x}^1\| \vec{\varepsilon}(\vec{x}), \tag{7}$$

де $\vec{\varepsilon}(\vec{x}) \to \vec{0}$, $\vec{x} \to \vec{x}^1$. Зазначимо, що за лемою

$$\vec{x} \to \vec{x}^1 \Leftrightarrow \vec{y} \to \vec{y}^1.$$

З рівностей (5) — (7) маємо

$$\vec{y} - \vec{y}^1 - \vec{f}'(\vec{x}^1)(\vec{g}(\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}^1)) = \tag{8}$$
$$= \|\vec{g}(\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}^1)\| \cdot \|\vec{\varepsilon}(\vec{g}(\vec{y}))\|, \quad \vec{y} \to \vec{y}^1.$$

Врахуємо тепер для оцінки норми лівої частини (8) нерівність (4)

$$\|\vec{g}(\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}^1) - \vec{f}'(\vec{x}^1)^{-1}(\vec{y} - \vec{y}^1)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\vec{f}'(\vec{x}^1)^{-1}\|^2 (1-\alpha)^{-1} \|\vec{y} - \vec{y}^1\| \cdot \|\vec{\varepsilon}(\vec{g}(\vec{y}))\|, \quad \vec{y} \to \vec{y}^1.$$

Оскільки $\vec{\varepsilon}(\vec{g}(\vec{y})) \to \vec{0}$, $\vec{y} \to \vec{y}^1$, то функція $\vec{g}$ диференційовна в точці $\vec{y}^1$ і має похідну $\vec{f}'(\vec{x}^1)^{-1} = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{y}^1))^{-1}$. ⌋

Перед формулюванням наступної теореми введемо деякі позначення. Далі розглянемо простори $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{R}^n$ і $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n}$ із звичайними віддалями. Їх елементи позначимо відповідно буквами $\vec{x}$, $\vec{y}$, $(\vec{x}, \vec{y})$ (можливо з індексами); таким чином, $(\vec{x}, \vec{y})$ є вектор-стовпець $\begin{pmatrix}\vec{x}\\ \vec{y}\end{pmatrix}$. Матриця $\vec{F}'_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{y})$ визначається як похідна відображення $\vec{F}$ при фіксованому $\vec{y}$. Аналогічно визначається $\vec{F}'_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{y})$.

ТЕОРЕМА 2 (про існування і властивості неявної функції). Нехай G — відкрита множина в $\mathbf{R}^{m+n}$, $(\vec{x}^0, \vec{y}^0) \in G$. Припустимо, що функція $\vec{F}: G \to \mathbf{R}^n$ задовольняє умовам:

1) $\vec{F}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = \vec{0}$;
2) $\vec{F} \in \mathbf{C}^{(1)}(G, \mathbf{R}^n)$;
3) $\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = \det \vec{F}'_{\vec{y}}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) \neq 0$,

де $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_n)^t$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$.

Тоді існує куля $B(\vec{x}^0, r) \subset \mathbf{R}^m$ і єдина функція $\vec{h}$: $B(\vec{x}^0, r) \to \mathbf{R}^n$, $\vec{h} \in \mathbf{C}^{(1)}(B(\vec{x}^0, r), \mathbf{R}^n)$, яка задовольняє умовам:

1) $\vec{h}(\vec{x}^0) = \vec{y}^0$;
2) $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, r)$: $\vec{F}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})) = \vec{0}$;
3) $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}_0, r)$: $\vec{h}'(\vec{x}) = -(\vec{F}'_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})))^{-1} \vec{F}'_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x}))$.

Визначимо відображення $\vec{f}: G \to \mathbf{R}^{m+n}$ таким чином:

$$\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) := \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \in G.$$

Зауважимо, що $\vec{f}(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = (\vec{x}^0, \vec{0})$,

$$\vec{f}'(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} E & O \\ \vec{F}'_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}) & \vec{F}'_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix}; \quad \det \vec{f}' = \det \vec{F}'_{\vec{y}}.$$

Відображення $\vec{f}$ задовольняє всім умовам теореми 1. Тому в деякій кулі $B(\vec{f}(\vec{x}^0, \vec{y}^0), \delta) \subset \mathbf{R}^{m+n}$ існує обернена функція $\vec{g}(\vec{h}_1, \vec{h}_2)$ така, що

$$\vec{g}(\vec{x}^0, \vec{0}) = (\vec{x}^0, \vec{y}^0); \quad \vec{f}(\vec{h}_1(\vec{u}, \vec{v}), \vec{h}_2(\vec{u}, \vec{v})) = (\vec{u}, \vec{v}) \tag{9}$$

для $(\vec{u}, \vec{v}) \in B(\vec{f}(\vec{x}^0, \vec{y}^0), \delta)$;

$$\begin{gathered} \vec{g} \in \mathbf{C}^{(1)}(B(\vec{f}(\vec{x}^0, \vec{y}^0), \delta), \mathbf{R}^{m+n}); \\ \vec{g}'(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{f}'(\vec{h}_1(\vec{u}, \vec{v}), \vec{h}_2(\vec{u}, \vec{v})))^{-1}. \end{gathered} \tag{10}$$

Розглянемо тепер які-небудь кулі $B(\vec{x}^0, r) \subset \mathbf{R}^m$ $B(\vec{F}(\vec{x}^0, \vec{y}^0), \tilde{r}) \subset \mathbf{R}^n$ такі, що

$$H := B(\vec{x}^0, r) \times B(\vec{F}(\vec{x}^0, \vec{y}^0), \vec{r}) \subset B(\vec{f}(\vec{x}^0, \vec{y}^0), \delta).$$

Згідно з рівністю (9) маємо

$$\vec{h}_1(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}, \ \vec{F}(\vec{u}, \vec{h}_2(\vec{u}, \vec{v})) = \vec{v}; \quad (\vec{u}, \vec{v}) \in H. \tag{11}$$

Таким же чином згідно з рівністю (10)

$$\begin{pmatrix} E & O \\ (\vec{h}_2)'_{\vec{u}} & (\vec{h}_2)'_{\vec{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \vec{F}'_{\vec{x}}(\vec{u}, \vec{h}_2(\vec{u}, \vec{v})) & \vec{F}'_{\vec{y}}(\vec{u}, h_2(\vec{u}, \vec{v})) \end{pmatrix}^{-1}. \tag{12}$$

Для $\vec{x} \in B(\vec{x}^0, r)$ нехай $\vec{h}(\vec{x}) := \vec{h}_2(\vec{x}, \vec{0})$. Зауважимо, що $\vec{h}: B(\vec{x}^0, r) \to \mathbf{R}^n$. З рівностей (11) і (12) випливає, що $\vec{h}(\vec{x}^0) = \vec{y}^0$;

$$\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, r): \vec{F}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})) = \vec{0};$$

$$\vec{h}'(\vec{x}) = -(\vec{F}'_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})))^{-1} \vec{F}'_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})).$$

Вправи

5. Нехай A — відкрита підмножина $\mathbf{R}^m$; $f_k: A \to \mathbf{R}$, $f_k \in \mathbf{C}^{(1)}(A)$ для $1 \leqslant k \leqslant m$. Припустимо, що існує функція $\varphi: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ така, що $\|\varphi'\| \neq 0$ і

$$\forall \vec{x} \in A: \varphi(f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})) = 0$$

(***функції*** $f_1, \ldots, f_m$ у цьому випадку називаються ***функціонально залежними***). Довести, що

$$\forall \vec{x} \in A: \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(\vec{x}) = 0.$$

6. Нехай A відкрита в $\mathbf{R}^m$; $\vec{f}: A \to \mathbf{R}^m$, $\vec{f} \in \mathbf{C}^{(1)}(A, \mathbf{R}^m)$ і $\det \vec{f}' \times (\vec{x}) \neq 0$, $\vec{x} \in A$. Тоді для будь-якої відкритої множини $B \subset A$ образ $\vec{f}(B)$ є відкрита в $\mathbf{R}^m$ множина.

7*. Нехай $\vec{f}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$; $\vec{f} \in \mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$ і $\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \mathbf{R}^m$: $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \geqslant \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Довести, що: 1) $\vec{f}$ взаємно однозначне; 2) $\det \vec{f}'(\vec{x}) \neq 0$; $\vec{x} \in \vec{\mathbf{R}}^m$; 3) $\vec{f}(\mathbf{R}^m) = \mathbf{R}^m$.

8. Нехай $B(\vec{0}, r) \subset \mathbf{R}^m$, $B(\vec{0}, \rho) \subset \mathbf{R}^n$ — відкриті кулі;

$$\vec{F}: B(\vec{0}, r) \times B(\vec{0}, \rho) \to \mathbf{R}^n,$$

причому $\vec{F}$ неперервна і

$$\forall \vec{x} \in B(\vec{0}, r) \quad \forall \{\vec{y}_1, \vec{y}_2\} \subset B(\vec{0}, \rho):$$

$$\|\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}_1) - \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}_2)\| \leqslant \lambda \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$$

з числом $\lambda \in [0, 1)$. Припустимо, що

$$\forall \vec{x} \in B(\vec{0}, r): \|\vec{F}(\vec{x}, \vec{0})\| < \rho(1 - \lambda).$$

Тоді

$$\exists! \vec{f} \in \mathbf{C}(B(\vec{0}, r), B(\vec{0}, \rho)): \vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \in B(\vec{0}, r).$$

Вказівка. Застосувати теорему Банаха. З цього твердження легко отримати основну частину теореми 2.

§ 3. ЛОКАЛЬНИЙ ВІДНОСНИЙ ЕКСТРЕМУМ

3.1. ОЗНАЧЕННЯ

Нехай A — відкрита підмножина $\mathbf{R}^m$ і $f: A \to \mathbf{R}$. Для натурального $s < m$ $\varphi_i: A \to \mathbf{R}$, $1 \leqslant i \leqslant s$ є деякі функції. Нехай $M := \{\vec{x} \in A \mid \varphi_i(\vec{x}) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant s\}$; іноді кажуть, що

множина M визначається s ***рівняннями зв'язку*** $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_s = 0$.

Означення. Нехай $\vec{x}^0 \in M$. Функція f має в точці $\vec{x}^0$ ***локальний відносний максимум при умовах*** $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_s = 0$, якщо

$$\exists r > 0 \ \forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, r) \cap M: \ f(\vec{x}) \leqslant f(\vec{x}^0).$$

Локальний відносний максимум називається ***строгим,*** якщо остання нерівність виконується зі знаком «$<$» для $\vec{x} \neq \vec{x}^0$.

Таким же чином визначається поняття ***локального відносного мінімуму*** і ***строгого локального відносного мінімуму.*** Всі введені в цьому визначенні поняття описуються також загальним терміном ***локальний відносний*** (***або умовний***) ***екстремум.***

Вправа

1. Визначити найменше в $\mathbf{R}^2$ значення функції $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$,

Визначити найменше значення f при умові, що $x_1 + x_2 = 1$.

3.2. НЕОБХІДНА УМОВА ЛОКАЛЬНОГО ВІДНОСНОГО ЕКСТРЕМУМУ (ПРАВИЛО МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА)

ТЕОРЕМА. Припустимо, що $s < m$, $f \in \mathbf{C}^{(1)}(A)$, $\varphi_i \in \mathbf{C}^{(1)}(A)$ для $1 \leqslant i \leqslant s$ і матриця

$$\left(\frac{\partial \varphi_i(\vec{x}^0)}{\partial x_j} \right)_{i=1 \ j=1}^{s \quad m}$$

має ранг s в точці $\vec{x}^0$, яка є точкою локального відносного екстремуму функції f при обмеженнях $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_s = 0$. Тоді існують дійсні числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ такі, що точка $\vec{x}^0$ є критичною точкою функції $F = f_1 + \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_s\varphi_s$.

Зауваження. Функція F і числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ називаються відповідно ***функцією Лагранжа і множниками Лагранжа.***

Припустимо, що

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)}{\partial(x_{m-s+1}, \ldots, x_m)}(\vec{x}^0) \neq 0. \qquad (1)$$

(i) Визначимо дійсні числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ таким чином, щоб

$$\frac{\partial f(\vec{x^0})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(\vec{x^0})}{\partial x_j} = 0; \quad m-s+1 \leqslant j \leqslant m. \tag{2}$$

За припущенням (1) ці числа визначаються єдиним чином.

(ii) Обмеження

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_{m-s}, x_{m-s+1}, \ldots, x_m) = 0,$$
$$1 \leqslant i \leqslant s; \quad (x_1, \ldots, x_m) \in A$$

згідно з теоремою про існування і властивості неявної функції можна розв'язати відносно змінних $x_{m-s+1}, \ldots, x_m$ як функцій від $(x_1, \ldots, x_{m-s})$ в деякій кулі B із центром в точці $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{m-s}^0)$. У цій кулі згідно з правилом диференціювання складної функції отримаємо для будь-якого i, $1 \leqslant i \leqslant s$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \sum_{\nu=m-s+1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x_j} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-s. \tag{3}$$

(iii) Для $(x_1, \ldots, x_{m-s}) \in B$ функція

$$f(x_1, \ldots, x_m) =$$
$$= f(x_1, \ldots, x_{m-s}, x_{m-s+1}(x_1, \ldots, x_{m-s}), \ldots, x_m(x_1, \ldots, x_{m-s}))$$

має локальний екстремум в точці $(x_1^0, \ldots, x_{m-s}^0)$. Тому

$$\frac{\partial f(\vec{x^0})}{\partial x_j} + \sum_{\nu=m-s+1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x^0})}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x_j} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-s. \tag{4}$$

Враховуючи рівності (2) і (3), із рівності (4) знайдемо

$$0 = \frac{\partial f(\vec{x^0})}{\partial x_j} + \sum_{\nu=m-s+1}^{m} \left(-\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(\vec{x^0})}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial x_\nu}{\partial x_j} =$$
$$= \frac{\partial f(\vec{x^0})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(\vec{x^0})}{\partial x_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-s. \quad \lrcorner$$

3.3. ДОСТАТНІ УМОВИ

ТЕОРЕМА. Припустимо, що

1) $f \in \mathbf{C}^{(2)}(A)$; $\varphi_i \in \mathbf{C}^{(2)}(A)$, $1 \leqslant i \leqslant s$;

2) $\vec{x}^0 \in M$ — критична точка функції $F = f + \sum_{i=1} \lambda_i \varphi_i$ для деякого набору дійсних чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$;

3) матриця

$$\left(\frac{\partial \varphi_i(\vec{x}^0)}{\partial x_j} \right)_{i=1}^{s} \; {}_{j=1}^{m}$$

має ранг s. Далі припускаємо, що має місце припущення (1) п. 3 .2.

Визначимо для $(a_1, \ldots, a_{m-s}) \in \mathbf{R}^{m-s}$

$$Q(a_1, \ldots, a_{m-s}) := \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 F(\vec{x}^0)}{\partial x_i \partial x_j} a_i a_j;$$

де $a_{m-s+1}, \ldots, a_m$ визначені з рівнянь

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i(\vec{x}^0)}{\partial x_j} a_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Якщо $Q(a_1, \ldots, a_{m-s}) > 0$, $(a_1, \ldots, a_{m-s}) \neq (0, \ldots, 0)$, то $\vec{x}^0$ — точка строгого відносного локального мінімуму для f.

Якщо $Q(a_1, \ldots, a_{m-s}) < 0$, $(a_1, \ldots, a_{m-s}) \neq (0, \ldots, 0)$, то $\vec{x}^0$ є точка строгого відносного локального максимуму.

⌈ Нехай $\vec{a} \in \mathbf{R}^m$ таке, що $(\vec{x}^0 + \vec{a}) \in M$.

За допомогою формули Тейлора маємо

$$f(\vec{x}^0 + \vec{a}) - f(\vec{x}^0) = F(\vec{x}^0 + \vec{a}) - F(\vec{x}^0) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 F(\vec{x}^0 + \theta \vec{a})}{\partial x_i \partial x_j} a_i a_j, \quad \theta \in (0, 1);$$

$$0 = \varphi_k(\vec{x}^0 + \vec{a}) - \varphi_k(\vec{x}^0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k(\vec{x}^0 + \theta_k \vec{a})}{\partial x_j} a_j, \quad \theta_k \in (0, 1) \tag{1}$$

для $k = 1, \ldots, s$. Далі потрібно двічі використати лему п. 3.5 глави 11: перший раз для того, щоб визначити $a_{m-s+1}, \ldots, a_m$ через $a_1, \ldots, a_{m-s}$, а другий — щоб отримати твердження теореми. ⌋

3.4. ВЛАСНІ ЧИСЛА СИМЕТРИЧНОЇ МАТРИЦІ

Нехай $D = (d_{ij})_{i,j=1}^{m}$, $\{d_{ij}\} \subset \mathbf{R}$; $d_{ij} = d_{ij}$, $1 \leqslant i,j \leqslant m$. Число $\lambda \in \mathbf{R}$ називається ***власним числом*** матриці D, якщо $\det(D - \lambda E) = 0$. Вектор $\vec{x} \in \mathbf{R}^m$, $\vec{x} \neq 0$, називається ***власним вектором, який відповідає власному числу*** λ матриці D, якщо $D\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Нехай для $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)^t \in \mathbf{R}^m$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}^t D\vec{x} = \sum_{i,j=1}^{m} d_{ij}x_ix_j,$$

функція $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^m)$.

Розглянемо множину $M_1 = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^m / \|\vec{x}\| = 1\}$. Вона компактна, оскільки обмежена й замкнена. Тому існує вектор $\vec{v}(1) \in M_1$ такий, що $f(\vec{v}(1)) = \max\limits_{M_1} f$.

За теоремою п. 3.2 існує $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ таке, що вектор $\vec{v}(1)$ є критичною точкою функції

$$F_1(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \lambda_1(1 - \|\vec{x}\|^2), \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^m.$$

Тому $D\vec{v}(1) - \lambda_1\vec{v}(1) = 0$, звідки $\lambda_1 = \vec{v}(1)^t D\vec{v}(1) = f(\vec{v}(1))$.

Множина $M_2 = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^m / \|\vec{x}\| = 1, \ \vec{x}^t\vec{v}(1) = 0\}$ також компактна і існує $\vec{v}(2) \in M_2$ такий, що $f(\vec{v}(2)) = \max\limits_{M_2} f$.

Зауважимо, що $M_2 \subset M_1$ і $f(\vec{v}(2)) \leqslant f(\vec{v}(1))$. Існують $\{\lambda_2, \mu_2\} \subset \mathbf{R}$ такі, що $\vec{v}(2)$ є критичною точкою функції

$$F_2(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \lambda_2(1 - \|\vec{x}\|^2) + \mu_2\vec{x}^t\vec{v}(1).$$

Тому $2(D\vec{v}(2) - \lambda_2\vec{v}(2)) + \mu_2\vec{v}(1) = 0$, і, отже, $\mu_2 = 0$,

$$D(\vec{v}(2)) = \lambda_2\vec{v}(2), \quad f(\vec{v}(2)) = \lambda_2 \leqslant \lambda_1.$$

Таким чином, найбільше власне число матриці D дорівнює найбільшому значенню функції f на M_1 і досягається на власному векторі, який відповідає цьому власному числу. Наступне за величиною власне число D дорівнює найбільшому значенню f на M_2 і досягається на відповідному власному векторі.

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ДО ГЛАВ 10—12

1. Нехай $\mathbf{P}_n([a, b])$ — множина всіх многочленів із дійсними коефіцієнтами степеня не більшого за n, які розглядаються на відрізку $[a, b]$. Для $\{p, q\} \subset \mathbf{P}_n([a,b])$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i; \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i x^i; \quad x \in [a,b]$$

визначимо

$$d(p, q) = \sum_{i=0}^{n} |p_i - q_i|.$$

Довести, що $(\mathbf{P}_n([a, b]), d)$ — повний сепарабельний метричний простір. Чи є множина всіх многочленів із коефіцієнтами з $[0, 1]$: а) замкненою? б) компактною?

2. Нехай $\mathbf{BV}([a, b])$ — множина всіх дійсних функцій обмеженої варіації на відрізку $[a, b]$. Для $\{f, g\} \subset \mathbf{BV}([a, b])$ визначимо

$$d(f, g) = |f(a) - g(a)| + V(f - g, [a, b]).$$

Довести, що $(\mathbf{BV}([a, b]), d)$ — повний метричний простір. Чи буде цей простір сепарабельним?

3. Для функції $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ визначимо

$$\|f\|_{BL} := \sup_{[a,b]} |f| + \sup_{\substack{\{x,y\} \subset [a,b] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|},$$

і нехай

$$\mathbf{BL}([a, b]) := \{f \mid \|f\|_{\mathbf{BL}} < +\infty\}; \; d(f, g) := \|f - g\|_{\mathbf{BL}},$$

$$\{f, g\} \subset \mathbf{BL}([a, b]).$$

Довести, що: а) $(\mathbf{BL}([a, b]), d)$— повний сепарабельний метричний простір; б) множина $\mathbf{BL}([a, b])$ скрізь щільна в $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$.

4. Нехай $\mathscr{P}$ — множина всіх многочленів, які розглядаються на відрізку $[a, b]$. Визначити множину внутрішніх і граничних точок множини $\mathscr{P}$ в $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$.

5. Нехай $\overline{B}(x, r)$— замкнена куля з центром у точці x і радіусом r в метричному просторі (X, ρ), $C(x, r)$ — замикання відкритої кулі $B(x, r)$. Довести, що $C(x, r) \subset \overline{B}(x, r)$. Навести приклад метричного простору (X, ρ) такого, що $C(x, r) \neq \overline{B}(x, r)$ для деяких x і r.

6. У просторі $(\mathbf{C}([1, 2]), \rho)$ визначити замикання множини всіх функцій, які мають вигляд

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{1/2} + a_2 x^{3/2} + \ldots + a_n x^{(2n-1)/2}, \; x \in [1,2];$$

$$n \in \mathbf{N}, \; \{a_0, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}.$$

Відповідь. $\mathbf{C}([1, 2])$.

7. Нехай $A \subset \mathbf{R}^2$, $B \subset \mathbf{R}^2$ і $A + B := \{(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2) \mid (x_1,\ x_2) \in A,\ (y_1,\ y_2) \in B\}$. Довести, що: а) $A + B$ відкрита, якщо A або B відкрита; б) $A + B$ замкнена, якщо A і B замкнені.

8. Які з наступних підмножин простору $(\mathbf{C}([0,\ 1]),\ \rho)$ є замкненими, відкритими:

а) $\{x \mid x(0) = 0\}$; б) $\{x \mid \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t) > 1\}$;

в) $\left\{x \mid \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt \leqslant 1\right\}$; г) $\{x \mid \forall t \in [0,1]:\ x(t) > t\}$?

9. Довести, що метричний простір $(X,\ \rho)$ сепарабельний тоді й тільки тоді, коли кожне відкрите покриття множини X містить зліченне підпокриття.

10. Довести, що в метричному просторі будь-яка відкрита множина є зліченне об'єднання замкнених, а будь-яка замкнена — зліченний перетин відкритих множин.

11. Нехай F і G — замкнені множини в метричному просторі, що не перетинаються. Довести, що існують відкриті множини A і B, що не перетинаються і такі, що $F \subset A$, $G \subset B$.

12. Нехай A_i — компактна множина в метричному просторі $(X_i,\ \rho_i)$, $i = 1,\ 2$. Довести, що множина $A_1 \times A_2$ компактна в декартовому добутку $(X_1 \times X_2,\ \rho = \rho_1 + \rho_2)$.

13. Нехай K — компактна множина в метричному просторі $(X,\ \rho)$ і $f \in \mathbf{C}(K)$. Довести, що графік

$$\{(x,\ y) \mid x \in K,\ y = f(x)\}$$

є компактною множиною в просторі $(X \times \mathbf{R},\ \rho)$, де

$$\rho((x_1,\ y_2),\ (x_2,\ y_2)) = \rho(x_1,\ x_2) + |y_1 - y_2|.$$

14. Які з наступних множин в просторі $(\mathbf{C}([a,\ b]),\ \rho)$ є скрізь щільними в ньому:

а) множина всіх многочленів, які розглядаються на $[a,\ b]$;

б) $\mathbf{C}^{(2)}([a,\ b])$; в) $\{x \mid x(a) + x(b) = 1\}$;

г) $\{x \mid \int\limits_a^b x(t)\,dt = 0\}$; д) $\mathbf{BV}([a,\ b]) \cap \mathbf{C}([a,\ b])$?

15. Нехай $(X,\ \rho)$ — повний метричний простір і $\{x_{ij} \mid 1 \leqslant j \leqslant n_i,\ i \geqslant 1\}$, $n_i \in \mathbf{N}$, $i \geqslant 1$ — довільний набір елементів із X. Довести, що множина

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n_i} \overline{B}\left(x_{ij},\ \frac{1}{i}\right)$$

компактна. Тут $\overline{B}(x,\ r) = \{y \mid \rho(x,\ y) \leqslant r\}$.

16. Припустимо, що множини A і B компактні в $(\mathbf{R}^m,\ \rho)$. Нехай для $\alpha \in \mathbf{R}$

$$C := \{\alpha\vec{x} \mid \vec{x} \in A\},\ D := \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in A,\ \vec{y} \in B\}.$$

Довести, що множини C і D компактні в $(\mathbf{R}^m,\ \rho)$.

17. Нехай $\{K_n,\ n \geqslant 1\}$ — послідовність зв'язних компактних множин в просторі $(X,\ \rho)$ і $K_{n+1} \subset K_n$, $n \geqslant 1$. Довести, що множина $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$

зв'язна. Навести приклад, який показував би, що умову компактності множин не можна замінити на їх замкненість.

18. Нехай A компактна підмножина $(\mathbf{R}^m, \rho)$ і

$$B := \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists n \in \mathbf{N} \quad \exists \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset [0, 1], \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \\ \\ \exists (\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}) \subset A: \ \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}^{(1)} \end{array} \right\}.$$

Довести, що B компактна множина.

19. Нехай $A = \{(x_1, x_2) | \, 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ x_2 = 0\}$ і O— відкрите покриття множини A в $(\mathbf{R}^2, \rho)$. Довести, що існує $\varepsilon > 0$ таке, що O є покриттям множини

$$A_\varepsilon := \{(x_1, x_2) | -\varepsilon \leqslant x_1 \leqslant 1 + \varepsilon, \ |x_2| \leqslant \varepsilon\}.$$

20. Нехай (X, ρ) — метричний простір і $f \in \mathbf{C}(X)$. Припустимо, що для деякого $c \in \mathbf{R}$ множина $\{x \mid f(x) \leqslant c\}$ непуста й компактна. Довести, що

$$\exists x_* \in X \quad \forall x \in X: \ f(x_*) \leqslant f(x).$$

21. Нехай A — деяке перетворення, а T — гомеоморфізм повного метричного простору (X, ρ) в себе. Припустимо, що $T^{-1}AT$ є перетворення стиску. Довести, що перетворення A має єдину нерухому точку.

22. Нехай (X, ρ) — компактний метричний простір, а перетворення A $X \to X$ таке, що $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$, $\{x, y\} \subset X$, $x \neq y$. Довести, що перетворення A має єдину нерухому точку.

23. Нехай

$$f(x_1, x_2) = (x_2^{1/3} + x_2^{1/3})^3, \ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Довести, що: а) $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^2)$; б) існують $f_1'(0, 0)$, $f_2'(0, 0)$; в) f не є диференційовною в точці $(0, 0)$.

24. Нехай A — симетрична матриця розміром $m \times m$, $\vec{a} \in \mathbf{R}^m$,

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x} - \vec{a}^t \vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^m.$$

Довести, що $f'(\vec{x}) = 2A\vec{x} - \vec{a}, \vec{x} \in \mathbf{R}^m$.

25. Нехай $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^m$. Упевнитися в тому, що для будь-якого $\vec{a} \in \mathbf{R}^m$ не існує $f'_{\vec{a}}(\vec{0})$. Довести, що функція f при $\vec{x} = \vec{0}$ недиференційовна і що $f'(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{-1}\vec{x}$ при $\vec{x} \neq \vec{0}$.

26. Обчислити $f''(\vec{x})$ для функції :

а) $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$, $\vec{x} \neq \vec{0}$; б) $f(\vec{x}) = (\vec{a}^t\vec{x})^2$, $\vec{a} \in \mathbf{R}^m$.

Відповідь. а) $\|\vec{x}\|^{-1}E - \|\vec{x}\|^{-3}\vec{x}\vec{x}^t$; б) $2\vec{a}\vec{a}^t$.

27. Нехай $B = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^m \mid \|\vec{x}\| \leqslant 1\}$. Припустимо, що функція $f \in \mathbf{C}(B)$ диференційовна у всіх внутрішніх точках B і $f(\vec{x}) = 0$ для точок $\vec{x}$, $\|\vec{x}\| = 1$. Довести, що $\exists \vec{x}^0$, $\|\vec{x}^0\| < 1$: $f'(\vec{x}^0) = \vec{0}$.

28. Нехай D — замкнена підмножина $\mathbf{R}^m$, $f \in \mathbf{C}(D)$. Припустимо, що для будь-якої послідовності $\{\vec{x}_n: n \geqslant 1\} \subset D$ такої, що $\|\vec{x}_n\| \to +\infty$, $n \to \infty$ має місце співвідношення $f(\vec{x}_n) \to +\infty$, $n \to \infty$. Довести, що

$$\exists \vec{x}^0 \in D \quad \forall \vec{x} \in D: \ f(\vec{x}^0) \leqslant f(\vec{x}).$$

29. Нехай $f \in C(R^m)$ і для деякого $a \in R$ множина $\{\vec{x} \mid f(\vec{x}) \leqslant a\}$ непуста й обмежена. Довести, що функція f приймає найменше на R^m значення.

30. Для функції F: $[a, b] \times R \to R$ існує F_2' і $F_2' \in C([a, b] \times R)$. Припустимо, що для функцій $\{g_1, g_2\} \subset C([a, b])$: $F(x, g_i(x)) = 0$, $x \in [a, b]$, $i = 1, 2$, і $\exists!\ x_0 \in [a, b]$: $g_1(x_0) = g_2(x_0) =: y_0$. Довести, що $F_2'(x_0, y_0) = 0$.

31. Знайти найбільше й найменше значення функції $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ в кільці

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 \mid 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\},$$

32. Знайти найкоротшу віддаль від точки (1, 4) до параболи $y^2 = 2x$, $x \in R$.

33. Знайти найбільше значення добутку $x_1^2 x_2^2 \ldots x_m^2$ при умові $x_1^2 + \ldots + x_m^2 = 1$.

34. Нехай $(a_{ij})_{i,j=1}^m$ — симетрична, додатно визначена матриця з дійсними елементами. Довести, що існує $\alpha > 0$ таке, для якого

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^m x_i^2, \quad (x_1, \ldots, x_m) \in R^m.$$

35. Нехай $(a_{ij})_{i,j=1}^m$ — симетрична додатно визначена матриця з дійсними елементами, $\{a, b_1, \ldots, b_m\} \subset R$ і

$$f(x_1, \ldots, x_m) = a + \sum_{i=1}^m b_i x_i + \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j.$$

Довести, що f приймає на R^m найменше значення.

36. Нехай P — многочлен від x_1 і x_2. Чи має місце твердження: існує точка $(x_1^0, x_2^0) \in R^2$, в якій $|P|$ приймає найменше на R^2 значення? Аналогічне твердження має місце для многочлена від однієї змінної на R. Розглянути приклад: $P(x_1, x_2) = (x_1 x_2 - 1)^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in R^2$.

37. Для фіксованого вектора $\vec{a} \in R^m$ визначити $\max\limits_{\{\vec{x} \mid \|\vec{x}\| = 1\}} \vec{a}^t \vec{x}$.

38. Визначити віддаль від точки $\vec{x}^0$ до гіперплощини $\{\vec{x} \mid \vec{a}^t \vec{x} = b\}$, де $\vec{a} \in R^m$, $b \in R$ — фіксовані.

39. Визначити найменше і найбільше значення функції

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + x_1 x_2 - x_1, \quad (x_1, x_2) \in R^2$$

на множині $\{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$.

40. Нехай відображення $\vec{F}$ визначено співвідношенням

$$\vec{F}(x) = \left(\int_0^{2\pi} x(t) \cos t\, dt,\ \int_0^{2\pi} x(t) \sin t\, dt\right)^t, \quad x \in C([0, 2\pi]).$$

Знайти $\vec{F}(C([0, 2\pi]))$.

41. Нехай відображення $\vec{F}$ визначено співвідношенням

$$\vec{F}(x) = \left(\int_0^1 tx(t)\,dt,\quad \int_0^1 t^2 x(t)\,dt,\quad \int_0^1 t^3 x(t)\,dt\right)^t,\quad x \in C([0,1]).$$

Визначити $\vec{F}(C([0,1]))$.

Відповідь. R^3.

42. Перевірити, що відображення

$$R^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sin x_1 - \frac{1}{3}\cos x_2 + 2 \\ \frac{1}{6}\cos x_1 + \frac{1}{2}\sin x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

є відображенням стиску (R^2, ρ).

43. Довести, що відображення

$$R^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - 2 \\ \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + 3 \end{pmatrix}$$

має єдину нерухому точку.

44. Нехай $\vec{f}: R^m \to R^n$ — диференційовне на R^m відображення та $g(\vec{x}) := \|\vec{f}(\vec{x})\|$, $\vec{x} \in R^m$. Довести, що функція g диференційовна в точках множини $R^m \setminus \{\vec{x} \mid \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

45. Нехай $\vec{f}: R^m \to R^n$ — диференційовне на R^m відображення, для якого матриця Якобі $\vec{f}'$ постійна. Довести, що $\vec{f}$ є афінним відображенням.

46. Для відображення $\vec{f}: R^m \to R^m$ існує $\vec{f}'$ на R^m, причому $\vec{f}'(\vec{x})$ додатно визначена для кожного $\vec{x} \in R^m$. Довести, що для будь-яких $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset R^m$ має місце нерівність $(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y}))^t (\vec{x} - \vec{y}) \geqslant 0$.

47. Нехай A — перетворення стиску в (R^m, ρ) і $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x} - A(\vec{x})$, $\vec{x} \in R^m$. Довести, що $\vec{F}$ — гомеоморфізм (R^m, ρ) на себе.

48. Для відображення $\vec{f}: R^m \to R^m$ існує $\vec{f}'$ на R^m і для деякого $\alpha > 0$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \geqslant \alpha \|\vec{x} - \vec{y}\|,\quad \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset R^m.$$

Довести, що для будь-якого $\vec{x} \in R^m$ матриця $\vec{f}'(\vec{x})$ має обернену.

49. Відображення $\vec{f}: R^m \to R^m$ неперервно диференційовне на R^m і задовольняє умові Ліпшица:

$$\exists L \in R \quad \forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset R^m: \ \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \leqslant L \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Довести, що $\|\vec{f}'(\vec{x})\| \leqslant L$, $\vec{x} \in R^m$, де $\|A\| = \sup\limits_{\|\vec{x}\| \leqslant 1} \|A\vec{x}\|$.

50. Нехай $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{R})$ і $\exists \lambda < 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}: \ |f'(x)| < \lambda$. Довести, що відображення

$$\mathbf{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + f(x_2),\ x_2 + f(x_1))^t$$

є бієкція.

51. Нехай $A \subset \mathbf{R}^m$, $\vec{f}: A \to \mathbf{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbf{R}^m$, відрізок $I = \{\vec{x} + \tau\vec{a} \mid 0 \leqslant \tau \leqslant 1\} \subset A$ і відображення $\vec{f} \in \mathbf{C}^{(1)}(A)$. Довести, що

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{f}'(\vec{x} + \tau\vec{a})\,\vec{a}\,d\tau.$$

52. Припустимо, що виконані умови попередньої задачі і, крім того,

$$\exists L \in \mathbf{R} \quad \forall \{\vec{u}, \vec{v}\} \subset I: \ \|\vec{f}'(\vec{u}) - \vec{f}'(\vec{v})\| \leqslant L\,\|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

Довести, що

$$\|\vec{f}(\vec{x} + \vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}'(\vec{x})\,\vec{a}\| \leqslant L\,\|\vec{a}\|^2.$$

53. Відображення $A: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ має єдину нерухому точку $\vec{x}^*$ і задовольняє умові: для будь-якого компакта K існує число $\alpha < 1$ таке, що

$$\|A(\vec{x}) - A(\vec{y})\| \leqslant \alpha\,\|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset K.$$

Довести, що для будь-якого $\vec{x}^0 \in \mathbf{R}^m$ послідовність $\vec{x}^0$, $\vec{x}^1 := A(\vec{x}^0)$, $\vec{x}^2 := A(\vec{x}^1), \ldots, \vec{x}^n := A(\vec{x}^{n-1}), \ldots$ збігається до $\vec{x}^*$.

54. Нехай $\vec{f}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, $\vec{f} \in \mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$, $\overline{B}(\vec{a}, r)$ — замкнена куля. Припустимо, що існує $\lambda \in (0, 1)$, яке задовольняє умовам:

1) $\|\vec{f}(\vec{a}) - \vec{a}\| \leqslant (1 - \lambda)\,r$; 2) $\sup\limits_{\vec{x} \in \overline{B}(\vec{a}, r)} \|\vec{f}'(\vec{x})\| \leqslant \lambda$.

Довести, що $\exists!\, \vec{x}^* \in \overline{B}(\vec{a}, r): \ \vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$.

55*. Нехай $\vec{f}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, $\vec{f} \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^m)$ і K — компактна множина. Припустимо, що для деякого $\lambda \in (0, 1)$: $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \leqslant \lambda\,\|\vec{x} - \vec{y}\|$, $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \mathbf{R}^m \setminus K$. Довести, що відображення $\vec{f}$ має нерухому точку.

56. (Теорема Діні). Нехай (X, ρ) — компактний метричний простір і функції $f_n \in \mathbf{C}(X)$, $n \geqslant 1$ і нехай виконані умови:

1) $\forall x \in X \quad \forall n \geqslant 1: \ f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$;

2) $\forall x \in X: \ f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty$;

3) $f \in \mathbf{C}(X)$.

Довести, що послідовність $\{f_n(x),\ x \in X: n \geqslant 1\}$ збігається рівномірно на X до функції f.

Глава 13 НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ. ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА

§ 1. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1. ВИЗНАЧЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ЗА НЕОБМЕЖЕНИМИ ІНТЕРВАЛАМИ

Нехай функція $f\colon [a, +\infty) \to \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$ така, що $\forall A \geqslant a$: $f \in \mathbf{R}([a, A])$. Далі ця умова вважається виконаною і більше не наводиться. Нехай

$$\varphi(A) := \int_a^A f(x)\,dx, \quad A \geqslant a.$$

Означення. Невласним інтегралом

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1}$$

від функції f по множині $[a, +\infty)$ називається скінченна границя

$$\lim_{A \to +\infty} \varphi(A) = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx, \tag{2}$$

якщо ця границя існує. У цьому випадку невласний інтеграл (1) називається ***збіжним***. Якщо границя (2) не існує, або нескінченна, то невласний інтеграл (1) називається ***розбіжним***.

Зауваження. Якщо інтеграл (I) збігається, то для будь-якого $b > a$ збігається невласний інтеграл

$$\int_b^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{3}$$

і

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Якщо для деякого $b > a$ збігається інтеграл (3), то збігається інтеграл (1) і має місце рівність (4). Обидва твердження випливають з рівності

$$\int_a^A f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^A f(x)\,dx, \quad a \leqslant b \leqslant A,$$

і визначення невласного інтеграла. Далі твердження зауваження використовується без нагадування.

Приклади. 1. Інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ збігається і має значення **1**, оскільки

$$\lim_{A\to+\infty} \varphi(A) = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-x}dx = \lim_{A\to+\infty} (1 - e^{-A}) = 1.$$

2. Має місце рівність $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, оскільки

$$\lim_{A\to+\infty} \varphi(A) = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} (\operatorname{arctg} A - 0) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Нехай $a > 0$. Невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ збігається і має значення $\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$, коли $\alpha > 1$, і розбігається, коли $\alpha \leqslant 1$, оскільки функція від A

$$\varphi(A) = \int_a^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln A - \ln a, & \alpha = 1 \\ \dfrac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \dfrac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

така, що при $A \to +\infty$ $\varphi(A) \to \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$, $\alpha > 1$; $\varphi(A) \to +\infty$, $\alpha \leqslant 1$.

4. Інтеграл $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ розбігається, оскільки функція $\varphi(A) = \int_0^A \sin x dx = 1 - \cos A$, $A > 0$ не має границі при $A \to +\infty$.

1.2. ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ

Наведені далі твердження випливають із властивостей інтеграла Рімана і визначення невласного інтеграла.

1°. Припустимо, що невласні інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f_i(x)\,dx$, $i = 1, 2$, збігаються. Тоді

$$\forall c \in \mathbf{R}: \int\limits_a^{+\infty} (cf_1(x))dx = c\int\limits_a^{+\infty} f_1(x)\,dx;$$

$$\int\limits_a^{+\infty} (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f_1(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} f_2(x)\,dx,$$

тобто збігаються невласні інтеграли у лівих частинах рівностей і мають місце рівності.

2°. Припустимо, що функція f має первісну F на $[a, +\infty)$. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{x\to\infty} F(x) =: F(+\infty), \tag{1}$$

то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a).$$

Якщо границя в (1) не існує, або нескінченна, то невласний інтеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

розбігається.

Вправа

1. Нехай $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f \in \mathbf{C}([0, +\infty))$, $p \geqslant 1$. Довести, що

$$\left(\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx\right)^p = p\int\limits_0^{+\infty} f(x)\left(\int\limits_x^{+\infty} f(u)\,du\right)^{p-1} dx.$$

3°. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{C}^{(1)}([a, +\infty])$. Якщо один із невласних інтегралів

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g'(x)\,dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} f'(x)\,g(x)\,dx \tag{2}$$

збігається і існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)g(x))$, то збігається другий із інтегралів (2) і має місце рівність

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x)) - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx.$$

Приклад 1. Для $a=0$, $f(x)=x$, $g'(x)=e^{-x}$, $x\geqslant 0$ маємо

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x}) - 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

4°. Критерій Коші. Для того щоб невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігався, необхідно й достатньо, щоб

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A_0\geqslant a\ \forall A'\geqslant A_0\ \forall A''\geqslant A_0:\ \left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

1.3. ЗБІЖНІСТЬ ІНТЕГРАЛІВ ВІД НЕВІД'ЄМНИХ ФУНКЦІЙ

Припустимо, що $\forall x\geqslant a:\ f(x)\geqslant 0$.

ТЕОРЕМА 1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ від невід'ємної функції f збігається тоді й тільки тоді, коли

$$\exists C\in\mathbf{R}\ \forall A\geqslant a:\ \varphi(A)\leqslant C.$$

⌈Функція φ на $[a,+\infty)$ монотонно не спадає і обмежена, тому існує границя при $A\to+\infty$. ⌋

Зауваження. Якщо функція невід'ємна, то має місце нерівність

$$\varphi(A)=\int_a^A f(x)\,dx\leqslant\int_a^{+\infty} f(x)\,dx,\quad A\geqslant a.$$

ТЕОРЕМА 2. Нехай $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$, $g:\ [a,+\infty)\to\mathbf{R}$ і $\forall x\geqslant a:\ 0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. При цих умовах із збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Для доведення теореми користуємося теоремою 1 і нерівностями

$$\int_a^A f(x)\,dx \leqslant \int_a^A g(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)\,dx, \quad A \geqslant a.$$

Приклади. 1. Інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\,dx$ збігається, оскільки можна застосувати теорему 2 для $a=0$,

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+x^2}, \; g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

для $x \geqslant 0$.

2. Інтеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ збігається. Можна застосувати теорему 2 для $a=1$;

$$f(x) = e^{-x^2}, \; g(x) = e^{-x} \quad \text{для} \quad x \geqslant 1.$$

3. Інтеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx$ збігається за теоремою 2, якщо вибрати $a=1$,

$$f(x) = e^{-x}\ln x, \quad g(x) = xe^{-x}, \quad x \geqslant 1.$$

Використати нерівність $\ln x < x$, $x > 1$.

Наслідок. Припустимо, що для деяких чисел $0 < C < +\infty$, $\alpha > 0$

$$f(x) \sim \frac{C}{x^\alpha}, \; x \to +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = C.$$

Якщо $\alpha > 1$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається; якщо ж $\alpha \leqslant 1$, то цей інтеграл розбігається.

Нехай $\alpha > 1$. За означенням границі

$$\exists A_0 \geqslant a \quad \forall x \geqslant A_0: \quad f(x) \leqslant \frac{2C}{x^\alpha}.$$

На інтервалі $[A_0, +\infty)$ до функцій f і $g(x) = \frac{2C}{x^\alpha}$, $x \geqslant A_0$ можна застосувати теорему 2.

Нехай $\alpha \leqslant 1$. Таким же чином

$$\exists A_0 \geqslant a \quad \forall x \geqslant A_0: \quad f(x) \geqslant \frac{C}{2x^\alpha}.$$

Інтеграл $\int\limits_{A_0}^{+\infty} \frac{C}{2x^{\alpha}}\,dx$ розбігається. Тому за теоремою 2 розбігається інтеграл $\int\limits_{A_0}^{+\infty} f(x)\,dx$. ⌋

1.4. АБСОЛЮТНО І УМОВНО ЗБІЖНІ ІНТЕГРАЛИ

Означення. Інтеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1}$$

називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається інтеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

Якщо інтеграл (1) збігається, а інтеграл (2) розбігається, то інтеграл (1) називається ***умовно збіжним***.

ТЕОРЕМА 1. Якщо інтеграл збігається абсолютно, то він збігається.

⌈ Припустимо, що інтеграл (2) збігається. Для невід'ємних на $[a, +\infty)$ функцій

$$f^{+}(x) := \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|),\ f^{-}(x) := \frac{1}{2}(-f(x) + |f(x)|),$$

$$x \geqslant a,$$

мають місце співвідношення

$$0 \leqslant f^{+}(x) \leqslant |f(x)|,\ 0 \leqslant f^{-}(x) \leqslant |f(x)|,\ f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x),$$

$$x \geqslant a.$$

За теоремою 2 п.1.3 збігаються інтеграли

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f^{+}(x)\,dx, \quad \int\limits_{a}^{+\infty} f^{-}(x)\,dx.$$

Тому збігається інтеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} (f^{+}(x) - f^{-}(x)) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$ ⌋

Приклад 1. Інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \tag{3}$$

збігається умовно (вважаємо, що підінтегральна функція дорівнює 1 при $x = 0$).

$\vdash$ а) Інтеграл (3) збігається. Досить довести збіжність інтеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

За формулою інтегрування частинами,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\cos x}{x}\right) + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx. \tag{4}$$

У правій частині границя існує і дорівнює 0, а інтеграл правої частини збігається абсолютно. Тому збігається інтеграл з лівої частини рівності (4).

б) Інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ розбігається, оскільки

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty, \quad n\to\infty. \quad \dashv$$

ТЕОРЕМА 2. (Ознака Діріхле). Припустимо, що для функцій f і g виконуються умови:

1) $\exists C \in \mathbf{R} \quad \forall A \geqslant a: \left|\int_a^A f(x)\, dx\right| \leqslant C;$

2) функція g монотонна на $[a, +\infty)$;

3) $g(x) \to 0, \ x \to +\infty$.

Тоді інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx \tag{5}$$

збігається.

$\vdash$ Будемо доводити теорему, додатково припустивши, що існує g' і

$$\forall A \geqslant a: \ g' \in \mathbf{R}([a, A]); \quad f \in \mathcal{C}([a, +\infty))$$

Визначимо

$$F(x) := \int_a^x f(u)\,du, \quad x \geqslant a.$$

Зауважимо, що $F(a)=0$ і $F'(x)=f(x)$, $x \geqslant a$. Застосуємо до інтеграла (5) формулу інтегрування за частинами:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^{+\infty} F'(x)\,g(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} (F(x)\,g(x)) - 0 - \\ - \int_a^{+\infty} F(x)\,g'(x)\,dx. \qquad (6)$$

Згідно з умовами 1) і 3) теореми границя в правій частині (6) існує і дорівнює 0. Невласний інтеграл з правої частини (6) збігається абсолютно, оскільки

$$\int_a^{+\infty} |F(x)|\,|g'(x)|\,dx \leqslant C \int_a^{+\infty} |g'(x)|\,dx = \\ = C\left|\int_a^{+\infty} g'(x)\,dx\right| = C\,|g(a)|,$$

згідно з умовами 2) і 3). Тому збігається інтеграл лівої частини (6). ⌋

Приклади. 2. Інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ збігається. Досить довести збіжність інтеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$, яка випливає з теореми 2 для $a=1$ і функцій $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x}$; $x \geqslant 1$, які задовольняють умовам 1) — 3) при $C=2$.

3. Інтеграл $\int_0^{+\infty} \sin x^3 dx$ збігається. Доведемо збіжність інтеграла $\int_1^{+\infty} \sin x^3 dx$. Для цього в теоремі 2 візьмемо $a=1$ і $f(x)=x^2 \sin x^3$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$, $x \geqslant 1$. Умови 1) — 3) виконуються при $C=\frac{2}{3}$.

ТЕОРЕМА 3 (ознака Абеля). Припустимо, що для функцій f і g виконуються умови:

1) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається;

2) функція g монотонна на $[a, +\infty)$;
3) функція g обмежена на $[a, +\infty)$. Тоді інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$ збігається.

Доведення випливає з ознаки Діріхле.

Вправи

1. Довести збіжність інтегралів:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx; \quad \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx; \quad \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

2. Довести збіжність інтегралів

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x \cdot \sin x}{x}\, dx, \quad \int\limits_0^{+\infty} x \sin x^3 dx.$$

2.1. Нехай $f \in C(\mathbf{R})$, f — періодична з періодом $2T > 0$ і

$$\int\limits_0^{2T} f(x)\, dx = 0, \quad \int\limits_0^{T} f(x)\, dx > 0.$$

Довести, що інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+|x|}\, dx$ збігається умовно.

Зауваження. Аналогічно визначається інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\, dx.$$

Інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)\, dx$ визначається як сума інтегралів для будь-якого $a \in \mathbf{R}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

1.5. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ВІД НЕОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо узагальнення інтеграла на випадок, коли функція визначена на відрізку (за винятком скінченного числа точок) і необмежена в околах цих точок. Оскільки узагальнення інтеграла повинно зберігати адитивність при розбитті відрізка на частини, то можна припускати, що на заданому

інтервалі лежить тільки одна точка — кінець відрізка, в околі якої функція не обмежена.

Нехай $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ і $a < b$. Будемо розглядати функції f: $[a, b) \to \mathbf{R}$ такі, що $\forall c \in (a, b)$: $f \in \mathbf{R}([a, c])$, і такі, що на інтервалі (c, b) вони не обмежені. Наприклад, функції $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in [0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Випадок, коли f не є обмеженою в околі точки a, розглядається таким же чином.

Означення. Невласним інтегралом

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

називається скінченна границя

$$\lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\,dx, \tag{2}$$

якщо остання існує. При цьому також кажуть, що невласний інтеграл (1) ***збігається***. Якщо границя (2) нескінченна, або не існує, то невласний інтеграл (1) називається ***розбіжним***.

Приклади. 1. Невласний інтеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

збігається для $\alpha < 1$ і розбігається для $\alpha \geqslant 1$.

$\vdash$ Дійсно,

$$\varphi(c) := \int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \ln(b-a) - \ln(b-c), & \alpha = 1, \\ \dfrac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \dfrac{(b-c)^{-\alpha+1}}{-\alpha-1}, & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

і $\varphi(c) \to +\infty$, $c \to b-$ для $\alpha \geqslant 1$ і для $\alpha < 1$ $\varphi(c) \to \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, $c \to b-$. $\dashv$

2. Невласний інтеграл $\int_0^1 \ln x dx$ збігається. Дійсно,

$$\int_c^1 \ln x dx = -1 - c\ln c + c \to -1, \quad c \to 0+.$$

Наведемо деякі властивості інтегралів від необмежених функцій. Доведення аналогічні доведенням властивостей інтегралів по необмеженому інтервалу.

1°. Нехай $f(x) \geqslant 0$ для $x \in [a, b)$. Невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ збігається тоді й тільки тоді, коли

$$\exists C \in \mathbf{R}\ \forall c < b : \int\limits_a^c f(u)\,du \leqslant C.$$

2°. Нехай $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ для $x \in [a, b)$. Із збіжності інтеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

3°. Якщо для деяких $\alpha > 0$ і $0 < C < +\infty$

$$f(x) \sim \frac{C}{(b-x)^\alpha},\ x \to b- \Leftrightarrow f(x)(b-x)^\alpha \to C,\ x \to b-,$$

то для $\alpha < 1$ інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ збігається і для $\alpha \geqslant 1$ розбігається.

4°. Якщо функція f має первісну F на $[a, b)$ і існує скінченна границя

$$\lim_{x \to b-} F(x) =: F(b-),$$

то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a).$$

5°. Інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\,dx$ збігається умовно.

Вправи

3. Довести збіжність невласного інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

4. Де міститься помилка в міркуванні

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2?$$

§ 2. ФУНКЦІЇ, ЩО ВИЗНАЧАЮТЬСЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛІВ

2.1. ВСТУП

Нехай $\{a, b, c, d\} \subset \mathbf{R}$ і нехай $a < b$ і $c < d$;

$$f: [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}.$$

Якщо для будь-якого $y \in [c, d]$ функція $f(\cdot, y): [a, b] \to \mathbf{R}$, $f(\cdot, y) \in \mathbf{R}([a, b])$, то інтеграл

$$\int_a^b f(x, y)\, dx =: \mathcal{J}(y), \quad y \in [c, d]$$

визначає функцію $\mathcal{J}$ на $[c, d]$. Величина y в інтегралі $\mathcal{J}(y)$ називається також ***параметром***. Визначені таким чином функції часто використовують в математичних міркуваннях і застосуваннях. Далі наведемо типові умови, які забезпечують функції $\mathcal{J}$ такі властивості, як неперервність, диференційовність та ін., а також формули для обчислення $\mathcal{J}'$ і т. ін.

2.2. ТЕОРЕМИ ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ, ІНТЕГРОВНІСТЬ І ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ФУНКЦІЇ $\mathcal{J}$

ТЕОРЕМА 1. Припустимо, що $f \in \mathbf{C}([a, b] \times [c, d])$. Тоді $\mathcal{J} \in \mathbf{C}([c, d])$.

|— Зауважимо, що для будь-якого $y \in [c, d]$ функція $f(\cdot, y) \in \mathbf{C}([a, b])$. Тому значення $\mathcal{J}(y)$ визначено. Нехай $y_0 \in [c, d]$. Доведемо неперервність $\mathcal{J}$ у точці y_0. Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Множина $[a, b] \times [c, d]$ обмежена й замкнена в $(\mathbf{R}^2, \rho)$, отже, компактна. За теоремою Кантора функція f рівномірно неперервна на $[a, b] \times [c, d]$. Тому

$$\exists \delta > 0 \ \forall \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \subset [a, b] \times [c, d],$$

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta: \ |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Візьмемо $x_1 = x_2 = x$, $y_1 = y$, $y_2 = y_0$. Тоді із співвідношення $\rho((x, y), (x, y_0)) = |y - y_0| < \delta$ випливає

$$\forall x \in [a, b]: |f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Отже,

$$|\mathcal{J}(y)-\mathcal{J}(y_0)|=\left|\int_a^b (f(x,y)-f(x,y_0))\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x,y)-f(x,y_0)|\,dx<\varepsilon. \qquad \lrcorner$$

ТЕОРЕМА 2. Припустимо, що функція $f: [a,b]\times[c,d]\to\mathbf{R}$ задовольняє умовам:

1) $\forall y\in[c,d]: f(\cdot,y)\in\mathbf{C}([a,b])$;
2) $\forall (x,y)\subset[a,b]\times[c,d]$ існує $f_2'(x,y)$;
3) $f_2'\in\mathbf{C}([a,b]\times[c,d])$.

Тоді $\forall y\in[c,d]$ існує $\mathcal{J}'(y)$, і

$$\mathcal{J}'(y)=\int_a^b f_2'(x,y)\,dx,\quad y\in[c,d]\ (\textit{формула Лейбніца}).$$

$\ulcorner$ Нехай $y_0\in[c,d]$. Згідно з формулою Ньютона — Лейбніца отримаємо

$$\frac{1}{\Delta y}(\mathcal{J}(y_0+\Delta y)-\mathcal{J}(y_0))=\frac{1}{\Delta y}\int_a^b (f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0))\,dx=$$

$$=\int_a^b\left(\frac{1}{\Delta y}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} f_2'(x,y)\,dy\right)dx,\quad \Delta y\neq 0.$$

Тому

$$\left|\frac{\mathcal{J}(y_0+\Delta y)-\mathcal{J}(y_0)}{\Delta y}-\int_a^b f_2'(x,y)\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_a^b\left(\frac{1}{\Delta y}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}(f_2'(x,y)-f_2'(x,y_0))\,dy\right)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b\frac{1}{|\Delta y|}\left|\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}|f_2'(x,y)-f_2'(x,y_0)|\,dy\right|dx\to 0,\quad \Delta y\to 0$$

за рахунок рівномірної неперервної f_2' на $[a,b]\times[c,d]$ (як і при доведенні теореми 1). $\lrcorner$

ТЕОРЕМА 3. Нехай $f\in\mathbf{C}([a,b]\times[c,d])$. Тоді

$$\int_c^d \mathcal{J}(y)\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Зауважимо, що згідно з теоремою 1 $\mathcal{J}$ — неперервна функція на $[c, d]$, а інтеграл у дужках — неперервна функція на $[a, b]$. Тому всі інтеграли в твердженні теореми визначені. Для кожного $z \in [c, d]$ визначимо

$$g(z) := \int_c^z \mathcal{J}(y)\,dy, \quad h(z) := \int_a^b \left(\int_c^z f(x, y)\,dy\right) dx.$$

Оскільки $\mathcal{J} \in \mathbf{C}([c, d])$, то існує $g'(z) = \mathcal{J}(z)$, $z \in [c, d]$. Функція

$$F(x, z) := \int_c^z f(x, y)\,dy, (x, z) \in [a, b] \times [c, d]$$

для кожного z з $[c, d]$ неперервна по x на $[a, b]$ згідно з теоремою 1. Для будь-якої точки (x, z) існує $F_2'(x, z) = f(x, z)$, $F_2' \in \mathbf{C}([a, b] \times [c, d])$, тому згідно з теоремою 2 для кожного $z \in [c, d]$ існує $h'(z)$ і $h'(z) = \mathcal{J}(z)$. Таким чином, $g'(z) = h'(z) = \mathcal{J}(z)$, $z \in [c, d]$ і $g(c) = h(c) = 0$. Тому $g(z) = h(z)$, $z \in [c, d]$. Шукану рівність отримаємо при $z = d$.

Приклад 1. Обчислимо інтеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$, $0 < a < b$.

Згідно з правилом Лопіталя

$$f(x) := \frac{x^b - x^a}{\ln x} \to 0, \quad x \to 0+; \quad f(x) \to b - a, \quad x \to 1-.$$

Тому можна вважати, що $f(0) := 0$, $f(1) := b - a$. Зауважимо, що

$$f(x) = \int_a^b x^y dy, \quad x \in [0, 1].$$

Застосовуючи теорему 3, отримаємо

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy\right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx\right) dy = \int_a^b \left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1}\right) dy = \ln\frac{1+b}{1+a}.$$

Вправа

1. Нехай $f \in \mathbf{C}^{(1)}([a, b] \times [c, d])$, $\alpha : [c, d] \to [a, b]$, $\beta : [c, d] \to [a, b]$ і α', β' існують на $[c, d]$. Довести формулу Лейбніца:

$$\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_2'(x, y)\,dx + f(\beta(y), y)\,\beta'(y) -$$

$$- f(\alpha(y), y)\,\alpha'(y),$$

$$y \in [c, d].$$

2.3. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ І ТЕОРЕМА ПРО ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД

Нехай $f\colon [a, b] \times [c, d) \to \mathbf{R}$ і $\forall y \in [c, d)$: $f(\cdot, y) \in \mathbf{C}([a, b])$. Припустимо також, що $\forall x \in [a, b]$: $f(x, y) \to g(x) \in \mathbf{R}$, $y \to d-$. Природно чекати, що

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx \to \int_a^b g(x)\, dx, \quad y \to d-.$$

Проте це твердження не завжди має місце. Наприклад, для функції

$$f(x, y) = \frac{1}{y}\left(1 - x^{\frac{1}{y}}\right) x^{\frac{1}{y}}, (x, y) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times (0, 1];$$

$$f \in \mathbf{C}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0, 1]\right),$$

маємо:

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]: f(x, y) \to 0, \quad y \to 0+;$$

$$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{y}\left(x^{1/y} - x^{2/y}\right) dx \to \frac{1}{2}, \quad y \to 0+.$$

Тому

$$\lim_{y \to 0+} \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x, y)\, dx \neq \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\lim_{y \to 0+} f(x, y)\right) dx.$$

Означення. Нехай $Y \subset \mathbf{R}$, y_0 — гранична точка Y в $(\mathbf{R}, \rho)$ і $f\colon [a, b] \times Y \to \mathbf{R}$. ***Система функцій*** $\{f(\cdot, y) : y \in Y\}$ ***збігається рівномірно на*** $[a, b]$ при $y \to y_0$ до функції $g\colon [a, b] \to \mathbf{R}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in Y, |y - y_0| < \delta, y \neq y_0\ \forall x \in [a, b]:$$

$$|f(x, y) - g(x)| < \varepsilon,$$

тобто якщо

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x, y) - g(x)| \to 0, y \to y_0.$$

Зауваження. За y_0 можна розглядати $+\infty$ або $-\infty$ з відповідною зміною формулювання.

Вправи

2. Система $\{f(x, y), x \in [a, b] : y \in Y\}$ збігається рівномірно на $[a, b]$ при $y \to y_0$ до функції g тоді й тільки тоді, коли $\forall \{y_n : n \geqslant 1\} \subset Y$, $y_n \to y_0$, $n \to \infty$; послідовність функцій $\{f(x, y_n), x \in [a, b] : n \geqslant 1\}$ збігається рівномірно на $[a, b]$ до функції g. Довести це.

3. Нехай

$$X := \{\varphi : [a, b] \to \mathbf{R} \mid \exists L = L(\varphi) \in \mathbf{R} \quad \forall x \in [a, b] : |\varphi(x)| \leqslant L\},$$

$$\sigma(\varphi, \psi) := \sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x) - \psi(x)|, \ \{\varphi, \psi\} \subset X.$$

Довести, що (X, σ) — повний метричний простір і що система обмежених на $[a, b]$ функцій $\{f(x, y), x \in [a, b] : y \in Y\}$ збігається рівномірно на $[a, b]$ при $y \to y_0$ до функції g тоді й тільки тоді, коли $f(\cdot, y) \to g$ в (X, σ) при $y \to y_0$.

ТЕОРЕМА. Нехай $Y \subset \mathbf{R}$, $\tilde{y}_0$ — гранична точка Y і $f : [a, b] \times Y \to \mathbf{R}$. Припустимо, що:

1) $\forall y \in Y : f(\cdot, y) \in \mathbf{R}([a, b])$;

2) система $\{f(\cdot, y) : y \in Y\}$ збігається рівномірно на $[a, b]$ при $y \to y_0$ до функції g.

Тоді $g \in \mathbf{R}([a, b])$ і

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Доведення того, що $g \in \mathbf{R}([a, b])$, випливає з теореми п.4.2 глави 6, а останнє твердження теореми — з нерівності

$$\left| \int_a^b f(x, y)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x, y) - g(x)|\, dx, \quad y \in Y$$

і означення рівномірної збіжності.

Вправа

4. Нехай $f \in C^{(1)}([0, 1])$ і $F(x) := \int_0^1 f(t) \operatorname{sign} \sin(xt)\, dt$, $x > 0$. Обчислити F'.

§ 3. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА

3.1. ОЗНАЧЕННЯ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ НЕВЛАСНОГО ІНТЕГРАЛА

Нехай $a \in \mathbf{R}$, M — деяка множина і f: $[a, b] \times M \to \mathbf{R}$. Припустимо, що при кожному $A \geqslant a$, кожному $\alpha \in M$: $f(\cdot, \alpha) \in \mathbf{R}([a, A])$ і невласний інтеграл

$$\mathcal{J}(\alpha) := \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$$

вбігається. В § 3 і § 4 ці припущення будемо вважати виконаними.

Означення. Невласний інтеграл

$$\mathcal{J}(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx, \quad \alpha \in M$$

збігається рівномірно на M, якщо

$$\sup_{\alpha \in M} \left| \mathcal{J}(\alpha) - \int_a^A f(x, \alpha)\, dx \right| = \sup_{\alpha \in M} \left| \int_A^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx \right| \to 0$$

при $A \to +\infty$.

Приклади. 1. Невластивий інтеграл

$$\mathcal{J}(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \tag{1}$$

збігається для $\alpha > 1$. У випадку множини $M_1 = [2, +\infty)$ маємо для $A > 1$:

$$\sup_{\alpha \in [2, +\infty)} \left| \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \right| = \sup_{\alpha \in [2, +\infty)} \frac{1}{(\alpha - 1) A^{\alpha - 1}} \leqslant \frac{1}{A} \to 0, \quad A \to +\infty.$$

Тому інтеграл (1) збігається рівномірно на M_1. У випадку множини $M_2 = (1, +\infty)$ рівномірної збіжності немає, оскільки для $A > 0$

$$\sup_{\alpha \in (1, +\infty)} \left| \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \right| = \sup_{\alpha \in (1, +\infty)} \frac{1}{(\alpha - 1) A^{\alpha - 1}} = +\infty.$$

2. Невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \tag{2}$$

збігається для будь-якого $\alpha \in \mathbf{R}$ за ознакою Діріхле. Нехай $M(\gamma) := \{\alpha \in \mathbf{R} \mid |\alpha| \geqslant \gamma\}$ для $\gamma > 0$. Інтеграл (2) збігається рівномірно на множині $M(\gamma)$, оскільки для $A > 0$

$$\sup_{\alpha \in M(\gamma)} \left| \int_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \right| = \sup_{\alpha \in M(\gamma)} \left| \int_A^{+\infty} \frac{\sin |\alpha| x}{|\alpha| x} |\alpha|\, dx \right| =$$

$$= \sup_{\alpha \in M(\gamma)} \left| \int_{|\alpha| A}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| = \sup_{B \geqslant \gamma A} \left| \int_B^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \to 0, \quad A \to +\infty.$$

Інтеграл (2) не збігається рівномірно на $M = \mathbf{R}$, оскільки для $A>0$

$$\sup_{\alpha\in\mathbf{R}}\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx\right| = \sup_{B>0}\left|\int_B^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \geqslant \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx > 0.$$

Зауваження. Згідно з означенням, рівномірна на M збіжність невласного інтеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx, \quad \alpha\in M$$

рівносильна рівномірній на M збіжності невласного інтеграла

$$\int_b^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx, \quad \alpha\in M$$

для будь-якого $b>a$.

За допомогою критерію Коші рівномірної збіжності послідовності отримаємо такий критерій рівномірної збіжності невласного інтеграла:

ТЕОРЕМА. Для того щоб невласний інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx, \quad \alpha\in M$$

збігався рівномірно на множині M, необхідно й достатньо, щоб

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A_0>a\ \forall A'\geqslant A_0\ \forall A''\geqslant A_0\ \forall\alpha\in M:$$
$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,\alpha)\,dx\right|<\varepsilon.$$

3.2. ОЗНАКИ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ

ТЕОРЕМА 1 (ознака Вейєрштрасса). Нехай функції

$$f:\ [a,b]\times M\to\mathbf{R}\ \text{ і }\ g:\ [a,b]\to\mathbf{R}$$

такі, що:

1) $\forall x\geqslant a\ \forall\alpha\in M:\ |f(x,\alpha)|\leqslant g(x)$;

2) $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ збігається.

Тоді невласний інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx, \quad \alpha \in M$$

збігається рівномірно на M.

$\vdash$ Інтеграл збігається абсолютно при будь-якому $\alpha \in M$. Твердження про рівномірну збіжність випливає з оцінки

$$\sup_{\alpha \in M} \left| \int_A^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx \right| \leqslant \int_A^{+\infty} g(x)\, dx \to 0, \quad A \to +\infty. \qquad \dashv$$

Приклади. 1. Невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x^2}{1 + x^2}\, dx, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

збігається рівномірно на $\mathbf{R}$ за теоремою 1 для $a = 0$, $M = \mathbf{R}$

$$f(x, \alpha) = \frac{\sin \alpha x^2}{1 + x^2}, \quad x \geqslant 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}; \quad g(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \geqslant 0.$$

2. Інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\alpha \cos \alpha^2 x}{\alpha + x^\alpha}\, dx, \quad \alpha \in [2, 10]$$

збігається рівномірно на відрізку $[2, 10]$ за теоремою 1 для $a = 1$, $M = [2, 10]$

$$f(x, \alpha) = \frac{\alpha \cos \alpha^2 x}{\alpha + x^\alpha}, \quad x \geqslant 1, \ \alpha \in [2, 10]; \ g(x) = \frac{10}{2 + x^2}, \quad x \geqslant 1.$$

ТЕОРЕМА 2 (ознака Діріхле). Припустимо, що функції

$$f\colon [a, +\infty) \times M \to \mathbf{R}, \quad g\colon [a, +\infty) \times M \to \mathbf{R}$$

задовольняють умовам:

1) $\exists C \in \mathbf{R} \ \sup\limits_{\alpha \in M} \sup\limits_{A \geqslant a} \left| \int_a^A f(x, \alpha)\, dx \right| \leqslant C$;

2) $\forall \alpha \in M$ функція $g(\cdot, \alpha)$ монотонна на $[a, +\infty)$;

3) $h(x) := \sup\limits_{\alpha \in M} |g(x, \alpha)| \to 0, \quad x \to +\infty$.

Тоді невласний інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, g(x, \alpha)\, dx, \quad \alpha \in M \tag{1}$$

збігається рівномірно на M.

$\vdash$ Будемо доводити теорему при додаткових припущеннях:

$\forall (x, \alpha) \in [a, +\infty) \times M$ існує $g_1'(x, \alpha)$;

$\forall \alpha \in M \ \forall A \geqslant a: \ g_1'(\cdot, \alpha) \in \mathbf{R}([a, A])$;

$\forall \alpha \in M: \ f(\cdot, \alpha) \in \mathbf{C}([a, +\infty])$.

Інтеграл (1) збігається для $\alpha \in M$ за ознакою Діріхле збіжності невласного інтеграла. Нехай

$$F(x, \alpha) := \int_a^x f(u, \alpha)\, du, \quad x \geqslant a, \quad \alpha \in M,$$

при цьому $F_1'(x, \alpha) = f(x, \alpha)$, $x \geqslant a$, $\alpha \in M$. Застосовуючи формулу інтегрування за частинами, отримаємо:

$$\sup_{\alpha \in M} \left| \int_A^{+\infty} f(x, \alpha)\, g(x, \alpha)\, dx \right| = \sup_{\alpha \in M} \left| \int_A^{+\infty} F_1'(x, \alpha)\, g(x, \alpha)\, dx \right| =$$

$$= \sup_{\alpha \in M} \left| F(x, \alpha)\, g(x, \alpha) \Big|_{x=A}^{x \to +\infty} - \int_A^{+\infty} F(x, \alpha)\, g_1'(x, \alpha)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant Ch(A) + C \sup_{\alpha \in M} \left| \int_A^{+\infty} g_1'(x, \alpha)\, dx \right| \leqslant 2Ch(A) \to 0, \ A \to +\infty. \ \dashv$$

Приклади. 3. За допомогою теореми 2 легко одержується рівномірна на $M(\gamma)$ збіжність інтеграла (2) п. 3.1. Для доведення треба покласти $a = 1$, $f(x, \alpha) = \sin \alpha x$, $g(x, \alpha) = \frac{1}{x}$, $x \geqslant 1$, $\alpha \in M(\gamma)$. Умови теореми 2 перевіряються легко (див. наступний приклад).

4. Невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha\, dx, \quad \alpha \in M(\gamma) := \{\alpha \in \mathbf{R} \mid \alpha \geqslant \gamma\}; \quad \gamma > 1$$

збігається рівномірно на $M(\gamma)$. Для доведення в теоремі 2 візьмемо $a = 1$, $f(x, \alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \sin x^\alpha$, $g(x, \alpha) = \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}}$ для $x \geqslant 1$, $\alpha \in M(\gamma)$. Тоді

$$\sup_{\alpha \in M(\gamma)} \sup_{A \geqslant 1} \left| \int_1^A \alpha x^{\alpha-1} \sin x^\alpha dx \right| \leqslant 2.$$

Умова 2) виконана і $h(x) = \sup_{\alpha \in M(\gamma)} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\gamma x^{\gamma-1}} \to 0, \quad x \to +\infty.$

Вправи

1. Довести рівномірну збіжність на $M = \{\alpha \in \mathbf{R} \mid |\alpha| \geqslant 1\}$ **невласного інтеграла** $\int_0^{+\infty} \sin(\alpha x^3)\, dx, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$

2. Нехай $f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $\forall A > 0: f \in \mathbf{R}([0, A])$ і

$$\sup_{0 \leqslant A < +\infty} \left| \int_0^A e^{-\alpha_0 x} f(x)\, dx \right| < +\infty, \quad \alpha_0 \in \mathbf{R}.$$

Довести, що інтеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\, dx, \quad \alpha > \alpha_0$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$ збігається рівномірно щодо $\alpha \in [\alpha_0 + \varepsilon, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 3 (ознака Абеля). Припустимо, що функції

$$f: [a, +\infty) \times M \to \mathbf{R}; \quad g: [a, +\infty) \times M \to \mathbf{R}$$

задовольняють умовам:

1) невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$ збігається рівномірно на M;

2) $\forall \alpha \in M$ функція $g(\cdot, \alpha)$ монотонна на $[a, +\infty)$;

3) $\exists C \in \mathbf{R}: \sup_{x \geqslant a} \sup_{\alpha \in M} |g(x, \alpha)| \leqslant C$.

Тоді невласний інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, g(x, \alpha)\, dx, \quad \alpha \in M$$

збігається рівномірно на M.

$\vdash$ Доведення проведемо при тих же додаткових припущеннях, при яких доводилася теорема 2. Нехай для $A > a$

$$G(x, \alpha; A) := \int_A^x f(u, \alpha)\, du, \quad x \geqslant A, \quad \alpha \in M.$$

Застосувавши формулу інтегрування за частинами, отримаємо

$$\sup_{\alpha \in M} \left| \int_A^{+\infty} f(x, \alpha)\, g(x, \alpha)\, dx \right| = \sup_{\alpha \in M} \left| \lim_{x \to +\infty} (G(x, \alpha; A)\, g(x, \alpha)) - \right.$$

$$\left. - \int_A^{+\infty} G(x, \alpha; A)\, g_1'(x, \alpha)\, dx \right| \leqslant C \sup_{\alpha \in M} \left| \int_A^{+\infty} f(u, \alpha)\, du \right| +$$

$$+ \sup_{\alpha \in M} \sup_{x \geqslant A} |G(x, \alpha; A)| \cdot \left| \int_A^{+\infty} g_1'(x, \alpha)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{\alpha \in M} \left| \int_A^{+\infty} f(u, \alpha)\, du \right| + \sup_{\alpha \in M} \sup_{x \geqslant A} |G(x, \alpha; A)| 2C \to 0, A \to +\infty.$$

$\lrcorner$

Приклади. 5. Невласний інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha \in [a, +\infty)$ збігається рівномірно за теоремою 3 для $a = 0$, $C = 1$,

$$f(x, \alpha) = \frac{\sin x}{x}, \ x > 0; \quad g(x, \alpha) = e^{-\alpha x}, \quad x \geqslant 0, \quad \alpha \in M.$$

6. Невласний інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{dx}{1 + \alpha x^2}$, $\alpha \in [0, +\infty)$ збігається рівномірно на $[0, +\infty)$.

§ 4. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ, ЩО ВИЗНАЧЕНІ ЗА ДОПОМОГОЮ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ

4.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ

Припустимо, що $M = [c, d] \subset \mathbf{R}$, далі розглядаємо властивості невласного інтеграла

$$\mathcal{J}(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx, \quad \alpha \in [c, d],$$

як функції від α.

ТЕОРЕМА 1 (про неперервність невласного інтеграла за параметром). Припустимо, що:

1) $f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$;

2) невласний інтеграл $\mathcal{J}(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx, \quad \alpha \in [c, d]$ збігається рівномірно на $[c, d]$.

Тоді $\mathcal{J} \in \mathbf{C}([c, d])$.

$\ulcorner$ Для $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant a$ покладемо

$$\mathcal{J}_n(\alpha) := \int_a^n f(x, \alpha)\, dx, \quad \alpha \in [c, d].$$

За теоремою 1 п. 2.2. функція $\mathcal{J}_n \in \mathbf{C}([c, d])$ для кожного $n \geqslant a$. Крім того, за умовою 2 теореми

$$\sup_{\alpha \in [c,d]} |\mathcal{J}(\alpha) - \mathcal{J}_n(\alpha)| = \sup_{\alpha \in [c,d]} \left| \int_n^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx \right| \to 0, \quad \to \infty.$$

Отже, функція $\mathcal{J}$ є рівномірною на $[c, d]$ границею послідовності $\{\mathcal{J}_n : n \geqslant a\}$ неперервних на відрізку $[c, d]$ функцій і за лемою 1 п. 1.2 глави 8 є неперервною на $[c, d]$. ⌋

ТЕОРЕМА 2 (про граничний перехід під знаком невласного інтеграла). Нехай $M \subset \mathbf{R}$, α_0 — гранична точка M. ⌈Припустимо, що функції $f: [a, +\infty) \times M \to \mathbf{R}$ і $g: [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ задовольняють умовам:

1) $\forall A \geqslant a: \sup\limits_{x \in [a, A]} |f(x, \alpha) - g(x)| \to 0, \ \alpha \to \alpha_0$;

2) невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx, \quad \alpha \in M$ збігається рівномірно на M.

Тоді

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx = \int_a^{+\infty} g(x)\, dx.$$

⌈ Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ збігається згідно з критерієм Коші. Для заданого $\varepsilon > 0$ згідно з умовою 2)

$$\exists A_0 \geqslant a \ \forall A' \geqslant A_0 \ \forall A'' \geqslant A_0 \ \forall \alpha \in M: \left| \int_{A'}^{A''} f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Застосовуючи до останнього інтеграла теорему п. 2.3, отримаємо

$$\left| \int_{A'}^{A''} g(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

Далі при будь-якому $A \geqslant a$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx - \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_a^{A} f(x, \alpha)\, dx - \int_a^{A} g(x)\, dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx \right| +$$

$$+\left|\int_A^{+\infty} g(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^A f(x,\ \alpha)\,dx - \int_a^A g(x)\,dx\right| +$$

$$+\sup_{\alpha\in M}\left|\int_A^{+\infty} f(x,\ \alpha)\,dx\right| + \left|\int_A^{+\infty} g(x)\,dx\right|.$$

Використовуючи теорему п. 2.3, умову 2) і збіжність інтеграла від g на інтервалі $[a,\ +\infty)$, отримуємо твердження теореми. —

Зауваження. Випадок, коли $\alpha_0 = +\infty$, також можливий.

ТЕОРЕМА 3 (про інтегрування за параметром). Припустимо, що:

1) $f \in \mathbf{C}([a,\ +\infty) \times [c,\ d])$;

2) інтеграл $\mathcal{J}(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x,\ \alpha)\,dx$, $\alpha \in [c,\ d]$ збігається рівномірно на $[c,\ d]$.

Тоді $\mathcal{J} \in \mathbf{C}([c,\ d])$ і

$$\int_c^d \mathcal{J}(\alpha)\,d\alpha = \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x,\ \alpha)\,dx\right) d\alpha = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x,\ \alpha)\,d\alpha\right) dx. \qquad (1)$$

⌈ Те, що $\mathcal{J} \in \mathbf{C}([c,\ d])$, випливає з теореми 1. Далі для будь-якого $A > a$

$$\int_c^d \mathcal{J}(\alpha)\,d\alpha = \int_c^d \left(\int_a^A f(x,\ \alpha)\,dx\right) d\alpha + r(A),$$

де

$$r(A) := \int_c^d \left(\int_A^{+\infty} f(x,\ \alpha)\,dx\right) d\alpha.$$

Згідно з умовою 2)

$$|r(A)| \leqslant \sup_{\alpha\in[c,d]} \left|\int_A^{+\infty} f(x,\ \alpha)\,dx\right| (d-c) \to 0,\ A \to +\infty.$$

Згідно з теоремою 3 п. 2.2

$$\int_c^d \mathcal{J}(\alpha)\,d\alpha = \int_a^A \left(\int_c^d f(x,\ \alpha)\,d\alpha\right) dx + r(A).$$

Отже, при $A \to +\infty$ отримуємо збіжність невласного інтеграла із правої частини рівності (1) і шукану рівність. ⌋

ТЕОРЕМА 4 (про диференціювання по параметру). Припустимо, що для $f: [a, +\infty) \times [c, d] \to \mathbf{R}$ виконані умови:

1) існує f'_α і $f'_\alpha \in \mathbf{C}([a, +\infty) \times [c, d])$;

2) $\exists a_0 \in [c, d]$, для якого $\int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha_0)\, dx$ збігається;

3) $\int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$, $\alpha \in [c, d]$ збігається рівномірно на $[c, d]$.

Тоді інтеграл $\mathcal{J}(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$ збігається для $\alpha \in [c, d]$, $\forall \alpha \in [c, d]$ існує $\mathcal{J}'(\alpha)$ і

$$\mathcal{J}'(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

$\vdash$ Можна вибрати $\alpha_0 = c$. Згідно з умовами 1) і 3) теореми і твердженням теореми 1 функція

$$I(\alpha) := \int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx, \quad \alpha \in [c, d] \tag{2}$$

неперервна на відрізку $[c, d]$. Застосуємо до невласного інтеграла (2) теорему 3:

$$\int\limits_c^\alpha I(u)\, du = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^\alpha f'_\alpha(x, u)\, du \right) dx = \int\limits_a^{+\infty} (f(x, \alpha) - f(x, c))\, dx.$$

Враховуючи умову 2), отримаємо збіжність інтеграла $\mathcal{J}(\alpha)$, $\alpha \in [c, d]$ і рівність

$$\mathcal{J}(\alpha) = \int\limits_c^\alpha I(u)\, du + C, \quad \alpha \in [c, d],$$

де $I \in \mathbf{C}([c, d]$ і число $C = \int\limits_a^{+\infty} f(x, c)\, dx$. Із властивостей інтеграла із змінною верхньою границею отримуємо твердження теореми. $\dashv$

Приклади. 1. Доведемо, що $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

$\ulcorner$ Для $\alpha \in \mathbf{R}$ розглянемо збіжний інтеграл $F(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$.

Легко показати, що $\forall \alpha \in \mathbf{R}$: $F(-\alpha) = -F(\alpha)$, $F(0) = 0$; $F(\alpha) = F(1)$ для $\alpha > 0$. Нехай $\beta > 0$.

Розглянемо інтеграл $\mathcal{J}(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x}\, dx$, $\alpha \in \mathbf{R}$,

в якому після природного довизначення підінтегральної функції f у точці 0 можна застосувати теорему 4 для будь-якого відрізка $[c, d]$, оскільки для $f'_\alpha(x, \alpha) = \cos \alpha x \cdot e^{-\beta x}$, $x \geqslant 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, умови теореми 4 виконані. Тому

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}: \ \frac{d\mathcal{J}(a)}{d\alpha} = \int\limits_0^{+\infty} \cos \alpha x e^{-\beta x}\, dx.$$

Інтегруючи двічі за частинами, отримаємо $\mathcal{J}'(\alpha) = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Таким чином, $\mathcal{J}(\alpha) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} + C$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Оскільки $\mathcal{J}(0) = 0$, то $C = 0$. Нехай далі $\alpha = 1$. Інтеграл $\mathcal{J}(1)$ збігається рівномірно щодо $\beta \geqslant 0$ згідно з ознакою Абеля рівномірної збіжності. Згідно з теоремою 1 інтеграл $\mathcal{J}(1)$ є неперервною функцією від β, $\beta \in [0, +\infty)$. Тому

$$\lim_{\beta \to 0+} \mathcal{J}(1) = \lim_{\beta \to 0+} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Крім того, $\lim\limits_{\beta \to 0+} \mathcal{J}(1) = \lim\limits_{\beta \to 0+} \operatorname{arctg} \frac{1}{\beta} = \frac{\pi}{2}$. $\lrcorner$

2 (інтеграл Фруллані). Нехай $f \in C^{(1)}([0, +\infty))$, причому f' монотонна на $[0, +\infty)$ і існує $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =: f(+\infty)$. Тоді

$$\forall a \geqslant 0 \ \ \forall b \geqslant 0: \ \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, dx = (f(+\infty) - f(0)) \ln \frac{b}{a}.$$

$\ulcorner$ Нехай $a < b$. До інтеграла $\int\limits_0^{+\infty} f'(\alpha x)\, dx$, $\alpha \in [a, b]$, який рівномірно збігається за ознакою Вейєрштрасса рівномірної збіжності, застосуємо теорему 3:

$$\int\limits_a^b \frac{f(+\infty) - f(0)}{\alpha}\, d\alpha = \int\limits_a^b \left(\int\limits_0^{+\infty} f'(\alpha x)\, dx \right) d\alpha = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, dx. \ \lrcorner$$

Вправи

1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\,dx$, $\{\alpha.\ \beta\} \subset \mathbf{R}$.

2. Для $\alpha > 0$, $\beta > 0$ обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \sin\alpha x \cdot e^{-\beta x}\,dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha x}\sin\beta x dx$;

д) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha x}\cos\beta x dx$; є) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x}\cos\beta x dx$.

ТЕОРЕМА 5 (про інтегрування по нескінченному проміжку). Нехай функція $f: [a, +\infty) \times [c, +\infty) \to \mathbf{R}$ задовольняє умовам:

1) $f \in \mathbf{C}([a, +\infty) \times [c, +\infty))$;

2) $\forall d > c$: $\int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx$ збігається рівномірно на $[c, d]$;

3) $\forall b > a$: $\int\limits_c^{+\infty} f(x, \alpha)\,d\alpha$ збігається рівномірно на $[a, b]$;

4) для $x \geqslant a$, $\alpha \geqslant c$ збігаються інтеграли

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x, \alpha)|\,dx, \quad \int\limits_c^{+\infty} |f(x, \alpha)|\,d\alpha$$

і збігається хоча б один із інтегралів

$$\int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^{+\infty} |f(x, \alpha)|\,d\alpha\right) dx, \quad \int\limits_c^{+\infty} \left(\int\limits_a^{+\infty} |f(x, \alpha)|\,dx\right) d\alpha. \qquad (3)$$

Тоді має місце рівність

$$\int\limits_c^{+\infty} \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx\right) d\alpha = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^{+\infty} f(x, \alpha)\,d\alpha\right) dx,$$

в якій всі інтеграли збігаються.

$\ulcorner$ Припустимо, що збігається перший із інтегралів (3) Спочатку використаємо умови 1), 2) і теорему 3 для $d > c$

$$\int\limits_c^{d} \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx\right) d\alpha = \int\limits_a^{+\infty} F(x, d)\,dx,$$

де $F(x, d) := \int\limits_c^d f(x, \alpha)\, d\alpha, \quad x \geqslant a, \quad d > c$. Зауважимо, що

$$\forall x \geqslant a \quad \forall d \geqslant c: \quad |F(x, d)| \leqslant g(x) := \int\limits_0^{+\infty} |f(x, \alpha)|\, d\alpha,$$

і згідно з умовою 4) $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ збігається. Тому за ознакою Вейєрштрасса $\int\limits_a^{+\infty} F(x, d)\, dx, \quad d \geqslant c$ збігається рівномірно на $[c, +\infty)$. Крім того, $\forall A \geqslant a$:

$$\sup_{x \in [a, A]} \left| F(x, d) - \int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha \right| = \sup_{x \in [a, A]} \left| \int\limits_d^{+\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha \right| \to 0,$$

$$d \to +\infty.$$

Тому згідно з теоремою 2 існує границя

$$\lim_{d \to +\infty} \int\limits_a^{+\infty} F(x, d)\, dx = \int\limits_a^{+\infty} \left(\lim_{d \to +\infty} F(x, d) \right) dx =$$

$$= \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^{+\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha \right) dx. \qquad \lrcorner$$

4.2. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ЕЙЛЕРА—ПУАССОНА

Доведемо рівність $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\ulcorner$ У збіжному інтегралі $\mathcal{J} := \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ зробимо заміну змінної $x = \alpha t$, де число $\alpha > 0$: $\mathcal{J} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2} \alpha dt$. Далі маємо

$$\mathcal{J}^2 = \int\limits_0^{+\infty} \mathcal{J} e^{-\alpha^2} d\alpha = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 t^2 - \alpha^2} dt \right) d\alpha.$$

Оскільки зовнішній інтеграл для $\mathcal{J}^2$ збігається, то

$$\mathcal{J}^2 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 t^2 - \alpha^2} dt \right) d\alpha.$$

Для $\varepsilon > 0$ до інтеграла

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 t^2 - \alpha^2} dt \right) d\alpha$$

застосуємо теорему 5 п. 4.1. Умова 1) цієї теореми виконана; крім того

$$\forall d > 0: \sup_{\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant d} \int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt \leqslant d \int_A^{+\infty} e^{-\varepsilon^2(1+t^2)} dt \to 0,$$

$$A \to +\infty;$$

$$\forall b \geqslant 0: \sup_{0 \leqslant t \leqslant b} \int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha \leqslant \int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha \to 0, \quad A \to +\infty.$$

Далі, згідно з теоремою 1 п. 4.1

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)} dt \to \frac{\pi}{4}, \ \varepsilon \to 0+.$$

Таким чином, $\mathcal{J}^2 = \frac{\pi}{4}$. ⌋

Вправи

3. Довести рівності:

а) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0;$

б)* $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha},$

$\alpha \geqslant 0$ (інтеграли Лапласа);

в) $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (інтеграли Френеля).

4. Нехай $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_i(x)|^j dx < +\infty, \ i, j = 1, 2;$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad h(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u) f_2(u) du.$$

Обчислити $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx.$

5*. Обгрунтувати таке обчислення інтеграла Ейлера — Пуассона:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}t\,dt\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Вказівка. Використати формулу Валліса.

4.3. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ВІД НЕОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА

Нехай $M \subset \mathbf{R}$, $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$; $f\colon [a, b) \times M \to \mathbf{R}$ така функція, що при деяких $\alpha \in M$ функція $f(\cdot, \alpha)\colon [a, b) \to \mathbf{R}$ не є обмеженою в околі точки b. Припустимо, що

$$\forall\, \alpha \in M\colon \int_a^b f(x, \alpha)\,dx$$

збігається.

Означення. Інтеграл

$$\int_a^b f(x, \alpha)\,dx, \quad \alpha \in M \tag{1}$$

збігається рівномірно на M, якщо

$$\sup_{\alpha\in M}\left|\int_{b-\varepsilon}^b f(x, \alpha)\,dx\right| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Дослідження властивостей інтеграла виду (1) цілком аналогічне дослідженню властивостей інтегралів по необмежених інтервалах. На інтеграли виду (1) можна перенести твердження § 3, 4, зокрема, має місце ознака Вейєрштрасса.

§ 5. ГАММА-ФУНКЦІЯ. БЕТА-ФУНКЦІЯ

5.1. ВИЗНАЧЕННЯ ГАММА-ФУНКЦІЇ. ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ

Гамма-функція Γ визначається для значень $\alpha > 0$ таким чином:

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \ \alpha > 0.$$

Інтеграл, що задає $\Gamma(\alpha)$, є сумою

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 e^{-x} x^{\alpha-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \tag{1}$$

де перший інтеграл збігається при $\alpha > 0$, оскільки

$$e^{-x} x^{\alpha-1} \sim x^{\alpha-1}, \ x \to 0+,$$

а другий — для будь-якого $\alpha \in \mathbf{R}$.

Використовуючи рівномірно збіжний на $[0, 1]$ ряд Тейлора для функції $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathrm{R}$, з рівності (1) одержимо таке зображення для $\Gamma(\alpha)$:

$$\Gamma(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+\alpha)} + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx. \tag{2}$$

Зауважимо, що формула (2) дозволяє додатково визначити функцію Γ для всіх значень $\alpha \in \mathbf{R}$, виключаючи числа $0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$, оскільки при всіх таких α права частина рівності (2) визначена.

Наведемо найпростіші властивості функції Γ.

1°. З означення випливає, що $\forall \alpha > 0$: $\Gamma(\alpha) > 0$.

2°. З формули (2) випливає, що $\Gamma(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} + C$, $\alpha \to 0+$,

де C — деяке число.

3°. Функція Γ має на $(0, +\infty)$ похідні всіх порядків, які можна отримати за допомогою диференціювання під знаком інтеграла. Наприклад,

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln x dx,$$

$$\Gamma''(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^2 dx > 0, \ \alpha > 0.$$

|— Для доведення диференційовності у фіксованій точці $\alpha_0 > 0$ потрібно до інтегралів у рівності (1) і $\alpha \in [\beta, \gamma]$, де $0 < \beta < \alpha_0 < \gamma$, застосувати теорему 4 п. 4.1. —|

4°. $\forall \alpha > 0$: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ (функціональне рівняння для гамма-функції).

|— Для доведення використаємо формулу інтегрування частинами

$$\Gamma(\alpha + 1) = \lim_{x \to +\infty} (-x^{\alpha} e^{-x}) - 0 + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha - 1} e^{-x} dx =$$

$$= \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0.$$ —|

Зауваження. З властивості 4° випливає, що функція Γ на $(0, +\infty)$ визначається своїми значеннями на $(0, 1]$. Крім того, функціональне рівняння дозволяє довизначити гамма-функцію на всю вісь, за винятком точок $0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ А саме для $\alpha \in (-1, 0)$

$$\Gamma(\alpha) := \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha}$$

(зауважимо, що $\alpha + 1 \in (0, 1)$), потім для $\alpha \in (-2, -1)$

$$\Gamma(\alpha) := \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha},$$

де $\alpha + 1 \in (-1, 0)$ та ін.

Далі припускаємо, що функція Γ визначена на множині $\mathbf{R} \setminus \{0, -1, -2, .—, -n, \ldots\}$ за допомогою функціонального рівняння і інтеграла п. 5.1 при $\alpha > 0$.

5°. Зауважимо, що

$$\Gamma(1) = 1, \ \Gamma(2) = 1; \ \Gamma(n) = (n - 1)!, \ n \in \mathbf{N}; \ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

|— Останню рівність одержимо за допомогою заміни змінної $x = t^2$ і використання інтеграла Ейлера—Пуассона. —|

Вправи

1. Побудувати графік Γ функції.

2. Для $n \in \mathbf{N}$ обчислити $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

3. Довести, що $\Gamma(\alpha) \to +\infty$, $\alpha \to +\infty$.

4. Перевірити, що функція Γ строго опукла вниз на $(0, +\infty)$.

Означення. Нехай A — інтервал. Функція f: $A \to (0, +\infty)$ називається ***логарифмічно опуклою вниз на*** A, якщо $\ln f$ є опуклою вниз на A функцією.

6°. Гамма-функція логарифмічно опукла вниз на $(0, +\infty)$.

$\ulcorner$ Щоб упевнитися, що функція $\ln \Gamma$ опукла вниз згідно з властивостями 1° і 3°, розглянемо значення

$$(\ln \Gamma)'' = \Gamma^{-2}(\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2).$$

Використовуючи нерівність Коші, одержимо $\forall \alpha \in (0, +\infty)$:

$$(\Gamma'(\alpha))^2 = \left(\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx\right)^2 =$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} (x^{(\alpha-1)/2}e^{-(x/2)})(x^{\alpha-1/2}e^{-x/2}\ln x)\,dx\right)^2 < \Gamma(\alpha)\Gamma''(\alpha).$$

Тому $\forall \alpha > 0$: $(\ln \Gamma(\alpha))'' > 0$. $\lrcorner$

Вправи

5.* Довести, що сума і добуток логарифмічно опуклих на A функцій є логарифмічно опуклими на A. Розглянути випадок функцій класу $C^2(A)$.

6.* Довести, що додатна поточкова границя на A послідовності логарифмічно опуклих на A функцій є логарифмічно опукла на A функція.

5.2. ОСНОВНА ТЕОРЕМА ГАММА-ФУНКЦІЇ

ТЕОРЕМА. Припустимо, що для функції f: $(0, +\infty) \to \mathbf{R}$ виконані умови:

1) $f(1) = 1$;
2) $\forall \alpha > 0$: $f(\alpha + 1) = \alpha f(\alpha)$;
3) f — логарифмічно опукла на $(0, +\infty)$.

Тоді

$$\forall \alpha > 0:\ f(\alpha) = \Gamma(\alpha). \tag{1}$$

$\ulcorner$ З умов 1) і 2) випливає, що $\forall n \in \mathbf{N}$: $f(n) = (n-1)!$ Рівність (1) досить довести для $\alpha \in (0, 1]$. Зауважимо, що $\forall \alpha \in (0, 1]$ $\forall n \geqslant 2$: $n - 1 < n + \alpha \leqslant n + 1$. Оскільки функція $\ln f$ опукла вниз на $(0, +\infty)$, то для нахилу відносно точки $x = n$ маємо

$$\frac{\ln f(n-1) - \ln f(n)}{(n-1) - n} \leqslant \frac{\ln f(n+\alpha) - \ln f(n)}{(n+\alpha) - n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{(n+1) - n} \Rightarrow \ln(n-1) \leqslant \frac{\ln f(n+\alpha) - \ln((n-1)!)}{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \ln n \Rightarrow (n-1)^\alpha (n-1)! \leqslant f(n+\alpha) \leqslant n^\alpha (n-1)! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)^{\alpha}(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} \leqslant f(\alpha) \leqslant \frac{n^{\alpha}(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} =$$

$$= \frac{n^{\alpha}n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} \cdot \frac{\alpha+n}{n}, \qquad (2)$$

оскільки за умовою 2)

$$f(n+\alpha) = (n+\alpha-1)f(n+\alpha-1) = \dots$$

$$\dots = (n-1+\alpha)(n-2+\alpha)\dots\alpha f(\alpha).$$

Враховуючи нерівність із співвідношення (2), отримаємо

$$\frac{n}{\alpha+n} f(\alpha) \leqslant \frac{n^{\alpha}n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} \leqslant f(\alpha).$$

Таким чином, для будь-якого $\alpha \in (0, 1]$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} = f(\alpha). \qquad (3)$$

Тому функція f визначається на $(0, 1]$ єдиним чином. Оскільки функція Γ задовольняє умовам 1)—3) теореми, то $f = \Gamma$. $\lrcorner$

5.3. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ГАММА-ФУНКЦІЇ

1°. Формула Ейлера:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots, -n, \dots\}:$$

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}. \qquad (1)$$

$\ulcorner$ Формула (1) для $\alpha \in (0, 1]$ доведена в п. 5.2 (див. рівність (3) п. 5.2.). Визначимо

$$\Gamma_n(\alpha) := \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, -1, \dots, -n, \dots\}.$$

Для $\beta \in (1, 2]$ маємо

$$\Gamma_n(\beta) = \frac{n(\beta-1)}{\beta+n} \Gamma_n(\beta-1),$$

де $(\beta-1) \in (0, 1]$. Тому існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(\beta) = (\beta-1)\Gamma(\beta-1) = \Gamma(\beta).$$

Таким же чином розглядаємо інтервал $(2, 3]$ і т. д.

Якщо $\beta \in (-1, 0)$, то

$$\Gamma_n(\beta) = \frac{\beta + 1 + n}{n\beta} \Gamma_n(\beta + 1),$$

де $(\beta + 1) \in (0, 1)$. Тому існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(\beta) = \frac{1}{\beta} \Gamma(\beta + 1) = \Gamma(\beta). \quad \lrcorner$$

2°. Зображення Вейєрштрасса:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, -1, \ldots, -n, \ldots\}: \Gamma(\alpha) =$$

$$= e^{-C\alpha} \frac{1}{\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\alpha}{n}}}{1 + \frac{\alpha}{n}}, \tag{2}$$

де $C := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$, $C \approx 0{,}5772\ldots$, C — ***стала Ейлера.***

$\ulcorner$ Зобразимо Γ_n у вигляді

$$\Gamma_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha \ln n} \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{1} + 1\right)\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \ldots \left(\frac{\alpha}{n} + 1\right)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\gamma_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{\alpha/k}}{1 + (\alpha/k)}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, -1, \ldots, -n, \ldots\},$$

де $\gamma_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \geqslant 1$. Як було доведено в п. 2.2 глави 7, послідовність $\{\gamma_n: n \geqslant 1\}$ збігається. Тому збігається добуток в рівності (2) і ця рівність має місце. $\lrcorner$

3°. Формула подвоєння Лежандра;

$$\forall \alpha > 0: \ 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, \Gamma(\alpha).$$

$\ulcorner$ Нехай

$$f(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right) 2^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0,$$

і доведемо, що f задовольняє умовам теореми п. 5.2. Дійсно,

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1)\, 2^{1-1} = 1;$$

$$f(\alpha + 1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) 2^{\alpha} = \alpha f(\alpha), \quad \alpha > 0.$$

Крім того,

$$\ln f(\alpha) = -\ln\sqrt{\pi} + \ln\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \ln\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + (\alpha-1)\ln 2,$$

$$\alpha > 0,$$

є сумою з додатними коефіцієнтами функцій, опуклих вниз. Тому фунція $\ln f$ опукла вниз. За основною теоремою $f = \Gamma$. ⌋

4°. Функціональне рівняння Ейлера:

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}\colon\ \Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}. \tag{3}$$

⌈ Для $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ визначимо

$$\varphi(\alpha) := \Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha.$$

Функція φ періодична з періодом 1, оскільки

$$\varphi(\alpha+1) = \Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(-\alpha)\sin\pi(\alpha+1) =$$

$$= \alpha\Gamma(\alpha)\frac{\Gamma(1-\alpha)}{-\alpha}(-\sin\pi\alpha) = \varphi(\alpha),\ \ \alpha \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}.$$

Крім того, оскільки

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha =$$

$$= \Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)\left(\pi - \frac{\pi^3\alpha^2}{3!} + \frac{\pi^5\alpha^4}{5!} - \ldots\right),$$

то існує $\lim\limits_{\alpha\to 0}\varphi(\alpha) = \pi$.

Довизначимо тепер функцію φ, вважаючи, що вона дорівнює π в точках $\mathbf{Z}$. Довизначена функція φ має в точці $\alpha = 0$ похідні всіх порядків, оскільки їх мають $\Gamma(1+\alpha)$ $\Gamma(1-\alpha)$ і сума збіжного на осі степеневого ряду. Тому $\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$. Функція φ додатна на $\mathbf{R}$. Застосовуючи двічі формулу Лежандра, отримаємо

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\varphi\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \pi\varphi(\alpha) \tag{4}$$

спочатку для $0 < \alpha < 1$, а потім, враховуючи періодичність і визначення на $\mathbf{Z}$, і на $\mathbf{R}$.

Розглянемо тепер періодичну з періодом 1 функцію $\psi := \ln\varphi \in C^{\infty}(\mathbf{R})$. З рівності (4) для функції ψ' маємо

$$\frac{1}{2}\left(\psi'\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \psi'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right) = \psi'(\alpha),\ \ \alpha \in [0,\ 1].$$

Звідси для довільного $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} \psi'\left(\frac{\alpha+j}{2^n}\right) = \psi'(\alpha), \ \alpha \in [0, 1]$$

і за теоремою Дарбу для функції ψ' маємо

$$\int_0^1 \psi'(u)\, du = \psi'(\alpha), \ \alpha \in [0, 1],$$

тому за формулою Ньютона — Лейбніца

$$\psi'(\alpha) = \psi(1) - \psi(0) = 0, \ \alpha \in [0, 1].$$

Отже, $\psi(\alpha) = \psi(0)$, $\alpha \in [0, 1]$, а для значення $\psi(0) = \ln \varphi(0) = \ln \pi$. Таким чином.

$$\varphi(\alpha) = e^{\psi(\alpha)} = e^{\ln \pi} = \pi, \ \alpha \in [0, 1],$$

і тому $\varphi(\alpha) = \pi$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Якщо $\alpha \notin \mathbf{Z}$, то з останньої рівності і означення функції φ маємо

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi/(\sin \pi\alpha). \qquad \rfloor$$

Вправа
7. Довести, що

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2} + n \mid n \in \mathbf{Z}\right\}:$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \pi/(\cos \pi\alpha).$$

5.4. РОЗКЛАД СИНУСА В НЕСКІНЧЕННИЙ ДОБУТОК

Згідно з рівнянням Ейлера

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}: \ \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sin \pi\alpha = \pi,$$

або

$$-\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)\sin \pi\alpha = \pi.$$

З цієї рівності за допомогою зображення Вейерштрасса

$$\Gamma(\pm\alpha) = e^{\pi C\alpha} \frac{1}{\pm\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pm\frac{\alpha}{n}}}{1 \pm \frac{\alpha}{n}}, \ \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$$

отримаємо

$$\frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{n^2}}\sin\pi\alpha=\pi,$$

або

$$\sin\pi\alpha=\pi\alpha\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right)$$

спочатку для $\alpha\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$. У точках $\mathbf{Z}$ рівність також має місце. Тому

$$\forall\,\alpha\in\mathbf{R}:\ \sin\pi\alpha=\pi\alpha\prod_{n=1}^{\infty}(1-(\alpha^2/n^2)).$$

Вправи

8. Довести, що $\forall\,\alpha\in\mathbf{R}:\ \cos\pi\alpha=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4\alpha^2}{(2n-1)^2}\right)$.

9. Знайти значення добутку $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\left(n-\frac{1}{4}\right)^2}$.

10. Довести, що при $\alpha>0$

$$\int_0^{+\infty}x^{-n-1}\exp\left\{-\frac{\alpha}{2x^2}\right\}dx=2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\alpha^{-\frac{n}{2}}.$$

5.5. ФОРМУЛА Дж. СТІРЛІНГА [1]

$$\forall\,\alpha>0:\ \Gamma(\alpha)=\sqrt{2\pi}\,\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\alpha}e^{\frac{\theta(\alpha)}{12\alpha}},$$

де $0<\theta(\alpha)<1$.

I. Використовуючи ряд Тейлора для функції $f(x)=\ln(1+x)$, $|x|<1$, маємо

$$\forall\,x\in\mathbf{R},\ x\neq0,\ |x|<1:\ \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

II. Введемо функцію

$$F(\alpha):=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)-1,\ \alpha>0.$$

[1] *Дж. Стірлінг* (1692—1770) — шотландський математик.

З урахуванням I одержуємо

$$F(\alpha)=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2\alpha+1}}\ln\frac{1+\frac{1}{2\alpha+1}}{1-\frac{1}{2\alpha+1}}-1=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2\alpha+1)^{2n}},\quad \alpha>0.$$

Тому

$$0<F(\alpha)<\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\alpha+1)^{2n}}=\frac{1}{12\alpha(\alpha+1)}=$$

$$=\frac{1}{12\alpha}-\frac{1}{12(\alpha+1)},\quad \alpha>0.$$

III. Врахуємо останню оцінку для функції

$$\mu(\alpha):=\sum_{n=0}^{\infty}F(n+\alpha),\quad \alpha>0$$

і одержимо нерівності $0<\mu(\alpha)<\frac{1}{12\alpha}$, $\alpha>0$; звідки для $\theta(\alpha):=12\alpha\mu(\alpha)$, $\alpha>0$ маємо

$$\mu(\alpha)=\frac{\theta(\alpha)}{12\alpha},\quad 0<\theta(\alpha)<1,\quad \alpha>0.$$

Зауважимо також, що за теоремою про почленне диференціювання функціонального ряду

$$\mu''(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}F''(n+\alpha)>0,\quad \alpha>0$$

і

$$\mu(\alpha+1)-\mu(\alpha)=-F(\alpha),\quad \alpha>0.$$

IV. Розглянемо додатну функцію

$$f(\alpha):=\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\alpha+\mu(\alpha)},\quad \alpha>0;$$

доведемо, що функція $f/f(1)$ задовольняє умови основної теореми теорії гамма-функції. Дійсно, для $\alpha>0$

$$f(\alpha+1)=(\alpha+1)^{\alpha+1-\frac{1}{2}}e^{-\alpha-1+\mu(\alpha+1)}=$$

$$= (\alpha+1)^{\alpha+\frac{1}{2}} e^{-\alpha-1} e^{\mu(\alpha)} e^{\mu(\alpha+1)-\mu(\alpha)} =$$

$$= f(\alpha)(\alpha+1)^{\alpha+\frac{1}{2}} e^{-1} \alpha^{-\alpha+\frac{1}{2}} e^{-F(\alpha)} =$$

$$= f(\alpha)(\alpha+1)^{\alpha+\frac{1}{2}} e^{-1} \alpha^{-\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} e^{1} = \alpha f(\alpha).$$

Крім того,

$$(\ln f(\alpha))'' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} + \mu''(\alpha) > 0, \quad \alpha > 0,$$

і тому функція f логарифмічно опукла на $(0, +\infty)$.

Отже, за основною теоремою теорії гамма-функції

$$\frac{f(\alpha)}{f(1)} = \Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0.$$

Для визначення сталої $1/f(1)$ розглянемо формулу подвоєння Лежандра для функції Γ

$$2^{\alpha-1} \frac{1}{f(1)} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}+\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{1}{f(1)} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times e^{-\frac{\alpha+1}{2}+\mu\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} = \sqrt{\pi} \frac{1}{f(1)} \alpha^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\alpha+\mu(\alpha)}, \quad \alpha > 0,$$

звідки

$$\frac{1}{f(1)} = \sqrt{\pi}\sqrt{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{1}{2}} e^{\mu(\alpha)-\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\mu\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}, \quad \alpha > 0.$$

Оскільки $\mu(\alpha) \to 0$, $\alpha \to +\infty$, то $\frac{1}{f(1)} = \sqrt{2\pi}$. ⌋

Наслідком доведеного твердження є відома формула Стірлінга для $n!$ з $n \in \mathbf{N}$, а саме:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta(n)}{12n}}, \quad 0 < \theta(n) < 1.$$

Для доведення треба використати рівність $n! = n\Gamma(n)$, $n \in \mathbf{N}$ і доведену вище формулу для $\Gamma(\alpha)$ з $\alpha = n$.

5.6. БЕТА-ФУНКЦІЯ

Бета-функція B: $(0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ визначається співвідношенням

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \qquad (1)$$

Наведемо властивості функції β.

1°. Інтеграл (1) збігається для $\alpha > 0$, $\beta > 0$ і для будь-яких фіксованих $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ збігається рівномірно відносно $(\alpha, \beta) \in [\alpha_0, +\infty) \times [\beta_0, +\infty)$.

2°. $B \in C((0, +\infty) \times (0, +\infty))$.

3°. $\forall \alpha > 0\ \forall \beta > 0$: $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$.

Для доведення потрібно зробити заміну змінної $1 - x = t$ в інтегралі (1).

4°. $B(\alpha, 1) = \frac{1}{\alpha}$; $B(1, \beta) = \frac{1}{\beta}$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

5°. $B(\alpha, \beta + 1) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

⌈ Доведення цієї рівності випливає з формули інтегрування за частинами:

$$B(\alpha, \beta + 1) = \int_0^1 x^{\alpha+\beta-1} \left(\frac{1-x}{x}\right)^\beta dx = \frac{x^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta} \left(\frac{1-x}{x}\right)^\beta \Bigg|_{x\to 0}^{x=1} -$$

$$- \int_0^1 \frac{x^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta} \beta \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\beta-1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{\beta}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta). \quad ⌋$$

6°. $\forall \alpha > 0\ \forall \beta > 0$: $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

⌈ Нехай $\beta > 0$ фіксоване. Доведемо, що функція

$$f(\alpha) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha + \beta), \quad \alpha > 0$$

задовольняє умовам теореми п. 5.2. Дійсно,

$$f(1) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} B(1, \beta)\Gamma(1 + \beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{\beta} \beta\Gamma(\beta) = 1;$$

$$f(\alpha + 1) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} B(\alpha + 1, \beta)\Gamma(\alpha + \beta + 1) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta)(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta) = \alpha f(\alpha), \quad \alpha > 0.$$

Функція $B(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$ логарифмічно опукла на $(0, +\infty)$, що доводиться так само, як і для випадку гамма-функції. Тому f логарифмічно опукла на $(0, +\infty)$ як добуток логарифмічно опуклих функцій, а $f = \Gamma$. ⌋

Вправи

11. Виразити значення інтеграла через значення гамма-функції

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4} dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1}\varphi \cos^{\beta-1}\varphi d\varphi$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

с) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$; д) $\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{tg}\varphi)^{2\alpha-1} d\varphi$, $0 < \alpha < 1$.

12. Нехай $a < b$. Обчислити границю

$$\lim_{\sigma \to 0+} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Глава 14 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

§ 1. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ ПО БРУСУ

1.1. ОЗНАЧЕННЯ Й ПОЗНАЧЕННЯ

У цій главі розглядаються підмножини простору $\mathbf{R}^m$ і функції, визначені на цих підмножинах. Простір $\mathbf{R}^m$ розглядається як лінійний повний метричний простір із звичайною віддаллю. Необхідні означення, зокрема означення віддалі, норми і т. д., подано в п. 1.1 глави 11. Наведена нижче конструкція визначення інтеграла є ще одним узагальненням схеми визначення інтеграла Рімана на випадок функцій від кількох змінних.

Означення 1. Прямокутним паралелепіпедом в $\mathbf{R}^m$ ***або m-вимірним інтервалом (брусом)*** називається множина

$$Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_m, b_m] = \prod_{k=1}^{m} [a_k, b_k] =$$

$$= \{\vec{x} = (x_1, \ldots x_m) \mid a_k \leqslant x_k \leqslant b_k,\ 1 \leqslant k \leqslant m\},$$

де $\{a_k, b_k \mid 1 \leqslant k \leqslant m\} \subset \mathbf{R}$; $a_k < b_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Діаметром бруса Q називається число

$$d(Q) := \sup\{\rho(\vec{x}, \vec{y}) \mid \vec{x} \in Q,\ \vec{y} \in Q\} = \Big(\sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Об'ємом (точніше ***m-вимірним об'ємом***) або ***мірою*** (***m-вимірною мірою***) бруса Q називається додатне число

$$\mathbf{m}(Q) = \prod_{k=1}^{m} (b_k - a_k).$$

Вправи

1. Нехай Q_1 і Q_2 — бруси в $\mathbf{R}^m$. У яких випадках множини $Q_1 \cap Q_2$, $Q_1 \cup Q_2$, $Q_1 \setminus Q_2$ є брусами в $\mathbf{R}^m$?

2. Нехай Q — брус в $\mathbf{R}^m$, Q^0 — множина всіх внутрішніх в $(\mathbf{R}^m, \rho)$ точок Q і $\partial Q := Q \setminus Q^0$ — границя бруса Q. Зобразити ∂Q у вигляді об'єднання $2m$ брусів з $\mathbf{R}^{m-1}$, кожна пара яких не має спільних внутрішніх точок в $(\mathbf{R}^{m-1}, \rho)$. Розглянути випадки $m=2$, $m=3$.

Нехай $Q = \prod_{k=1}^{m} [a_k, b_k]$ — брус. Для кожного k, $1 \leqslant k \leqslant m$ розглянемо розбиття

$$\lambda_k = \{x_k(0), \quad x_k(1), \ldots, x_k(n_k)\}$$

відрізка $[a_k, b_k]$. Тут при кожному k

$$a_k = x_k(0) < x_k(1) < \ldots < x_k(n_k) = b_k.$$

Нехай $\Delta x_k(\nu) := x_k(\nu + 1) - x_k(\nu)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots n_k - 1$. Зрозуміло, що

$$\sum_{\nu=0}^{n_k-1} \Delta x_k(\nu) = b_k - a_k$$

при кожному k, $1 \leqslant k \leqslant m$.
Для будь-якого набору цілих чисел $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m$ таких, що

$$\forall k, \ 1 \leqslant k \leqslant m: \ 0 \leqslant \nu_k \leqslant n_k - 1,$$

розглянемо брус

$$Q(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m) := \prod_{k=1}^{m} [x_k(\nu_k), \ x_k(\nu_k + 1)],$$

об'єм якого

$$\mathrm{m}(Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)) = \prod_{k=1}^{m} \Delta x_k(\nu_k).$$

Означення 2. Набір брусів

$$\lambda = \{Q(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m) \mid 0 \leqslant \nu_k \leqslant n_k - 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant m\}$$

називається ***розбиттям бруса*** Q. ***Діаметром,*** або ***розміром розбиття*** λ називається число

$$|\lambda| := \max \{d(Q(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)) \mid 0 \leqslant \nu_k \leqslant n_k - 1, 1 \leqslant k \leqslant m\}.$$

Зауважимо, що

$$\sum_{\substack{0 \leqslant \nu_k \leqslant n_k - 1 \\ 1 \leqslant k \leqslant m}} \mathrm{m}(Q(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)) = \mathrm{m}(Q).$$

Нехай

$$\omega(\lambda) := \{(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m) \mid 0 \leqslant \nu_k \leqslant n_k - 1, 1 \leqslant k \leqslant m\}.$$

1.2. СУМИ ДАРБУ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Нехай Q — брус, f: $Q \to \mathbf{R}$, f — обмежена на Q і $\lambda = \{Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)\}$ — деяке розбиття бруса Q.

Означення. Нижньою сумою Дарбу для розбиття λ і функції f називається сума

$$L(f, \lambda) := \sum_{(\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \omega(\lambda)} \inf_{Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)} f\, \mathbf{m}(Q(\nu_1, \ldots \nu_m)).$$

Верхньою сумою Дарбу для розбиття λ і функції f називається сума

$$U(f, \lambda) := \sum_{(\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \omega(\lambda)} \sup_{Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)} f\, \mathbf{m}(Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)).$$

Нехай $\forall (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \omega(\lambda)$: $\vec{\xi}(\nu_1, \ldots, \nu_m) \in Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)$. Набір точок

$$\{\vec{\xi}(\nu_1, \ldots, \nu_m) \mid (\nu_1, \ldots \nu_m) \in \omega(\lambda)\} = \{\vec{\xi}(\nu_1, \ldots, \nu_m)\}$$

будемо називати ***набором, що відповідає розбиттю*** λ.

Інтегральною сумою для розбиття λ, відповідного розбиттю λ набору $\{\vec{\xi}(\nu_1, \ldots, \nu_m)\}$ і функції f, називається сума

$$S(f, \lambda, \{\vec{\xi}(\nu_1, \ldots, \nu_m)\}) :=$$

$$= \sum_{(\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \omega(\lambda)} f(\vec{\xi}(\nu_1, \ldots, \nu_m))\, \mathbf{m}(Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)).$$

Оскільки $\forall (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \omega(\lambda)$

$$\inf_Q f \leqslant \inf_{Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)} f \leqslant f(\vec{\xi}(\nu_1, \ldots, \nu_m) \leqslant \sup_{Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)} f \leqslant \sup_Q f, \quad (1)$$

то, домноживши нерівність (1) на $\mathbf{m}(Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)) > 0$ і підсумувавши по всіх наборах $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ з $\omega(\lambda)$, одержимо властивість введених сум:

$$\inf_Q f \cdot \mathbf{m}(Q) \leqslant L(f, \lambda) \leqslant S(f, \lambda, \{\vec{\xi}(\nu_1, \ldots, \nu_m)\}) \leqslant$$

$$\leqslant U(f, \lambda) \leqslant \sup_Q f\, \mathbf{m}(Q) \quad (2)$$

для будь-якого λ і для будь-якого набору $\{\vec{\xi}(\nu_1, \ldots, \nu_m)\}$, що відповідає розбиттю λ. З нерівності (2) випливає, що множини всіх верхніх і нижніх сум Дарбу, що відповідають всім можливим розбиттям бруса Q, є обмеженими.

Зауважимо, що розбиття λ бруса Q із означення 2 отримуємо за допомогою розбиттів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ відрізків $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots, [a_m, b_m]$ відповідно. Розглянемо для кожного із розбиттів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ відповідні підрозбиття $\lambda_1', \lambda_2', \ldots \lambda_m'$ (які одержуємо з $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ додаванням нових точок). Нехай λ' — розбиття бруса Q, отримане за допомогою розбиттів $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_m'$. Крім того, кожен брус $Q(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m)$ розбиття λ буде розбитий на частини

$$\{Q(\nu_1, \ldots, \nu_m \mid \mu_1, \ldots, \mu_m)\},$$

які становлять розбиття $\lambda'(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ бруса $Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)$. При цьому

$$\lambda' = \left\{ Q(\nu_1, \ldots, \nu_m \mid \mu_1, \ldots, \mu_m) \,\middle|\, \begin{array}{l} (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \omega(\lambda'(\nu_1, \ldots, \nu_m)), \\ (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \omega(\lambda) \end{array} \right\}$$

і

$$\sum_{(\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \omega(\lambda'(\nu_1, \ldots, \nu_m))} \mathbf{m}(Q(\nu_1, \ldots, \nu_m \mid \mu_1, \ldots, \mu_m)) = \\ = \mathbf{m}(Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)).$$

Означення 3. Розбиття λ' бруса Q, яке отримується описаним способом, називаються ***підрозбиттям розбиття*** λ.

Суми Дарбу, що відповідають розбиттю λ і його будь-якому підрозбиттю λ', пов'язані нерівностями

$$L(f, \lambda) \leqslant L(f, \lambda') \leqslant U(f, \lambda') \leqslant U(f, \lambda). \tag{3}$$

Для доведення (3) використаємо нерівність (2) для бруса $Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)$, функції f і розбиття $\lambda'(\nu_1, \ldots, \nu_m)$:

$$\inf_{Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)} f\,\mathbf{m}(Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(\mu_1, \ldots, \mu_m)} \inf_{Q(\nu_1, \ldots, \nu_m \mid \mu_1, \ldots, \mu_m)} f \cdot \mathbf{m}(Q(\nu_1, \ldots, \nu_m \mid \mu_1, \ldots, \mu_m)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(\mu_1, \ldots, \mu_m)} \sup_{Q(\nu_1, \ldots, \nu_m \mid \mu_1, \ldots \mu_m)} f \cdot \mathbf{m}(Q(\nu_1, \ldots, \nu_m \mid \mu_1, \ldots, \mu_m)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)} f \cdot \mathbf{m}(Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)),$$

де суми по $\mu_1, \ldots, \mu_m$ беремо по всіх брусах розбиття $\lambda'(\nu_1, \ldots \ldots, \nu_m)$. Підсумувавши останні нерівності по всіх наборах $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ з $\omega(\lambda)$, одержимо формулу (3).

Нехай λ' і λ'' — два розбиття бруса Q, отримані за допомогою розбиттів $\lambda_1', \ldots, \lambda_m'$ і $\lambda_1'', \ldots, \lambda_m''$ відрізків $[a_1, b_1], \ldots \ldots, [a_m, b_m]$ відповідно.

Нехай $\lambda_k = \lambda'_k \cup \lambda''_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$ і λ — розбиття бруса Q, що отримане за допомогою $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Розбиття λ є підрозбиттям кожного із розбиттів λ', λ''. Враховуючи нерівності (1) і (3), одержимо

$$L(f, \lambda') \leqslant L(f, \lambda) \leqslant U(f, \lambda) \leqslant U(f, \lambda'').$$

Таким чином, для будь-яких двох розбиттів λ', λ'' бруса Q має місце нерівність

$$L(f, \lambda') \leqslant U(f, \lambda''). \tag{4}$$

Вправа

3. Нехай при $m = 2$ λ — розбиття прямокутника Q, яке отримане за допомогою розбиттів λ_1 та λ_2 відрізків $[a_1, b_1]$ і $[a_2, b_2]$ відповідно. Нехай f_i: $[a_i, b_i] \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2$ — обмежені функції. Довести рівності:

а) $L(g, \lambda) = L(f_1, \lambda_1)(b_2 - a_2) + L(f_2, \lambda_2)(b_1 - a_1)$; $U(g, \lambda) = U(f_1, \lambda_1)(b_2 - a_2) + U(f_2, \lambda_2)(b_1 - a_1)$ для $g(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, $(x_1, x_2) \in Q$;

б) $L(h, \lambda) = L(f_1, \lambda_1) \cdot L(f_2, \lambda_2)$, $U(h, \lambda) = U(f_1, \lambda_1) \cdot U(f_2, \lambda_2)$ для $h(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$, $(x_1, x_2) \in Q$ при умові, що $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \geqslant 0$.

1.3. ВЕРХНІЙ І НИЖНІЙ ІНТЕГРАЛИ. ОЗНАЧЕННЯ КРАТНОГО ІНТЕГРАЛА ПО БРУСУ

Нехай Q — брус і f: $Q \to \mathbf{R}$ — обмежена функція.

Означення 1. Нижнім інтегралом функції f по брусу Q називається число

$$\mathcal{J}_* = \sup_{\lambda} L(f, \lambda).$$

Верхнім інтегралом функції f по брусу Q називається число

$$\mathcal{J}^* = \inf_{\lambda} U(f, \lambda).$$

Точні межі беруться по всіх можливих розбиттях бруса Q.

З нерівності (4) п. 1.2 випливає, що $\mathcal{J}_* \leqslant \mathcal{J}^*$.

Означення 2. Функція f називається ***інтегровною по брусу*** Q, якщо

$$\mathcal{J}_* = \mathcal{J}^*.$$

Для інтегровної функції f число $\mathcal{J} := \mathcal{J}_* = \mathcal{J}^*$ називається ***інтегралом*** (точніше ***m-кратним інтегралом***) ***Рімана*** від

функції f по брусу Q і позначається одним із символів:

$$\int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x}, \quad \int_Q f(x_1, \dots, x_m)\, dx_1 \dots dx_m,$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, x_2, \dots, x_m)\, dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

При $m = 2$ і $m = 3$ визначений інтеграл часто називають також *подвійним* і *потрійним* відповідно.

Вправи

4. Нехай додатково до умов вправи 3 $f_i \in \mathbf{R}([a_i, b_i])$, $i = 1, 2$. Довести, що функції g і h інтегровні по Q, і обчислити подвійні інтеграли від g і h по Q.

5. Для $m = 2$ навести приклад функції f, для якої $\mathcal{J}_* < \mathcal{J}^*$.

6. Довести, що функція f інтегровна по брусу Q тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \lambda\colon U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \varepsilon.$$

7. **(Інтеграл від постійної функції).** Нехай $c \in \mathbf{R}$, розглянемо $f(\vec{x}) = c$, $\vec{x} \in Q$. Довести, що

$$\int_Q c\, d\vec{x} = c\,\mathrm{m}(Q).$$

1.4. ІНТЕГРОВНІСТЬ НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ

ЛЕМА. Нехай функція $f\colon Q \to \mathbf{R}$ задовольняє для числа $\varepsilon > 0$ умові

$$\exists \delta > 0\ \forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset Q, \quad \rho(\vec{x}, \vec{y}) < \delta\colon |f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Тоді

$$\forall \lambda,\ |\lambda| < \delta\colon U(f, \lambda) - L(f, \lambda) \leqslant \varepsilon\,\mathrm{m}(Q). \qquad (2)$$

$\ulcorner$ Нехай розмір розбиття λ становить $|\lambda| < \delta$. Тоді для будь-якого бруска $Q(\nu_1, \dots, \nu_m)$ розбиття λ $d(Q(\nu_1, \dots, \nu_m)) < \delta$, і тому

$$\sup_{Q(\nu_1, \dots, \nu_m)} f - \inf_{Q(\nu_1, \dots, \nu_m)} f = \sup_{\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset Q(\nu_1, \dots, \nu_m)} (f(\vec{x}) - f(\vec{y})) \leqslant \varepsilon.$$

Звідси

$$U(f, \lambda) - L(f, \lambda) =$$

$$= \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_m) \in \omega(\lambda)} \left(\sup_{Q(\nu_1, \dots, \nu_m)} f - \inf_{Q(\nu_1, \dots, \nu_m)} f\right) \mathrm{m}(Q(\nu_1, \dots, \nu_m)) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\,\mathrm{m}(Q). \qquad \lrcorner$$

ТЕОРЕМА 1. Функція $f \in \mathbf{C}(Q)$ є інтегровною по брусу Q.

$\ulcorner$ Брус Q — обмежена замкнена множина в $(\mathbf{R}^m, \rho)$, тому вона компактна в цьому просторі. Оскільки за умовою $f \in \mathbf{C}(Q)$, то за теоремою Кантора функція f рівномірно неперервна на Q. Отже, умова (1) леми $\forall \varepsilon > 0$ для f виконана. Використовуючи означення інтегралів $\mathcal{J}_*$, $\mathcal{J}^*$, нерівності (1) п. 1.3 і твердження леми маємо для розбиття λ, $|\lambda| < \delta$:

$$0 \leqslant \mathcal{J}^* - \mathcal{J}_* \leqslant U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \varepsilon \mathrm{m}(Q).$$

Таким чином,

$$0 \leqslant \mathcal{J}^* - \mathcal{J}_* < \varepsilon m(Q)$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$. Звідси $\mathcal{J}^* - \mathcal{J}_* = 0$. $\lrcorner$

ТЕОРЕМА 2. Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \lambda,\ |\lambda| < \delta\ \forall \{\vec{\xi}(\nu_1, \dots, \nu_m)\}:$$

$$\left| \int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} - \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_m) \in \omega(\lambda)} f(\vec{\xi}(\nu_1, \dots, \nu_m))\, \mathrm{m}(Q(\nu_1, \dots, \lambda_m)) \right| <$$

$$< \varepsilon \mathrm{m}(Q).$$

Теорема 2 твердить, що для неперервної функції кратний інтеграл збігається з границею інтегральних сум.

$\ulcorner$ Для функції f виконана умова (1) леми. Крім того, згідно з означенням $\mathcal{J}_*$ і $\mathcal{J}^*$.

$$\forall \lambda:\ L(f, \lambda) \leqslant \mathcal{J}_* = \int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} = \mathcal{J}^* \leqslant U(f, \lambda),$$

а також

$$\forall \lambda\ \forall \{\vec{\xi}(\nu_1, \dots, \nu_m)\}:\ L(f, \lambda) \leqslant S(f, \lambda, \{\vec{\xi}(\nu_1, \dots, \nu_m)\}) \leqslant U(f, \lambda).$$

З останніх двох нерівностей випливає

$$\left| \int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} - S(f, \lambda, \{\vec{\xi}(\nu_1, \dots, \nu_m)\} \right| \leqslant U(f, \lambda) - L(f, \lambda).$$

Згідно з лемою

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \lambda,\ |\lambda| < \delta:\ U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \varepsilon m(Q). \quad \lrcorner$$

Наслідок. Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$, $\{\lambda^{(n)}:\ n \geqslant 1\}$ — послідовність розбиттів Q, що задовольняє умові $|\lambda^{(n)}| \to 0$. Нехай для кожного n $\{\vec{\xi}^{(n)}(\nu_1, \dots, \nu_m)\}$ — деякий набір, що відповідає розбиттю $\lambda^{(n)}$. Тоді

$$\lim_{n \to \infty} S(f, \lambda^{(n)}, \{\vec{\xi}^{(n)}(\nu_1, \dots, \nu_m)\} = \int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

1.5. ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛА ВІД НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ

ТЕОРЕМА 1. Для будь-якого $c \in \mathbf{R}$

$$\int_Q c d\vec{x} = c\mathrm{m}(Q).$$

ТЕОРЕМА 2. Нехай Q — брус в $\mathbf{R}^m$ і $Q = Q_1 \cup Q_2$, де Q_1, Q_2 — бруси в $\mathbf{R}^m$, що не мають спільних внутрішніх точок. Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$. Тоді

$$\int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{Q_1} f(\vec{x})\, d\vec{x} + \int_{Q_2} f(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

$\vdash$ За теоремою 1 п. 1.4 всі інтеграли в твердженні теореми визначені. Побудуємо послідовність $\{\lambda^{(n)}: n \geqslant 1\}$ розбиттів бруса Q. Нехай $\lambda^{(1)}$ складається із брусів Q_1 і Q_2; $\lambda^{(2)}$ — розбиття Q, яке є підрозбиттям $\lambda^{(1)}$; взагалі $\lambda^{(n)}$ — розбиття Q, яке є підрозбиттям $\lambda^{(n-1)}$. Зрозуміло, що послідовність можна обрати такою, щоб $|\lambda^{(n)}| \to 0$, $n \to \infty$. Для кожного $n \geqslant 1$ бруси розбиття $\lambda^{(n)}$, що містяться в брусі Q_i, складають розбиття $\lambda_i^{(n)}$ бруса Q_i, $i = 1, 2$. При цьому $|\lambda_i^{(n)}| \to 0$, $n \to \infty$; $i = 1, 2$. Зауважимо також, що

$$S(f, \lambda^{(n)}, \{\vec{\xi}^{(n)}(\nu_1, \ldots, \nu_m)\}) = \sum_{i=1}^{2} S(f, \lambda_i^{(n)} \{\vec{\xi}^{(n)}(\nu_1, \ldots, \nu_m)\}).$$

Залишається до отриманої рівності застосувати наслідок п. 1.4. $\dashv$

ТЕОРЕМА 3. Нехай $f_i \in \mathbf{C}(Q)$, $c_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,2$. Тоді

$$\int_Q (c_1 f_1(\vec{x}) + c_2 f_2(\vec{x}))\, d\vec{x} = c_1 \int_Q f_1(\vec{x})\, d\vec{x} + c_2 \int_Q f_2(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

$\vdash$ Доведення випливає з рівності

$$S(c_1 f_1 + c_2 f_2, \lambda) = c_1 S(f_1, \lambda) + c_2 S(f_2, \lambda). \quad \dashv$$

ТЕОРЕМА 4 (теорема про середнє значення). Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$. Тоді

$$\exists \vec{\theta} \in Q: \int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} = f(\vec{\theta})\, \mathrm{m}(Q).$$

$\vdash$ Оскільки $f \in \mathbf{C}(Q)$ і Q — компакт в $(\mathbf{R}^m, \rho)$, то

$$\exists \{\vec{x}_*, \vec{x}^*\} \subset Q: \inf_Q f = f(\vec{x}_*), \quad \sup_Q f = f(\vec{x}^*).$$

З означення інтеграла та нерівностей (1) п. 1.2 маємо

$$f(\vec{x}_*)\,\mathrm{m}(Q) \leqslant \int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \leqslant f(\vec{x}^*)\,\mathrm{m}(Q),$$

або

$$f(\vec{x}_*) \leqslant \frac{1}{\mathrm{m}(Q)} \int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \leqslant f(\vec{x}^*).$$

Відрізок $\{\vec{x}_* + t(\vec{x}^* - \vec{x}_*) \mid t \in [0,1]\} \subset Q$. Розглянемо функцію

$$\varphi(t) := f(\vec{x}_* + t(\vec{x}^* - \vec{x}_*)), \quad t \in [0, 1].$$

За теоремою про неперервність суперпозиції неперервних функцій $\varphi \in \mathbf{C}([0, 1])$. Крім того,

$$\varphi(0) = f(\vec{x}_*), \quad \varphi(1) = f(\vec{x}_*); \qquad \varphi(0) \leqslant \frac{1}{\mathrm{m}(Q)} \int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \leqslant \varphi(1).$$

За теоремою Коші про проміжне значення

$$\exists \theta \in [0, 1]:\ \varphi(\theta) = \frac{1}{\mathrm{m}(Q)} \int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x}.$$

Вибравши $\vec{\theta} := \vec{x}_* + \theta(\vec{x}^* - \vec{x}_*)$, отримаємо твердження теореми. ⌋

ТЕОРЕМА 5. Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$ і $\forall \vec{x} \in Q$: $f(\vec{x}) \geqslant 0$. Тоді $\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \geqslant 0$.

⌈ Для доведення використати теореми 1 і 4. ⌋

ТЕОРЕМА 6. Нехай $f_i \in \mathbf{C}(Q)$, $i = 1, 2$ і $\forall \vec{x} \in Q$: $f_1(\vec{x}) \leqslant f_2(\vec{x})$. Тоді $\int\limits_Q f_1(\vec{x})\,d\vec{x} \leqslant \int\limits_Q f_2(\vec{x})\,d\vec{x}$.

⌈ До функції $f_2 - f_1$ застосувати теореми 5 та 3. ⌋

ТЕОРЕМА 7. Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$. Тоді

$$\left|\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x}\right| \leqslant \int\limits_Q |f(\vec{x})|\,d\vec{x}.$$

⌈ Використати нерівності $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ та теорему 6. ⌋

Вправи

8. Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$ і $\forall \vec{x} \in Q$: $f(\vec{x}) > 0$. Довести, що $\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} > 0$.

9*. Нехай f: $[0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ інтегровна по $Q := [0,1] \times [0,1]$ і дорівнює 0 у всіх точках неперервності. Довести, що $\int\limits_Q f(x_1, x_2) \times dx_1 dx_2 = 0$.

1.6. ФОРМУЛА ЗВЕДЕННЯ m-КРАТНОГО ІНТЕГРАЛА ДО ПОСЛІДОВНИХ ОДНОКРАТНИХ

Для обчислення m-кратного інтеграла $\int\limits_Q f(\vec{x})\, d\vec{x}$ є проста формула, за допомогою якої обчислення цього інтеграла зводиться до послідовного обчислення однократних інтегралів Рімана.

Для бруса $Q = \{(x_1, \dots, x_m) \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i;\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$ в $\mathbf{R}^m$ і кожного k, $1 \leqslant k \leqslant m$ розглянемо брус

$$Q_k := \{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,$$
$$1 \leqslant i \leqslant m, \quad i \neq k\}$$

в $\mathbf{R}^{m-1}$. Q_k — проекція брусу Q на гіперплощину $x_k = 0$.

Вправа
10. При $m = 2$ і $m = 3$ для бруса Q визначити бруси $\{Q_k\}$.

Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$. Тоді

$$\forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant m\ \ \forall c \in [a_k, b_k]:\ f \in \mathbf{C}(Q \cap \{\vec{x} \mid x_k = c\}.$$

Тому для будь-якого $x \in [a_k, b_k]$ є визначеним $(m-1)$-кратний інтеграл по Q_k:

$$g_k(x) := \int\limits_{Q_k} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots$$
$$\dots, x_m)\, dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_m.$$

ЛЕМА. Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$. Тоді для будь-якого k, $1 \leqslant k \leqslant m$, $g_k \in \mathbf{C}([a_k, b_k])$.

За теоремами 3 і 7 п. 1.5 для будь-яких $\{x', x''\} \subset [a_k, b_k]$ отримаємо

$$|g_k(x') - g_k(x'')| \leqslant \int\limits_{Q_k} |f(x_1, \dots, x_{k-1}, x', x_{k+1}, \dots, x_m) -$$
$$- f(x_1, \dots, x_{k-1}, x'', x_{k+1}, \dots, x_m)|\, dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_m. \quad (1)$$

Нехай довільне число $\varepsilon > 0$ фіксовано. Оскільки $f \in \mathbf{C}(Q)$ і Q — компакт, то за теоремою Кантора для числа ε

$$\exists \delta > 0\ \ \forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset Q,\quad \rho(\vec{x}, \vec{y}) < \delta:\ |f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{m}(Q)}. \quad (2)$$

Нехай $\{x', x''\} \subset [a_k, b_k]$, $|x' - x''| < \delta$. Тоді для векторів

$$\vec{x'} = (x_1, \dots, x_{k-1}, x', x_{k+1}, \dots, x_m),$$

$$\vec{x''} = (x_1, \dots, x_{k-1}, x'', x_{k+1}, \dots, x_m),$$

де $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) \in Q_k$, маємо $\rho(\vec{x'}, \vec{x''}) = |x' - x''| < \delta$, а тому згідно з нерівністю (2) $|f(\vec{x'}) - f(\vec{x''})| < \varepsilon/\mathrm{m}(Q_k)$).

З цієї нерівності, формули (1) і теорем 6 і 1 п. 1.5 знаходимо

$$|g_k(x') - g_k(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{m}(Q_k)} \int\limits_{Qk} dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_m = \varepsilon.$$

Таким чином, g_k рівномірно неперервна на $[a_k, b_k]$. ⌋

ТЕОРЕМА. Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$. Тоді $\forall k$, $1 \leqslant k \leqslant m$,

$$\int\limits_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int\limits_{a_k}^{b_k} g_k(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{a_k}^{b_k} \Big(\int\limits_{Q_k} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \times$$

$$\times\, dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_m \Big)\, dx_k.$$

⌈ Нехай $\varepsilon > 0$ вибрано. Функція f інтегровна по Q. Тому існує розбиття λ бруса Q таке, що

$$U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \varepsilon.$$

Розбиття λ природним чином розбиває брус Q_k. Спочатку маємо

$$\int\limits_{a_k}^{b_k} g_k(x)\, dx = \sum_{\nu_k=0}^{n_k-1} \int\limits_{x_k(\nu_k)}^{x_k(\nu_k+1)} g_k(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu_k=0}^{n_k-1} \sup_{x \in [x_k(\nu_k), x_k(\nu_k+1)]} g_k(x)\, \Delta x_k(\nu_k) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu_k=0}^{n_k-1} \sup_{x \in [x_k(\nu_k), x_k(\nu_k+1)]} \Bigg(\sum_{\substack{\nu_1, \dots, \nu_{k-1}, \\ \nu_{k+1}, \dots \nu_m}} \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) \in \\ \in \prod\limits_{i \neq k} [x_i(\nu_i), x_i(\nu_i+1)]}} \times$$

$$\times f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_m) \prod_{i \neq k} \Delta x_i(\nu_i) \cdot \Delta x_k(\nu_k) \leqslant U(f, \lambda).$$

Друга нерівність отримана за рахунок заміни $(m-1)$-кратного інтеграла $g_k(x)$ верхньою сумою Дарбу. Таким же чином

$$\int_{a_k}^{b_k} g_k(x)\,dx \geqslant L(f, \lambda).$$

Оскільки завжди $L(f, \lambda) \leqslant \int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \leqslant U(f, \lambda)$, то

$$\left|\int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} - \int_{a_k}^{b_k} g_k(x)\,dx\right| \leqslant U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \varepsilon. \quad \lrcorner$$

Наслідок 1. Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$. Тоді

$$\int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{a_m}^{b_m}\left(\int_{a_{m-1}}^{b_{m-1}}\left(\ldots\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_m)\,dx_1\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\, dx_2 \ldots\right)\,dx_{m-1}\right)\,dx_m.$$

$\ulcorner$ Доведення отримаємо за допомогою послідовного застосування теореми. Зауважимо також, що порядок інтегрування може бути довільним. $\lrcorner$

Наслідок 2. Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$. Тоді для будь-якого k, $1 \leqslant k \leqslant m$

$$\int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{Q_k}\left(\int_{a_k}^{b_k} f(\vec{x})\,dx_k\right)dx_1 \ldots dx_{k-1}dx_{k+1} \ldots dx_m.$$

$\ulcorner$ Для доведення двічі застосувати наслідок 1. $\lrcorner$

Наслідок 3. Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$, існує f'_k і $f'_k \in \mathbf{C}(Q)$. Тоді

$$\int_Q \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}\,d\vec{x} = \int_{Q_k} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)\prod_{i\neq k} dx_i -$$
$$-\int_{Q_k} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)\prod_{i\neq k} dx_i. \qquad (3)$$

$\ulcorner$ Для доведення використати наслідок 2 і формулу Ньютона—Лейбніца. $\lrcorner$

Проста формула (3) являє собою деякий аналог формули Ньютона—Лейбніца для m-кратного інтеграла. Вона також є окремим випадком загальної формули Гаусса—Остроградського, яка доводиться далі за допомогою формули (3).

Вправи

11. Для функції $f \in \mathbf{C}^{(m)}(Q)$ обчислити інтеграл $\int\limits_Q \frac{\partial^m f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} d\vec{x}$.

12. Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$ і $\forall (x_1, \ldots, x_m) \in Q$,

$$Q(x_1, \ldots, x_m) := \{(u_1, \ldots, u_m) \mid a_i \leqslant u_i \leqslant x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}.$$

Нехай

$$g(x_1, \ldots, x_m) := \int\limits_{Q(x_1, \ldots, x_m)} f(\vec{u})\, d\vec{u},\ (x_1, \ldots, x_m) \in Q^\circ.$$

Обчислити похідні $\frac{\partial g}{\partial x_k}$, $1 \leqslant k \leqslant m$; $\frac{\partial^m g}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}$.

13. Нехай $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $\{f, g\} \subset \mathbf{C}^{(2)}(Q)$

$$f(x_1, a_2) = f(x_1, b_2) = 0, \quad x_1 \in [a_1, b_1];$$

$$g(a_1, x_2) = g(b_1, x_2) = 0, \quad x_2 \in [a_2, b_2].$$

Довести рівність

$$\int\limits_Q f(x_1, x_2) \frac{\partial^2 g(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = \int\limits_Q \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} g(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

14. Нехай $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, $f \in \mathbf{C}([-1, 1]^2)$. Обчислити границю

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_Q f(\sin^n x_1 \cos^n x_2)\, dx_1 dx_2.$$

15. Нехай $f \in \mathbf{C}^{(1)}(Q)$ і $Q = [0, 1]^2$. Обчислити границю

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\int\limits_Q f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 - \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) \right).$$

16*. Для $f \in \mathbf{C}(Q)$ і $Q = [0, 1]^2$ обчислити границю

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \right)^2 \int\limits_Q (x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2))^n f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

17. Нехай $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ і $Q^n = [0, 1]^n$. Обчислити границю

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{Q^n} f(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

17.1. Нехай функція f: $(\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ опукла вниз на (α, β) і $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. Довести для $n \geqslant 2$ нерівність

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{(b-a)^n} \int\limits_{[a,b]^n} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Вказівка. В задачах 16 та 17 використати теорему Вейєрштрасса для f відповідно на $[0, 1]^2$ і $[0, 1]$.

§ 2. МНОЖИНИ, ЯКІ ВИМІРНІ ЗА ЖОРДАНОМ. МІРА ЖОРДАНА

Для однократного інтеграла відрізок є основною природною множиною, на якій визначається інтеграл. При переході до кратних інтегралів ситуація суттєво змінюється. Наприклад, у випадку подвійного інтеграла бажано визначити інтеграли не тільки по прямокутниках, але й таких множинах, як трикутник, круг та ін. Для визначення кратного інтеграла по множинах, більш складних від брусів, треба спочатку поширити поняття об'єму на ці множини. Перше поширення поняття міри (довжини у випадку множини на $\mathbf{R}$, площі — на $\mathbf{R}^2$ і об'єму — на $\mathbf{R}^3$) на досить широкий клас підмножин $\mathbf{R}^m$ належить французькому математику К. Жордану. Множини з цього класу називаються вимірними за Жорданом, а їх об'єми — міри — мірою Жордана. Міра Жордана має звичайні властивості, які притаманні довжині, площі й об'єму.

2.1. РОЗБИТТЯ ПРОСТОРУ $\mathbf{R}^m$

Означення. Розбиття нульового порядку простору $\mathbf{R}^m$ є зображення простору $\mathbf{R}^m$ у вигляді об'єднання брусів

$$\mathbf{R}^m = \bigcup_{n_i \in \mathbf{Z},\, 1 \leqslant i \leqslant m} Q^{(0)}(n_1, \dots, n_m),$$

$$Q^{(0)}(n_1, \dots, n_m) := \left\{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \,\middle|\, \begin{matrix} n_i \leqslant x_i \leqslant n_i + 1, \\ 1 \leqslant i \leqslant m \end{matrix} \right\}.$$

Розбиття n-го порядку для $n \in \mathbf{N}$ простору $\mathbf{R}^m$ є зображення $\mathbf{R}^m$ у вигляді об'єднання брусів

$$\mathbf{R}^{(m)} = \bigcup_{n_i \in \mathbf{Z},\, 1 \leqslant i \leqslant m} Q^{(n)}(n_1, \dots, n_m),$$

$$Q^{(n)}(n_1, \dots, n_m) := \left\{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \,\middle|\, \frac{n_i}{2^n} \leqslant x_i \leqslant \right.$$

$$\left. \leqslant \frac{n_i + 1}{2^n},\ 1 \leqslant i \leqslant m \right\}.$$

Розбиття нульового порядку можна отримати таким чином. На кожній з координатних осей позначимо точки, коорди-

нати яких є цілі числа, і через них перпендикулярно до осей проведемо гіперплощини. При $m = 2$ отримаємо розбиття площини на конгруентні квадрати зі стороною 1 («папір у клітинку»). Щоб одержати розбиття першого порядку, потрібно на осях додатково позначити точки, координати яких кратні $\frac{1}{2}$.

Далі використовуються властивості розбиттів простору $\mathbf{R}^m$.

1°. Нехай $F \subset \mathbf{R}^m$ — обмежена множина в $(\mathbf{R}^m, \rho)$. Для будь-якого $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ набір брусів розбиття порядку n простору $\mathbf{R}^m$, які мають хоча б одну спільну точку з множиною F, скінченний.

2°. Для будь-якого $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ бруси розбиття порядку $n + 1$ отримуються з брусів розбиття порядку n розбиттям останніх на 2^m конгруентних брусів.

3°. Діаметр бруса розбиття порядку n дорівнює $\sqrt{m}2^{-n}$, а об'єм 2^{-mn}.

4°. Два різних бруса розбиття порядку n не мають спільних внутрішніх в $(\mathbf{R}^m, \rho)$ точок.

5°. Розбиття порядку n простору $\mathbf{R}^m$ визначає розбиття порядку n таких підпросторів, як $\mathbf{R}^{m-1} = \{(x_1, \ldots, x_{m-1})\}$, $\mathbf{R}^2 = \{(x_1, x_2)\}$ та ін.

Нехай

$$\pi^{(n)} = \pi_m^{(n)} := \{Q^{(n)}(n_1, \ldots, n_m) \mid n_i \in \mathbf{Z},\ 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

при цьому $\bigcup\limits_{Q \in \pi^{(n)}} Q = \mathbf{R}^m$.

Для бруса $Q \in \pi^{(n)}$ через Q^0 будемо позначати множину всіх внутрішніх в $(\mathbf{R}^m, \rho)$ точок бруса Q.

Вправа

1. Зобразити в $\mathbf{R}^2$ множину точок, координати яких x_1, x_2 задовольняють умові

$$\sin(2^n \pi x_1) \cdot \sin(2^n \pi x_2) \geqslant 0,$$

де $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

2.2. ВИМІРНІ МНОЖИНИ. МІРА

Згідно з означенням, ***об'єм*** або ***міра бруса*** $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$ дорівнює

$$\mathbf{m}(Q) := \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i).$$

Якщо $G \subset \mathbf{R}^m$ і $G = \bigcup_{i=1}^{s} Q_i$, $Q_i \in \pi^{(n)}$ для $1 \leqslant i \leqslant s$ при деякому n і всі $\{Q_i\}$ різні, то природно визначити ***міру множини*** G як

$$\mathbf{m}(G) := \sum_{i=1}^{s} \mathbf{m}(Q_i). \tag{1}$$

Вправа

2. Перевірити коректність останнього визначення (справа в тому, що зображення для G не єдине!).

Далі використовуємо означення (1) і пов'язані з ним елементарні властивості.

Нехай $F \subset \mathbf{R}^m$, F — обмежена в $(\mathbf{R}^m, \rho)$ множина. Визначимо для кожного $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ множини

$$F_{(n)} := \bigcup_{\substack{Q \in \pi^{(n)} \\ Q \subset F}} Q; \quad F^{(n)} := \bigcup_{\substack{Q \in \pi^{(n)} \\ Q \cap F \neq \varnothing}} Q; \quad \Delta F_{(n)} := \bigcup_{Q \subset F^{(n)}, Q \not\subset F_{(n)}} Q.$$

У випадку, якщо бруса $Q \in \pi^{(n)}$, для якого $Q \subset F$, не існує, будемо вважати, що $F_{(n)} := \varnothing$. Мають місце співвідношення:

$$F_{(n)} \subset F \subset F^{(n)}, \quad (F \setminus F_{(n)}) \subset (F^{(n)} \setminus F_{(n)}) \subset \Delta F_{(n)}.$$

Геометричну ілюстрацію потрібно розглянути для $m = 2$.

Міра множин $F_{(n)}$, $F^{(n)}$ і $\Delta F_{(n)}$ визначається за допомогою рівності (1) (вважаємо, що $\mathbf{m}(\varnothing) := 0$) і

$$\mathbf{m}(F_{(n)}) \leqslant \mathbf{m}(F^{(n)}); \qquad \mathbf{m}(\Delta F_{(n)}) = \mathbf{m}(F^{(n)}) - \mathbf{m}(F_{(n)}), \quad n \geqslant 0.$$

Зауважимо, що визначення чисел $\mathbf{m}(F_{(n)})$ і $\mathbf{m}(F^{(n)})$ для множини F на площині є природною конструктивною процедурою отримання реальних наближених значень для площі множини F.

Розглянемо розбиття порядків n і $n+1$ простору $\mathbf{R}^m$, а також відповідні множини для F: $F_{(n)}$, $F^{(n)}$, $F_{(n+1)}$, $F^{(n+1)}$. З властивості 2° розбиттів випливають включення:

$$F_{(n)} \subset F_{(n+1)}, \quad F^{(n+1)} \subset F^{(n)}. \tag{2}$$

Отже, для мір цих множин отримаємо

$$0 \leqslant \mathbf{m}(F_{(n)}) \leqslant \mathbf{m}(F_{(n+1)}) \leqslant \mathbf{m}(F^{(n+1)}) \leqslant \mathbf{m}(F^{(n)}). \tag{3}$$

Оскільки згідно з властивістю 1° п. 2.1 $\mathbf{m}(F_{(0)})$ і $\mathbf{m}(F^{(0)})$ скінченні, то з нерівності (3) випливає, що послідовність чисел $\{\mathbf{m}(F_{(n)}) : n \geqslant 0\}$ монотонно не спадна і обмежена, послідовність $\{\mathbf{m}(F^{(n)}) : n \geqslant 0\}$ монотонно не зростає і обмежена.

Означення 1. Внутрішньою мірою обмеженої множини $F \subset \mathbf{R}^m$ називається число

$$\mathbf{m}_*(F) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(F_{(n)}) = \sup_{n\geqslant 0} \mathbf{m}(F_{(n)}).$$

Зовнішньою мірою обмеженої множини $F \subset \mathbf{R}^m$ називається число

$$\mathbf{m}^*(F) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(F^{(n)}) = \inf_{n\geqslant 0} \mathbf{m}(F^{(n)}).$$

З нерівності (3) отримуємо, що

$$0 \leqslant \mathbf{m}_*(F) \leqslant \mathbf{m}^*(F)$$

для будь-якої обмеженої множини F.

Означення 2. Обмежена множина $F \subset \mathbf{R}^m$ називається ***вимірною за Жорданом,*** якщо

$$\mathbf{m}_*(F) = \mathbf{m}^*(F).$$

Для вимірної множини F число

$$\mathbf{m}(F) := \mathbf{m}_*(F) = \mathbf{m}^*(F)$$

називається ***мірою Жордана*** (точніше, ***m-вимірною мірою Жордана***) множини F.

Клас підмножин $\mathbf{R}^m$, вимірних за Жорданом, позначимо через $\mathbf{K} = \mathbf{K}_m$. Клас $\mathbf{K}$ не порожній, він містить множини, складені із скінченного числа брусів розбиттів простору $\mathbf{R}^m$ (для такої множини F маємо $F = F_{(n)}$, $\mathbf{m}(F^{(n)}) = \mathbf{m}(F_{(n)}) + \delta_n$ для всіх n, починаючи з деякого, причому $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$). Множину $\varnothing$ також будемо включати в $\mathbf{K}$, вважаючи, що $\mathbf{m}(\varnothing) := 0$. Зауважимо, що для будь-якого $F \in \mathbf{K}$: $\mathbf{m}(F) \geqslant 0$.

Приклад 1. Нехай $F = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \mid x_1 = c,\ |x_i| \leqslant L,\ 2 \leqslant i \leqslant m\}$, де c, L — фіксовані числа; F — обмежена множина, що міститься в гіперплощині $x_1 = c$. Доведемо, що $F \in \mathbf{K}_m$ і $\mathbf{m}(F) = 0$.

$\vdash$ Множина F не має внутрішніх в $(\mathbf{R}^m, \rho)$ точок, тому $F_{(n)} = \varnothing$ для будь-якого $n \geqslant 0$. Крім того, для міри $F^{(n)}$ маємо оцінку

$$\mathbf{m}(F^{(n)}) \leqslant 2\,(2L2^n + 2)^{m-1}\,\frac{1}{2^{mn}},\ n \geqslant 0.$$

Тому $\mathbf{m}(F^{(n)}) \to 0$, $n \to \infty$ і $\mathbf{m}_*(F) = \mathbf{m}^*(F) = 0$. $\dashv$

Вправа

3. Множина $F \in \mathbf{K}$ і $F^\circ = \varnothing$. Довести, що $\mathbf{m}(F) = 0$.

ТЕОРЕМА. Нехай F — обмежена підмножина $\mathbf{R}^m$. Тоді

$$F \in \mathbf{K} \Leftrightarrow \mathbf{m}(\Delta F_{(n)}) = \mathbf{m}(F^{(n)}) - \mathbf{m}(F_{(n)}) \to 0,\ n \to \infty.$$

|— Теорема є переформулюванням означення вимірної множини. —|

Вправи

3.1. Для $x \in \mathbf{R}$ множина $A = \{x\} \in \mathbf{K}_1$ і $\mathbf{m}(A) = 0$. Довести це твердження.

Вказівка. Для кожного $n \geqslant 1$ $A_{(n)} = \varnothing$; оскільки множина $A^{(n)}$ складається з одного або двох відрізків розбиття $\pi_1^{(n)}$, тому $\mathbf{m}(A^{(n)}) \leqslant 2 \cdot 2^{-n} \to 0,\ n \to \infty$.

3.2. Довести, що відрізок $[a, b] \in \mathbf{K}_1$ і $\mathbf{m}([a, b]) = b - a$.

Вказівка. Звернути увагу на те, що

$$\left(\frac{b-a}{\frac{1}{2^n}} - 2\right)\frac{1}{2^n} \leqslant \mathbf{m}([a, b]_{(n)}) \leqslant \frac{b-a}{\frac{1}{2^n}} \cdot \frac{1}{2^n},$$

і що $\Delta([a, b])_{(n)}$ містить один або два відрізка розбиття π_1^n; $n \geqslant 1$.

4. Нехай при $m = 2$ $F = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbf{Q} \cap [0, 1],\ i = 1, 2\}$. Знайти $\mathbf{m}_*(F)$ і $\mathbf{m}^*(F)$. Множина F не є вимірною за Жорданом.

5. Довести, що будь-який брус є вимірною множиною і що його міра Жордана збігається з раніше визначеною мірою бруса.

6. Нехай $F = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 \leqslant 1\}$. Знайти $\mathbf{m}(F_{(n)})$, $\mathbf{m}(F^{(n)})$ для $n \geqslant 1$. Довести, що $F \in \mathbf{K}$, і знайти $\mathbf{m}(F)$.

7. Нехай F — замкнена зліченна підмножина відрізка $[a, b]$. Довести, що $F \in K$, і що $\mathbf{m}(F) = 0$.

8. Нехай $F \in \mathbf{K}$ і $\varepsilon > 0$ є фіксованими. Довести, що існує замкнена множина $G \in \mathbf{K}$ і відкрита множина $H \in \mathbf{K}$ такі, що $G \subset F \subset H$, $\mathbf{m}(H) - \mathbf{m}(G) < \varepsilon$.

2.3. ВЛАСТИВОСТІ ВИМІРНИХ МНОЖИН

ТЕОРЕМА. Нехай $A \in \mathbf{K}$ і $B \in \mathbf{K}$. Тоді:
а) $(A \cup B) \in \mathbf{K}$; б) $(A \setminus B) \in \mathbf{K}$; в) $(A \cap B) \in \mathbf{K}$.

|— Зауважимо спочатку, що при будь-якому $n \geqslant 0$:

$$\Delta(A \cup B)_{(n)} \subset \Delta A_{(n)} \cup \Delta B_{(n)}; \tag{1}$$

$$\Delta(A \setminus B)_{(n)} \subset \Delta A_{(n)} \cup \Delta B_{(n)}. \tag{2}$$

Дійсно, якщо брус $Q \in \pi^{(n)}$, $Q \subset \Delta(A \cup B)_{(n)}$, то

$$\exists \vec{x}: \vec{x} \in (Q \cap (A \cup B)) \mid \exists \vec{y}: \vec{y} \in Q \cap (\mathbf{R}^m \setminus (A \cup B)).$$

Якщо $\vec{x} \in A$, то $\vec{x} \in (Q \cap A)$ і $\vec{y} \in (Q \cap (\mathbf{R}^m \setminus A))$. Тому $Q \subset \Delta A_{(n)}$. Таким же чином, якщо $\vec{x} \in B$, то $Q \subset \Delta B_{(n)}$. Співвідношення (1) доведено.

Якщо $Q \in \pi^{(n)}$, $Q \subset \Delta (A \setminus B)_{(n)}$, то

$$\exists \vec{x}: \vec{x} \in (Q \cap (A \setminus B)) \text{ і } \exists \vec{y}: \vec{y} \in (Q \cap (\mathbf{R}^m \setminus (A \setminus B))).$$

Якщо $\vec{y} \in A$, то $\vec{x} \in (Q \cap A)$ і $\vec{y} \in Q \cap (\mathbf{R}^m \setminus A)$. У цьому випадку $Q \subset \Delta A_{(n)}$. Якщо $\vec{y} \in A$, то $\vec{y} \in B$, і тому $\vec{y} \in (Q \cap B)$, $\vec{x} \in (Q \cap (\mathbf{R}^m \setminus B))$. Таким чином, $Q \subset \Delta B_{(n)}$. Тим самим доведене співвідношення (2). З (1) і (2) маємо:

$$0 \leqslant \mathbf{m}(\Delta (A \cup B)_{(n)}) \leqslant \mathbf{m}(\Delta A_{(n)}) + \mathbf{m}(\Delta B_{(n)});$$

$$0 \leqslant \mathbf{m}(\Delta (A \setminus B)_{(n)}) \leqslant \mathbf{m}(\Delta A_{(n)}) + \mathbf{m}(\Delta B_{(n)}).$$

Застосовуючи двічі теорему п. 2.2, отримаємо твердження а) і б). Згідно з а) і б), а також із співвідношення

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B),$$

випливає твердження в). ⌋

Зауваження. З теореми випливає, що об'єднання і перетин скінченного числа вимірних множин є вимірними множинами. Клас множин K, для якого виконані умови а), б) і в) теореми, називається ***кільцем***. Таким чином, клас вимірних за Жорданом множин є кільцем, що містить бруси й об'єднання скінченного числа брусів.

Вправи

9. Об'єднання зліченної системи множин із K може не належать до K.

а) Нехай $m = 1$. Довести, що будь-яка одноточкова множина $\{x\} \in \mathrm{K}$ і $\mathrm{m}(\{x\}) = 0$. Множина складена із скінченного числа точок, вимірна й має міру 0. Довести, що $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\} \in \mathrm{K}$ і $\mathrm{m}\left(\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}\right) = 0$. Довести також, що $(Q \cap [0,1]) \notin \mathrm{K}$.

б) Нехай $m = 1$ і $\{r_n: n \geqslant 1\}$ — занумеровані яким-небудь чином усі раціональні точки інтервалу $(0, 1)$. Для числа r_1 $\exists \varepsilon > 0$: $B(r_1, \varepsilon) \subset (0,1)$. Для δ, $0 < \delta < \varepsilon$ визначимо $F_1 := B\left(r_1, \frac{1}{2}\delta\right)$.

Нехай $r_{m(2)}$ — перша із точок $r_2, r_3, \ldots$, що не попали в F_1, а F_2 — замкнена куля з центром у точці $r_{m(2)}$ і радіусом, меншим $2^{-2}\delta$, така, що $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, $F_2 \subset (0,1)$. Таким же чином будуємо множини F_n, $n \geqslant 3$. Довести, що: 1) $\forall n \geqslant 1$: $F_n \in \mathrm{K}$; 2) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \notin \mathrm{K}$; 3) замикання в $(\mathbf{R}, \rho)$ множини $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ збігається з $[0, 1]$. Оскільки F_n, $n \geqslant 1$ по-

парно не перетинаються, то їх об'єднанню природно приписати «довжину», що дорівнює сумі ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}(F_n)$, який збігається і має суму, меншу за 2δ, бо $\mathbf{m}(F_n) < 2\frac{1}{2^n}\delta$, $n \geqslant 1$.

2.4. ВЛАСТИВОСТІ МІРИ ЖОРДАНА

Зауважимо, що, згідно з означенням,

$$\forall A \in \mathbf{K}: \ \mathbf{m}(A) \geqslant 0.$$

1°. **Напівадитивність.** Для будь-яких $\{A, B\} \subset \mathbf{K}$

$$\mathbf{m}(A \cup B) \leqslant \mathbf{m}(A) + \mathbf{m}(B). \tag{1}$$

⌈ Згідно з теоремою п. 2.3 $(A \cup B) \in \mathbf{K}$. Зауважимо, що

$$(A \cup B)_{(n)} \subset A_{(n)} \cup \Delta A_{(n)} \cup B_{(n)} \cup \Delta B_{(n)},$$

оскільки будь-який брус, що входить у ліву частину, містить тільки точки $A \cup B$, а у правій частині подано об'єднання всіх тих брусків, які мають хоча б одну спільну точку хоча б із однією з множин A, B. Тому

$$\mathbf{m}((A \cup B)_{(n)}) \leqslant \mathbf{m}(A_{(n)}) + \mathbf{m}(\Delta A_{(n)}) + \mathbf{m}(B_{(n)}) + \mathbf{m}(\Delta B_{(n)}),$$

звідки за допомогою визначення міри і теореми п. 2.2 одержимо

$$\mathbf{m}(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}((A \cup B)_{(n)}) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(A_{(n)}) + 0 + \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(B_{(n)}) + 0 = \mathbf{m}(A) + \mathbf{m}(B). \quad ⌋$$

Для множини $A \subset \mathbf{R}^m$ нехай A^0 — множина всіх внутрішніх в $(\mathbf{R}^m, \rho)$ точок множини A. Зауважимо, що при будь-якому $n \geqslant 0$ два різні бруси $\pi^{(n)}$ можуть мати спільні точки (грань, що лежить в гіперплощині — в $\mathbf{R}^{m-1}$), але не мають спільних внутрішніх в $(\mathbf{R}^m, \rho)$ точок.

2°. **Адитивність міри Жордана.** Нехай $\{A, B\} \subset \mathbf{K}$ такі, що $A^\circ \cap B^\circ = \varnothing$. Тоді

$$\mathbf{m}(A \cup B) = \mathbf{m}(A) + \mathbf{m}(B). \tag{2}$$

⌈ **Досить довести нерівність**

$$\mathbf{m}(A \cup B) \geqslant \mathbf{m}(A) + \mathbf{m}(B),$$

оскільки з неї та напівадитивності (1) випливає рівність (2).

Для довільного $n \geqslant 0$ маємо $A_{(n)} \cup B_{(n)} \subset (A \cup B)_{(n)}$, причому $A_{(n)}$ і $B_{(n)}$ спільних брусків з $\pi^{(n)}$ не мають (у протилежному випадку $A^0_{(n)} \cap B^0_{(n)} \neq \varnothing$, і тому $A_0 \cap B_0 \neq \varnothing$). Отже,

$$\mathbf{m}(A_{(n)} \cup B_{(n)}) = \mathbf{m}(A_{(n)}) + \mathbf{m}(B_{(n)}) \leqslant \mathbf{m}((A \cup B)_{(n)}).$$

Оскільки $A \in \mathbf{K}$, $B \in \mathbf{K}$, $(A \cup B) \in \mathbf{K}$, то

$$\mathbf{m}(A) + \mathbf{m}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(A_{(n)}) + \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(B_{(n)}) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}((A \cup B)_{(n)}) = \mathbf{m}(A \cup B). \quad \lrcorner$$

3⁰. Монотонність міри. Нехай $\{A, B\} \subset \mathbf{K}$ і $A \subset B$. Тоді

$$\mathbf{m}(A) \leqslant \mathbf{m}(B),$$

$$\mathbf{m}(B \setminus A) = \mathbf{m}(B) - \mathbf{m}(A). \tag{3}$$

$\ulcorner$ Зауважимо, що

$$B = A \cup (B \setminus A),$$

причому $A \in \mathbf{K}$, $(B \setminus A) \in \mathbf{K}$ і $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. З адитивності випливає рівність

$$\mathbf{m}(B) = \mathbf{m}(A) + \mathbf{m}(B \setminus A).$$

Враховуючи, що $\mathbf{m}(B \setminus A) \geqslant 0$, маємо (3). $\lrcorner$

Вправи

9.1. Довести що, $\{[0,1), (0,1)\} \subset \mathbf{K}_1$ і що $\mathbf{m}([0,1)) = 1$, $\mathbf{m}((0,1)) = 1$.

10. Нехай $A \in \mathbf{K}$, $B \in \mathbf{K}$. Довести, що $\mathbf{m}(A \cup B) = \mathbf{m}(A) + \mathbf{m}(B) - \mathbf{m}(A \cap B)$.

11. Нехай $A \in \mathbf{K}$. Довести, що $\mathbf{m}(A) = 0 \Leftrightarrow A^0 = \varnothing$.

12. Довести, що $\mathbf{m}(A \cup B) = \mathbf{m}(A) \Leftrightarrow (B \setminus A)^0 = \varnothing$.

13. Нехай $A_k \in \mathbf{K}$ і $\mathbf{m}(A_k) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Довести, що

$$\mathbf{m}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 0.$$

2.5. ЦИЛІНДРИЧНІ МНОЖИНИ ТА ЇХ ВИМІРНІСТЬ

Нехай $\mathbf{R}^m = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_i \in \mathbf{R},\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$. У просторі $\mathbf{R}^{m-1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) \mid x_i \in \mathbf{R},\ 1 \leqslant i \leqslant m-1\}$ розглянемо множину A і дві функції

$$u_1 : A \to \mathbf{R},\quad u_2 : A \to \mathbf{R}$$

такі, що

$$\forall (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in A : u_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) \leqslant u_2(x_1, \ldots, x_{m-1}).$$

Означення. Циліндричною у напрямку осі Ox_m множиною ***з основою*** A називається підмножина $\mathbf{R}^m$:

$$C := \left\{ (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) \left| \begin{array}{l} (x_1 \dots, x_{m-1}) \in A, \\ u_1(x_1, \dots, x_{m-1}) \leqslant x_m \leqslant \\ \leqslant u_2(x_1, \dots, x_{m-1}) \end{array} \right. \right\}.$$

Для циліндричної множини C її основу будемо позначати:

$$baC := A.$$

Приклад. При $m = 2$ циліндричними множинами є круг, трикутник, а при $m = 3$ — куля, частина циліндра з віссю, паралельній осі Ox_3, одержана за допомогою двох кришок.

Зауваження. Брус $Q = \prod_{k=1}^{m} [a_k, b_k]$ є циліндричною множиною з основою $baQ = \prod_{k=1}^{m-1} [a_k, b_k]$ — брусом в $\mathbf{R}^{m-1}$ і функціями

$$u_1(x_1, \dots, x_{m-1}) = a_m, \; u_2(x_1, \dots, x_{m-1}) = b_m; \quad (x_1, \dots, x_{m-1}) \in baQ.$$

Дуже широким є клас множин, які можна одержати як об'єднання скінченного числа циліндричних множин. На практиці, як правило, можна обмежитися тільки такими множинами.

ТЕОРЕМА. Нехай C — циліндрична множина, що визначена основою baC і функціями u_1, u_2. Припустимо, що:

1) baC — компактна, вимірна підмножина $\mathbf{R}^{m-1}$;
2) $u_i \in \mathbf{C}(baC)$, $i = 1, 2$.

Тоді множина C — компактна й вимірна.

$\vdash$ У скінченновимірному просторі із звичайною віддаллю множина компактна тоді й тільки тоді, коли вона обмежена й замкнена. Обмеженість C випливає з обмеженості baC і обмеженості неперервних функцій u_1, u_2 на компакті baC. Замкненість C випливає з замкненості baC, неперервності функцій u_1 і u_2 і означення циліндричної множини. Якщо послідовність $\{(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \in C: n \geqslant 1\}$ збігається до $(x_1, \dots, x_m)$, то $(x_1, \dots, x_{m-1}) \in baC$, оскільки $(x_1^{(n)}, \dots, x_{m-1}^{(n)}) \in baC$, $n \geqslant 1$, і

$$(x_1^{(n)}, \dots, x_{m-1}^{(n)}) \to (x_1, \dots, x_{m-1}), \quad n \to \infty.$$

Крім того

$$\forall n \geqslant 1: \; u_1(x_1^{(n)}, \dots, x_{m-1}^{(n)}) \leqslant x_m^{(n)} \leqslant u_2(x_1^{(n)}, \dots, x_{m-1}^{(n)}).$$

Звідси отримаємо

$$u_1(x_1, \dots, x_{m-1}) \leqslant x_m \leqslant u_2(x_1, \dots, x_{m-1}).$$

Доведення вимірності більш складне. Нехай $\pi_m^{(n)}$ — розбиття порядку n простору $\mathbf{R}^m$. Це розбиття визначає також розбиття $\pi_{m-1}^{(n)}$ порядку n простору $\mathbf{R}^{m-1} = \{(x_1, \dots, x_{m-1})\}$. Оцінимо величину $\mathbf{m}(\Delta C_{(n)})$. Зауважимо, що

$$\Delta C_{(n)} = \bigcup \{Q \in \pi_m^{(n)} \mid Q \subset \Delta C_{(n)},\ baQ \subset \Delta(baC)_{(n)}\} \cup$$
$$\cup \{Q \in \pi_m^{(n)} \mid Q \subset \Delta C_{(n)},\ baQ \subset (baC)_{(n)}\}.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ вибрано. Згідно з умовами 1) і 2)

$$\exists L > 0\ \forall (x_1, \dots, x_{m-1}) \in baC:$$
$$-L \leqslant u_1(x_1, \dots, x_{m-1}) \leqslant u_2(x_1, \dots, x_{m-1}) \leqslant L$$

і до функцій u_1, u_2 на baC можна застосувати теорему Кантора. Отже,

$$\exists \delta > 0\ \forall (\vec{x} = (x_1, \dots, x_{m-1}), \vec{y} = (y_1, \dots, y_{m-1})\} \subset baC,$$
$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) < \delta:\ |u_i(\vec{x}) - u_i(\vec{y})| < \varepsilon,\ i = 1,2.$$

Далі розглядаємо тільки ті n, для яких $\frac{\sqrt{m}}{2^n} < \min(\varepsilon, \delta)$.

Нехай $baQ \in \pi_{m-1}^{(n)}$ і $baQ \subset \Delta(baC)_{(n)}$. Брус baQ є основою деякого числа брусів $\pi_m^{(n)}$ з $\Delta C_{(n)}$. Висота найбільшого «стовпчика» — бруса із основою baQ, що містить точки C, не більше як $2(L + 2^{-n})$, а міра — об'єм цього «стовпчика» — не більше, як $2(L + 2^{-n})\,\mathbf{m}(baQ)$.

Нехай зараз $baQ \in \pi_{m-1}^{(n)}$ і $baQ \subset (baC)_{(n)}$. У цьому випадку baQ є основою не більше як двох «стовпчиків», висота кожного з яких не більше $2(\varepsilon + 2^{-n})$ і складених із брусків $\pi_m^{(n)}$, що містяться в $\Delta C_{(n)}$.

Таким чином,

$$\mathbf{m}(\Delta C_{(n)}) = \sum_{\substack{Q \in \pi_m^{(n)}, Q \subset \Delta C_{(n)} \\ baQ \subset \Delta(baC)_{(n)}}} \mathbf{m}(Q) + \sum_{\substack{Q \in \pi_m^{(n)}, Q \subset \Delta C_{(n)} \\ baQ \subset (baC)_{(n)}}} \mathbf{m}(Q) \leqslant$$

$$\leqslant 2(L + 2^{-n})\,\mathbf{m}(\Delta(baC)_{(n)}) + 4(\varepsilon + 2^{-n})\,\mathbf{m}((baC)_{(n)}) <$$
$$< 2(L + 1)\,\mathbf{m}(\Delta(baC)_{(n)}) + 8\varepsilon\,\mathbf{m}(baC).$$

Оскільки $baC \in \mathbf{K}_{m-1}$ за умовою 1), то $\mathbf{m}(\Delta(baC)_{(n)}) < \varepsilon$ для всіх n, починаючи з деякого. Тому

$$\exists n_0 \ \forall n \geqslant n_0: \ \mathbf{m}(\Delta C_{(n)}) < (2(L+1) + 8\,\mathbf{m}(baC))\,\varepsilon;$$

отже, $C \in \mathbf{K}_m$. ⌋

Вправи

14. Довести, що множина $\left\{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 1;\ 0 \leqslant x_2 \leqslant \left|\sin \frac{1}{x_1}\right|\right\}$ вимірна.

15. Нехай $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [a, b],\ x_2 = f(x_1)\}$ для $f \in \mathbf{C}([a, b])$. Довести, що $\Gamma \in \mathbf{K}_2$ і що плоска міра $\mathbf{m}(\Gamma) = 0$.

16. Нехай $\varphi_i \in \mathbf{C}^{(1)}([\alpha, \beta])$, $i = 1,2$; $\forall t \in [\alpha, \beta]$: $(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2 > 0$. ***Регулярною кривою*** є множина

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_i = \varphi_i(t), \quad i = 1,2; \qquad t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Довести, що $\Gamma \in \mathbf{K}_2$ і $\mathbf{m}(\Gamma) = 0$.

17. Нехай $f \in \mathbf{C}([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$. Довести, що поверхня в $\mathbf{R}^3$

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \quad x_3 = f(x_1, x_2)\}$$

є вимірною множиною і має об'єм 0.

18*. Навести приклад компактної невимірної за Жорданом множини в $\mathbf{R}^2$.

§ 3. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ ПО ВИМІРНИХ МНОЖИНАХ

3.1. ОЗНАЧЕННЯ ІНТЕГРАЛА

Нехай $\mathbf{K}$ — множина всіх вимірних підмножин простору $\mathbf{R}^m$ і $A \in \mathbf{K}$, f: $A \to \mathbf{R}$ — обмежена й неперервна на A функція. Для розбиття $\pi_m^{(n)}$, $n \geqslant 0$ простору $\mathbf{R}^m$ визначимо множину $A_{(n)}$.

Інтеграл від неперервної функції f по множині $A_{(n)}$ визначимо рівністю

$$\int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} := \sum_{Q \in \pi_m^{(n)},\, Q \subset A_{(n)}} \int\limits_{Q} f(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{1}$$

у правій частині якої кожне з скінченного числа доданків є інтегралом від неперервної функції по брусу. Останній інтеграл був визначений в § 1. Якщо $A_{(n)} = \varnothing$, то покладемо $\int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} := 0$.

ЛЕМА. Нехай $A \in \mathbf{K}$, функція $f \in \mathbf{C}(A)$ обмежена на A. Тоді послідовність чисел

$$\left\{ \int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} : n \geqslant 1 \right\}$$

фундаментальна.

$\vdash$ Нехай $k < n$, тоді $A_{(k)} \subset A_{(n)}$ і згідно з означенням (1)

$$\left| \int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} - \int\limits_{A_{(k)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} \right| = \left| \int\limits_{A_{(n)} \setminus A^0_{(k)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} \right|. \qquad (2)$$

За умовою леми

$$\exists L > 0 \ \forall \vec{x} \in A: |f(\vec{x})| \leqslant L,$$

а за теоремою 7 п. 1.5 для бруса $Q \subset A$

$$\left| \int\limits_{Q} f(\vec{x})\, d\vec{x} \right| \leqslant L\mathbf{m}(Q). \qquad (3)$$

За допомогою співвідношень (2) і (3) отримаємо оцінку

$$\left| \int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} - \int\limits_{A_{(k)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} \right| \leqslant L\mathbf{m}(A_{(n)} \setminus A^0_{(k)}) =$$

$$= L(\mathbf{m}(A_{(n)}) - \mathbf{m}(A_{(k)})),$$

з якої випливає твердження леми, оскільки послідовність $\{\mathbf{m}(A_{(n)}) : n \geqslant 1\}$ збігається і тому фундаментальна. $\dashv$

Означення 1. Нехай $A \in \mathbf{K}$, функція $f \in \mathbf{C}(A)$ і обмежена на A. ***m-кратним інтегралом*** від функції f по множині A називається число

$$\int\limits_{A} f(\vec{x})\, d\vec{x} := \lim_{n \to \infty} \int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x}. \qquad (4)$$

Якщо $A \in \mathbf{K}$ і $\mathbf{m}(A) = 0$, то множина $A_{(n)} = \varnothing$ для $n \geqslant 0$, і природно покласти

$$\int\limits_{A} f(\vec{x})\, d\vec{x} := 0.$$

Наведене означення припускає деяке узагальнення.

Означення 2. Нехай $A \in \mathbf{K}$, функція f обмежена на A, $B \subset A$, $B \in \mathbf{K}$, $\mathbf{m}(B) = 0$ і $f \in \mathbf{C}(A \setminus B)$. Інтеграл від функції f по множині A визначається за формулою (4), якщо за $A_{(n)}$ взяти об'єднання всіх тих брусів $\pi^{(n)}_m$, які повністю містяться в множині A і не містять точок з B.

3.2. ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛА

1°. Нехай $A \in \mathbf{K}$ і $\forall \vec{x} \in A$: $f(\vec{x}) = c$, $c \in \mathbf{R}$. Тоді

$$\int_A c d\vec{x} = c\mathrm{m}(A). \tag{5}$$

⌈ Рівність (5) має місце для бруса (див. п. 1.3) і згідно з означенням (1) для множини $A_{(n)}$

$$\int_{A_{(n)}} c d\vec{x} = c\,\mathrm{m}(A_{(n)}).$$

Перейшовши до границі при $n \to \infty$ і враховуючи визначення величин $\int_A c d\vec{x}$ і $\mathrm{m}(A)$, отримаємо рівність (5). ⌋

2°. Нехай $A \in \mathbf{K}$, $f_i \in \mathbf{C}(A)$ і обмежена на A, $i = 1,2$. Для будь-яких $\{c_1, c_2\} \subset \mathbf{R}$ має місце рівність

$$\int_A (c_1 f_1(\vec{x}) + c_2 f_2(\vec{x}))\, d\vec{x} = c_1 \int_A f_1(\vec{x})\, d\vec{x} + c_2 \int_A f_2(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{6}$$

⌈ Той факт, що рівність (6) має місце для $A_{(n)}$, випливає з означення інтеграла (1) і теореми 3 п. 1.5. Перейшовши до границі при $n \to \infty$ і використовуючи означення (1) п. 3.1, отримаємо рівність (6). ⌋

3°. Нехай $A \in \mathbf{K}$, $B \in \mathbf{K}$ і $A^\circ \cap B^\circ = \varnothing$; функція $f \in \mathbf{C}(A \cup B)$ і обмежена на $A \cup B$. Тоді

$$\int_{A \cup B} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_A f(\vec{x})\, d\vec{x} + \int_B f(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{7}$$

⌈ Для будь-якого $n \geqslant 0$ множини $A_{(n)}$ і $B_{(n)}$ спільних брусків розбиття $\pi_m^{(n)}$ не мають. Тому згідно з означенням (1) п. 3.1,

$$\int_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} + \int_{B_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{A_{(n)} \cup B_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{8}$$

Крім того,

$$C_n! = (A \cup B)_{(n)} \setminus (A_{(n)} \cup B_{(n)})^\circ \subset \Delta A_{(n)} \cup \Delta B_{(n)};$$

отже,

$$\left| \int_{(A \cup B)_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} - \int_{A_{(n)} \cup B_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} \right| \leqslant \left| \int_{C_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} \right| \leqslant$$

$$\leqslant L\,\mathrm{m}(C_n) \leqslant L(\mathrm{m}(\Delta A_{(n)}) + \mathrm{m}(\Delta B_{(n)})), \tag{9}$$

де $L := \sup \{|f(\vec{x})| \mid \vec{x} \in A \cup B\}$. Потрібну рівність отримаємо з рівності (8) за допомогою граничного переходу при $n \to \infty$, враховуючи означення 1 п. 3.1, нерівність (9) і вимірність множин A і B. ⌋

4°. Нехай $A \in \mathbf{K}$, $f \in \mathbf{C}(A)$ і обмежена на A. Тоді

$$\left|\int_A f(\vec{x})\, d\vec{x}\right| \leqslant \int_A |f(\vec{x})|\, d\vec{x}. \tag{10}$$

⌈ Спочатку доведемо нерівність (10) для множини $A_{(n)}$, використовуючи визначення 1 п. 3.1 і теорему 7 п. 1.5. Потім переходом до границі при $n \to \infty$ отримаємо (10). ⌋

5°. Нехай при умовах властивості 4° $\forall x \in A$: $f(\vec{x}) \geqslant 0$. Тоді

$$\int_A f(\vec{x})\, d\vec{x} \geqslant 0.$$

⌈ Див. теорему 5 п. 1.5. ⌋

Зауваження. Властивості 1°—5° мають місце для кратних інтегралів при припущеннях означення 2 п. 3.1.

Вправи

1. (Теорема про середнє значення). Нехай множина $A \in \mathbf{K}$ компактна і має таку властивість зв'язності:

$$\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset A\ \exists \vec{g}: [0,1] \to A,\ \vec{g} \in \mathbf{C}([0,1], A) \text{ і } \vec{g}(0) = \vec{x},\ \vec{g}(1) = \vec{y}.$$

Тоді для $f \in \mathbf{C}(A)$ $\exists \vec{\theta} \in A$: $\int_A f(\vec{x})\, dx = f(\vec{\theta})\, \mathrm{m}(A)$.

2. Нехай $A \in \mathbf{K}$, $B \in \mathbf{K}$, $B \subset A$ і $\mathrm{m}(B) = 0$. Функція $f: A \to \mathbf{R}$ обмежена на A і $f \in \mathbf{C}(A \setminus B)$. Нехай $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant n$: $A_i \in \mathbf{K}$ і $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ і $A_i^0 \cap A_j^0 = \varnothing$ при $i \neq j$. Нехай $\vec{\xi}_j \in A_j$; $1 \leqslant j \leqslant n$ і $\lambda_n = \max\{d(A_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Довести, що $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\vec{\xi}_i)\, \mathrm{m}(A_i) = \int_A f(\vec{x})\, d\vec{x}$.

3. Нехай виконані припущення властивості 5° і $\int_A f(\vec{x})\, d\vec{x} = 0$. Довести, що для $\forall \vec{x} \in A^\circ$: $f(\vec{x}) = 0$.

3.3. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ЗА ЦИЛІНДРИЧНИМИ МНОЖИНАМИ

Нехай A — циліндрична множина в $\mathbf{R}^m$ з компактною основою $baA \subset \mathbf{R}^{m-1}$ і неперервними на baA функціями u_1 і u_2. Нехай $f \in \mathbf{C}(A)$. Визначимо

$$g(x_1, \ldots, x_{m-1}) := \int\limits_{u_1(x_1, \ldots, x_{m-1})}^{u_2(x_1, \ldots, x_{m-1})} f(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m) dx_m,$$

$(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in baA$.

ЛЕМА. $g \in \mathbf{C}(baA)$.

$\vdash$ У тому випадку, коли функція f — многочлен, твердження леми є наслідком теореми про неперервність складної функції.

У загальному випадку застосуємо теорему Вейєрштрасса. Нехай $\varepsilon > 0$ вибрано. Тоді існує многочлен P_ε від m змінних такий, що

$$\max_{\vec{x} \in A} |f(\vec{x}) - P_\varepsilon(\vec{x})| < \varepsilon.$$

Нехай

$$h_\varepsilon(x_1, \ldots, x_{m-1}) := \int\limits_{u_1(x_1, \ldots, x_{m-1})}^{u_2(x_1, \ldots, x_{m-1})} P_\varepsilon(x_1, \ldots, x_m)\, dx_m,$$

$$(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in baA.$$

Тоді $h_\varepsilon \in \mathbf{C}(baA)$. Крім того, маємо

$$\forall (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in baA: \ |g(x_1, \ldots, x_{m-1}) - h_\varepsilon(x_1, \ldots, x_{m-1})| < \\ < \varepsilon(L_2 - L_1),$$

де

$$L_1 := \min\{u_1(\vec{x}) | \ \vec{x} \in baA\}, \quad L_2 := \max\{u_2(\vec{x}) | \ \vec{x} \in baA\}.$$

Нехай зараз точка $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in baA$ фіксована і $\delta > 0$ вибрано так, що

$$\forall (x'_1, \ldots, x'_{m-1}) \in baA, \quad \rho((x_1, \ldots, x_{m-1}), (x'_1, \ldots, x'_{m-1})) < \delta: \\ |h_\varepsilon(x_1, \ldots, x_{m-1}) - h_\varepsilon(x'_1, \ldots, x'_{m-1})| < \varepsilon.$$

Тоді

$$|g(x'_1, \ldots, x'_{m-1}) - g(x_1, \ldots, x_{m-1})| < 2\varepsilon(L_2 - L_1) + \varepsilon. \quad \dashv$$

ТЕОРЕМА. Нехай A — циліндрична множина в $\mathbf{R}^m$ із компактною вимірною основою baA і неперервними на baA функціями u_1 і u_2. Нехай $f \in \mathbf{C}(A)$. Тоді

$$\int\limits_A f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int\limits_{baA} \left(\int\limits_{u_1(x_1, \ldots, x_{m-1})}^{u_2(x_1, \ldots, x_{m-1})} f(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m)\, dx_m \right) \prod_{i=1}^{m-1} dx_i.$$

$\ulcorner$ Для розбиття $\pi_m^{(n)}$ визначимо множини $A_{(n)}$ і $(baA)_{(n)}$. За теоремою п. 2.5 множина A вимірна і згідно з означенням інтеграла

$$\int\limits_A f(\vec{x})\, d\vec{x} = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

Розглянемо випадок, коли проекція множини $A_{(n)}$ на підпростір $x_m = 0$ збігається з $(baA)_{(n)}$.

Множина $A_{(n)}$ складена з циліндричних множин — «стовпчиків», основами яких є бруси $Q \in \pi_{m-1}^{(n)}$, $Q \subset (baA)_{(n)}$.

Визначимо на $(baA)_{(n)}$ дві функції $\bar{u}_1$ і $\bar{u}_2$:

$$\bar{u}_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) := \min \{x_m \mid (x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m) \in A_{(n)}\};$$

$$\bar{u}_2(x_1, \ldots, x_{m-1}) := \max \{x_m \mid (x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m) \in A_{(n)}\},$$

$$(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in (baA)_{(n)}.$$

Функції $\bar{u}_1$ і $\bar{u}_2$ постійні на кожному Q°, $Q \in \pi_{m-1}^{(n)}$, $Q \subset baA$.

Згідно з наслідком 2 п. 1.6 і властивістю інтеграла (7) п. 3.2 отримаємо рівність

$$\int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int\limits_{(baA)_{(n)}} \left(\int\limits_{\bar{u}_1(x_1, \ldots, x_{m-1})}^{\bar{u}_2(x_1, \ldots, x_{m-1})} f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_m \right) \prod_{i=1}^{m-1} dx_i.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ вибране. Визначимо $\delta > 0$ таким чином, щоб

$$\forall \{\vec{z}' := (z_1', \ldots, z_{m-1}'),\ \vec{z}'' = (z_1'', \ldots, z_{m-1}'')\} \subset baA,\ \rho(\vec{z}', \vec{z}'') < \delta:$$

$$|u_i(\vec{z}') - u_i(\vec{z}'')| < \varepsilon,\ i = 1, 2.$$

Такий вибір δ можливий, оскільки u_1, u_2 рівномірно неперервні на компакті baA. Якщо $2^{-n}\sqrt{m} < \delta$, то

$$\forall (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in (baA)_{(n)}:$$

$$0 \leqslant \bar{u}_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) - u_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) < \varepsilon + 2 \cdot 2^{-n},$$

$$0 \leqslant u_2(x_1, \ldots, x_{m-1}) - \bar{u}_2(x_1, \ldots, x_{m-1}) < \varepsilon + 2 \cdot 2^{-n}.$$

Тому

$$\left| \int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} - \int\limits_{(baA)_{(n)}} g(x_1, \ldots, x_{m-1})\, dx_1 \ldots dx_{m-1} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{(baA)_{(n)}} \left(\int\limits_{\bar{u}_1(x_1, \ldots, x_{m-1})}^{\bar{u}_2(x_1, \ldots, x_{m-1})} f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_m - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int\limits_{u_1(x_1, \ldots, x_{m-1})}^{u_2(x_1, \ldots, x_{m-1})} f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_m \right) dx_1 \ldots dx_{m-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2L\,(\varepsilon + 2^{-n+1})\, \mathrm{m}((baA)_{(n)}) \leqslant 2L\, \mathrm{m}(baA)\,(\varepsilon + 2^{-n+1}),$$

де $L := \max\{|f(\vec{x})| \mid \vec{x} \in A\}$. З переходом до границі при $n \to \infty$ в останній нерівності отримаємо

$$\left| \int\limits_{A} f(\vec{x})\, d\vec{x} - \int\limits_{baA} g(x_1, \ldots, x_{m-1})\, dx_1 \ldots dx_{m-1} \right| \leqslant 2L\, \mathrm{m}(baA)\, \varepsilon,$$

а звідси при $\varepsilon \to +0$ випливає твердження теореми. ⌋

Наслідок. Нехай A — циліндрична множина, що задовольняє умовам теореми. Тоді

$$\mathrm{m}(A) = \int\limits_{A} d\vec{x} = \int\limits_{baA} (u_2(x_1, \ldots, x_{m-1}) - u_1(x_1, \ldots$$

$$\ldots, x_{m-1}))\, dx_1 \ldots dx_{m-1}. \qquad (11)$$

Вправи

4. За допомогою формули (11) обчислити площу круга і об'єм кулі.

5. Нехай B — компактна вимірна множина в $\mathbf{R}^{m-1} = \{(x_1, \ldots, x_{m-1})\}$ і $f \in \mathbf{C}(B)$. Довести, що множина

$$\{(x_1, \ldots, x_m) \mid (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in B,\ x_m = f(x_1, \ldots, x_{m-1})\}$$

має m-вимірну міру 0.

§ 4. ВІДОБРАЖЕННЯ ВИМІРНИХ МНОЖИН. ФОРМУЛА ЗАМІНИ ЗМІННИХ

4.1. ВІДОБРАЖЕННЯ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Нехай A — відкрита підмножина $\mathbf{R}^m$, число k, $1 \leqslant k \leqslant m$ фіксоване і функція $u \in \mathbf{C}^{(1)}(A)$. Відображення $\vec{g}: A \to$

$\to \mathbf{R}^m$, яке визначається формулою

$$\vec{g}(\vec{x}) := (x_1, \dots, x_{k-1}, u(\vec{x}), x_{k+1}, \dots, x_m),$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \in A \tag{1}$$

задає відображення підмножин A в деякий набір підмножин $\mathbf{R}^m$:

$$A \supset B \mapsto \vec{g}(B) = \{\vec{g}(\vec{x}) \mid \vec{x} \in B\}.$$

Множини $B \subset A$ зручно розглядати в просторі $\mathbf{R}^m = \{(x_1, \dots, x_m)\}$, а їх образи — $\vec{g}(\vec{B})$ — в другому просторі $\mathbf{R}^m = \{(y_1, \dots, y_m)\}$, вважаючи, що $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m) = \vec{g}(\vec{x})$.

Вправа

1. Нехай при $m = 2$, $A = \mathbf{R}^2$:

а) $\vec{g}(x_1, x_2) = (x_1, x_1^2 x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $k = 2$;

б) $h(x_1, x_2) = (-x_1 x_2, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $k = 1$.

Визначити образи $\vec{g}(Q)$, $\vec{h}(Q)$ для $Q = [a_1, b_1[\times [a_2, b_2]$.

Означення. Відображення вигляду (1) будемо називати відображенням ***спеціального вигляду.*** Далі вважаємо, що для відображення (1) виконана умова

$$L := \sup_{\vec{x} \in A} |u_k'(\vec{x})| < +\infty \tag{2}$$

і або

$$\forall \vec{x} \in A: \ u_k'(\vec{x}) > 0, \tag{3}$$

або

$$\forall \vec{x} \in A: \ u_k'(\vec{x}) < 0.$$

Далі використовується лема.

ЛЕМА. Припустимо, що відображення $\vec{h} = (h_1, \dots, h_m)$: $A \to \mathbf{R}^m$ задовольняє умовам:

1) $\vec{h}$ — взаємно однозначне відображення (ін'єкція) A в $\mathbf{R}^m$;

2) $\vec{h} \in \mathbf{C}(A, \mathbf{R}^m)$.

Тоді для будь-яких $G \subset A$, $F \subset A$, $G^\circ \cap F^\circ = \varnothing$ має місце рівність $h(G)^\circ \cap h(F)^\circ = \varnothing$.

$\vdash$ Припустимо, що твердження леми не має місця. Нехай $\vec{y} \in \vec{h}(G)^0 \cap \vec{h}(F)^0$. Тоді $\exists \varepsilon > 0$: $B(\vec{y}, \varepsilon) \subset \vec{h}(G)^0 \cap \vec{h}(F)^0$.

Нехай $\vec{y}=h(\vec{x})$, $\vec{x}\in A$. Оскільки $\vec{h}\in C(A, \mathbf{R}^m)$, то $\exists\delta>0$: $\vec{h}(B\times(\vec{x}, \delta))\subset B(\vec{y}, \varepsilon)$, і оскільки

$$B(\vec{y}, \varepsilon)\subset\vec{h}(G), \quad B(\vec{y}, \varepsilon)\subset\vec{h}(F),$$

то

$$\vec{h}(B(\vec{x}, \delta))\subset\vec{h}(G), \quad \vec{h}(B(\vec{x}, \delta)\subset\vec{h}(F).$$

Таким чином, згідно з умовою 1) $B(\vec{x}, \delta)\subset G$, $B(\vec{x}, \delta)\subset\subset F$, що суперечить умові. ⌋

4.2. ВИМІРНІСТЬ ОБРАЗУ ПРИ ВІДОБРАЖЕННІ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

ТЕОРЕМА. Нехай $\vec{g}$ — відображення спеціального вигляду (1), що задовольняє умовам (1) і (3). Нехай $B\subset A$, $B\in\mathbf{K}_m$ B компактна.

Тоді образ $\vec{g}(B)$ є компактною вимірною множиною.

⌈ Доведення теореми доцільно розбити на частини.

(i) Розглянемо випадок, коли B — брус в $\mathbf{R}^m$. Нехай

$$B=Q=[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\ldots\times[a_m, b_m],$$

$$baQ=\{(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m)\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,$$
$$1\leqslant i\leqslant m, \ i\neq k\}.$$

Згідно з теоремою п. 2.5 образ $\vec{g}(Q)$ є вимірною множиною в $\mathbf{R}^m$, оскільки при виконанні умови $u_k'>0$ на A образ $\vec{g}(Q)$ є така циліндрична множина

$$\vec{g}(Q)=\{(y_1, \ldots, y_m)\mid(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_m)\in baQ,$$
$$u(y_1, \ldots, y_{k-1}, a_k, y_{k+1}, \ldots, y_m)\leqslant y_k\leqslant u(y_1, \ldots, y_{k-1},$$
$$b_k, y_{k+1}, \ldots, y_m)\}$$

в $\mathbf{R}^m$ із компактною вимірною основою baQ і неперервними функціями u_1, u_2. Згідно з наслідком п. 3.3 для міри цієї множини маємо

$$\mathrm{m}(\vec{g}(Q))=\int\limits_{baQ}|u(x_1, \ldots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)-$$
$$-u(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)|\prod_{i\neq k}dx_i.$$

Звідси за допомогою формули (3) п. 1.6 та теореми 4 про середнє значення п. 1.5 отримаємо

$$\mathbf{m}(\vec{g}(Q)) = \int_Q |u_k'(\vec{x})|\,d\vec{x} = |u_k'(\vec{x}(Q))|\,\mathbf{m}(Q) \tag{4}$$

для деякої точки $\vec{x}(Q) \in Q$.

(ii) Для розбиття $\pi_m^{(n)}$ визначимо множини

$$B_{(n)},\ B^{(n)},\ \Delta B_{(n)}$$

і розглянемо їхні образи

$$\vec{g}(B_{(n)}),\ \vec{g}(B^{(n)}),\ \vec{g}(\Delta B_{(n)}).$$

Оскільки множина A відкрита, то $B^{(n)} \subset A$ для всіх n, більших за деяке N_0. Далі $n > N_0$.

Зауважимо, що при виконанні умов теореми відображення $\vec{g}$ є неперервною ін'єкцією з A в $\mathbf{R}^m$ і що з включень

$$B_{(n)} \subset B \subset B^{(n)} \Rightarrow \vec{g}(B_{(n)}) \subset \vec{g}(B) \subset \vec{g}(B^{(n)}).$$

Крім того,

$$\vec{g}(B_{(n)}) = \bigcup \{\vec{g}(Q) \mid Q \in \pi_m^{(n)},\ Q \subset B_{(n)}\}.$$

Згідно з пунктом (i) доведення та властивостями вимірних множин множина $\vec{g}(B_{(n)})$ — вимірна. За лемою п. 4.1 і адитивністю міри

$$\mathbf{m}(\vec{g}(B_{(n)})) = \sum_{Q \in \pi_m^{(n)},\, Q \subset B_{(n)}} \mathbf{m}(\vec{g}(Q)). \tag{5}$$

Таким же чином $\vec{g}(B^{(n)}) \in \mathbf{K}_m$, $\vec{g}(\Delta B_{(n)}) \in \mathbf{K}_m$ і їх міри обчислюються таким же чином, як і в (5). Доведемо, що

$$\mathbf{m}(\vec{g}(\Delta B_{(n)})) \to 0,\ n \to \infty.$$

Дійсно, для будь-якого бруса $Q \subset A$ маємо $\mathbf{m}(\vec{g}(Q)) \leqslant L\,\mathbf{m}(Q)$ внаслідок формули (4) і умови теореми (2). З цієї нерівності

$$\mathbf{m}(\vec{g}(\Delta B_{(n)})) \leqslant \sum_{Q \in \pi_m^{(n)},\, Q \subset \Delta B_{(n)}} \mathbf{m}(\vec{g}(Q)) \leqslant L\,\mathbf{m}(\Delta B_{(n)});$$

права частина її прямує до нуля, оскільки множина B вимірна.

(iii) Доведемо вимірність $\vec{g}(B)$. Нехай спочатку числа n і $\varepsilon > 0$ фіксовані. Оскільки множини $\vec{g}(B_{(n)})$ і $\vec{g}(B^{(n)})$ вимірні, то

$$\exists N_1 = N_1(n, \varepsilon) \ \forall N \geqslant N_1:$$

$$(\vec{g}(B_{(n)}))_{(N)} \subset \vec{g}(B_{(n)}) \subset \vec{g}(B) \subset \vec{g}(B^{(n)}) \subset (\vec{g}(B^{(n)}))^{(N)},$$

$$\mathrm{m}(\vec{g}(B_{(n)})) - \mathrm{m}((\vec{g}(B_{(n)})_{(N)}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\mathrm{m}(\vec{g}(B^{(n)}))^{(N)}) - \mathrm{m}(\vec{g}(B^{(n)})) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тому

$$\mathrm{m}(\Delta\vec{g}(B)_{(N)}) \leqslant \mathrm{m}((\vec{g}(B^{(n)}))^{(N)}) - \mathrm{m}((\vec{g}(B_{(n)}))_{(N)}) =$$

$$= \mathrm{m}(\vec{g}(B^{(n)}))^{(N)}) - \mathrm{m}(\vec{g}(B^{(n)})) + \mathrm{m}(\vec{g}(B^{(n)})) - \mathrm{m}(\vec{g}(B_{(n)})) +$$

$$+ \mathrm{m}(\vec{g}(B_{(n)})) - \mathrm{m}((\vec{g}(B_{(n)}))_{(N)}) < \varepsilon + \mathrm{m}(\vec{g}(\Delta B_{(n)})).$$

Якщо n таке, що $\mathrm{m}(\vec{g}(\Delta B_{(n)})) < \varepsilon$, то $\mathrm{m}(\Delta\vec{g}(B)_{(N)}) < 2\varepsilon$ для $N \geqslant N_1$. Це значить, що $\mathrm{m}(\Delta\vec{g}(B)_{(N)}) \to 0$, $N \to \infty$, тобто $\vec{g}(B) \in \mathrm{K}_m$. Оскільки

$$\mathrm{m}(\vec{g}(B_{(n)})) \leqslant \mathrm{m}(\vec{g}(B)) \leqslant (\vec{g}(B^{(n)})),$$

то

$$\mathrm{m}(\vec{g}(B)) - \mathrm{m}(\vec{g}(B_{(n)})) < \mathrm{m}(\vec{g}(\Delta B_{(n)})),$$

звідки випливає

$$\mathrm{m}(\vec{g}(B)) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(\vec{g}(B_{(n)})). \tag{6}$$

Крім того, $\vec{g}(B)$ компактна множина як неперервний образ компакта.

┘

Вправи

2. Нехай при $m = 2$, $A = \mathbf{R}^2$, $B = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ і $\vec{g}(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Довести вимірність $\vec{g}(B)$ (хоча не всі умови теореми п. 4.2 виконані).

3. Нехай $\vec{g}$ — відображення (1), що задовольняє умовам (2) і (3). Нехай $Q \subset A$ — брус і $f \in \mathbf{C}(\vec{g}(Q))$. Довести, що

$$\exists \vec{\theta}_1 \in \vec{g}(Q) \ \exists \vec{\theta}_2 \in \vec{g}(Q): \int\limits_{\vec{g}(Q)} f(\vec{x})\, d\vec{x} = f(\vec{\theta}_1) \mid u_k'(\vec{\theta}_2) \mid \mathrm{m}(Q).$$

4.3. ФОРМУЛА ЗАМІНИ ЗМІННИХ ДЛЯ ВІДОБРАЖЕННЯ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

ТЕОРЕМА. Нехай $\vec{g}\colon A \to \mathbf{R}^m$ — відображення вигляду (1), що задовольняє умовам (2) і (3) п. 4.2; нехай B — компактна, вимірна підмножина A і $f \in \mathbf{C}(\vec{g}(B))$.

Тоді

$$\int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\, d\vec{y} = \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))\, |u_k'(\vec{x})|\, d\vec{x}. \tag{1}$$

Формула (1) називається ***формулою заміни змінних***, або ***формулою переходу*** від інтегрування по змінним $x_1, \ldots, x_m$ до інтегрування за змінними $y_1, \ldots, y_m$, причому перехід визначається функцією $\vec{g}$.

$\vdash$ За теоремою п. 4.2 множина $\vec{g}(B)$ — компактна й вимірна. За теоремою про неперервність суперпозиції неперервних функцій функція $f(\vec{g})\,|u_k'| \in \mathbf{C}(B)$. Тому обидва інтеграли в формулі (1) визначені й потрібно довести тільки їх рівність.

Для розбиття $\pi_m^{(n)}$ простору $\mathbf{R}^m$ розглянемо множину $B_{(n)}$ і для кожного бруса $Q \in \pi_m^{(n)}$, $Q \in B_{(n)}$ виберемо поки довільну точку $\vec{x}(Q) \in Q$ й розглянемо очевидну нерівність

$$\left| \int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\, d\vec{y} - \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))\, |u_k'(\vec{x})|\, d\vec{x} \right| \leqslant \mathcal{J}_n^{(1)} + \mathcal{J}_n^{(2)} + \mathcal{J}_n^{(3)} + \mathcal{J}_n^{(4)}, \tag{2}$$

де

$$\mathcal{J}_n^{(1)} := \left| \int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\, d\vec{y} - \int\limits_{\vec{g}(B_{(n)})} f(\vec{y})\, d\vec{y} \right|;$$

$$\mathcal{J}_n^{(2)} := \left| \int\limits_{\vec{g}(B_{(n)})} f(\vec{y})\, d\vec{y} - \sum_{Q \in \pi_m^{(n)},\, Q \subset B_{(n)}} f(\vec{g}(\vec{x}(Q))) \times \right.$$

$$\times\, |u_k'(\vec{x}(Q))|\, \mathbf{m}(Q) \Big|;$$

$$\mathcal{J}_n^{(3)} := \left| \sum_{Q \in \pi_m^{(n)},\, Q \subset B_{(n)}} f(\vec{g}(\vec{x}(Q)))\, \left| u_k'(\vec{x})(Q) \right| \mathbf{m}(Q) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{B_{(n)}} f(\vec{g}(\vec{x}))\, |u_k'(\vec{x})|\, d\vec{x} \right|;$$

$$\mathcal{J}_n^{(4)} := \left| \int\limits_{B_{(n)}} f(\vec{g}(\vec{x}))\,|u_k'(\vec{x})|\,d\vec{x} - \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))\,|u_k'(\vec{x})|\,d\vec{x} \right|.$$

Доведемо, що права частина (2) прямує до нуля при $n \to \infty$. Нехай $\tilde{L} := \max\{\max\limits_{\vec{g}(B)} |f|,\ \max\limits_{B} |f(\vec{g})\,u_k'|\}$. Внаслідок нерівності (10) п. 3.2 і формули (6) п. 4.2

$$\mathcal{J}_n^{(1)} \leqslant \tilde{L}\,(\mathrm{m}(\vec{g}(B)) - \mathrm{m}(\vec{g}(B_{(n)}))) \to 0,\ n \to \infty.$$

Таким же чином

$$\mathcal{J}_n^{(4)} \leqslant \tilde{L}\,(\mathrm{m}(B) - \mathrm{m}(B_{(n)})) \to 0,\ n \to \infty.$$

Для оцінки величини $\mathcal{J}_n^{(2)}$ спочатку виберемо для кожного Q точку $\vec{x}(Q)$ таким чином, щоб виконувалась рівність (4) п. 4.2. Отримаємо

$$\mathcal{J}_n^{(2)} \leqslant \sum_{Q \in \pi_m^{(n)},\, Q \subset B} \left| \int\limits_{\vec{g}(Q)} (f(\vec{y}) - f(\vec{g}(\vec{x}(Q))))\,d\vec{y} \right|.$$

Враховуючи рівномірну неперервність функцій f на $\vec{g}(B)$ і u_k' на B, легко довести, що $\mathcal{J}_n^{(2)} \to 0$, $n \to \infty$. Для оцінки величини $\mathcal{J}_n^{(3)}$ потрібно спочатку застосувати теорему про середнє значення п. 1.5

$$\mathcal{J}_n^{(3)} \leqslant \Bigg| \sum_{Q \in \pi_m^{(n)},\, Q \subset B_{(n)}} (f(\vec{g}(\vec{x}(Q)))\,|u_k'(\vec{x}(Q))| -$$

$$- f(\vec{g}(\vec{\theta}(Q)))\,|u_k'(\vec{\theta}(Q))|)\,\mathrm{m}(Q) \Bigg|$$

для $\vec{\theta}(Q) \in Q$, а потім використати рівномірну неперервність функції $f(\vec{g})\,|u_k'|$ на B. ⌋

Зауваження. Для відображення $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_m)$ вигляду (1) п. 4.1 маємо

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} = u_k'(\vec{x}).$$

Тому формулу (1) можна записати таким чином:

$$\int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\,d\vec{y} = \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))\left|\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right| d\vec{x}. \qquad (3)$$

Вправа

4. Нехай $B = \{(z_1, z_2) \mid 1 \leqslant z_1^2 + z_2^2 \leqslant 4,\ z_2 \geqslant z_1,\ z_2 \geqslant -z_1\}$ і $f \in \mathbf{C}(B)$. Нехай $Q = \left\{(r, \varphi) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2,\ \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}\right\}$ — брус в просторі $\{(r, \varphi)\}$.

Для відображення $\vec{g} = (y_1, y_2)$: $(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r)$ з якобіаном

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(r, \varphi)} = r\sin\varphi$$

побудувати $\vec{g}(Q)$. Далі для відображення

$$\vec{h} = (z_1, z_2):\ (y_1, y_2) \mapsto (y_1, r\sin\varphi) = (y_1, y_2\sqrt{1 - (y_1/y_2)^2}) =$$

$$= (y_1, \sqrt{y_2^2 - y_1^2})$$

побудувати образ $\vec{h}(\vec{g}(Q))$ і довести, що

$$\vec{h}(\vec{g}) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi),\ \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(y_1, y_2)} = y_2/\sqrt{y_2^2 - y_1^2}.$$

Застосувавши двічі теорему п. 4.3, довести рівності

$$\int_B f(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2 = \int_{\vec{g}(Q)} f(y_1, \sqrt{y_2^2 - y_1^2})\,(y_2/\sqrt{y_2^2 - y_1^2})\, dy_1 dy_2 =$$

$$= \int_Q f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(r/\sqrt{r^2 - r^2\cos^2\varphi}\ \mid r\sin\varphi \mid dr d\varphi =$$

$$= \int_Q r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr d\varphi.$$

Зауважимо, що $\dfrac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(r, \varphi)} = \dfrac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(y_1, y_2)}\,\dfrac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(r, \varphi)} = r.$

4.4. ЛОКАЛЬНЕ ЗВЕДЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ДО СУПЕРПОЗИЦІЇ ВІДОБРАЖЕНЬ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Нехай A — відкрита множина в $\mathbf{R}^m$, $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_m)$: $A \to \mathbf{R}^m$, причому $\vec{g} \in \mathbf{C}^{(1)}(A, \mathbf{R}^m)$ і

$$\forall \vec{x} \in A:\ \det \vec{g}'(\vec{x}) = \frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(\vec{x}) \neq 0, \qquad (1)$$

ЛЕМА. $\forall \vec{x}_0 \in A\ \exists r > 0$:

$$\forall \vec{x} \in B(\vec{x}_0) := B(\vec{x}_0, r):\ \vec{g}(\vec{x}) = \vec{g}_{(m)}(\vec{g}_{(m-1)}(\ldots \vec{g}_{(1)}(\vec{x})\ldots)),$$

де відображення $\vec{g}_{(1)}, \ldots, \vec{g}_{(m)}$ є відображеннями спеціального вигляду (1), що задовольняють умовам (2), (3) п. 4.1.

⌈ Згідно з умовою (1), визначник $\det \vec{g}'(\vec{x}_0) \neq 0$. Тому існує мінор $(m-1)$-го порядку, відмінний від 0. Можна припустити, що

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_{m-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{m-1})}(\vec{x}_0) \neq 0.$$

Такі самі міркування показують, що можна вважати виконаними нерівності

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_k)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)}(\vec{x}_0) \neq 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{2}$$

Нехай для $\vec{x} \in A$

$$y_1^{(1)} = g_1(\vec{x}), \quad y_2^{(1)} = x_2, \ldots, y_m^{(1)} = x_m, \tag{3}$$

$$\vec{y}^{(1)} = \vec{y}^{(1)}(\vec{x}) = \vec{g}_{(1)}(\vec{x}) := (y_1^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}), \quad \vec{y}_0^{(1)} := \vec{y}^{(1)}(\vec{x}_0).$$

При цьому

$$\frac{\partial(y_1^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)})}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}.$$

Згідно з умовою (2) існує відкрита куля $B_1(\vec{y}_0^{(1)})$ з центром у точці $\vec{y}_0^{(1)}$ і дійсна функція $h_1 \in \mathbf{C}^{(1)}(B_1(\vec{y}_0^{(1)}))$, що визначається єдиним чином і така, що $\forall \vec{y}^{(1)} \in B_1(\vec{y}_0^{(1)})$ набір

$$x_1 = h_1(\vec{y}^{(1)}), \quad x_2 = y_2^{(1)}, \ldots, x_m = y_m^{(1)} \tag{4}$$

є розв'язком системи (3), тобто

$$y_1^{(1)} = g_1(h_1(\vec{y}^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}), \; y_2^{(1)} = y_2^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)} = y_m^{(1)}. \tag{5}$$

Нехай

$$\vec{h}_1 := (h_1, y_2^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}): B_1(\vec{y}_0^{(1)}) \to \mathbf{R}^m,$$

$D_1(\vec{x}_0) := \vec{h}_1(B_1(\vec{y}_0^{(1)}))$ — деяка відкрита підмножина, що містить точку $\vec{x}_0$.

Нехай далі для $\vec{x} \in A$

$$y_1^{(2)} = y_1^{(1)}, \quad y_2^{(2)} = g_2(\vec{x}) = g_2(h_1(\vec{y}^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}),$$
$$y_3^{(2)} = y_3^{(1)}, \ldots, y_m^{(2)} = y_m^{(1)}; \tag{6}$$

$$\vec{y}^{(2)} = \vec{g}_{(2)}(\vec{y}^{(1)}) := (y_1^{(2)}, \ldots, y_m^{(2)}), \quad \vec{y}_0^{(2)} := \vec{y}^{(2)}(\vec{y}_0^{(1)}).$$

Для деякої відкритої кулі $B_2(\vec{y}_0^{(2)})$ з центром у точці $\vec{y}_0^{(2)}$ систему (6) можна розв'язати відносно $y_1^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}$. Дійсно, згідно з означенням (6)

$$\frac{\partial y_2^{(2)}}{\partial y_2^{(1)}} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial y_2^{(1)}} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}; \tag{7}$$

крім того, з тотожностей (5) випливає, що

$$0 = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial y_2^{(1)}} + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}. \tag{8}$$

Тому $\frac{\partial y_2^{(2)}}{\partial y_2^{(1)}} \neq 0$, оскільки інакше однородна система (7), (8) з відмінним від нуля за припущенням (2) визначником мала б відмінний від нуля розв'язок $\left(\frac{\partial h_1}{\partial y_2^{(1)}}, 1\right)$. Як і вище, отримуємо відкриту множину $D_2(\vec{x}_0)$, що містить точку $\vec{x}_0$, і таку, що $\forall \vec{x} \in D := D_1(\vec{x}_0) \cap D_2(\vec{x}_0)$:

$$\vec{y}^{(2)}(\vec{x}) = \vec{g}_{(2)}(\vec{g}_{(1)}(\vec{x})) = \vec{y}^{(2)}(\vec{y}^{(1)}(\vec{x})) = (g_1(\vec{x}), g_2(x), x_3, \ldots, x_m),$$

причому відображення

$$\vec{g}_{(1)}\colon D \to B_1(\vec{y}_0^{(1)}); \quad \vec{g}_{(2)}\colon B_1(\vec{y}_0^{(1)}) \to B_2(\vec{y}_0^{(2)})$$

задовольняють усім потрібним умовам. Подальші міркування подібні наведеним вище. ⌋

4.5. ФОРМУЛА ЗАМІНИ ЗМІННИХ

ТЕОРЕМА. Нехай A — відкрита підмножина $\mathbf{R}^m$, $B \subset A$ — компактна, вимірна підмножина і $\vec{g}\colon A \to \mathbf{R}^m$ — відображення, що задовольняє умовам:

1) відображення $\vec{g}$ множини B на $\vec{g}(B)$ взаємно однозначне;

2) $\vec{g} \in \mathbf{C}^{(1)}(A, \mathbf{R}^m)$;

3) або $\forall \vec{x} \in B\colon \mathcal{J}(\vec{x}) := \frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(\vec{x}) > 0$,

або $\forall \vec{x} \in B\colon \mathcal{J}(\vec{x}) < 0$, де $(g_1, \ldots, g_m) = \vec{g}$.

Нехай $f\colon \vec{g}(B) \to \mathbf{R}$ і $f \in \mathbf{C}(\vec{g}(B))$.

Тоді множина $\vec{g}(B)$ компактна, вимірна і має місце формула

$$\int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\, d\vec{y} = \int\limits_{B} f(\vec{g}\ (\vec{x})) \left| \frac{\partial (g_1, \ldots, g_m)}{\partial (x_1, \ldots, x_m)} \right| d\vec{x}. \qquad (1)$$

$\ulcorner$ Згідно з лемою п. 4.4 $\forall \vec{x} \in B\ \exists \delta > 0\ \forall \vec{u} \in B(\vec{x}, \delta)$:

$$\vec{g}\ (\vec{u}) = \vec{g}_{(m)}\ (\vec{g}_{(m-1)}\ (\ldots\ (\vec{g}_1\ (\vec{u}))\ \ldots)), \qquad (2)$$

де $\delta = \delta(\vec{x})$, а кожне з відображень $\vec{g}_{(1)}, \ldots, \vec{g}_{(m)}$ є відображенням спеціального вигляду (1), що задовольняє умовам (2) і (3) п. 4.1. Система куль $\left\{B\left(\vec{x}, \frac{1}{2}\ \delta\ (\vec{x})\right) \middle| \vec{x} \in B\right\}$ є відкрите покриття компактної множини B. Тому існує скінченне підпокриття $\left\{B\ (\vec{x}^{(i)}), \frac{1}{2}\ \delta\ (\vec{x}^{(i)}) \mid 1 \leqslant i \leqslant s\right\}$. Нехай $\gamma = \frac{1}{2} \min \{\delta\ (\vec{x}^{(i)}) \mid 1 \leqslant i \leqslant s\} > 0$.

Розглянемо такі розбиття $\pi_m^{(n)}$ простору $\mathbf{R}^m$, для яких діаметр брусів $\pi_m^{(n)}$ менше за γ. Нехай $Q(1), \ldots, Q(N)$ — всі ті бруски розбиття $\pi_m^{(n)}$, які мають непустий перетин з множиною B. Визначимо $B(i) := B \cap Q(i)$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Зрозуміло, що

$$B = \bigcup_{i=1}^{N} B(i); \qquad B(\nu)^0 \cap B(\mu)^0 = \varnothing, \quad \nu \neq \mu. \qquad (3)$$

Оскільки

$$\forall \nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant N\ \ \exists i_0\colon B(\nu) \cap B\left(\vec{x}^{(i_0)}, \frac{1}{2}\ \delta\ (\vec{x}^{(i_0)})\right) \neq \varnothing$$

і $B(\nu) \subset Q(\nu)$, то $B(\nu) \subset B(\vec{x}^{(i_0)}, \delta\ (\vec{x}^{(i_0)}))$, де $i_0 = i_0(\nu)$.

Таким чином, розглядаючи відображення $\vec{g}$ на $B(\nu)$, можна припустити, що воно має вигляд (2) і що образ $\vec{g}(B(\nu))$ отриманий таким чином:

$$\vec{g}\ (B(\nu)) = \vec{g}_{(m)}\ (B^{(m-1)}(\nu)), \ldots,\ B^{(2)}(\nu) := \vec{g}_{(2)}\ (B^{(1)}\ (\nu)),$$

$$B^{(1)}\ (\nu) := \vec{g}_{(1)}\ (B\ (\nu)).$$

Множини $B^{(i)}(\nu)$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$; $\vec{g}\ (B(\nu))$ компактні й вимірні за теоремою п. 4.2. Застосовуючи послідовно теорему п. 4.3

і наслідок п. 2.2 глави 12, отримаємо

$$\int\limits_{\vec{g}(B(\nu))} f(\vec{y})\,d\vec{y} = \int\limits_{\vec{g}_{(m)}(B^{(m-1)}(\nu))} f(\vec{y})\,d\vec{y} =$$

$$= \int\limits_{B^{(m-1)}(\nu)} f(\vec{g}_{(m)}(\vec{z}))\left|\frac{\partial(y_1,\dots y_m)}{\partial(z_1,\dots,z_m)}\right| d\vec{z} =$$

$$= \int\limits_{B^{(m-2)}(\nu)} f(\vec{g}_{(m)}(\vec{g}_{(m-1)}(\vec{u})))\left|\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(z_1,\dots,z_m)}\right| \times$$

$$\times\left|\frac{\partial(z_1,\dots,z_m)}{\partial(u_1,\dots,u_m)}\right| d\vec{u} = \int\limits_{B^{(m-2)}(\nu)} f(\vec{g}_{(m)}(\vec{g}_{(m-1)}(\vec{u}))) \times$$

$$\times\left|\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(u_1,\dots,u_m)}\right| d\vec{u} = \dots = \int\limits_{B(\nu)} f(\vec{g}_{(m)}(\dots(\vec{g}_{(1)}(\vec{x}))\dots)) \times$$

$$\times\left|\frac{(\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}\right| d\vec{x} = \int\limits_{B(\nu)} f(\vec{g}(\vec{x}))\left|\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}\right| d\vec{x}.$$

Оскільки

$$\vec{g}(B) = \bigcup_{i=1}^{N} \vec{g}(B(i)),$$

то $\vec{g}(B)$ — компактна й вимірна множина. За допомогою зображення (3), леми п. 4.1 і рівностей (4) остаточно знаходимо

$$\int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\,d\vec{y} = \sum_{\nu=1}^{N} \int\limits_{\vec{g}(B(\nu))} f(\vec{y})\,d\vec{y} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \int\limits_{B(\nu)} f(\vec{g}(\vec{x}))\,|\mathcal{J}|\,d\vec{x} = \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))\,|\mathcal{J}|\,d\vec{x}. \qquad \lrcorner$$

Зауваження. Формула заміни змінних (1) часто записується в такій формі. Нехай $D := \vec{g}(B)$, тоді $B = \vec{g}^{-1}(D)$ і формулу (1) можна записати так:

$$\int\limits_{D} f(\vec{y})\,d\vec{y} = \int\limits_{\vec{g}^{-1}(D)} f(\vec{g}(\vec{x}))\,|\mathcal{J}|\,d\vec{x};$$

при цьому замість умов, яким підпорядкована множина B, потрібно вимагати, щоб множина D була компактною й вимірною.

4.6. НАСЛІДКИ Й ПРИКЛАДИ

Наслідок 1. При умовах теореми п. 4.5 на множину B і відображення $\vec{g}$ має місце рівність

$$\mathrm{m}(\vec{g}(B)) = \int_B \left| \frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} \right| d\vec{x}. \tag{1}$$

Площі фігур у площині мають таку властивість: конгруентні фігури мають однакову площу. Такі ж властивості мають довжина та об'єм. Для введеної раніше міри Жордана дана властивість не є безпосереднім наслідком означення, оскільки воно залежить від системи координат простору. Наступне твердження містить згадану властивість міри Жордана.

Наслідок 2. Нехай D — матриця розміру $m \times m$ з дійсними елементами і така, що $|\det D| = 1$, а $\vec{g}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ — афінне перетворення, що визначається формулою

$$\vec{g}(\vec{x}) = D\vec{x} + \vec{a}, \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^m; \quad \vec{a} \in \mathbf{R}^m.$$

Тоді для будь-якої компактної вимірної множини $B \subset \mathbf{R}^m$ має місце рівність

$$\mathrm{m}(B) = \mathrm{m}(\vec{g}(B)).$$

Умови теореми п. 4.5 можуть бути послаблені. Наступний приклад показує, що формула заміни змінної має місце і в тому випадку, коли умови 1), 3) цієї теореми порушуються на множині міри 0.

Приклад. Перехід до полярних координат. Нехай $B = \{(\varphi, r) \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant r_1\}$ — брус-прямокутник в $\mathbf{R}^2$; $x_1 = \varphi$, $x_2 = r$, а відображення $\vec{g} = (g_1, g_2) = (y_1, y_2)$ задано формулами

$$y_1 = g_1(\varphi, r) = r\cos\varphi, \quad y_2 = g_2(\varphi, r) = r\sin\varphi.$$

Для цього відображення $\mathcal{J} = \dfrac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(\varphi, r)} = -r$ і $\mathcal{J} = 0$ на нижній стороні прямокутника B. Крім того, відображення $\vec{g}: B \to \vec{g}(B)$ не є взаємно однозначним, оскільки згадана сторона переходить в точку $(0, 0)$ — центр круга $\vec{g}(B)$. Проте для будь-якої функції $f \in \mathbf{C}(\vec{g}(B))$ має місце формула

$$\int_{\vec{g}(B)} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 = \int_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r dr d\varphi, \tag{2}$$

або

$$\iint_{\{y_1^2 + y_2^2 \leqslant r_1^2\}} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 = \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r d\varphi dr.$$

$\vdash$ Доведемо формулу (2). Спочатку зауважимо, що обидва інтеграли в (2) визначені, оскільки B і круг $\vec{g}(B)$ — компактні вимірні множини, а підінтегральні вирази неперервні. Тому потрібно довести тільки рівність інтегралів в (2). Нехай $0 < \varepsilon < \min(\pi, r_1)$. Розглянемо

$$B_\varepsilon = \{(\varphi, r) \mid \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \varepsilon, \quad \varepsilon \leqslant r \leqslant r_1\}.$$

Маємо $B_\varepsilon \subset B$ і

$$\mathrm{m}(B \setminus B_\varepsilon) = 2\pi\varepsilon + 2(r_1 - \varepsilon)\varepsilon \to 0, \ \varepsilon \to 0+.$$

Тоді при $\varepsilon \to 0+$

$$\left| \int\limits_{B \setminus B_\varepsilon} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r dr d\varphi \right| \leqslant r_1 \max_{\vec{g}(B)} |f|\, \mathrm{m}(B \setminus B_\varepsilon) \to 0.$$

Для множини B_ε і відображення $\vec{g}: B_\varepsilon \to \vec{g}(B_\varepsilon)$ всі умови теореми п. 4, 5 виконано, і тому

$$\int\limits_{\vec{g}(B_\varepsilon)} f(\vec{y})\, d\vec{y} = \int\limits_{B_\varepsilon} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r dr d\varphi.$$

Крім того, з співвідношення $\vec{g}(B) \setminus \vec{g}(B_\varepsilon) = \vec{g}(B \setminus B_\varepsilon)$ маємо також, що

$$\left| \int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\, d\vec{y} - \int\limits_{\vec{g}(B_\varepsilon)} f(\vec{y})\, d\vec{y} \right| \leqslant \max_{\vec{g}(B)} |f| \cdot \mathrm{m}(\vec{g}(B \setminus B_\varepsilon)) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\vec{g}(B)} |f| \cdot (\pi\varepsilon^2 + r_1^2 \operatorname{tg} \varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\, d\vec{y} = \int\limits_{\vec{g}(B_\varepsilon)} f(\vec{y})\, d\vec{y} + \int\limits_{\vec{g}(B \setminus B_\varepsilon)} f(\vec{y})\, d\vec{y} =$$

$$= \int\limits_{B_\varepsilon} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r dr d\varphi + \int\limits_{\vec{g}(B \setminus B_\varepsilon)} f(\vec{y})\, d\vec{y} =$$

$$= \int\limits_{B} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r dr d\varphi + \int\limits_{\vec{g}(B \setminus B_\varepsilon)} f(\vec{y})\, d\vec{y} -$$

$$- \int\limits_{B \setminus B_\varepsilon} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r dr d\varphi.$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $\varepsilon \to 0+$, отримаємо формулу (2). $\dashv$

Вправи

5. Нехай для $t \in [0, 1]$: $B_t = \{(x_1\ x_2) | x_1^2 + x_2^2 \leqslant t^2\}$ і для $f \in C(B_t)$ $F(t) := \iint\limits_{B_t} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$. Обчислити F'.

6. Нехай $t \in [1, +\infty)$, $B_t := \{(x_1, x_2) | t^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant t^4,\ \ tx_1 \leqslant x_2 \leqslant \leqslant 2tx_1\}$. Довести, що для $t \geqslant 1$ множина B_t вимірна й для функції $F(t) := \mathrm{m}(B_t)$, $t \geqslant 1$ обчислити F'.

7. Нехай для $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon := \{(x_1, x_2) \,|\, |x_1| + |x_2| \leqslant 1,\ |x_1 - x_2| \geqslant \varepsilon\}$. Обчислити границю $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \iint\limits_{B_\varepsilon} \ln|x_1 - x_2|\, dx_1 dx_2$.

8. Нехай для $a > 1$ $B_a := \{(x_1, x_2) \,|\, x_1^2(1 + x_2^2) \leqslant 1,\ x_2^2 \leqslant a^2\}$. Обчислити границю $\lim\limits_{a \to +\infty} \iint\limits_{B_a} \frac{dx_1 dx_2}{1 + x_2^2}$.

§ 5. НЕВЛАСНІ КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ. ОЗНАЧЕННЯ Й ПРИКЛАДИ

5.1. ІНТЕГРАЛИ ВІД НЕОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай A — компактна вимірна підмножина $\mathbf{R}^m$, $\vec{x}^0 \in A$ — фіксований вектор; $B := A \setminus \{\vec{x}^0\}$, а функція f: $B \to \mathbf{R}$, $f \in C(B)$. Нас цікавить випадок, коли f не є обмеженою на B.

Приклад 1. Нехай при $m = 2$, $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$

$$r = r(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$$

і $f(x_1, x_2) = r^{-\alpha}$, $\alpha > 0$.

Нехай $\{E_n : n \geqslant 1\}$ — послідовність вимірних відкритих підмножин $\mathbf{R}^m$, що задовольняє умовам:

1) $\forall n \geqslant 1$: $E_n \ni \vec{x}^0$;

2) $d(E_n) = \sup\limits_{\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset E_n} \rho_m(\vec{x}, \vec{y}) \to 0, \quad n \to \infty.$ (1)

Такі послідовності існують. Наприклад, умовам (1) задовольняє послідовність відкритих вимірних куль вигляду

$$\forall n \geqslant 1: \ E_n = B(\vec{x}^0, \delta_n), \tag{2}$$

де $\delta_n > 0$, $n \geqslant 1$ і $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$.

Кожна з множин $A \setminus E_n$, $n \geqslant 1$ є компактною й вимірною. Крім того,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \setminus E_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \setminus E_n) = B; \quad \forall n \geqslant 1: \ f \in \mathbf{C}(A \setminus E_n).$$

Означення 1. Невласним кратним інтегралом від функції f по множині A називається границя

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A \setminus E_n} f(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{3}$$

яка позначається символом $\int_A f(\vec{x})\, d\vec{x}$.

Якщо границя (3) існує, скінченна і не залежить від вибору послідовності $\{E_n : n \geqslant 1\}$, то невласний інтеграл називається ***збіжним***, в останніх випадках — ***розбіжним***.

Для деяких розбіжних інтегралів існує границя (2) відносно спеціальної послідовності $\{E_n, n \geqslant 1\}$ куль із (2).

Означення 2. Границя

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A \setminus B(\vec{x}^0, \delta_n)} f(\vec{x})\, d\vec{x},$$

якщо вона існує і скінченна, називається ***головним значенням розбіжного інтеграла*** і позначається символом

$$\text{v.p.} \int_A f(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

Приклади. 2. Нехай $m = 2$, $A = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$, $x^0 = (0, 0)$; $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{-\alpha}$ для $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$; $\alpha > 0$. Для $n \geqslant 1$ визначимо числа

$$\delta_n' := \min \{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} / (x_1, x_2) \notin E_n\},$$

$$\delta_n'' := \max \{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} / (x_1, x_2) \in \overline{E}_n\},$$

де $\overline{E}_n$ — замкнення E_n. Припустимо, що множини E_n обмежені. Зауважимо, що згідно з умовами (2) $\delta_n' \to 0$, $\delta_n'' \to 0$, $n \to \infty$. Маємо

$$\iint_{A \setminus B((0,0), \delta_n'')} (x_1^2 + x_2^2)^{-\alpha} dx_1 dx_2 \leqslant \iint_{A \setminus E_n} (x_1^2 + x_2^2)^{-\alpha} \alpha x_1 dx_2 \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{A \setminus B((0,0), \delta_n')} (x_1^2 + x_2^2)^{-\alpha} dx_1 dx_2 \tag{4}$$

Перейшовши до полярних координат, отримаємо формулу

$$\iint\limits_{A\setminus B((0,0),\delta'_n)} (x_1^2+x_2^2)^{-\alpha}dx_1dx_2 = \int\limits_{\delta'_n}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{r}{r^{2\alpha}}\,drd\varphi =$$

$$= 2\pi\int\limits_{\delta'_n}^{1} r^{1-2\alpha}\,dr = 2\pi\begin{cases} \dfrac{1}{2-2\alpha}\left(1-(\delta'_n)^{2-2\alpha}\right), & 2-2\alpha\neq 0,\\ -\ln\delta'_n, & 2-2\alpha=0.\end{cases}$$

Враховуючи цю рівність та формулу (4), робимо висновок, що при $2-2\alpha>0$, тобто при $\alpha<1$, існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{A\setminus E_n}(x_1^2+x_2^2)^{-\alpha}dx_1dx_2 = \frac{\pi}{1-\alpha}.$$

Для $\alpha\geqslant 1$ границі не існує.

3. Нехай $m=1$, $A=[-1,1]$, $x^0=0$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тоді інтеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ розбігається. Однак границя

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{[-1,1]\setminus(-\delta_n,\delta_n)}\frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_{-1}^{-\delta_n}\frac{dx}{x}+\int\limits_{\delta_n}^{1}\frac{dx}{x}\right)=0;$$

$$\delta_n>0,\ n\geqslant 1;\ \delta_n\to 0,\ n\to\infty$$

існує. Таким чином, v. p. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=0$.

Для функції f, що набуває значення одного знака на всій множині B, проблема збіжності інтеграла

$$\int\limits_A f(\vec{x})\,d\vec{x} \tag{5}$$

розв'язується наступною теоремою.

ТЕОРЕМА. Для того щоб невласний інтеграл (5) від неперервної і невід'ємної на множині B функції збігався, необхідно, щоб для будь-якої і достатньо, щоб для деякої послідовності відкритих вимірних множин $\{D_n : n\geqslant 1\}$, для яких виконані умови (1) і таких, що $\forall n\geqslant 1$: $D_{n+1}\subset D_n$, послідовність

$$\left\{\int\limits_{A\setminus D_n} f(\vec{x})\,d\vec{x} : n\geqslant 1\right\} \tag{6}$$

була обмеженою.

Необхідність. Згідно з означенням збіжного інтеграла послідовність (6) збігається для будь-якої послідовності, що задовольняє умовам (1), а отже, і для послідовності $\{D_n : n \geqslant 1\}$, а тому обмежена. Невід'ємність f при цьому необов'язкова.

Достатність. Для $n \geqslant 1$ множини $A \setminus D_n$ і $A \setminus D_{n+1}$ вимірні й компактні, причому $(A \setminus D_n) \subset (A \setminus D_{n+1})$. Оскільки f невід'ємна, то

$$\int\limits_{A \setminus D_{n+1}} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int\limits_{A \setminus D_n} f(\vec{x})\, d\vec{x} + \int\limits_{D_n \setminus D_{n+1}} f(\vec{x})\, d\vec{x} \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{A \setminus D_n} f(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

Таким чином, послідовність (6) неспадна і обмежена. Тому існує скінченна границя

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{A \setminus D_n} f(\vec{x})\, d\vec{x} = : \mathcal{J}.$$

Нехай $\{E_n : n \geqslant 1\}$ — довільна послідовність відкритих вимірних множин, що задовольняють умовам (1), і нехай $\varepsilon > 0$ вибране.

Зауважимо, що

$$\exists n_0 \quad \forall n \geqslant n_0 ; \; 0 \leqslant \mathcal{J} - \int\limits_{A \setminus D_n} f(\vec{x})\, d\vec{x} < \varepsilon. \tag{7}$$

Множина D_{n_0} відкрита і $D_{n_0} \ni \vec{x}^0$, тому $\exists \rho > 0 : B(\vec{x}_0, \rho) \subset \subset D_{n_0}$ Далі, згідно із умовами (1) $\exists N \quad \forall n \geqslant N : \; d(E_n) < \rho$. Тому $\forall n \geqslant N : \; E_n \subset D_{n_0}$.

Таким же чином множина E_n відкрита і містить точку $\vec{x}^0$. Тому, як і вище, $\exists m(n) \quad \forall m \geqslant m(n) : \; D_m \subset E_n$. Нехай $m_0 = \max(m(n), n_0)$. Тоді

$$An \geqslant N : \; D_{m_0} \subset E_n \subset D_{n_0}$$

і, використовуючи невід'ємність f, одержимо

$$\int\limits_{A \setminus D_{n_0}} f(\vec{x})\, d\vec{x} \leqslant \int\limits_{A \setminus E_n} f(\vec{x})\, d\vec{x} \leqslant \int\limits_{A \setminus D_{m_0}} f(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

Із останньої нерівності, враховуючи нерівності (7), маємо

$$\forall n \geqslant N : \; \mathcal{J} - \varepsilon < \int\limits_{A \setminus E_n} f(\vec{x})\, d\vec{x} \leqslant \mathcal{J}.$$

Приклад 4. Нехай $m = 2$, A — компактна вимірна підмножина $\mathbf{R}^2$, $\vec{x}^0 = (\vec{x}_1^0, x_2^0)$ — внутрішня точка A і $f: A \to [0, +\infty)$, $f \in \mathbf{C}(A)$. Доведемо, що невласний інтеграл

$$\iint\limits_A \frac{f(x_1, x_2)}{r^\alpha}\, dx_1 dx_2 \tag{8}$$

збігається для $\alpha \in (0, 2)$, а інтеграл

$$\iint\limits_A \frac{dx_1 dx_2}{r^\alpha}$$

для $\alpha \geqslant 2$ розбігається.

Розглянемо послідовність

$$\iint\limits_{A \setminus B\left(\vec{x}^0, \frac{1}{n}\right)} \frac{f(x_1, x_2)}{r^\alpha}\, dx_1 dx_2 = \iint\limits_{A \setminus B(\vec{x}^0, 1)} \frac{f(x_1, x_2)}{r^\alpha}\, dx_1 dx_2 +$$

$$+ \iint\limits_{B(\vec{x}^0, 1) \setminus B\left(\vec{x}^0, \frac{1}{n}\right)} \frac{f(x_1, x_2)}{r^\alpha}\, dx_1 dx_2, \quad n \geqslant 1, \tag{9}$$

припустивши, що $B(x^0, 1) \subset A$. Обидва інтеграли в правій частині рівності (9) існують як інтеграли від неперервних функцій по вимірних множинах, причому перший із них не залежить від n. Для другого інтеграла з правої частини (9) маємо

$$\iint\limits_{B(\vec{x}^0, 1) \setminus B\left(\vec{x}^0, \frac{1}{n}\right)} \frac{f(x_1, x_2)}{r^\alpha}\, dx_1 dx_2 \leqslant \max_A f \iint\limits_{B(\vec{x}^0, 1) \setminus B\left(\vec{x}^0, \frac{1}{n}\right)} r^{-\alpha} dx_1 dx_2 =$$

$$= \max_A f \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} \int\limits_0^{2\pi} r^{-\alpha} r\, dr\, d\varphi = 2\pi \max_A f \left.\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right|_{\frac{1}{n}}^{1} \to \frac{2\pi}{2-\alpha} \max_A f, \quad n \to \infty$$

для $0 < \alpha < 2$. Тому послідовність (9) обмежена і за теоремою інтеграл (8) збігається.

Для другого інтеграла таким же чином доводиться необмеженість послідовності (9) для $f(x_1, x_2) = 1$.

Означення 3. Невласний інтеграл (5) називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається невласний інтеграл

$$\int\limits_A |f(\vec{x})|\, d\vec{x}.$$

Легко перевірити, що абсолютно збіжний невласний інтеграл збігається. Невласні кратні інтеграли мають ряд властивостей, що аналогічні властивостям одновимірних невласних інтегралів. Проте при $m \geqslant 2$ невласний інтеграл збігається тоді й тільки тоді, коли він збігається абсолютно. Дове-

дення цього твердження і докладна теорія невласних кратних інтегралів тут не наводяться.

Вправи

1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_A (1-x_1)^\alpha x_2^\beta dx_1 dx_2$,

$$A=\{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant 1\}, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1.$$

2. Обчислити інтеграл $\iint\limits_A x_1^\alpha x_2^\beta dx_1 dx_2$,

$$A=\{(x_1, x_2)/0 \leqslant x_2 \leqslant 1-x_1, x_1 \geqslant 0\}, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1.$$

3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_A (x_1^2+x_2^2)^\alpha (1-x_1^2-x_2^2)^\beta dx_1 dx_2$,

$$A=\{(x_1, x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \leqslant 1, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1.$$

5.2. ІНТЕГРАЛИ ПО НЕОБМЕЖЕНИХ МНОЖИНАХ

Нехай B — необмежена підмножина $\mathbf{R}^m$, для якої існує послідовність компактних вимірних множин $\{D_n : n \geqslant 1\}$, які задовольняють умовам:

1) $\forall n \geqslant 1: \ D_n \subset D_{n+1} \subset B$;

2) $\forall c > 0 \ \exists N \ \forall n \geqslant N: \ B \cap B(\vec{0}, c) \subset D_n$, де $\vec{0}=(0, \ldots, 0)$.

Таку послідовність $\{D_n : n \geqslant 1\}$ будемо називати ***вичерпною*** для множини B.

Нехай $f \in \mathbf{C}(B)$.

Означення. Невласним інтегралом від функції f по множині B називається границя

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{1}$$

що позначається символом

$$\int\limits_B f(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{2}$$

Невласний інтеграл (2) називається ***збіжним***, якщо границя (1) скінченна і не залежить від вибору вичерпної послідовності $\{D_n : n \geqslant 1\}$, в останніх випадках інтеграл (2) називається ***розбіжним***.

Для інтеграла (2) має місце аналог теореми п. 5.1.

При обчисленні невласних інтегралів п п. 5.1 і 5.2 можна користуватися формулою зведення їх до повторних при умові збіжності повторних інтегралів від абсолютної величини функції, а також формулою заміни змінних. Ці твердження, а також теорія інтеграла (2) тут розглядатися не будуть.

Приклад. Нехай при $m = 2$, $B = [0, +\infty)\times[0, +\infty)$,

$$f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2-x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in B.$$

Невласний інтеграл

$$\mathcal{J} = \int\limits_B f dx_1 dx_2 = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x_1^2-x_2^2} dx_1 dx_2$$

збігається. Доведення незалежності границі від вичерпної послідовності проводиться так само, як і у відповідній частині доведення теореми п. 5.1.

Внаслідок переходу в інтегралі $\mathcal{J}$ до повторних одержимо формулу

$$\mathcal{J} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x_2^2}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1\right) dx_2 = \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2. \tag{3}$$

Доведення рівності (3) не складне, якщо розглянути вичерпну послідовність $D_n = [0, n]\times[0, n]$, $n \geqslant 1$ і застосувати правило переходу до повторних інтегралів для бруса D_n:

$$\mathcal{J} = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} e^{-x_1^2-x_2^2} dx_1 dx_2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n e^{-x_2^2}\left(\int\limits_0^n e^{-x_1^2} dx_1\right) dx_2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_0^n e^{-x^2} dx\right)^2 = \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2.$$

За допомогою формули переходу до полярних координат у випадку вичерпної послідовності

$$D_n' = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant n^2, x_1 \geqslant 0, x_1 \geqslant 0\}, \quad n \geqslant 1,$$

аналогічно доведенню рівності (3) одержуємо формулу

$$\mathcal{J} = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = -\frac{\pi}{4} e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r\to+\infty} = \frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

З рівностей (3) і (4) знаходимо значення інтеграла Ейлера—Пуассона

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Вправи

4. Довести, що абсолютно збіжний інтеграл збігається.

5. Нехай функція $f\colon B \to \mathbf{R}$ неперервна на B і така, що

$$\exists c > 0 \quad \exists \alpha > 2 \quad \forall (x_1, x_2) \in B: \quad |f(x_1, x_2)| \leqslant \frac{c}{1 + r^{\alpha}},$$

де $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Довести абсолютну збіжність інтеграла

$$\iint\limits_B f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

6. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)^{\alpha}} dx_1 dx_2, \quad \alpha > 0.$

7. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha} e^{-x_1^2 - x_2^2} dx_1 dx_2, \quad \alpha > 1.$

8*. Довести збіжність інтеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \overset{m}{\cdots} \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx_1 dx \ldots dx_m}{x_1 x_2 \ldots x_m (\max(x_1, x, \ldots, x_m))^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Глава 15 ІНТЕГРАЛИ ПО МНОГОВИДАХ І ТЕОРЕМА СТОКСА

§ 1. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

1.1. ПРИПУСТИМІ КООРДИНАТНІ ПРОСТОРИ. ОРІЄНТАЦІЯ

Нехай $\mathbf{R}^p = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_p)\}$ — p-вимірний простір. Цей простір будемо також називати x-простором, щоб відрізнити від інших. Нехай A — деяка множина в x-просторі. Будь-яку точку $P \in A$ в x-просторі можна задати набором координат $x_1, \ldots, x_p$. Проте точки з A можна задавати й іншими способами.

Нехай G — відкрита в $(\mathbf{R}^p, \rho)$ множина, причому $G \supset A$. Нехай $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_p)$: $G \to \mathbf{R}^p$ — відображення, що задовольняє умовам:

1) $\vec{g} \in \mathbf{C}^{(1)}(G, \mathbf{R}^p)$;

2) $\vec{g}$ є взаємно однозначна відповідність між множинами G і $\vec{g}(G)$;

3) або $\forall \vec{x} \in G$: $\dfrac{\partial(g_1, \ldots, g_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)}(\vec{x}) > 0$,

або $\forall \vec{x} \in G$: $\dfrac{\partial(g_1, \ldots, g_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)}(\vec{x}) < 0$.

Означення 1. Відображення $\vec{g}$: $G \to \mathbf{R}^p$, що задовольняє умовам 1) — 3), називається ***регулярним*** або ***дифеоморфізмом***.

Регулярне відображення має обернене, яке також є регулярним.

Вправа

1. Довести останнє твердження. Довести також, що суперпозиція регулярних відображень є регулярним відображенням.

Будь-яка точка $P \in A$, що має координати $x_1, \ldots, x_p$ в x-просторі, може бути задана за допомогою образу $(y_1, \ldots, y_p) = \vec{g}(\vec{x}) = (g_1(\vec{x}), \ldots, g_p(\vec{x}))$, який будемо вважати розміщеним в y-просторі — іншій копії $\mathbf{R}^p$, відмінної від x-прос-

тору. Значення $y_1, y_2, \ldots, y_p$ будемо називати ***координатами точки*** P в y-просторі, а перехід від координат $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ до координат $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ — ***заміною координат*** або ***перетворенням координат***. Перетворення координат, здійснюване з допомогою регулярного перетворення, називається ***припустимим***. Далі розглядатимемо тільки припустимі перетворення координат. Іноді y-простір, в якому міститься образ $\vec{g}(A)$, називається ***припустимим координатним простором для множини*** A. Зазначимо, що x-простір є припустимим для $\vec{g}(A)$, якщо y-простір припустимий для A.

Таким чином, множині G відповідає клас координатних просторів, які отримуються з x-простору (а також одне з другого) за допомогою припустимих перетворень координат.

Означення 2. Припустимі для множини A y-простір і z-простір називають ***однаково орієнтованими***, якщо

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_p)}{\partial(z_1, \ldots, z_p)} > 0 \left(\Leftrightarrow \frac{\partial(z_1, \ldots, z_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_p)} > 0\right),$$

і ***протилежно орієнтованими***, якщо

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_p)}{\partial(z_1, \ldots, z_p)} < 0 \left(\Leftrightarrow \frac{\partial(z_1, \ldots, z_p)}{\partial(y_1, \ldots y_p)} < 0\right).$$

Множина A називається ***орієнтованою***, якщо який-небудь припустимий координатний простір для A вибраний, вафіксований і названий ***додатним*** або ***простором знака*** $+1$. При цьому всі однаково орієнтовані з фіксованим простором припустимі координатні простори також додатні (мають знак $+1$). Простори, протилежно орієнтовані з фіксованим простором, називаються ***від'ємними*** або ***просторами знака*** -1.

Згідно з цим означенням, будь-яка підмножина x-простору є орієнтована, якщо x-простір названо, наприклад, додатним. При цьому припустимий y-простір має знак $+1$, якщо

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)} > 0,$$

знак -1, якщо

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)} < 0.$$

Зауважимо, що y-простір і z-простір, для яких

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)} > 0, \quad \frac{\partial(z_1, \ldots, z_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)} > 0,$$

однаково орієнтовані, оскільки

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)} \cdot \frac{\partial(x_1, \dots, x_p)}{\partial(z_1, \dots, z_p)} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_p)}{\partial(z_1, \dots, z_p)}.$$

Приклади. 1. Нехай при $p = 1 : G = \mathbf{R}$, $A = [a, b]$ — відрізок на прямій $\mathbf{R}$ — в x-просторі, який будемо вважати додатним. Нехай $g \in \mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{R})$, причому $g'(x) > 0$, $x \in \mathbf{R}$. Образ $g(A) = [g(a), g(b)]$ міститься в додатному y-просторі, оскільки $\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx} > 0$. Якщо $h \in \mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{R})$ і $h'(x) < 0$, $x \in \mathbf{R}$, то регулярне перетворення h приводить до від'ємного z-простору, в якому $h(A) = [h(b), h(a)]$. Тому орієнтацію відрізка на прямій можна інтерпретувати як завдання початкової a і кінцевої b точок відрізка (або завдання напрямку руху від a до b). При цьому в додатному y-просторі цей порядок зберігається: $g(a) < g(b)$. У від'ємному z-просторі порядок змінюється: $h(b) < h(a)$.

2. Нехай для $p = 2$, $G = \mathbf{R}^2$, $A = [0, 2] \times [0, 1]$ в додатному x-просторі. Відображення $\vec{y} = \vec{g}(x_1, x_2) = (x_1 + 1, 2x_2 + 2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ є регулярним, причому

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Образ $\vec{g}(A) = [1, 3] \times [2, 4]$ міститься в додатному y-просторі. Відображення $\vec{z} = \vec{h}(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ також регулярне,

$$\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

а образ $\vec{h}(A) = [0, 1] \times [0, 2]$ міститься у від'ємному z-просторі. Множина A є орієнтованою. Орієнтацію A можна інтерпретувати як вибір напрямку обходу границі (одного з двох можливих: за годинниковою стрілкою, якщо дивитися на площину зверху, або проти годинникової стрілки). При переході до додатного y-простору напрямок обходу зберігається, при переході до від'ємного z-простору — змінюється на протилежний.

Вправа

2. Нехай $\mathbf{R}^p$ — додатний x-простір і $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x}) = (x_{\sigma_2}, x_{\sigma_2}, \dots, x_{\sigma_p})$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^p$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ — деяке переставлення чисел $1, 2, \dots, p$. Для яких переставлень σ регулярне перетворення $\vec{g}$ приводить до додатного y-простору?

1.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ФОРМИ СТЕПЕНЯ m У ПРОСТОРІ $\mathbf{R}^m$. НОВА ФОРМА ФОРМУЛИ ЗАМІНИ ЗМІННИХ

Нехай $A \subset \mathbf{R}^m$ — компактна вимірна орієнтована множина в x-просторі. Нехай $G \supset A$, $\vec{y} = \vec{g}: G \to \mathbf{R}^m$ — регулярне перетворення, яке переводить A в $\vec{g}(A)$. Множина $\vec{g}(A)$—компактна й вимірна згідно з теоремою п. 4.5 глави 14 і міститься в y-просторі. Нехай $f: \vec{g}(A) \to \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{C}(\vec{g}(A))$.

Означення. Диференціальна форма степеня m на $\vec{g}(A)$ у m-вимірному y-просторі

$$\omega = f(y_1, y_2, \dots, y_m)\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_m$$

є символ, що визначається рівністю

$$f dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_m = \\ = \begin{cases} f dy_1 dy_2 \dots dy_m, & \text{якщо } y\text{-простір додатний;} \\ -f dy_1 dy_2 \dots dy_m, & \text{якщо } y\text{-простір від'ємний.} \end{cases} \quad (1)$$

Вираз у правій частині (1) є підінтегральний вираз m-кратного інтеграла по множині $\vec{g}(A)$ від функції f або $-f$. За допомогою цього визначення формулу заміни змінних в m-кратному інтегралі можна записати в більш зручній для подальшого формі

$$\int\limits_{\vec{g}(A)} f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m = \int\limits_A f \cdot \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m. \quad (2)$$

Далі використовуємо наступні властивості диференціальних форм степеня m. Ці властивості фактично описують правила перетворень підінтегральних виразів при регулярних перетвореннях координат.

1°. Якщо y-простір є припустимим координатним простором для множини A, що міститься в x-просторі, то будемо вважати, що

$$f(\vec{y})\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m = f(\vec{y}(\vec{x})) \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m. \quad (3)$$

Рівність (3) можна розглядати як формулу зв'язку виразів диференціальної форми в різних координатних просторах; вона являє собою зручний формалізований запис рівності (2) і реально використовується тільки в рівностях типу (2).

2°. Якщо y-простір і z-простір припустимі координатні простори для A, то

$$f(\vec{y})\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_m = f(\vec{y}(\vec{z}))\frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(z_1,\ldots,z_m)}\,dz_1\wedge\ldots\wedge dz_m. \quad (4)$$

Рівність (4) можемо формально отримати, застосовуючи двічі формулу (3):

$$f(\vec{y})\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_m = f\frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_m =$$

$$= f\frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}\,\frac{\partial(x_1,\ldots,x_m)}{\partial(z_1,\ldots,z_m)}\,dz_1\wedge\ldots\wedge dz_m =$$

$$= f\frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(z_1,\ldots,z_m)}\,dz_1\wedge\ldots\wedge dz_m.$$

3°. Нехай $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ — переставлення чисел $1, 2, \ldots, m$; $S(\sigma) = 1$, якщо σ — переставлення парне, $S(\sigma) = -1$, якщо σ — переставлення непарне, y-простір для відображення $\vec{y} = (x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_m})$ є припустимим для будь-якої множини A, причому

$$\frac{\partial(x_{\sigma_1},\ldots,x_{\sigma_m})}{\partial(x_1,\ldots,x_m)} = S(\sigma).$$

Згідно з рівністю (4)

$$f dx_{\sigma_1}\wedge\ldots\wedge dx_{\sigma_m} = S(\sigma) f dx_1\wedge\ldots\wedge dx_m. \quad (5)$$

Наприклад, для $m = 2$

$$f(x_1, x_2)\,dx_1\wedge dx_2 = -f(x_1, x_2)\,dx_2\wedge dx_1.$$

Вправа

3. Множина $F=\{(y_1, y_2) \mid 1\leqslant y_1^2 + y_2^2 \leqslant 4,\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0\}$ міститься в додатному y-просторі. Який вигляд має диференціальна форма

$$\omega = (y_1^2 y_2 + y_2^3)\,dy_2\wedge dy_1,\ (y_1, y_2)\in F$$

в полярних координатах?

1.3. МНОГОВИДИ

Многовидами вимірності p називаються такі підмножини простору $\mathbf{R}^m$, які «в малому» подібні простору $\mathbf{R}^p$. Одновимірний многовид «в малому» влаштований приблизно так, як

пряма — простір $\mathbf{R}$, двовимірний — як площина та ін. Поняття многовиду містить в собі такі поняття, як гладка крива на площині або в просторі (одновимірний многовид), гладка поверхня в просторі (двовимірний многовид).

Тут і в подальшому у випадку множини T, яка не є відкритою в $(\mathbf{R}^p, \rho)$, позначення $\vec{f} \in \mathbf{C}^{(r)}(T, \mathbf{R}^m)$ значить, що існує відкрита в $(\mathbf{R}^p, \rho)$ множина $G \supset T$ і функція $\vec{g} \in \mathbf{C}^{(r)}(G, \mathbf{R}^m)$ такі, що $\vec{g}(\vec{t}) = \vec{f}(\vec{t})$ для всіх $\vec{t} \in T$.

Означення. Нехай $1 \leqslant p \leqslant m$. Множина $M \subset \mathbf{R}^m$ називається ***многовидом вимірності*** p або ***p-вимірним многовидом***, якщо існує множина $T \subset \mathbf{R}^p$ і функція $\vec{u}: T \to \mathbf{R}^m$, $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}(T, \mathbf{R}^m)$ такі, що $\vec{u}(T) = M$. Функція $\vec{u}$ задає ***параметричне зображення многовиду*** M ***на множині параметрів*** T.

При цьому числа $t_1 \ldots, t_p$ називаються ***координатами точки*** u $(t_1, \ldots, t_p) \in M$. Припустимий координатний простір для параметричної множини T називається ***припустимим координатним простором многовиду*** M. Якщо s-простір є припустимим координатним простором для T, який одержано за допомогою регулярного перетворення $\vec{g}$, то

$$\vec{s} = \vec{g}(\vec{t}), \quad M = \vec{v}(S),$$

де $S = \vec{g}(T)$, $\vec{v} = \vec{u}(\vec{g}^{-1})$. Тому функція $\vec{v}$ також задає параметричне зображення многовиду M на множині параметрів S. Зображення многовиду M за допомогою функцій $\vec{u}$ і $\vec{v}$ називають ***еквівалентними***, при цьому кажуть, що функція $\vec{g}$ здійснює перетворення параметрів многовиду. Многовид M називається ***орієнтованим***, якщо який-небудь припустимий параметричний координатний простір зафіксований і названий, наприклад, додатним.

Далі на функцію $\vec{u}$ будуть накладатися додаткові умови гладкості, а за множину T будемо розглядати компактні вимірні множини.

Наведемо найбільш типові приклади многовидів.

1°. Орієнтована крива. Нехай $T = [a, b]$ лежить в додатному t-просторі, $p = 1$. Орієнтацію множини T будемо інтерпретувати як вибір напрямку руху по T від точки a до точки b. Нехай

$$\vec{u}: [a, b] \to \mathbf{R}^m, \vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}([a, b], \mathbf{R}^m).$$

Одновимірний орієнтований многовид $\Gamma = \vec{u}(T)$ називається ***орієнтованою кривою*** в просторі $\mathbf{R}^m$. Орієнтацію кривої Γ можна інтерпретувати як вибір напрямку руху по Γ від $\vec{u}(a)$ до $\vec{u}(b)$, яке відповідає зростанню параметра t. При цьому перехід до додатного припустимого координатного s-простору приводить до параметричної множини, в якій рух в напрямку зростання нового параметра також відповідає вибраному раніше руху вздовж Γ: $\frac{ds}{dt} > 0$ і тому $t_1 < t_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow s_1 < s_2$. Якщо ж перейти до від'ємного припустимого координатного простору, то рух в напрямку зменшення нового параметра відповідає фіксованому раніше руху вздовж кривої Γ.

Приклади. 1. Нехай $T = [0, \pi]$, $m = 2$, $\vec{u}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in$ $\in [0, \pi]$. Припустимо, що t-простір додатний. Нехай 0 — початок відрізка $[0, \pi]$. Тоді $\Gamma = \vec{u}([0, \pi])$ — є орієнтоване півколо із центром $(0, 0)$ і радіусом 1, що міститься у верхній півплощині $\mathbf{R}^2$. Орієнтацію Γ можна інтерпретувати як вибір напрямку руху вздовж Γ від точки $(1, 0)$ до точки $(-1, 0)$. Якщо перетворити параметр за допомогою рівності $s = -t$, при цьому $\frac{ds}{dt} = -1 < 0$, то отримаємо від'ємний s-простір для $[0, \pi]$ і функцію $\vec{v}(s) = (\cos s, -\sin s)$, $s \in [-\pi, 0]$, що задає еквівалентне зображення для Γ. Оскільки s-простір від'ємний, то рух від точки 0 до точки $-\pi$ відповідає фіксованому руху вздовж кола Γ. Наведемо ще одне зображення для Γ, яке одержимо за допомогою перетворення $\tau = \cos t$, $t \in [0, \pi]$ при цьому $\Gamma = \{(\tau, \sqrt{1-\tau^2}) \mid \tau \in [-1, 1]\}$, а τ — простір від'ємний:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

2. Нехай $T = \mathbf{R}$, $m = 3$, t-простір додатний (орієнтацію будемо інтерпретувати як рух вправо вздовж T). ***Гвинтовою лінією*** називається крива $\Gamma = \{(\cos t, \sin t, t) \mid t \in T\}$ в $\mathbf{R}^3$. Орієнтацію Γ можна інтерпретувати як вибір руху вгору вздовж Γ.

2°. Орієнтована поверхня. Нехай $p = 2$, $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ і $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_m)$: $T \to \mathbf{R}^m$, причому $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}(T, R^m)$. Двовимірний многовид $S = \vec{u}(T)$ називається ***поверхнею*** в $\mathbf{R}^m$. Якщо T є орієнтованою множиною, то поверхня S називається ***орієнтованою***.

Приклад 3. Нехай при $m = 3$: $T = \{(r, \varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant$ $\leqslant \pi\}$ і $\vec{u}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 4 - r^2)$, $(r, \varphi) \in T$. $S = \vec{u}(T)$ — частина параболоїда обертання. Припустимо, що T орієнтована, орієнтацію можна інтерпретувати як вибір обходу T проти годинникової стрілки. При цьому поверхня S орієнтована. Орієнтацію можна інтерпретувати як вибір верхньої сторони S, якщо дивитися з додатного напрямку осі $0x_3$. Тоді обхід контура S, що відповідає обходу T, буде також проти годинникової стрілки.

3°. **Означення.** Многовид M, що визначається за допомогою функції $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)$ на множині параметрів T, такій, що $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}(T, \mathbf{R}^m)$, називається ***власне p-вимірним*** в точці $\vec{u}(\vec{t}_0) \in M, \vec{t}_0 \in T$, якщо матриця

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1(\vec{t}_0)}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1(\vec{t}_0)}{\partial t_p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_m(\vec{t}_0)}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial u_m(\vec{t}_0)}{\partial t_p} \end{pmatrix}$$

має ранг p.

Це означення описує властивість точки $\vec{u}(\vec{t}_0)$ на M, що не залежить від вибору параметричних координат. Дійсно, нехай s-простір — припустимий координатний простір для T, причому $\vec{s} = \vec{g}(\vec{t}), \vec{t} \in T$; $\vec{s}_0 = \vec{g}(\vec{t}_0)$, $M = \vec{v}(S)$, де $S = \vec{g}(T)$, $\vec{v} = \vec{u}(\vec{g}^{-1}) = \vec{u}(\vec{t}(\vec{s}))$. Якщо, наприклад

$$\frac{\partial(u_1, \dots, u_p)}{\partial(t_1, \dots, t_p)}(\vec{t}_0) \neq 0,$$

то

$$\frac{\partial(v_1, \dots, v_p)}{\partial(s_1, \dots, s_p)}(\vec{s}_0) = \frac{\partial(u_1, \dots, u_p)}{\partial(t_1, \dots, t_p)}(\vec{t}_0) \cdot \frac{\partial(t_1, \dots, t_p)}{\partial(s_1, \dots, s_p)}(\vec{s}^0) \neq 0,$$

тут $(v_1, \dots, v_m) = \vec{v}$.

§ 2. ІНТЕГРАЛ ПО МНОГОВИДУ ВІД ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ФОРМИ. КРИВОЛІНІЙНІ Й ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ДРУГОГО РОДУ

2.1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ФОРМИ СТЕПЕНЯ p В ПРОСТОРІ $\mathbf{R}^m$

Нехай T — орієнтована компактна вимірна множина в t-просторі $\mathbf{R}^p$; нехай $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)$: $T \to \mathbf{R}^m$, $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}(T, \mathbf{R}^m)$, $1 \leqslant p \leqslant m$. Тоді $M = \vec{u}(T)$ — орієнтований p-вимірний мно-

говид у x-просторі $\mathbf{R}^m$. Нехай $f_j: M \to \mathbf{R}$, $f_j \in \mathbf{C}(M)$, $1 \leqslant j \leqslant q$, $q \in \mathbf{N}$.

Означення Диференціальною формою степеня p на p-вимірному орієнтованому многовиді M в $\mathbf{R}^m$ називається вираз

$$\omega = f_1(x_1, \ldots, x_m)\, dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p} + \ldots$$

$$\ldots + f_q(x_1, \ldots, x_m)\, dx_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_p}, \qquad (1)$$

у якому кожний із індексів $\{\nu_i, \mu_i\}$ набуває одного із значень 1, 2, ..., m. Для кожного параметричного зображення многовиду M, що заданий функцією $\vec{u}$ на множині параметрів T, значення ω дорівнює

$$\omega = f_1 dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p} + \ldots + f_1 dx_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_p} =$$

$$= (f_1(u_1(\vec{t}), \ldots, u_m(\vec{t})) \frac{\partial(u_{\nu_1}, \ldots, u_{\nu_p})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} + \ldots$$

$$\ldots + f_q(u_1(\vec{t}), \ldots, u_m(\vec{t})) \frac{\partial(u_{\mu_1}, \ldots, u_{\mu_p})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)}\Big) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p. \qquad (2)$$

Зауважимо, що в правій частині (2) записана визначена в п. 1.2 диференціальна форма степеня p на множині T, $T \subset \mathbf{R}^p$. Функції $f_1, \ldots, f_q$ називаються ***коефіцієнтами форми*** ω.

Хоча в подальшому диференціальні форми зустрічаються майже завжди під знаком інтеграла, доцільно встановити деякі правила формального проведення операцій над ними.

1°. Кожна диференціальна форма (1) може бути записана в формі, що називається ***канонічною***, в якій: а) відсутні доданки вигляду $f dx_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda_p}$ із збіжними індексами; б) кожен доданок в (1) має вигляд $f dx_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda_p}$ з $1 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_p \leqslant m$.

Дійсно, якщо, наприклад $\lambda_1 = \lambda_2$, то

$$f dx_{\lambda_1} \wedge dx_{\lambda_2} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda_p} =$$

$$= f \frac{\partial(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_p})}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_p)} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p = 0$$

для будь-якого параметричного зображення многовиду, оскільки якобіан у цьому виразі містить два однакових ряд-

ки. Якщо ж індекси $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda$ різні, то

$$f dx_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda_p} = f \frac{\partial (x_{\lambda_1}, \ldots, x_{\lambda_p})}{\partial (t_1, \ldots, t_p)} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p =$$

$$= S(\sigma) f \frac{\partial (x_{\lambda_1'}, \ldots, x_{\lambda_p'})}{\partial (t_1, \ldots, t_p)} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p = \tilde{f} dx_{\lambda_1'} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda_p'},$$

де $\tilde{f} := f \cdot S(\sigma)$, σ — переставлення чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ таке, що переставлені індекси $\lambda_1', \ldots, \lambda_p'$ впорядковані $\lambda_1' < \lambda_2' < \ldots < \lambda_p'$. $S(\sigma) = 1$, якщо переставлення σ — парне, і $S(\sigma) = -1$, якщо σ — непарне. —|

2°. Диференціальна форма дорівнює нулю, якщо в канонічній формі всі її коефіцієнти дорівнюють нулю. Дві диференціальні форми ω_1 і ω_2 рівні ($\omega_1 = \omega_2$), якщо в канонічній формі їх відповідні коефіцієнти рівні. Сума $\omega_1 + \omega_2$ диференціальних форм ω_1 і ω_2 визначається як форма, що дорівнює сумі відповідних виразів із (1).

Функцію $f: M \to \mathbf{R}$ називають іноді ***диференціальною формою степеня 0.***

Вправи

1. Привести до канонічної форми диференціальну форму степеня 2 в $\mathbf{R}^3$:

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{3} f_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$

Упевнитися, що будь-яка диференціальна форма другого степеня в $\mathbf{R}^3$ має вигляд

$$\omega = P dx_2 \wedge dx_3 + Q dx_3 \wedge dx_1 + R d_1 \wedge dx_2.$$

2. Довести, що

$$\sum_{i,j=1}^{m} f_{ij} dx_i \wedge dx_j = 0$$

тоді й тільки тоді, коли $f_{ij} = f_{ji}$; $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

3. Нехай $\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$ є диференціальною формою другого степеня на многовиді $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 1\}$ — площині в $\mathbf{R}^3$. Довести, що на M $\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3$.

4. Нехай $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ є диференціальна форма першого степеня на многовиді $M = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_1 = 1\}$. Довести, що на M, $\omega = (f_1 - f_2)\, dx_1$.

2.2. ІНТЕГРАЛ ВІД ФОРМИ ПО МНОГОВИДУ

Нехай M — орієнтований многовид вимірності p в $\mathbf{R}^m$

$$\omega = f_1 dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p} + \ldots + f_q dx_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_p}$$

є диференціальна форма степеня p на M.

Означення 1. Інтегралом від диференціальної форми ω степеня p по орієнтованому многовиду M вимірності p в $\mathbf{R}^m$ називається величина

$$\int_M \omega := \int_T \left(f_1(\vec{u}(\vec{t})) \frac{\partial(u_{\nu_1}, \dots, u_{\nu_p})}{\partial(t_1, \dots, t_p)} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + f_q(\vec{u}(\vec{t})) \frac{\partial(u_{\mu_1}, \dots, u_{\mu_p})}{\partial(t_1, \dots, t_p)} \right) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p, \qquad (1)$$

де $\vec{u}$ — функція, що здійснює параметричне зображення многовиду M на множині T.

Зауваження 1. Інтеграл у правій частині (I) є інтеграл від диференціальної форми степеня p по множині T в $\mathbf{R}^p$ (див. п. 2.1). Проте для многовиду M параметрична множина і функція, що здійснює параметричне зображення, можуть бути вибрані різними способами. Важливою обставиною, що виправдовує означення 1, є те, що значення інтеграла $\int_M \omega$ не залежить від вибору припустимих координат параметричної множини і відповідних еквівалентних зображень многовиду M.

Дійсно, нехай s-простір припустимий координатний простір для T, що отриманий за допомогою регулярного перетворення $\vec{g}$, і

$$\vec{s} = \vec{g}(\vec{t}),\ \vec{t} \in T; \quad S = \vec{g}(T); \quad \vec{v} = \vec{u}(\vec{g}^{-1}); \quad M = \vec{u}(T) = \vec{v}(S).$$

Тоді за допомогою формули заміни змінних одержимо:

$$\int_M \omega = \int_T \left(f_1 \frac{\partial(u_{\nu_1}, \dots, u_{\nu_p})}{\partial(t_1, \dots, t_p)} + \dots + f_q \frac{\partial(u_{\mu_1}, \dots, u_{\mu_p})}{\partial(t_1, \dots, t_p)} \right) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p =$$

$$= \int_S \left(f_1 \frac{\partial(u_{\nu_1}, \dots, u_{\nu_p})}{\partial(t_1, \dots, t_p)} + \dots + f_q \frac{\partial(u_{\mu_1}, \dots, u_{\mu_p})}{\partial(t_1, \dots, t_p)} \right) \times$$

$$\times \frac{\partial(t_1, \dots, t_n)}{\partial(s_1, \dots, s_p)} ds_1 \wedge \dots \wedge ds_p = \int_S \left(f_1 \frac{\partial(u_{\nu_1}, \dots, u_{\nu_p})}{\partial(s_1, \dots, s_p)} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + f_q \frac{\partial(u_{\nu_1}, \dots, u_{\mu_p})}{\partial(s_1, \dots, s_p)} \right) ds_1 \wedge \dots \wedge ds_p.$$

Розглянемо два окремих випадки загального означення 1.

(i) При $p = m$, $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$

і

$$\int_M f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = \int_T f \frac{\partial(x_1, \dots, x_m)}{\partial(t_1, \dots, t_m)} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m,$$

що являє собою формулу заміни змінних.

(ii) Якщо многовид M може бути заданий за допомогою спеціального параметричного зображення, в якому

$$x_1 = u_1 = t_1, \dots, x_p = u_p = t_p;$$

$$x_{p+1} = u_{p+1}(\vec{t}), \dots, x_m = u_m(\vec{t}), \quad \vec{t} \in T,$$

то

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_p)}{\partial(t_1, \dots, t_p)} = 1$$

і

$$\int_M f(x_1, \dots, x_m)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p =$$

$$= \int_T f(t_1, \dots, t_p, u_{p+1}(\vec{t}), \dots, u_m(\vec{t}))\, dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p =$$

$$= \int_T f(x_1, \dots, x_p, u_{p+1}(\vec{x}), \dots, u_m(\vec{x}))\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p, \tag{2}$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_p).$$

1°. Криволінійний інтеграл другого роду. Нехай $\Gamma = \vec{u}([a, b])$ — орієнтована крива в $\mathbf{R}^m$, причому $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}([a, b], \mathbf{R}^m)$. Крива, для якої $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}([a, b], \mathbf{R}^m)$, називається ***гладкою***. Нехай для i, $1 \leqslant i \leqslant m$, $f_i : \Gamma \to \mathbf{R}$, причому $f_i \in \mathbf{C}(\Gamma)$. Розглянемо диференціальну форму першого степеня на Γ:

$$\omega = f_1(\vec{x})\, dx_1 + \dots + f_m(\vec{x})\, dx_m.$$

Означення 2. Криволінійним інтегралом другого роду від форми ω по орієнтованій кривій Γ називається число

$$\int_\Gamma \omega := j \int_a^b \Big(f_1(u_1(t), \dots, u_m(t)) \frac{du_1(t)}{dt} + \dots$$

$$\dots + f_m(u_1(t), \dots, u_m(t)) \frac{du_m(t)}{dt} \Big) dt, \tag{3}$$

де $j = 1$, якщо t-простір знака $+1$ і $j = -1$, якщо t-простір знака -1.

Зауважимо, що інтеграл у правій частині (3) є інтеграл Рімана від неперервної функції по відрізку $[a, b]$.

Приклади. 1. Нехай $m = 2$, множина $T = [0, \pi]$ міститься в додатному t-просторі; $\Gamma = \{(\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]\}$. При цьому $x_1 = u_1 = \cos t$, $x_2 = u_2 = \sin t$; $t \in [0, \pi]$. Для функцій $f_1 = -x_2$, $f_2 = x_1$ маємо

$$\int_\Gamma (-x_2 dx_1 + x_1 dx_2) = \int_0^\pi (-\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \times$$

$$\times \cos t)\, dt = \pi.$$

Зауважимо, що рух у напрямку зростання t відповідає руху проти годинникової стрілки вздовж Γ.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_\Gamma ((2a - x_2)\, dx_1 + x_1 dx_2)$, $a > 0$, де Γ — арка циклоїди над відрізком $[0, 2\pi a]$, що пробігається в напрямку від точки $(0, 0)$ до точки $(2\pi a, 0)$. Розглянемо параметричне зображення для Γ: $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = a(t - \sin t),\ x_2 = a(1 - \cos t);\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$. Оскільки зростанню t на $[0, 2\pi]$ відповідає рух у фіксованому напрямку вздовж Γ, то t-простір слід вважати додатним. Тому

$$\int_\Gamma ((2a - x_2)\, dx_1 + x_1 dx_2) = \int_0^{2\pi} ((2a - a(1 - \cos t))\, a(1 - \cos t) +$$

$$+ a(t - \sin)\, a \sin t)\, dt = -2\pi a^2.$$

Зауваження 2. Криволінійний інтеграл $\int_\Gamma \omega$ володіє багатьма звичайними властивостями інтеграла. Наприклад,

$$\int_\Gamma (\omega_1 + \omega_2) = \int_\Gamma \omega_1 + \int_\Gamma \omega_2.$$

Далі, якщо c, $a < c < b$ і $\Gamma_1 = \vec{u}([a, c])$, $\Gamma_2 = \vec{u}([c, b])$, то $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ і

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega.$$

2°. Криволінійний інтеграл другого роду як границя інтегральних сум. Нехай $\Gamma = \vec{u}([a, b])$ — орієнтована крива в $\mathbf{R}^3$. Припустимо, що t-простір для $[a, b]$ додатний. Орієнтацію Γ будемо інтерпретувати як вибір напрямку руху вздовж Γ, що відповідає зростанню параметра t. Нехай $\vec{F}$ — векторна функція, визначена на Γ, тобто $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$: $\Gamma \to \mathbf{R}^3$. Нехай $\lambda = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ — розбиття відрізка $[a, b]$, $|\lambda|$ — його розмір. У кожному з відрізків $[t_\nu, t_{\nu+1}]$ розглянемо точку ξ_ν; $0 \leqslant \nu \leqslant n - 1$, а для частини кривої Γ, що відповідає параметричній множині $[t_\nu, t_{\nu+1}]$, — скалярний добуток вектора $\vec{F}(\vec{u}(\xi_\nu))$ на вектор $\vec{u}(t_{\nu+1}) - \vec{u}(t_\nu)$, який напрямлений у бік руху по вибраній частині кривої.

Одержимо величину

$$(\vec{F}(\vec{u}(\xi_\nu)), (\vec{u}(t_{\nu+1}) - \vec{u}(t_\nu))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} f_i(u_1(\xi_\nu), u_2(\xi_\nu), u_3(\xi_\nu))(u_i(t_{\nu+1}) - u_i(t_\nu)).$$

Сума

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (\vec{F}(\vec{u}(\xi_\nu)), (\vec{u}(t_{\nu+1}) - \vec{u}(t_\nu))) \tag{4}$$

є сумою трьох сум типу

$$S_1 = \sum_{\nu=0}^{n-1} f_1(\vec{u}(\xi_\nu))(u_1(t_{\nu+1}) - u_1(t_\nu)).$$

Якщо Γ — гладка крива, а $\vec{F} \in C(\Gamma, \mathbf{R}^3)$ то за теоремою Лагранжа

$$S_1 = \sum_{\nu=0}^{n-1} f_1(\vec{u}(\xi_\nu)) \frac{du_1(\eta_\nu)}{dt} \Delta t_\nu; \quad \eta_\nu \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$$

і

$$S_1 \to \int_a^b f_1(\vec{u}(t)) \frac{du_1(t)}{dt} dt, \quad |\lambda| \to 0.$$

Таким чином, криволінійний інтеграл другого роду припускає зображення

$$\int_\Gamma (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3) = \lim_{|\lambda| \to 0} \sum_{\nu=0}^{n-1} (\vec{F}(\vec{u}(\xi_\nu)), (\vec{u}(t_{\nu+1}) - \vec{u}(t_\nu)). \tag{5}$$

Зображення (5) дозволяє отримати ряд важливих фізичних інтерпретацій криволінійного інтеграла другого роду.

Приклад 3. Припустимо, що на матеріальну точку P, розміщену в точці $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$, діє сила $\vec{F}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), f_3(\vec{x}))$. Нехай Γ — гладка крива в $\mathbf{R}^3$, що визначається за допомогою функції $\vec{u}$ на $[a, b]$. Припустимо, що точка P рухається від одного кінця Γ до другого, причому напрямок руху відповідає зростанню параметра t. Яку роботу потрібно витратити на переміщення точки P вздовж кривої? Наближене значення роботи дає сума (4), а точне значення дорівнює криволінійному інтегралу другого роду

$$\int_\Gamma (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3).$$

Зауваження. 3. Криволінійний інтеграл другого роду був визначений в 1° по гладкій кривій. Неперервна крива називається ***кусково-гладкою***, якщо вона складена із скінченного числа гладких кусків. Криволінійний інтеграл по кусково-гладкій кривій визначається як сума інтегралів по гладким кускам.

4. Зауважимо також, що перехід до протилежної орієнтації змінює знак інтеграла $\int\limits_{\Gamma} \omega$. Точніше, якщо Γ — орієнтовна крива, а $\tilde{\Gamma}$ — та сама крива із протилежною орієнтацією, то

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = -\int\limits_{\tilde{\Gamma}} \omega.$$

Вправи

5. Нехай $m = 2$ і в площині $\mathbf{R}^2$ розглянемо криву $\Gamma = \{(x, u(x)) \mid x \in [a, b]\}$, $u \in \mathbf{C}^{(1)}([a, b])$, що пробігається в напрямку зростання x. Довести, що для $\{P, Q\} \subset \mathbf{C}(\Gamma)$:

$$\int\limits_{\Gamma} (P dx_1 + Q dx_2) = \int\limits_{a}^{b} (P(x, u(x)) + Q(x, u(x)))\, u'(x)\, dx.$$

6. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$, якщо $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| = 1\}$, $\omega = x_1 dx_1 - x_1 x_2 dx_2$, Γ — крива, що пробігається за годинниковою стрілкою.

3°. Поверхневий інтеграл другого роду. Нехай $m = 3$, $p = 2$, а T — компактна вимірна підмножина $\mathbf{R}^2$

$$\vec{u}(T) = \{(x_1, x_2, x_3) = (u_1(t_1, t_2), u_2(t_1, t_2), u_3(t_1, t_2)) \mid (t_1, t_2) \in T\},$$

причому $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}(T, \mathbf{R}^3)$.

Припустимо, що t-простір, що містить множину T, додатний, $S = \vec{u}(T)$ — орієнтована поверхня в $\mathbf{R}^3$. Нехай f_i: $S \to \mathbf{R}$, $f_i \in \mathbf{C}(S)$, $i = 1, 2, 3$.

Означення 3. Інтеграл $\int\limits_{S} \omega$ від диференціальної форми другого степеня

$$\omega = f_1(\vec{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2(\vec{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + f_3(\vec{x})\, dx_1 \wedge dx_2$$

по орієнтованому многовиду — поверхні S називається ***поверхневим інтегралом другого роду.***

Зауважимо, що згідно з загальним означенням 1 інтеграла від форми по многовиду поверхневий інтеграл другого роду

обчислюється за формулою

$$\int_S \left(f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2\right) =$$

$$= \int_T \left(f_1(\vec{u}(t_1, t_2)) \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2)} + f_2(\vec{u}(t_1, t_2)) \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t_1, t_2)} + \right. \tag{6}$$

$$\left. + f_3(\vec{u}(t_1, t_2)) \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)}\right) dt_1 \wedge dt_2.$$

Приклад 4. Нехай $T \subset \{(t_1, t_2) \mid t_1^2 + t_2^2 \leqslant 1\}$;

$$x_1 = u_1(t_1, t_2) = t_1, \quad x_2 = u_2(t_1, t_2) = t_2, \quad x_3 = u_3(t_1, t_2) =$$
$$= 1 - t_1^2 - t_2^2 = 1 - x_1^2 - x_2^2; \quad (t_2, t_2) \in T,$$

причому t-простір має знак $+1$. Тоді $S = \vec{u}(T)$ є орієнтована поверхня — верхня сторона частини параболоїда обертання, що розміщена у півпросторі $x_3 \geqslant 0$. Для функції $f(x_1, x_2, x_3) = x_3$ обчислимо інтеграл

$$\int_S f(\vec{x})\, dx_1 \wedge dx_2.$$

За формулою (6) одержимо $\int_S x_3 dx_1 \wedge dx_2 = \int_T (1 - t_1^2 - t_2^2)\, dt_1 dt_2 = \frac{\pi}{2}$.

Вправи

7. Обчислити інтеграл $\int_S \omega$, якщо $\omega = dx_1 \wedge dx_3 + 2x_1 dx_1 \wedge dx_2$, а S — зовнішня сторона поверхні циліндра $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$, $|x_3| \leqslant 1$.

8. Нехай $F(t) = \int_{\Gamma(t)} (x_1 x_2 dx_1 + x_2 dx_2)$, $t > 0$, де $\Gamma(t) = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = t^2, x_1 \geqslant 0\}$ — крива з початком в точці $(0, t)$. Обчислити F'.

9. Нехай $F(t) = \int_{S(t)} (x_1 x_2 x_3 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1)$, де $S(t) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = t^2, x_3 \geqslant 0\}$, $t > 0$. Обчислити F'.

§ 3. ЗОВНІШНІЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ФОРМИ. ОРІЄНТАЦІЯ ГРАНИЦІ

3.1. ЗОВНІШНІЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ФОРМИ

Нехай

$$\omega = f_1(\vec{x})\, dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p} + \ldots + f_q(\vec{x})\, dx_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_p}$$

є диференціальною формою степеня $p \leqslant m$ на множині M, $M \subset \mathbf{R}^m$, причому $f_i \in \mathbf{C}^{(1)}(M)$, $1 \leqslant i \leqslant q$.

Означення 1. Зовнішнім диференціалом форми ω степеня p називається така диференціальна форма степеня $p+1$:

$$d\omega := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_q(\vec{x})}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_p}. \qquad (1)$$

Зовнішнім диференціалом функції f (тобто форми степеня 0) називається її диференціал

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} dx_i.$$

Зауважимо, що форма запису правої частини (1) не є канонічною і що згідно з означенням

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2.$$

Приклади. 1. Нехай $m = 2$, $p = 1$ і

$$\omega = P(x_1, x_2)\, dx_1 + Q(x_1, x_2)\, dx_2$$

є диференціальна форма першого степеня в $\mathbf{R}^2$ Згідно з означенням її зовнішній диференціал

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial Q}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2,$$

звідки, після приведення до канонічної форми, одержимо

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2.$$

2. Нехай $m = 3$, $p = 1$. Зовнішній диференціал форми першого степеня в $\mathbf{R}^3$

$$\omega = P(\vec{x})\, dx_1 + Q(\vec{x})\, dx_2 + R(\vec{x})\, dx_3$$

після спрощення дорівнює

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2.$$

3. Нехай $m = 3$, $p = 2$ і

$$\omega = P(\vec{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + Q(\vec{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + R(\vec{x})\, dx_1 \wedge dx_2$$

є диференціальна форма другого степеня в $\mathbf{R}^3$. Її зовнішній диференціал після зведення до канонічної форми дорівнює

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Слід звернути увагу на «циклічний» запис форм і їх зовнішніх диференціалів у прикладах 1—3. Зауважимо також, що згідно з означенням 1 диференціал будь-якої форми степеня m в $\mathbf{R}^m$ дорівнює 0.

ТЕОРЕМА. Нехай ω — диференціальна форма степеня p на M з коефіцієнтами, що належать класу $\mathbf{C}^{(2)}(M)$.

Тоді $d(d\omega) = 0$.

⌈ Достатньо розглянути випадок форми вигляду

$$\omega = f(\vec{x})\, dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p}.$$

За означенням 1 спочатку маємо

$$d\omega = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p}.$$

Таким же чином знаходимо

$$d(d\omega) = \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \left(\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p} = 0,$$

оскільки для $f \in \mathbf{C}^{(2)}(M)$ має місце рівність

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant m. \qquad \lrcorner$$

Доведену теорему називають іноді ***теоремою Пуанкаре***[1].

---

[1] *Пуанкаре Анрі* (1854—1912) — видатний французький математик.

Вправи

1. Визначити зовнішній диференціал форми:

а) $x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$;

б) $f_1(x_1)\, dx_1 + f_2(x_2)\, dx_2 + \ldots + f_m(x_m)\, dx_m$;

в) $f_1(x_2, x_3)\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x_1, x_3)\, dx_3 \wedge dx_1 + f_3(x_1, x_2)\, dx_1 \wedge dx_2$;

г) $\sum_{i=1}^{m} f_i dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1}$;

д) $\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_m$.

2. Навести приклади диференціальних форм ω, для яких

$$d\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m.$$

3.2. ОРІЄНТАЦІЯ ГРАНИЦІ МНОЖИНИ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ ІЗ СКІНЧЕННОГО ЧИСЛА БРУСІВ

Нехай для множини A в просторі $(\mathbf{R}^m, \rho)$ A° — множина всіх внутрішніх в $(\mathbf{R}^m, \rho)$ точок A.

Означення 2. Нехай F — замкнена в $(\mathbf{R}^m, \rho)$ множина. ***Границею*** ∂F множини F називається множина

$$\partial F := F \setminus F^\circ.$$

Приклад 4. Брус в $\mathbf{R}^m$

$$Q = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m\}$$

є замкнена множина. Його границя ∂Q є об'єднання $2m$ $(m-1)$-вимірних брусів:

$$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \{c_i\} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times [a_m, b_m],$$

$c_i = a_i$ або $c_i = b_i$; $\quad 1 \leqslant i \leqslant m$.

Нехай M — множина, що є об'єднанням скінченного числа брусів деякого розбиття простору $\mathbf{R}^m$.

Границя ∂M множини M складена із скінченного числа $(m-1)$-вимірних брусів. Нехай для кожного i, $1 \leqslant i \leqslant m$, $\partial_i M$ є та частина границі ∂M, яка розміщена в гіперплощині типу $x_i = \text{const}$. Бруси вимірності $m-1$, що складають $\partial_i M$, розділимо на дві частини: $\partial_i^- M$ і $\partial_i^+ M$ таким чином. Припустимо, що Q це $(m-1)$-вимірний брус, що лежить в гіперплощині $x_i = c$ і $Q \subset \partial_i M$. Брус Q містить-

ся в $\partial_i^+ M$ ($\partial_i^- M$), якщо

$$\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = c, x_{i+1}, \dots, x_m) \in Q^0$$

при всіх досить малих додатних δ

$$\vec{x}_\delta := (x_1, \dots, x_{i-1}, c + \delta, x_{i+1}, \dots, x_m) \bar{\in} M \qquad (\vec{x}_\delta \in M).$$

Тут Q^0 — множина всіх внутрішніх точок Q в гіперплощині $x_i = c$, яка є $(m-1)$-вимірним простором із звичайною віддаллю.

Припустимо, що $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ — простір $\mathbf{R}^m$ має знак j. При цьому множина M є орієнтованою. Зауважимо, що простір $(x_i, \dots, x_m, x_1, \dots, x_{i-1})$ є простір, отриманий з допомогою регулярного перетворення — переставлення координат, має знак

$$j(-1)^{(m-1)(i-1)}.$$

Означення 3. Для кожного i, $1 \leqslant i \leqslant m$ множина $\partial_i M$ лежить в $(x_{i+1}, \dots, x_m, x_1, \dots, x_{i-1})$-просторі, яке є згідно з означенням простором знаку

$j(-1)^{(m-1)(i-1)}$ для множини $\partial_i^+ M$ і знаку

$-j(-1)^{(m-1)(i-1)}$ для множини $\partial_i^- M$. При цьому границя ∂M називається ***орієнтованою***, а ця орієнтація границі ∂M — ***орієнтацією, що відповідає орієнтації множини*** M.

Вправи

3. Довести твердження:

а) якщо брус Q належить $(x_{i+1}, \dots, x_m, x_1, \dots, x_{i-1})$-простору знака $+1$ і одночасно належить $(x_{i+1}, \dots, x_m, x_1, \dots, x_{i-1})$-простору знака -1, то Q не міститься в ∂M;

б) нехай Q — брус, $\tilde{Q}$ — орієнтований брус Q, а $\tilde{\tilde{Q}}$ — брус Q із орієнтацією, протилежною $\tilde{Q}$. Умовимося вважати, що $\tilde{Q} \cup \tilde{\tilde{Q}} = \varnothing$. Нехай

$$M = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j, \qquad N \in \mathbf{N}.$$

Довести рівність $\partial \tilde{M} = \bigcup_{j=1}^{N} \partial \tilde{Q}_j$;

в) довести, що $\widetilde{\partial(\partial \tilde{M})} = \varnothing$.

4. Нехай при $m = 2$ множина M міститься в додатному (x_1, x_2)-просторі. Додатну орієнтацію відрізка в одновимірному просторі будемо інтерпретувати як вибір напрямку руху в бік зростання координати. Довести, що орієнтацію ∂M, що відповідає орієнтації M, можна інтерпретувати як вибір обходу ∂M в такому напрямку, при якому найближча частина

множини M залишається зліва. Звернути увагу на те, що ∂M складається із скінченного числа замкнених ламаних. Якщо M лежить у від'ємному (x_1, x_2)-просторі, то напрям обходу ∂M треба змінити на протилежний.

5. Нехай при $m = 3$ множина M міститься в додатному (x_1, x_2, x_3)-просторі. Довести, що тоді орієнтацію ∂M можна розглядати як вибір зовнішньої по відношенню до M сторони поверхні ∂M, оскільки, якщо дивитися на грані — частини ∂M зовні M,— то їх орієнтація буде такою, як описано у вправі 4.

§ 4. ФОРМУЛА СТОКСА[1] В СПЕЦІАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

4.1. ФОРМУЛА СТОКСА ДЛЯ МНОЖИНИ, ЩО СКЛАДЕНА ІЗ СКІНЧЕННОГО ЧИСЛА БРУСІВ

Нехай $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$ — брус в $\mathbf{R}^m$, і число i, $1 \leqslant i \leqslant m$ фіксоване. Нехай для множини Q

$$\partial_i^+ Q = \{x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) \mid a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, \\ 1 \leqslant k \leqslant m,\ k \neq i\},$$

$$\partial_i^- Q = \{(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) \mid a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, \\ 1 \leqslant k \leqslant m,\ k \neq i\}.$$

За формулою (3) п. I.6 глави 14 для функції $f: Q \to \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{C}(Q)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathbf{C}(Q)$ маємо

$$\int\limits_Q \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\, d\vec{x} =$$

$$= \int\limits_{Q_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_m -$$

$$- \int\limits_{Q_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_m, \tag{1}$$

де $Q_i = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \ldots \times [a_m, b_m]$.

Припустимо зараз, що $(x_1, \ldots x_m)$ - простір додатний, при цьому $(x_i, \ldots, x_m, x_1, \ldots x_{i-1})$-простір має знак $(-1)^{(m-1)(i-1)}$. Розглянемо орієнтацію ∂Q, визначену в п. 3.2. Згідно з означенням простір $(x_{i+1}, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_{i-1})$ має знак $(-1)^{(m-1)(i-1)}$ для множини $\partial_i^+ Q$ і знак $-(-1)^{(m-1)(i-1)}$ для множини $\partial_i^- Q$. Враховуючи визначення диференціальної

[1] *Стокс Джордж Габріель* (1819—1903) — англійський математик.

форми і інтеграла по многовиду, запишемо формулу (1) таким чином:

$$\int\limits_Q \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} =$$

$$= \int\limits_{\partial_i^+ Q} f dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} +$$

$$+ \int\limits_{\partial_i^- Q} f dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1}. \qquad (2)$$

Зауважимо також, що згідно з означенням інтеграла по многовиду для $j \neq i$

$$\int\limits_{\partial_j^+ Q} f dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} =$$

$$= \int\limits_{Q_j} f \frac{\partial (x_{i+1}, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_{i-1})}{\partial (x_{j+1}, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_{j-1})} \times$$

$$\times dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} = 0, \qquad (3)$$

оскільки якобіан у правій частині містить рядок із нулів:

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_\nu} = 0, \qquad \nu = j+1, \ldots, m, \ 1, \ldots, i-1,$$

таким же чином для $j \neq i$

$$\int\limits_{\partial_j^- Q} f dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} = 0. \qquad (4)$$

Рівності (3) і (4) дозволяють записати формулу (2) у вигляді

$$\int\limits_Q \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} =$$

$$= \int\limits_{\partial Q} f dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1}. \qquad (5)$$

Розглянемо два бруса Q_1 і Q, із спільною $(m-1)$-вимірною гранню, що лежить у гіперплощині $x_i = \text{const}$:

$$Q_1 = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i; \quad a_j \leqslant x_j \leqslant b_j,$$
$$1 \leqslant j \leqslant m, \ j \neq i\};$$

$$Q_2 = \{(x_1, \dots, x_m) \mid b_i \leqslant x_i \leqslant c_i; \quad a_j \leqslant x_j \leqslant b_j,$$

$$1 \leqslant j \leqslant m, \ j \neq i\}.$$

Об'єднання $Q = Q_1 \cup Q_2$ є також брус, причому $\partial_i^- Q_1 = \partial_i^- Q$, $\partial_i^+ Q_2 = \partial_i^+ Q$. Спільна грань брусів Q_1 і Q_2 є множина $\partial_i^+ Q_1 = \partial_i^- Q_2$, яка не має внутрішніх точок в $(\mathbf{R}^m, \rho)$. Як частина границі бруса Q_1 ця множина лежить у просторі знака $(-1)^{(m-1)(i-1)}$, а як частина Q_2 — в просторі знака $-(-1)^{(m-1)(i-1)}$.

Нехай $f \in \mathbf{C}(Q)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathbf{C}(Q)$. Якщо записати формулу (2) для кожного з брусів Q_1, Q_2, то праві частини отриманої рівності будуть містити два інтеграла від функції f по $\partial_i^+ Q_1$ і $\partial_i^- Q_2$, тобто по одній множині, яка має протилежну орієнтацію в інтегралах. Тоді сума цих двох інтегралів буде дорівнювати нулю. Враховуючи формулу (5), одержимо

$$\int\limits_{Q_1 \cup Q_2} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} =$$

$$= \int\limits_{\partial(Q_1 \cup Q_2)} f dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1}. \tag{6}$$

Із рівності (6) випливає наступне твердження.

ЛЕМА. Нехай M—множина, що є об'єднанням скінченного числа брусів із $\mathbf{R}^m$. Припустимо, що M орієнтована, нехай ∂M — границя множини M, орієнтована відповідним до орієнтації M способом. Нехай функція f: $M \to \mathbf{R}$, причому $f \in \mathbf{C}(M)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathbf{C}(M)$.

Тоді

$$\int\limits_M \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} =$$

$$= \int\limits_{\partial M} f dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1}. \tag{7}$$

Отриману формулу (7) можна записати в іншій формі. Нехай

$$f_i\colon \ M \to \mathbf{R}, \ f_i \in \mathbf{C}(M), \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \in \mathbf{C}(M); \ 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Виберемо в (7) $f = f_i$ і складемо всі одержані рівності:

$$\int_M \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} =$$

$$= \int_{\partial M} \sum_{i=1}^{m} f_i dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1}. \qquad (8)$$

Нехай

$$\omega := \sum_{i=1}^{m} f_i(\vec{x})\, dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1}$$

є диференціальна форма степеня $m-1$ на ∂M — $(m-1)$-вимірному многовиді. Тоді зовнішній диференціал ω

$$d\omega = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1}.$$

Тому формулу (8) можна записати у вигляді

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \qquad (9)$$

Отримана рівність являє собою спеціальний випадок загальної формули Стокса.

4.2. ОКРЕМІ ВИПАДКИ ФОРМУЛИ (9) п. 4.1

(i) $m = 1$. **Формула Ньютона—Лейбніца.** Визначимо 0-кратний інтеграл від функції f по 0-вимірній множині, що складається із однієї точки $\{a\}$, як $f(a)$. Нехай відрізок $[a, b] = M$ міститься в додатному x-просторі $\mathbf{R}$, функція $f \in C^{(1)}([a, b])$ і $\omega = f$ — диференціальна форма степеня 0 на $[a, b]$. У цьому випадку $\partial M = \{a, b\}$, причому $\partial^- M = \{a\}$, $\partial^+ M = \{b\}$.

Крім того, $d\omega = f' dx$ і формула (9) запишеться у вигляді

$$\int_M d\omega = \int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a) = \int_{\partial M} \omega.$$

Ця рівність являє собою формулу Ньютона—Лейбніца.

(ii) $m = 2$. **Формула Гріна**[1]. Нехай M — множина, що є об'єднанням скінченного числа прямокутників-брусів у додатному (x_1, x_2)-просторі. При цьому ∂M — об'єднання скінченного числа відрізків, а орієнтацію ∂M, що відповідає орієнтації M, можна інтерпретувати як вибір напрямку обходу ∂M таким чином, щоб найближча частина M залишалася зліва, якщо дивитися на площину зверху.

Нехай $\mathbf{P}$: $M \to \mathbf{R}$, Q: $M \to \mathbf{R}$, причому

$$\{P, Q\} \subset \mathbf{C}^{(1)}(M) \text{ і}$$

$$\omega = P dx_1 + Q dx_2$$

— диференціальна форма першого степеня з зовнішнім диференціалом

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2.$$

У цьому випадку формулу (9) п. 4.1 можна записати у вигляді

$$\int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial M} (P dx_1 + Q dx_2). \qquad (1)$$

Ця рівність називається ***формулою Гріна***. Інтеграл у лівій частині (1) є подвійний інтеграл по M від неперервної функції, а у правій — криволінійний інтеграл другого роду по границі ∂M, орієнтованої вказаним вище способом.

Зауваження. Для від'ємного (x_1, x_2)-простору в формулі (1) інтеграл у лівій частині потрібно взяти зі знаком —1, а інтеграл правої частини розглядати по ∂M з протилежною орієнтацією.

(iii) $m = 3$. ***Формула Гаусса — Остроградського***[2]. Припустимо, що M — множина, що є об'єднанням скінченного числа брусів у додатному (x_1, x_2, x_3)-просторі. При цьому ∂M є об'єднанням скінченного числа прямокутників, а орієнтацію ∂M можна інтерпретувати як вибір зовнішньої сторони поверхні ∂M. Нехай P, Q, R — дійсні функції на M такі, що

$$\{P, Q, R\} \subset \mathbf{C}^{(1)}(M).$$

---

[1] *Грін Джордж* (1793—1841) — англійський математик.

[2] *Гаусс Карл Фрідріх* (1777—1855) — німецький математик. В його різнобічній творчості органічно поєднувалися дослідження з теоретичної математики і застосувань.

Остроградський Михайло Васильович (1801—1862) — російський математик, один із фундаторів Петербурзької математичної школи. Дослідження Остроградського стосуються різних областей математики і механіки.

Для диференціальної форми другого степеня

$$\omega = Pdx_2 \wedge dx_3 + Qdx_3 \wedge dx_1 + Rdx_1 \wedge dx_2$$

із зовнішнім диференціалом

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

формулу (9) п. 4.1 можна записати у вигляді

$$\int\limits_M \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \int\limits_{\partial M} (Pdx_2 \wedge dx_3 + Qdx_3 \wedge dx_1 + Rdx_1 \wedge dx_2). \qquad (2)$$

Ця рівність називається ***формулою Гаусса — Остроградського***. Інтеграл у лівій частині цієї формули є потрійний інтеграл по M від неперервної функції, а у правій — поверхневий інтеграл другого роду від форми ω по зовнішній стороні поверхні ∂M.

Зауваження. У випадку від'ємного (x_1, x_2, x_3)-простору інтеграл у лівій частині (2) потрібно взяти зі знаком —1, а у правій розглядати по внутрішній стороні ∂M.

Приклад. При умовах випадку (ii) візьмемо $P = 0$, $Q = \varphi\psi$, де $\{\varphi, \psi\} \subset C^{(1)}(M)$. Із формули Гріна одержимо

$$\int\limits_M \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2 = \int\limits_{\partial M} \varphi\psi dx_2,$$

звідки

$$\int\limits_M \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = -\int\limits_M \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \int\limits_{\partial M} \varphi\psi dx_2, \qquad (3)$$

таким же чином отримаємо

$$\int\limits_M \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = -\int\limits_M \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 - \int\limits_{\partial M} \varphi\psi dx_1. \qquad (4)$$

Формули (3) і (4) є для подвійних інтегралів аналогами одновимірної формули інтегрування частинами. Ці формули припускають різні узагальнення. Наприклад, якщо $\{\varphi, \psi\} \subset C^{(s)}(M)$, $p + q = s$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, то

$$\int\limits_M \varphi \frac{\partial^s \psi}{\partial x_1^p \partial x_2^q} dx_1 dx_2 = (-1)^s \int\limits_M \psi \frac{\partial^s \varphi}{\partial x_1^p \partial x_2^q} dx_1 dx_2 + \qquad (5)$$

$$+\int\limits_{\partial M}\left(\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\frac{\partial^i\varphi}{\partial x_1^i}\frac{\partial^{s-i-1}\psi}{\partial x_i^{p-i-1}\partial x_2^q}\,dx_2-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{q-1}(-1)^{p+i}\frac{\partial^{p+1+i}\varphi}{\partial x_1^p\partial x_2^{1+i}}\frac{\partial^{q-1-i}\psi}{\partial x_2^{q-i-1}}\,dx_1\right).$$

За допомогою формули Гаусса — Остроградського легко отримати аналоги формули (3) — (5) для потрійнних інтегралів.

Вправи

1. Нехай $\{\varphi, \psi\} \subset C^{(2)}(M)$ і

$$\Delta\varphi := \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}.$$

Довести формулу Гріна:

$$\int\limits_M(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)\,dx_1\wedge dx_2=$$

$$=\int\limits_{\partial M}\left(\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)dx_2+\left(-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)dx_1\right).$$

2. Нехай $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$-простір додатний і

$$\omega=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{(m-1)(i-1)}x_i dx_{i+1}\wedge\ldots\wedge dx_m\wedge dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{i-1}.$$

Довести таку формулу для міри $\mathbf{m}(M)$ множини M:

$$\mathbf{m}(M)=\frac{1}{m}\int\limits_{\partial M}\omega.$$

Записати одержану формулу для $m=2$, $m=3$.

§ 5. ЗАГАЛЬНА ФОРМУЛА СТОКСА

5.1. ДОВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ СТОКСА

Формула (9) п. 4.1 була доведена для множини M, яка є об'єднанням скінченного числа брусів в $\mathbf{R}^m$ і диференціальної форми степеня $m-1$. Цю формулу можна узагальнити на випадок довільної форми на многовиді.

Нехай T — об'єднання скінченного числа брусів у $(t_1, \ldots, t_{p+1})$-просторі $\mathbf{R}^{p+1}$, яке будемо вважати орієнтованим. Припустимо, що ∂T — границя множини T, орієнтована відповідним до орієнтації T способом.

Нехай u_i: $T \to \mathbf{R}$, $u_i \in \mathbf{C}^{(2)}(T)$, $1 \leqslant i \leqslant m$; $p < m$. Множина $M = \vec{u}(T) = \{(u_1(\vec{t}), \ldots, u_m(\vec{t})) \mid \vec{t} \in T\}$ є $(p+1)$-вимірний орієнтований многовид у $(x_1, \ldots, x_m)$-просторі $\mathbf{R}^m$. Множина $\vec{u}(\partial T)$ називається ***орієнтованою границею многовиду*** M, $\vec{u}(\partial T)$ — многовид вимірності p в $\mathbf{R}^m$.

ТЕОРЕМА (**загальна формула Стокса**). Нехай f_i: $M \to \mathbf{R}$, $f_i \in \mathbf{C}^{(1)}(M)$, $1 \leqslant i \leqslant q$ і нехай

$$\omega = f_1(\vec{x})\, dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p} + \ldots + f_q(\vec{x})\, dx_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_p}$$

є диференціальна форма степеня p.

Тоді

$$\int\limits_{\vec{u}(T)} d\omega = \int\limits_{\vec{u}(\partial T)} \omega. \tag{1}$$

⌐ Згідно з означенням інтеграла по многовиду достатньо провести доведення для форми вигляду

$$\omega = f(\vec{x})\, dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p},$$

зовнішній диференціал якої

$$d\omega = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p}.$$

Згідно з означенням інтеграла по многовиду для інтеграла в лівій частині (1) маємо

$$\int\limits_{\vec{u}(T)} d\omega = \int\limits_{\vec{u}(T)} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p} = \tag{2}$$

$$= \int\limits_{T} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial(x_i, x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_p})}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_{p+1})}\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{p+1}.$$

За допомогою розкладу якобіана в (2) по елементах першого рядку

$$\frac{\partial(x_i, x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_p})}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_{p+1})} = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \frac{\partial(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_p})}{\partial(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_{p+1})}$$

і формули обчислення похідної складної функції

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial t_j}$$

рівність (2) запишемо у вигляді

$$\int\limits_{\vec{u}(T)} d\omega = \int\limits_{T} \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} \frac{\partial f}{\partial t_j} \frac{\partial (x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \dots, x_{\nu_p})}{\partial (t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_{p+1})} \times$$

$$\times dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{p+1}. \tag{3}$$

Для інтеграла в правій частині (1) за означенням інтеграла по многовиду одержимо

$$\int\limits_{\vec{u}(\partial T)} \omega = \sum_{i=1}^{p+1} \int\limits_{\vec{u}(\partial_i T)} \omega =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} \int\limits_{\partial_i T} f \frac{\partial (x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \dots, x_{\nu_p})}{\partial (t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_{p+1})} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{i-1} \wedge$$

$$\wedge dt_{i+1} \wedge \dots \wedge dt_{p+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} \int\limits_{\partial T} f \frac{\partial (x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \dots, x_{\nu_p})}{\partial (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{p+1})} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{i-1} \wedge$$

$$\wedge dt_{i+1} \wedge \dots \wedge dt_{p+1} = \int\limits_{\partial T} \tilde{\omega}, \tag{4}$$

де

$$\tilde{\omega} := \sum_{i=1}^{p+1} f \frac{\partial (x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \dots, x_{\nu_p})}{\partial (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{p+1})} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{i-1} \wedge$$

$$\wedge dt_{i+1} \wedge \dots \wedge dt_{p+1}$$

є диференціальною формою степеня p із зовнішнім диференціалом

$$d\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{p+1} \frac{\partial}{\partial t_j} \left(f \frac{\partial (x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \dots, x_{\nu_p})}{\partial (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{p+1})} \right) \times$$

$$\times dt_j \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{i-1} \wedge dt_{i+1} \wedge \dots \wedge dt_{p+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial t_j} \left(f \frac{\partial (x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \dots, x_{\nu_p})}{\partial (t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_{p+1})} \right) \times$$

$$\times dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{p+1} = \tag{5}$$

$$= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial f_t}{\partial t_j} \frac{\partial (x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_p})}{\partial (t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_{p+1})} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{p+1},$$

оскільки форма

$$\tilde{\tilde{\omega}} = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial t_j} \frac{\partial (x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_p})}{\partial (t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_{p+1})} \times$$

$$\times dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{p+1} = 0.$$

Дійсно,

$$\tilde{\tilde{\omega}} = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \left(x_{\nu_1}, \ldots . \frac{\partial x_{\nu_i}}{\partial t_j}, \ldots, x_{\nu_p} \right)}{\partial (t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_{p+1})} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{p+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{j-1} (-1)^{i+s} \frac{\partial^2 x_{\nu_i}}{\partial t_s \partial t_j} \frac{\partial (x_{\nu_r}, r \neq i)}{\partial (t_r, r \neq s, r \neq j)} + \right.$$

$$+ \sum_{s=j+1}^{p+1} (-1)^{i+s-1} \frac{\partial^2 x_{\nu_i}}{\partial t_s \partial t_j} \frac{\partial (x_{\nu_r}, r \neq i)}{\partial (t_r, r \neq s, r \neq j)} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{p+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i} \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{s=1}^{j-1} \left((-1)^{j+s-1} \frac{\partial^2 x_{\nu_i}}{\partial t_s \partial t_j} + (-1)^{j+s} \frac{\partial^2 x_{\nu_i}}{\partial t_j \partial t_s} \right) \times$$

$$\times \frac{\partial (x_{\nu_r}, r \neq i)}{\partial (t_r, r \neq j, r \neq s)} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{p+1} = 0.$$

Застосуємо до множини T і диференціальної форми $\tilde{\omega}$ формулу (9) п. 4.1

$$\int_{\partial T} \tilde{\omega} = \int_T d\tilde{\omega} =$$

$$= \int_T \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} \frac{\partial f}{\partial t_j} \frac{\partial (x_{\nu_1}, x_{\nu_r}, \ldots x_{\nu_p})}{\partial (t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_{p+1})} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{p+1}. \tag{6}$$

Із формул (3), (4) і (6) випливає рівність

$$\int_{\vec{u}(T)} d\omega = \int_{\vec{u}(\partial T)} \omega.$$

Зауважимо, що окремі випадки (1) і (2) п. 4.2 також мають місце для $M = \vec{u}(T)$ і $\partial M = \vec{u}(\partial T)$. Формула (1) називається ***загальною формулою Стокса.***

5.2. ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ДО ФОРМУЛИ СТОКСА І ЇЇ НАСЛІДКИ

(i) При $m = 2$ і $p = 1$, $\vec{u}(T) = M$ — множина точок площини, а $\vec{u}(\partial T) = \Gamma$ — крива або набір кривих. Припустимо також, що на множині $T \setminus \Phi$ відображення $\vec{u}$ взаємно однозначне і

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)} \neq 0,$$

причому $\mathbf{m}(\Phi) = 0$. Нехай P: $M \to \mathbf{R}$, Q: $M \to \mathbf{R}$; $\{P, Q\} \subset \subset \mathbf{C}^{(1)}(M)$. Припустимо, що x-простір додатний. Тоді формула Стокса запишеться таким чином:

$$\int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int_\Gamma (P dx_1 + Q dx_2).$$

Ця рівність називається ***формулою Гріна***. Ліва частина формули містить подвійний інтеграл, а права — криволінійний інтеграл другого роду вздовж кривої Γ, причому напрямок руху на кривій вибрано так, що найближча частина M залишається зліва.

Виберемо $P = -x_2$, $Q = x_1$; з формули Гріна одержимо вираз для площі — міри Жордана

$$\mathbf{m}(M) = \frac{1}{2} \int_\Gamma (x_1 dx_2 - x_2 dx_1).$$

(ii) Нехай $m = 3$, $p = 2$. Припустимо також, що на множині $T \setminus \Phi$ відображення $\vec{u}$ взаємно однозначне і

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} \neq 0,$$

причому $\mathbf{m}(\Phi) = 0$. Припустимо, що функції $\{P, Q, R\} \subset \subset \mathbf{C}^{(1)}(M)$ для $M = \vec{u}(T)$ і що x-простір додатний. Тоді формула Стокса запишеться у вигляді

$$\int_{\vec{u}(T)} \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \int_{\vec{u}(\partial T)} (P dx_2 \wedge dx_3 + Q dx_3 \wedge dx_1 + R dx_1 \wedge dx_2).$$

У цій рівності ліва частина містить потрійний інтеграл, а права — поверхневий інтеграл другого роду по зовнішній

стороні поверхні $\vec{u}(\partial T)$. Отримана формула називається ***формулою Гаусса — Остроградського.***

Вибравши в формулі Гаусса — Остроградського $P = x_1$, $Q = x_2$, $R = x_3$, одержимо формулу

$$\mathbf{m}(\vec{u}(T)) = \frac{1}{3} \int\limits_{\vec{u}(\partial T)} (x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2),$$

яка дозволяє обчислювати об'єм за допомогою поверхневих інтегралів другого роду.

(iii) Нехай $m = 3$, $p = 1$. При цьому

$$S = \vec{u}(T) = \{(u_1(t_1, t), \ u_2(t_1, t_2), \ u_3(t_1, t_2)) \mid (t_1, t_2) \in T\}$$

є поверхня в $\mathbf{R}^3$, а $\Gamma = \vec{u}(\partial T)$ — край поверхні S. Звичайно $\vec{u}(\partial T)$ — крива, або набір кривих. Для диференціальної форми першого степеня

$$\omega = P dx_1 + Q dx_2 + R dx_3$$

зовнішній диференціал визначений в прикладі 2 п. 3.1. Загальна формула (1) п. 5.1 в цьому випадку буде мати вигляд

$$\int\limits_{\vec{u}(\partial T)} (P dx_1 + Q dx_2 + R dx_3) = \int\limits_{\vec{u}(T)} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \right).$$

Ця формула називається ***формулою Стокса.***

Вправи

1. Обчислити площу круга за допомогою криволінійного інтеграла.
2. Обчислити об'єм кулі за допомогою поверхневого інтеграла.
3. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\Gamma} \left(\frac{x_1}{r^2} dx_2 - \frac{x_2}{r^2} dx_1 \right)$, де Γ — коло радіуса 1 із центром $(0, 0)$, що пробігається проти годинникової стрілки і $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Застереження: формулу Гріна до круга, обмеженого Γ, застосувати не можна.

4*. Нехай $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ і $f \in \mathbf{C}^{(2)}(A)$. Обчислити границю

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\int\limits_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 - \frac{1}{n^2} \sum_{i^2 + j^2 \leqslant n^2} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right).$$

§ 6. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ВІД ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ФОРМИ ПЕРШОГО СТЕПЕНЯ

6.1. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ДРУГОГО РОДУ ВІД ДИФЕРЕНЦІАЛА

Нехай $G \subset \mathbf{R}^m$, G — відкрита множина.

Означення 1. Диференціальна форма ω, визначена на G, називається ***точною формою*** на G, якщо вона є зовнішнім диференціалом деякої форми в G.

Приклад 1. Важливим прикладом точної форми першого степеня є диференціал функції $g \in \mathbf{C}^{(1)}(G)$

$$\omega = dg = \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_m} dx_m.$$

Криволінійний інтеграл від диференціала має таку просту але важливу властивість:

ТЕОРЕМА 1. Нехай $g \in \mathbf{C}^{(1)}(G)$. Нехай $\Gamma = \{\vec{u}(t) \mid t \in [a, b]\} \subset G$ є кусково-гладка крива в G, причому $[a, b]$ лежить в додатному t-просторі.

Тоді

$$\int_\Gamma dg = \int_\Gamma \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_m} dx_m \right) = g(\vec{u}(b)) - g(\vec{u}(a)). \qquad (1)$$

$\vdash$ Згідно з означенням криволінійного інтеграла другого роду маємо

$$\int_\Gamma dg = \int_a^b \left(\frac{\partial g(\vec{u}(t))}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial g(\vec{u}(t))}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial t} \right) dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} g(\vec{u}(t))\, dt = g(\vec{u}(b)) - g(\vec{u}(a)). \qquad \dashv$$

Зауваження. При умові теореми 1 орієнтацію Γ можна інтерпретувати як вибір напрямку руху по Γ, що відповідає зростанню параметра t. При цьому $\vec{u}(a)$ і $\vec{u}(b)$ — відповідно початок і кінець кривої Γ. У випадку, коли $\omega = dg$ в G, теорема 1 твердить, що криволінійний інтеграл $\int_\Gamma dg$ по кривій Γ в G залежить тільки від початку $\vec{u}(a)$ і кінця $\vec{u}(b)$ кривої Γ. При цьому кажуть, що інтеграл $\int_\Gamma dg$ не залежить від шляху інтегрування.

Означення 2. Кусково-гладка крива $\Gamma = \{\vec{u}(t) \mid t \in [a, b]\}$ називається ***замкненою*** якщо $\vec{u}(a) = \vec{u}(b)$ (тобто, якщо початок і кінець Γ збігаються).

Наслідок. Якщо $g \in C^{(1)}(G)$, Γ — кусково-гладка замкнена крива в G, то

$$\int_{\Gamma} dg = 0.$$

Доведення випливає з формули (1).

6.2. ЗАМКНЕНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ФОРМИ. ОДНОЗВ'ЯЗНІ МНОЖИНИ

1°. ***Означення 1.*** Диференціальна форма ω, визначена на відкритій множині G, $G \subset \mathbf{R}^m$ з коефіцієнтами із $C^{(1)}(G)$, називається ***замкненою в*** G, якщо $d\omega = 0$ в G.

Приклади. 1. Нехай $g \in C^{(2)}(G)$ і $\omega = dg$. Форма $\omega = dg$ замкнена в G, оскільки згідно з теоремою Пуанкаре $d\omega = d(dg) = 0$.

2. Нехай при $m = 2$, $\{P, Q\} \subset C^{(1)}(G)$ і

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad (x_1, x_2) \in G. \tag{1}$$

Для форми першого степеня

$$\omega = P dx_1 + Q dx_2$$

зовнішній диференціал

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 = 0$$

при виконанні умови (1). Тому ω — замкнена форма. Зауважимо, що умова (1) необхідна для замкненості форми ω.

3. Нехай $m = 3$, $\{P, Q, R\} \subset C^{(1)}(G)$, причому для будь-якої точки $(x_1, x_2, x_3) \in G$ виконані рівності

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial R}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial P}{\partial x_3} = \frac{\partial R}{\partial x_1}. \tag{2}$$

Форма першого степеня

$$\omega = P dx_1 + Q dx_2 + R dx_3$$

при виконанні умов (2) замкнена, оскільки

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{dR}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 = 0.$$

Умови (2) необхідні для замкненості форми ω в G.

4. Точна диференціальна форма першого степеня з коефіцієнтами з $\mathbf{C}^{(1)}(G)$ є замкненою згідно з теоремою Пуанкаре.

2°. Нехай $\Gamma = \{\vec{u}(t) \mid t \in [a, b]\}$ — крива в $\mathbf{R}^m$.

Означення 2. Крива Γ називається ***кусково двічі неперервно диференційовною,*** якщо Γ неперервна і інтервал $[a, b]$ можна зобразити у вигляді об'єднання скінченного числа інтервалів $[\alpha, \beta]$ таких, що $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(2)}([\alpha, \beta])$ (в точках α і β розглядаються відповідні однобічні похідні).

У цьому параграфі під замкненою кривою будемо розуміти замкнену кусково двічі неперервно диференційовну криву.

Означення 3. Нехай M — множина в $\mathbf{R}^m$, $\Gamma = \{\vec{u}(t) \mid t \in [a, b]\}$ — замкнена крива в M. Замкнена крива Γ ***гомотопна точці в*** M, якщо для множини $D = [a, b] \times [0, 1]$ існують точка $\vec{x}_0 \in M$ і функція $\vec{\varphi}$: $D \to \mathbf{R}^m$, $\vec{\varphi} \in \mathbf{C}(D, \mathbf{R}^m)$, що задовольняють умовам:

1) $\forall (t, \alpha) \in D$: $\vec{\varphi}(t, \alpha) \in M$;
2) $\forall t \in [a, b]$: $\vec{\varphi}(t, 0) = \vec{u}(t)$, $\vec{\varphi}(t, 1) = \vec{x}_0$;
3) $\forall \alpha \in [0, 1]$: $\vec{\varphi}(a, \alpha) = \vec{\varphi}(b, \alpha)$;
4) $\exists a = t_0 < t_1 < \ldots < t_s = b$ $\forall i$, $0 \leqslant i \leqslant s - 1$:
$\vec{\varphi} \in \mathbf{C}^{(2)}(D_i, \mathbf{R}^m)$, $D_i := [t_i, t_{i+1}] \times [0, 1]$.

Означення 4. Множина M називається ***лінійно зв'язною,*** якщо для будь-яких її двох точок існує неперервна крива, що міститься в M і з'єднує ці точки. Множина M називається ***однозв'язною***, якщо вона лінійно зв'язна і будь-яка замкнена крива, що лежить в M, гомотопна точці в M.

Приклади. 5. Множина M, $M \subset \mathbf{R}^m$ називається ***зірчастою відносно точки*** $\vec{x}_0$, якщо для будь-якої $\vec{x} \in M$ відрізок

$$\{\vec{x}_0 + \tau(\vec{x} - \vec{x}_0) \mid \tau \in [0, 1]\} \subset M.$$

Зірчаста множина однозв'язна, причому

$$\vec{\varphi}(t, \alpha) = \alpha \vec{x}_0 + (1 - \alpha)\vec{u}(t), \quad (t, \alpha) \in D.$$

6. Множина

$$M = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\} \subset \mathbf{R}^2$$

не є однозв'язною.

3°. Основні теореми.

ТЕОРЕМА 1. Нехай M — однозв'язна множина в $\mathbf{R}^m$, ω — замкнена диференціальна форма першого степеня з коефіцієнтами із класу $\mathbf{C}^1$ (M).

Тоді для будь-якої замкненої кривої Γ, що міститься в M,

$$\int_{\Gamma} \omega = 0.$$

$\ulcorner$ Крива $\Gamma = \{\vec{u}(t) \mid t \in [a, b]\}$ гомотопна точці в M. Нехай $\vec{\varphi}\colon D \to \mathbf{R}^m$ — відповідне відображення з означення 3. Множина $\vec{\varphi}(D)$ є двовимірний многовид, тобто поверхня в $\mathbf{R}^m$, що міститься в M; $\vec{\varphi}(D)$ можна інтерпретувати як поверхню, що натягнута на контур Γ. Припустимо, що простір додатний для D і кожного D_i, $0 \leqslant i \leqslant s-1$ з означення 3. Для кожного i, $0 \leqslant i \leqslant s-1$ розглянемо відповідну орієнтацію границі ∂D_i. Будь-який відрізок $\{(t, \alpha) \mid t = t_i,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant s-1$ є орієнтованим додатно як частина ∂D_{i-1} і орієнтованим від'ємно, як частина ∂D_i. При кожному i, $0 \leqslant i \leqslant s-1$ до орієнтованого многовиду $\vec{\varphi}(D_i)$ і диференціальної форми ω можна застосувати теорему Стокса

$$\int_{\vec{\varphi}(D_i)} d\omega = \int_{\vec{\varphi}(\partial D_i)} \omega.$$

У цій рівності ліва частина дорівнює нулеві. Додаючи праві частини й використовуючи адитивність криволінійного інтеграла по множині інтегрування, одержимо

$$0 = \sum_{i=0}^{s-1} \int_{\vec{\varphi}(\partial D_i)} \omega = \int_{\vec{\varphi}(\partial D)} \omega = \int_{\Gamma} \omega. \qquad \lrcorner$$

Наслідок 1. При умовах теореми 1 криволінійний інтеграл другого роду від форми ω не залежить від кривої — шляху інтегрування, що міститься в M. Точніше, для будь-яких двох кусково двічі неперервно диференційовних кривих Γ_1 і Γ_2, що містяться в M і таких, що мають спільний початок і спільний кінець, має місце рівність

$$\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega.$$

$\ulcorner$ Доведення випливає з теореми 1, яку з врахуванням орієнтації потрібно застосувати до кривої $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. $\lrcorner$

Наслідок 2. Теорема 1 має місце для точної форми

$$\omega = dg, \quad g \in \mathbf{C}^{(2)}(M).$$

Зауваження. Очевидне також таке твердження. Якщо для множини M і форми ω криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega = 0$ для будь-якої замкненої кривої $\Gamma \subset M$, то криволінійний інтеграл від ω не залежить від шляху інтегрування.

ТЕОРЕМА 2. Нехай M — відкрита однозв'язна множина в $\mathbf{R}^m$,

$$\omega = f_1(\vec{x})\,dx_1 + \ldots + f_m(\vec{x})\,dx_m$$

є диференціальною формою першого степеня з коефіцієнтами $f_i \in \mathbf{C}^{(1)}(M)$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Для того щоб форма ω була точною на M, необхідно й достатньо, щоб

$$\forall \vec{x} \in M \ \forall i, j, \ 1 \leqslant i, \ j \leqslant m: \ \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_i}. \qquad (3)$$

⌈ Необхідність. Якщо ω — точна форма, то існує функція g така, що на M

$$\omega = dg = f_1 dx_1 + \ldots + f_m dx_m.$$

Тоді $f_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ на M. Оскільки згідно з умовою, $f_i \in \mathbf{C}^{(1)}(M)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbf{C}(M)$, $1 \leqslant i, \ j \leqslant m$. Тоді на M $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$, звідки $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $1 \leqslant i, \ j \leqslant m$.

Зауважимо, що при доведенні необхідності однозв'язність множини M не використовувалася.

Достатність. Із умов (3) теореми 2 випливає, що $d\omega = 0$ на M. Тому для форми ω має місце твердження теореми 1, з якої випливає, що криволінійний інтеграл від ω не залежить від шляху інтегрування в M. Нехай $\vec{x}_0$ — довільна фіксована точка в M і для точки $\vec{x} \in M$ $\Gamma(\vec{x})$ — деяка кускова двічі неперервно диференційовна крива із початком $\vec{x}_0$ і кінцем $\vec{x}$, що міститься в M. Нехай g: $M \to \mathbf{R}$ — функція, яка визначена рівністю

$$g(\vec{x}) := \int\limits_{\Gamma(\vec{x})} \omega, \quad \vec{x} \in M,$$

при цьому для кожного $\vec{x} \in M$ значення $g(\vec{x})$ не залежить від вигляду кривої $\Gamma(\vec{x})$.

Доведемо, що $\omega = dg$, тобто що

$$\frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_i} = f_i(\vec{x}), \quad \vec{x} \in M, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Розглянемо точки вигляду $\vec{z} = (x_1 + \tau, x_2, \ldots, x_m)$, що містяться в M при всіх τ, $|\tau| < \delta$, де δ — деяке додатне число, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Нехай $\Gamma_1 := \{(x_1 + \tau t, x_2, \ldots, x_m) \mid t \in [0, 1]\}$ — крива, що є відрізком прямої з початком в точці $\vec{x}$ і кінцем в точці $\vec{z}$. Для $\Gamma(\vec{z}) = \Gamma(\vec{x}) \cup \Gamma_1$ маємо

$$\frac{g(\vec{z}) - g(\vec{x})}{\tau} = \frac{g(x_1 + \tau, x_2, \ldots, x_m) - g(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left(\int\limits_{\Gamma(\vec{x}) \cup \Gamma_1} \omega - \int\limits_{\Gamma(\vec{x})} \omega\right) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{\Gamma_1} \omega =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int\limits_0^1 f_1(x_1 + \tau t, x_2, \ldots, x_m)\,\tau dt = \int\limits_0^1 f_1(x_1 + t\tau, \ldots, x_m)\,dt,$$

$$\tau \neq 0.$$

Звідси за допомогою теорем про середнє значення і граничний перехід знаходимо, що

$$\frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_1} = f_1(\vec{x}).$$

Таким же чином одержимо повне твердження теореми 2. ⌋

Часто буває корисною теорема, що міститься в наведених вище твердженнях.

ТЕОРЕМА 3. Для того щоб криволінійний інтеграл від форми

$$\omega = f_1 dx_1 + \ldots + f_m dx_m,$$

де $f_i \in \mathbf{C}^{(1)}(M)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, не залежав від шляху інтегрування в однозв'язній відкритій множині M, необхідно й достатньо виконання умов (3).

Вправи.

1. Довести, що форма $\omega = \sin x_2^2 dx_1 + 2x_1x_2 \cos x_2^2 dx_2$ є точною в $\mathbf{R}^2$. Знайти g, для якої $\omega = dg$.

2. Нехай f_i: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_i \in C(\mathbf{R})$; $i = 1, 2, 3$. Довести, що форма

$$\omega = f_1(x_1)\,dx_1 + f_2(x_2)\,dx_2 + f_3(x_3)\,dx_3$$

є точною в $\mathbf{R}^3$. Знайти g, для якої $\omega = dg$.

3. При якій умові на функцію f форма $\omega = f(x_1, \dots, x_m)\,dx_1$ є замкненою?

4. На множині $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ розглянути форму $\omega = \dfrac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2}$. Обчислити $d\omega$. Обчислити інтеграл від ω: 1) по замкненій кривій, що не охоплює точку $(0, 0)$; 2) по замкненій кривій, що охоплює точку $(0, 0)$.

5. Показати, що множина $\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ не є однозв'язною.

6. Чи є вектор $(-x_2, x_1, x_3)$ градієнтом деякої функції в $\mathbf{R}^3$?

§ 7. МІРА НА МНОГОВИДІ

7.1. ОКРЕМИЙ ВИПАДОК МНОГОВИДУ — ГІПЕРПЛОЩИНА В $\mathbf{R}^m$

Нагадаємо, що ***многовидом вимірності*** p в $\mathbf{R}^m$ називаються такі підмножини $\mathbf{R}^m$, які в малому подібні або близькі до простору $\mathbf{R}^p$. При $p = 1$ це гладка крива, яка в малому подібна до прямої, при $p = 2$ — гладка поверхня, яка в малому подібна до площини, та ін.

Мета цього параграфа полягає в тому, щоб ввести поняття міри многовиду вимірності p в $\mathbf{R}^m$, яке при $p = 1$ було б узагальненням поняття довжини кривої, при $p = 2$ — площі поверхні. Це нове поняття зручно розглянути спочатку для випадку, коли многовид вимірності p є гіперплощина в $\mathbf{R}^m$.

Нехай $T = \mathbf{R}^p$, $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)$: $T \to \mathbf{R}^m$, причому

$$u_i(\vec{t}) = x_i(\vec{t}) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} t_j + a_{i0}, \quad \vec{t} = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbf{R}^p$$

і a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant p$ — фіксовані числа з $\mathbf{R}$. p-вимірний многовид $M = \vec{u}(\mathbf{R}^p)$ є гіперплощина в $\mathbf{R}^m$. Припустимо, що M власно p-вимірне, тобто що матриця $(a_{ij})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{p}$ має ранг p. Далі припускаємо, що $p < m$.

Кожна вимірна множина $A \subset M$ має m-вимірну міру Жордана 0. Проте M є гіперплощина вимірності p, і для її підмножин можна розглядати p-вимірну міру Жордана. Побудуємо в M систему координат таким чином. Нехай $\vec{t^0} = (t_1^0, \ldots, t_p^0)$—фіксована точка з T і $\vec{x^0} = \vec{u}(\vec{t^0}) = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in M$—її образ на M. Кожній точці $\vec{x} \in M$ поставимо у відповідність вектор $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x^0}$. Згідно з припущенням власної p-вимірності M множина

$$H := \{\vec{r} = \vec{x} - \vec{x^0} \mid \vec{x} \in M\}$$

містить p лінійно незалежних векторів і є p-вимірним лінійним простором. Якщо розглянути деякий ортонормований базис в H, то для певного класу підмножин H можна визначити p-вимірну міру Жордана, згідно з наслідком 1 п. 4.6 глави 14 значення цієї міри не будуть залежати від вибору точки $\vec{x^0}$ і базису в H. Нас цікавить зв'язок між значенням міри Жордана вимірної множини $\bar{A} \subset T \subset \mathbf{R}^p$ і значенням міри $\vec{u}(\bar{A})$ на многовиді M.

Побудуємо в H спеціальний базис, використовуючи те, що згідно з припущенням p векторів

$$\vec{a_j} = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}), \qquad 1 \leqslant j \leqslant p,$$

лінійно незалежні. Крім того, зауважимо, що

$$\forall \vec{r} \in H: \ \vec{r} = \vec{x} - \vec{x^0} = \sum_{j=1}^{p} \vec{a_j}(t_j - t_j^0). \tag{1}$$

За допомогою процесу ортогоналізації Шмідта вектори $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}, \ldots, \vec{a_p}$ можна ортонормувати. Покладемо:

$$\vec{e_1} := \|\vec{a_1}\|^{-1} \vec{a_1},$$

$$\vec{e_2} := \left\| \vec{a_2} - \left(\vec{a_2}, \frac{\vec{a_1}}{\|\vec{a_1}\|}\right) \frac{\vec{a_1}}{\|\vec{a_1}\|} \right\|^{-1} \left(\vec{a_2} - \left(\vec{a_2}, \frac{\vec{a_1}}{\|\vec{a_1}\|}\right) \frac{\vec{a_1}}{\|\vec{a_1}\|}\right).$$

. . . . . .

У цих рівностях $(\vec{a}, \vec{b})$—скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Отримаємо ортонормований базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_p}$, при цьому

$$\vec{a_j} = d_{j1}\vec{e_1} + d_{j2}\vec{e_2} + \ldots + d_{jj}\vec{e_j}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Дійсні числа d_{ji}, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$ визначаються відомим чином за набором векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p$, причому $d_{jj} > 0$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Для d_{11} і d_{22} маємо:

$$d_{11} = \|\vec{a}_1\|,$$

$$d_{22} = \left\| \vec{a}_2 - \frac{(\vec{a}_2, \vec{a}_1)}{\|\vec{a}_1\|^2} \vec{a}_1 \right\| =$$

$$= \left(\|\vec{a}_2\|^2 - 2\frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{\|\vec{a}_1\|^2} (\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)^2}{\|\vec{a}_1\|^4} \|\vec{a}_1\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\|\vec{a}_1\|} \sqrt{\|\vec{a}_1\|^2 \|\vec{a}_2\|^2 - (\vec{a}_1, \vec{a}_2)^2}. \tag{2}$$

Використовуючи зображення (1) для векторів з H, отримуємо формулу

$$\vec{r} = \sum_{j=1}^{p} \vec{a}_j (t_j - t_j^0) = \sum_{i=1}^{p} s_i \vec{e}_i, \quad \vec{r} \in H, \tag{3}$$

в якій

$$\begin{aligned} s_1 &= d_{11}(t_1 - t_1^0) + d_{21}(t_2 - t_2^0) + \ldots + d_{p1}(t_p - t_p^0), \\ s_2 &= \qquad\qquad d_{22}(t_2 - t_2^0) + \ldots + d_{p2}(t_p - t_p^0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_p &= \qquad\qquad\qquad\qquad d_{pp}(t_p - t_p^0). \end{aligned} \tag{4}$$

Зауважимо, що якобіан перетворення від змінних $t_1, \ldots, t_p$ до змінних $s_1, \ldots, s_p$

$$\rho = \frac{\partial(s_1, \ldots, s_p)}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} = d_{11} d_{22} \ldots d_{pp} > 0. \tag{5}$$

За координати точки $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}^0 = \vec{u}(\vec{t}) - \vec{u}(\vec{t}^0)$ в H («внутрішні» координати многовиду M) розглянемо координати $s_1, s_2, \ldots, s_p$, пов'язані з координатами точки $\vec{t}$ в T рівностями (4). Якщо F — вимірна множина в $T = \mathbb{R}^p$ з p-вимірною мірою $\mathrm{m}(F)$, то образ $\vec{u}(F)$, що міститься на многовиді M, згідно з формулою заміни змінних вимірний і його p-вимірна міра $\mathrm{m}(\vec{u}(F))$ дорівнює

$$\mathrm{m}(\vec{u}(F)) = \int_{\vec{u}(F)} 1 ds_1 \ldots ds_p = \int_{\vec{s}(F)} ds_1 \ldots ds_p =$$

$$= \int_T \frac{\partial(s_1, \ldots, s_p)}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} dt_1 \ldots dt_p = \rho \mathrm{m}(F). \tag{6}$$

Таким чином, для вимірної множини $F \subset T$ з мірою $\mathrm{m}(F)$ образ $\vec{u}(F)$ на многовиді M має міру, що дорівнює $\rho\mathrm{m}(F)$. Тому величина ρ із формули (5) називається ***коефіцієнтом спотворення міри.***

Зауважимо, що для припустимих координат $\tau_1, \ldots, \tau_p$

$$t_i = \sum_{j=1}^{p} b_{ji}\tau_j + b_{i0}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p,$$

для T значення коефіцієнта спотворення $\tilde{\rho}$ пов'язане із значенням ρ таким чином:

$$\tilde{\rho} = \frac{\partial(s_1, \ldots, s_p)}{\partial(\tau_1, \ldots, \tau_p)} = \frac{\partial(s_1, \ldots, s_p)}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} \times$$

$$\times \frac{\partial(t_1, \ldots, t_p)}{\partial(\tau_1, \ldots, \tau_p)} = \rho \frac{\partial(t_1, \ldots, t_p)}{\partial(\tau_1, \ldots, \tau_p)}. \qquad (7)$$

7.2. ОЗНАЧЕННЯ МІРИ НА МНОГОВИДІ

Нехай $T \subset \mathbf{R}^p$; $\vec{u}$: $T \to \mathbf{R}^m$, $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}(T, \mathbf{R}^m)$; $\vec{u}(T) = M$ — — p-вимірний многовид. Припустимо, що M власно p-вимірний на T.

При цих припущеннях в околі будь-якої точки $\vec{t}^0 \in T$ значення $\vec{u}(\vec{t})$ близькі до значень $\vec{v}(\vec{t})$ відображення типу, який розглянуто в п. 7.1:

$$v_i(\vec{t}) = u_i(\vec{t}^0) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial u_i(\vec{t}^0)}{\partial t_j}(t_j - t_j^0), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m. \qquad (8)$$

При цьому «близькість» полягає в тому, що

$$\|\vec{u}(\vec{t}) - \vec{v}(\vec{t})\| = o(\|\vec{t} - \vec{t}^0\|), \ \vec{t} \to \vec{t}^0.$$

Якщо множина F міститься в околі точки $\vec{t}^0$, то образ $\vec{u}(F)$, що міститься на многовиді M, близький до образу $\vec{v}(F)$. Міру образу $\vec{v}(F)$ можна визначити так, як це зроблено в п. 7.1, і вважати наближеним значенням «міри» $\vec{u}(F)$. Точність такого «наближення» тим більша, чим менший окіл точки $\vec{t}^0$, що розглядається. Зауважимо ще, що в перетворенні (8) роль a_{ij} належить числам

$$\frac{\partial u_i(\vec{t}^0)}{\partial t_j}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \ 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Зауваження. Якщо $p = 1$, то M — крива, а рівність (8) є параметричними рівняннями дотичної до M у точці $\vec{u}(\vec{t}^{\circ})$. Якщо $p = 2$, то M — поверхня, а рівності (8) є параметричні рівняння дотичної площини до M у точці $\vec{u}(\vec{t}^{\circ})$.

Після наведених вище міркувань стає зрозумілим таке означення.

Нехай для кожної точки $\vec{t} \in T$:

$$a_{ij}(\vec{t}) := \frac{\partial u_i(\vec{t})}{\partial t_j}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \ 1 \leqslant j \leqslant p;$$

числа $d_{ij}(\vec{t})$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$, $\rho(\vec{t})$ визначені так, як в п. 7.1. Зокрема $d_{11}(\vec{t})$, $d_{22}(\vec{t})$ визначаються формулами (2). Значення $\rho(\vec{t})$ називається ***коефіцієнтом спотворення міри в точці*** $\vec{t}$. Зауважимо, що $\rho \in \mathbf{C}(T)$.

Означення. Нехай T — компактна вимірна множина в t-просторі $\mathbf{R}^p$; $\vec{u}: T \to \mathbf{R}^m$, $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}(T)$. Припустимо, що p-вимірний многовид $\vec{u}(T) = M$ є власно p-вимірний на T. ***p-вимірною мірою*** p-вимірного многовиду M називається число

$$\mathbf{m}(M) = \int_T \rho(\vec{t})\, dt_1 \ldots dt_p. \tag{9}$$

Зауваження 1. Визначена формулою (9) міра многовиду M не залежить від припустимих координат для параметричної множини T. Дійсно, для припустимих координат $\tau_1, \ldots, \tau_p$ і $S = \tau(T)$ за допомогою формули заміни змінних і формули (7) одержимо

$$\int_S \tilde{\rho}(\vec{\tau})\, d\vec{\tau} = \int_T \tilde{\rho}(\vec{\tau}(\vec{t})) \frac{\partial(\tau_1, \ldots, \tau_p)}{\partial(t_1, \ldots, t_p)}\, d\vec{t} = \int_T \rho(\vec{t})\, d\vec{t}.$$

2. Многовид може не бути в деяких точках власне p-вимірним. Формула (9) відноситься до многовиду M такому, що для будь-якої точки $\vec{t}$ або M власно p-вимірний в точці $\vec{u}(\vec{t})$, або в точці $\vec{t}$ існує границя $\lim\limits_{\vec{\tau} \to \vec{t}} \rho(\vec{\tau})$. Більш загально умова власної p-вимірності, а також умова гладкості можуть не виконуватися на підмножині T з мірою 0, якщо $\vec{u}$ неперервна і $\left\{\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t_i}\right\}$ неперервні та обмежені на останній частині T.

Вправа

1. Нехай T — компактна вимірна множина. $T = T_1 \cup T_2$, причому T_i вимірне і $T_1^0 \cap T_2^0 = \varnothing$. Нехай $M = \vec{u}(T)$, $M_i = \vec{u}(T_i)$, $i = 1, 2$. Довести, що

$$\mathbf{m}(M) = \mathbf{m}(M_1) + \mathbf{m}(M_2).$$

7.3. ДОВЖИНА ДУГИ

Нехай $p = 1$, $T = [a, b]$, $\vec{u}: T \to \mathbf{R}^m$, $\vec{u} \in \mathbf{C}([a, b])$. Одновимірний многовид $\vec{u}([a, b]) = \Gamma$ є неперервною кривою в $\mathbf{R}^m$. Припустимо також, що $[a, b]$ можна зобразити у вигляді об'єднання скінченного числа відрізків $[\alpha, \beta]$ таких, що $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}([\alpha, \beta])$ (в точках α і β розглядаються відповідні односторонні похідні).

У цьому випадку

$$a_{i1}(t) = a_i(t) = \frac{du_i(t)}{dt}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m;$$

$$\|\vec{a}_1(t)\| = \left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{du_i(t)}{dt}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \rho(t) = \|\vec{a}_1(t)\|$$

для всіх t з $[a, b]$, виключаючи, можливо, скінченне число точок $[a, b]$, в яких існує границя ρ. Зауважимо, що крива Γ одновимірна в тих точках, де $\|\vec{a}_1(t)\| \neq 0$, тобто в тих точках, в яких не обертаються в нуль одночасно всі похідні $u_i'(t)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Звернемо також увагу на те, що для точки t_0 функція $\vec{v}(t) = \vec{u}(t_0) + \vec{u}'(t_0)(t - t_0)$, $t \in \mathbf{R}$, визначає дотичну до кривої Γ в точці $\vec{u}(t_0)$.

Міра $l(\Gamma)$ одновимірного многовиду Γ називається ***довжиною кривої*** Γ. Згідно з формулою (9)

$$l(\Gamma) := \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{du_i(t)}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{10}$$

Приклад. Нехай

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = \cos t,\ x_2 = \sin t,\ x_3 = 2t,\ t \in [0, 2\pi]\},$$

Γ — частина гвинтової лінії. Для кривої Γ маємо

$$l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 2^2}\, dt = 2\pi\sqrt{5}.$$

7.4. ДОВЖИНА ДУГИ ЯК ГРАНИЦЯ

Довжина дуги може бути також визначена як границя довжин вписаних ламаних. Розглянемо це означенням при умовах п. 7.3. Нехай $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ — розбиття λ

відрізка $[a, b]$, що містить точки, в яких $\vec{u}'$ не існує. У просторі $\mathbf{R}^m$ розглянемо точки

$$\vec{u}(t_0),\ \vec{u}(t_1), \ldots, \vec{u}(t_n)$$

на кривій Г. З'єднаємо кожну пару точок $\vec{u}(t_i)$, $\vec{u}(t_{i+1})$ відрізком прямої, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Отримаємо ламану Γ_n, довжина якої

$$\mathbf{l}(\Gamma_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (u_j(t_{i+1}) - u_j(t_i))^2}.$$

Зрозуміле визначення: якщо при

$$|\lambda| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |t_{i+1} - t_i| \to 0$$

існує границя

$$\lim_{|\lambda| \to 0} \mathbf{l}(\Gamma_n), \tag{11}$$

то крива називається ***спрямлюваною***, а границя — ***довжиною кривої*** Г.

При умовах, яким задовольняє функція $\vec{u}$, за допомогою теореми Лагранжа легко довести, що границя (11) існує і збігається з інтегралом (10).

Вправа

1. Довести, що $\lim\limits_{|\lambda| \to 0} \mathbf{l}(\Gamma_n) = \sup \mathbf{l}(\Gamma_n)$, де верхня межа береться за всіма можливими розбиттями відрізка $[a, b]$.

7.5. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ

Нехай $p = 2$, T — компактна вимірна підмножина $\mathbf{R}^2$; $\vec{u}: T \to \mathbf{R}^m$, причому $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}(T, \mathbf{R}^2)$. Двовимірний многовид $\vec{u}(T) = S$ є поверхня в $\mathbf{R}^m$. Припустимо, що поверхня S власне двовимірна в точках T, тобто, що вектори

$$\vec{a}_1(\vec{t}) = \left(\frac{\partial u_1(\vec{t})}{\partial t_1}, \frac{\partial u_2(\vec{t})}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial u_m(\vec{t})}{\partial t_1}\right),$$

$$\vec{a}_2(\vec{t}) = \left(\frac{\partial u_1(\vec{t})}{\partial t_2}, \frac{\partial u_2(\vec{t})}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial u_m(\vec{t})}{\partial t_2}\right)$$

лінійно незалежні для $\vec{t} = (t_1, t_2) \in T$. Згідно з формулою (5) у цьому випадку

$$\rho(\vec{t}) = \sqrt{\|\vec{a}_1(\vec{t})\|^2 \|\vec{a}_2(\vec{t})\|^2 - (\vec{a}_1(\vec{t}), \vec{a}_2(\vec{t}))^2} = \sqrt{EG - F^2},$$

де

$$E := \|\vec{a}_1(\vec{t})\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u_i(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right)^2,$$

$$G := \|\vec{a}_2(\vec{t})\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u_i(t_1, t_2)}{\partial t_2}\right)^2,$$

$$F := (\vec{a}_1(t), \vec{a}_2(\vec{t})) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u_i(t_1, t_2)}{\partial t_1} \frac{\partial u_i(t_1, t_2)}{\partial t_2},$$

є коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні S.

Зауважимо, що функція

$$\vec{v}(\vec{t}) = \vec{u}(\vec{t}^0) + \frac{\partial \vec{u}(\vec{t}^0)}{\partial t_1}(t_1 - t_1^0) + \frac{\partial \vec{u}(\vec{t}^0)}{\partial t_2}(t_2 - t_2^0), \quad (t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2$$

задає дотичну площину до S в точці $\vec{u}(\vec{t}^0)$.

Міра $\sigma(S)$ поверхні S називається ***площею поверхні*** S. Згідно з формулою (9)

$$\sigma(S) = \int_T \sqrt{EG - F^2}\, dt_1 dt_2. \tag{12}$$

Крім формули (12), при $m = 3$ часто використовується також формула

$$\sigma(S) = \int_T \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dt_1 dt_2, \tag{13}$$

в якій

$$A := \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2)}, \quad B := \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t_1, t_2)}, \quad C := \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)}.$$

Формула (13) є наслідком рівності

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

яка перевіряється простим підрахунком.

Корисним також є окремий випадок формули (13), що відноситься до поверхні S, яка визначається таким чином:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = u_1 = t_1,\ x_2 = u_2 = t_2,\ x_3 = \\ = u_3 = f(t_1, t_2);\ \vec{t} \in T\}.$$

У цьому випадку

$$A = -f_1'(x_1, x_2),\ B = -f_2'(x_1, x_2),\ C = 1$$

і тому

$$\sigma(S) = \int_T \sqrt{1 + (f_1')^2 + (f_2')^2}\,dx_1 dx_2. \tag{14}$$

Зауважимо, що тут T є проекція поверхні S на площину (x_1, x_2).

Приклад. Визначимо площу сферичної «шапочки»

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2,\ x_3 \geqslant r_0\},$$

де $r_0 \in [0, r)$. Нехай $T = \{(\varphi, \theta) \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \arccos r_0/r\}$, $u_1(\varphi, \theta) = r \sin\theta \cos\varphi$, $u_2(\varphi, \theta) = r \sin\theta \sin\varphi$, $u_3(\varphi, \theta) = r\cos\theta$ для $(\varphi, \theta) \in T$. Тоді $S = \vec{u}(T)$. При цьому

$$A = -r^2 \cos\varphi \sin^2\theta,\ B = -r^2 \sin\varphi \sin^2\theta;$$

$$C = -r^2 \sin\theta \cos\theta,\ A^2 + B^2 + C^2 = r^4 \sin^2\theta.$$

За допомогою формули (13) знаходимо

$$\sigma(S) = \int_T r^2 \sin\theta\, d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\arccos r_0/r} r^2 \sin\theta d\theta \right) d\varphi = 2\pi r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right).$$

При $r_0 = 0$ отримаємо площу півсфери, звідки випливає, що площа сфери радіуса r дорівнює $4\pi r^2$.

7.6. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ ЯК ГРАНИЦЯ

Площу навіть зовсім простих поверхонь не можна визначити як границю площ вписаних многогранних поверхонь при умові, що діаметри всіх граней прямують до нуля. Перший приклад, в якому для циліндра границя площ вписаних многогранних поверхонь може бути довільним числом або $+\infty$, був побудований Шварцем [1]. Розглянемо можливий підхід до визначення площі поверхні, що приводить до інтегральних сум для інтеграла (9).

Нехай S — поверхня, що задовольняє умовам п. 7.5, причому $m = 3$ і $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Зобразимо прямокутник T у вигляді

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i,$$

[1] *Шварц Карл Герман Амандус* (1843—1921) — німецький математик.

де для кожного i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $Q_i = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$, а прямокутники Q_i і Q_j при $i \neq j$ такі, що $Q_i^0 \cap Q_j^0 = \varnothing$. Нехай $\lambda = \max\{d(Q_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Тоді

$$S = \vec{u}(T) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i; \quad S_i = \vec{u}(Q_i), \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Нехай $\vec{t}^{(i)} = (t_1^{(i)}, t_2^{(i)}) \in Q_i^0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. В точці $\vec{u}(\vec{t}^{(i)}) \in S_i$ розглянемо дотичну площину

$$\vec{v}(\vec{t}) = \vec{u}(\vec{t}^{(i)}) + \frac{\partial \vec{u}(\vec{t}^{(i)})}{\partial t_1}(t_1 - t_2^{(i)}) + \frac{\partial \vec{u}(\vec{t}^{(i)})}{\partial t_2}(t_2 - t_2^{(i)}), \quad \vec{t} = (t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Кусок поверхні $S_i = \vec{u}(Q_i)$ близький до образу $\vec{v}(Q_i)$, що лежить в дотичній площині, оскільки

$$\|\vec{u}(\vec{t}) - \vec{v}(\vec{t})\| = o(\|\vec{t} - \vec{t}^{(i)}\|), \quad \vec{t} \to \vec{t}^{(i)}.$$

Площа образу $\vec{v}(Q_i)$ згідно з п. 7.1

$$\sigma(\vec{v}(Q_i)) = \rho(\vec{t}^{(i)})\, \mathrm{m}(Q_i).$$

Розглянемо суму

$$\sigma_n(S) = \sum_{i=1}^{n} \rho(\vec{t}^{(i)})\, \mathrm{m}(Q_i).$$

Площею поверхні S називається границя

$$\lim_{|\lambda| \to 0} \sigma_n(S) = \sigma(S), \tag{15}$$

якщо вона існує.

Використовуючи неперервність функції ρ на Q, легко перевірити, що границя (15) існує і дорівнює інтегралу (12). Дійсно, величина

$$\Delta_n := |\sigma(S) - \sigma_n(S)| = \left| \int_T \rho(\vec{t})\, d\vec{t} - \sum_{i=1}^{n} \rho(\vec{t}^{(i)})\, \mathrm{m}(Q_i) \right|$$

згідно з адитивністю інтеграла може бути записана у вигляді

$$\Delta_n = \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_i} (\rho(\vec{t}) - \rho(\vec{t}^{(i)}))\, d\vec{t} \right|,$$

тому

$$\Delta_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_i} |\rho(\vec{t}) - \rho(\vec{t}^{(i)})| \, d\vec{t}.$$

За допомогою звичайних міркувань робимо висновок, що

$$\Delta_n \to 0, \ \lambda \to 0.$$

Вправа

2. Обчислити поверхню тора

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = (R + r\cos\varphi)\cos\theta,$$
$$x_2 = (R + r\cos\varphi)\sin\theta, \ x_3 = r\sin\varphi; \ (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi]^2\}, \ 0 \leqslant r \leqslant R.$$

§ 8. ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО РОДУ ПО МНОГОВИДАХ

8.1. ЗАГАЛЬНЕ ОЗНАЧЕННЯ

Нехай T — компактна, вимірна підмножина $\mathbf{R}^p$, $\vec{u}: T \to \mathbf{R}^m$, $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}(T, \mathbf{R}^m)$. Припустимо, що p-вимірний многовид $M = \vec{u}(T)$ власне p-вимірний на T і $\rho(\vec{t})$ — коефіцієнт спотворення міри у точці $\vec{t} \in T$. Нехай функція $f: M \to \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{C}(M)$.

Означення. Інтегралом першого роду від функції f ***по многовиду*** M називається інтеграл

$$\int_M f d\mathbf{m} := \int_T f(\vec{u}(\vec{t}))\, \rho(\vec{t})\, d\vec{t}. \tag{1}$$

Зауваження 1. Інтеграл (1) не залежить від припустимих координат для T. Нехай $\tau_1, \ldots, \tau_p$ — припустимі координати для T, причому $\vec{\tau}(T) = S$. За допомогою формули заміни змінних одержимо

$$\int_S \tilde{f}\rho(\vec{\tau})\, d\vec{\tau} = \int_T \tilde{f}\rho(\vec{\tau}(\vec{t})) \frac{\partial(\tau_1, \ldots, \tau_p)}{\partial(t_1, \ldots, t_p)}\, d\vec{t} = \int_T f\rho(\vec{t})\, d\vec{t}.$$

2. Якщо $\forall \vec{u} \in M$: $f(\vec{u}) = 1$, то інтеграл (1) дорівнює мірі многовиду M

$$\int_M d\mathbf{m} = \mathbf{m}(M).$$

8.2. ЗВ'ЯЗОК З ІНТЕГРАЛОМ ДРУГОГО РОДУ

Припустимо, що t-простір додатний для T. Інтеграл від форми

$$f(\vec{x})\, dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p}$$

по орієнтованому многовиду M вже був визначений за формулою

$$\int_M f(\vec{x})\, dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p} = \int_T f(\vec{u}(\vec{t})) \frac{\partial(u_{\nu_1}, \ldots, u_{\nu_p})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)}\, d\vec{t}.$$

Цей інтеграл називається також ***інтегралом другого роду***, він пов'язаний з інтегралом першого роду формулою

$$\int_M f(\vec{x})\, dx_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu_p} = \int_T f(\vec{u}(\vec{t})) \frac{\partial(u_{\nu_1}, \ldots, u_{\nu_p})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)}\, d\vec{t} =$$

$$= \int_T f(\vec{u}(\vec{t})) \frac{\partial(u_{\nu_1}, \ldots, u_{\nu_p})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} \frac{1}{\rho(\vec{t})} \rho(\vec{t})\, d\vec{t} =$$

$$= \int_M f(\vec{u}(\vec{t})) \frac{\partial(u_{\nu_1}, \ldots, u_{\nu_p})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} \frac{1}{\rho(\vec{t})}\, d\mathbf{m}.$$

8.3. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ, ЗВ'ЯЗОК ІЗ КРИВОЛІНІЙНИМ ІНТЕГРАЛОМ ДРУГОГО РОДУ

Нехай $p = 1$, $T = [a, b]$, $\vec{u}(T) = \Gamma$ є одновимірний многовид — крива в просторі $\mathbf{R}^m$. Інтеграл (1) при цьому називається ***криволінійним інтегралом першого роду*** від функції f по кривій Γ і позначається символом $\int_\Gamma f(\vec{x})\, d\mathbf{l}$.

Значення цього інтеграла визначається за формулою

$$\int_\Gamma f(\vec{x})\, d\mathbf{l} = \int_a^b f(\vec{u}(\vec{t})) \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{du_i(t)}{dt}\right)^2}\, dt. \qquad (2)$$

Припустимо, що T міститься в просторі знака $+1$. Нехай

$$\omega = f_1(\vec{x})\, dx_1 + \ldots + f_m(\vec{x})\, dx_m$$

є диференціальною формою першого степеня із $f_i \in C(\Gamma)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Криволінійний інтеграл другого роду від форми ω по орієнтованій кривій Γ (рух вздовж Γ, що відповідає зростанню t) був визначений рівністю

$$\int_{\Gamma} (f_1 dx_1 + \ldots + f_m dx_m) = \int_a^b \sum_{i=1}^m f_i(\vec{u}(t)) \frac{du_i(t)}{dt} dt,$$

звідки

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^m f_i(\vec{u}(t)) \frac{du_i(t)}{dt} \frac{1}{\rho(t)} \rho(t)\, dt =$$

$$= \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^m f_i \frac{du_i}{dt} \frac{1}{\rho(t)} dl. \qquad (3)$$

Нехай $\vec{f} := (f_1, \ldots f_m)$;

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(t) := \frac{1}{\rho(t)} \left(\frac{du_1(t)}{dt}, \ldots, \frac{du_m(t)}{dt} \right);$$

$\vec{\tau}(t)$ — одиничний вектор дотичної до кривої Γ в точці $\vec{u}(t)$, який напрямлено в бік заданого руху вздовж Γ. Тоді формулу (3) можна записати у вигляді

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} (\vec{f}, \vec{\tau})\, dl.$$

Якщо t-простір для $[a, b]$ від'ємний, то інтеграл у правій частині (3) містить знак «—», а вектор

$$\vec{\tau}(t) = -\frac{1}{\rho(t)} \left(\frac{du_1(t)}{dt}, \ldots, \frac{du_m(t)}{dt} \right).$$

8.4. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ ЯК ГРАНИЦЯ

Скористаємося позначеннями п. 7.4. Нехай $\Gamma_i = \vec{u}([t_i, t_{i+1}])$, $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Розглянемо суму

$$\mathcal{J}_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\vec{u}(\xi_i))\, l(\Gamma_i);$$

i-й доданок $\mathcal{J}_n$ — добуток значення функції f в точці $\vec{u}(\xi_i) \in \Gamma_i$ на значення довжини куска Γ_i. При зроблених припущеннях про функції f і $\vec{u}$ границя сум $|\mathcal{J}_n|$ при $|\lambda| \to 0$ існує і дорівнює інтегралу з правої частини (2). Означення за допомогою границі сум $\mathcal{J}_n$ дозволяє отримати такі фізичні інтерпретації інтеграла першого роду, як значення маси кривої, що визначається за відомою щільністю розподілу мас та ін.

8.5. ПОВЕРХНЕВИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ

Нехай $p = 2$, T — компактна вимірна множина в $\mathbf{R}^2$; $\vec{u}: T \to \mathbf{R}^3$, $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}(T, \mathbf{R}^3)$. Припустимо, що поверхня $S = \vec{u}(T)$ власне двовимірна на T. Нехай $f \in \mathbf{C}(S)$.

Інтеграл (1) при цьому називається ***поверхневим інтегралом першого роду*** від функції f ***по поверхні*** S і позначається символом

$$\int_S f(\vec{x})\, d\sigma.$$

Значення цього інтеграла визначається за формулою

$$\int_S f d\sigma = \int_T f(\vec{u}(\vec{t}))\sqrt{EG - F^2}\, d\vec{t}, \tag{4}$$

де функції E, G і F визначені в п. 7.5.

Інтеграл (4) може бути визначений як границя сум типу інтегральних. Використаємо позначення п. 7.6. Для точки $\vec{u}(\vec{t}^{(i)})$ розглянемо значення $f(\vec{u}(\vec{t}^{(i)}))$ і складемо суму

$$\mathcal{J}_n = \sum_{i=1}^{n} f(\vec{u}(\vec{t}^{(i)}))\, \sigma(S_i),$$

де $\sigma(S_i)$ — площа куска $S_i = \vec{u}(Q_i)$. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathcal{J}_n, \tag{5}$$

то вона називається ***поверхневим інтегралом першого роду*** від функції f по поверхні S.

При накладених на функції f і $\vec{u}$ обмеженнях границя (5) існує і дорівнює інтегралу (4). Дійсно,

$$\left|\int_S f d\sigma - \mathcal{J}_n\right| = \left|\int_T f(\vec{u}(\vec{t}))\rho(\vec{t})\,d\vec{t} - \mathcal{J}_n\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_i}(f(\vec{u}(\vec{t})) - f(\vec{u}(\vec{t}^{(i)})))\rho(\vec{t})\,d\vec{t}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{Q_i}\left|f(\vec{u}(\vec{t})) - f(\vec{u}(\vec{t}^{(i)}))\right|\rho(\vec{t})\,d\vec{t},$$

звідки за допомогою теореми Кантора, звичайним чином, одержимо, що

$$\lim_{\lambda\to 0}\mathcal{J}_n = \int_S f d\sigma.$$

Зазначимо ще окремий випадок формули (4) для поверхні S, що задана таким чином:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in T,\ x_3 = u(x_1, x_2)\},\ u \in \mathbf{C}^{(1)}(T).$$

При цьому

$$\int_S f d\sigma = \int_T f(x_1, x_2, u(x_1, x_2))\sqrt{1 + (u_1')^2 + (u_2')^2}\,dx_1 dx_2.$$

8.6. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПОВЕРХНЕВИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПЕРШОГО Й ДРУГОГО РОДУ

Нехай параметрична множина T і поверхня S задовольняють умовам п. 8. 4. Припустимо, що T міститься в додатному просторі, тоді S — орієнтована поверхня. Нехай $f_i \in \mathbf{C}(S)$, $i = 1, 2, 3$. Поверхневий інтеграл другого роду від форми

$$\omega = f_1(\vec{x})\,dx_2 \wedge dx_3 + f_2(\vec{v})\,dx_3 \wedge dx_1 + f_3(\vec{x})\,dx_1 \wedge dx_2$$

по орієнтованій поверхні S уже був визначений рівністю

$$\int_S (f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2) =$$

$$= \int_T \left(f_1 \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2)} + f_2 \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t_1, t_2)} + f_3 \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)}\right) dt_1 dt_2. \qquad (6)$$

Введемо вектор $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, де

$$n_1 := \frac{1}{\rho(t_1, t_2)} \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2)} = \cos(\widehat{\vec{n}, x_1}),$$

$$n_2 := \frac{1}{\rho(t_1, t_2)} \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t_1, t_2)} = \cos(\widehat{\vec{n}, x_2}),$$

$$n_2 := \frac{1}{\rho(t_1, t_2)} \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)} = \cos(\widehat{\vec{n}, x_3}).$$

Зауважимо, що $\vec{n} = \frac{1}{\rho} \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$, де $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ — позначення векторного добутку векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Вектор $\vec{n}$ ортогональний до площини, яка визначається векторами $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ і дотикається поверхні S в точці $\vec{u}(t_1, t_2)$. При цьому $\|\vec{n}\| = 1$. Вектор $\vec{n}$ називається ***вектором нормалі до поверхні*** S в точці $\vec{u}(t_1, t_2)$. Нехай $\vec{f} := (f_1, f_2, f_3)$. Формулу (6) можна записати у вигляді

$$\int_S (f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2) = \\ = \int_S (\vec{f}, \vec{n})\, d\sigma. \tag{7}$$

У формулі (7) ліва частина містить інтеграл другого роду по орієнтованій поверхні S, а права — поверхневий інтеграл першого роду. Якщо б множина T містилась у від'ємному просторі, то інтеграл у правій частині формули (6) потрібно було б домножити на -1, а вектор $\vec{n}$ мав би компоненти $-n_1$, $-n_2$, $-n_3$. Таким чином, орієнтація S у правій частині враховується вектором $\vec{n}$.

Розглянемо більш детально наступні два випадки розміщення вектора $\vec{n}$.

(i) Нехай

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in T,\ x_3 = u(x_1, x_2)\},\ u \in \mathbf{C}^{(1)}(T).$$

У цьому випадку

$$\rho(x_1, x_2) = \sqrt{1 + (u_1')^2 + (u_2')^2};\quad n_1 = -\frac{1}{\rho} u_1',$$
$$n_2 = -\frac{1}{\rho} u_2',\quad n_3 = \frac{1}{\rho}.$$

Якщо T міститься в додатному просторі, то вектор $\vec{n}$ утворює гострий кут із додатним напрямком осі Ox_3, оскільки $n_3 = \cos(\vec{n}, \hat{x}_3) > 0$. При цьому орієнтована поверхня S є верхньою стороною поверхні S, оскільки при обході T проти годинникової стрілки відповідний обхід поверхні S відбувається так, що найближча до спостерігача частина поверхні S міститься зліва, якщо дивитися зверху. Таким чином, при русі спостерігача в додатному напрямку по S вектор n напрямлений від ніг до голови.

(ii) Нехай $\bar{A}$ — множина в $\mathbf{R}^3$, що складається з скінченного числа брусків деякого розбиття простору $\mathbf{R}^3$. Простір $\mathbf{R}^3$ додатний для $\bar{A}$. Тоді границя $\partial\bar{A}$ також буде орієнтованою і потрібно розглядати зовнішню сторону $\partial\bar{A}$. Припустимо, що $\vec{u} \in \mathbf{C}^{(1)}(\bar{A}, \mathbf{R}^3)$, а замкнена поверхня $S = \vec{u}(\partial\bar{A})$ власно двовимірна. Орієнтована поверхня S — це зовнішня сторона S, якщо t-простір для $\bar{A}$ і x-простір для S однаково орієнтовані, тобто якщо

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} > 0.$$

Покажемо, що в цьому випадку вектор нормалі $\vec{n}$ напрямлений у зовнішню сторону S. Нехай Q — брус-прямокутник, що міститься в $\partial\bar{A}$ в площині $t_3 = c$, (t_1, t_2, t_3) — внутрішня точка Q. При всіх достатньо малих $\delta > 0$ точки $(t_1, t_2, t_3 + \delta) \in \bar{A}$. Розглянемо в точці $\vec{u}(t_1, t_2, t_3)$ на S дотичну площину до S. Ця площина визначається лінійно незалежними векторами $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{n}$ утворюють базис в $\mathbf{R}^3$. Розглянемо в цьому базисі координати точок $\vec{u}(t_1, t_2, t_3+\delta) \in \vec{u}(\bar{A})$. Нехай

$$\vec{u}(t_1, t_2, t_3 + \delta) = z_1\vec{a}_1 + z_2\vec{a}_2 + z_3\vec{n} + \vec{u}(t_1, t_2, t_3).$$

Тоді

$$z_3 = (\vec{u}(t_1, t_2, t_3 + \delta) - \vec{u}(t_1, t_2, t_3), \vec{n}) \approx \frac{1}{\rho}\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2, t_3)}\delta.$$

Звідси, якщо $\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} > 0$, тобто якщо t-простір і x-простір однаково орієнтовані, то $z_3 > 0$. Тому вектор n напрямлений у зовнішню сторону. Таким чином, при русі спостерігача по контуру S в додатному напрямку вектор $\vec{n}$ напрямлений від ніг до голови. Це правило має місце у всіх випадках і дозволяє встановити зв'язок між обраною стороною поверхні і напрямком нормалі $\vec{n}$ у формулі (7).

Глава 16 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ РЯДІВ ФУР'Є ТА ІНТЕГРАЛА ФУР'Є

§ 1. РЯД ФУР'Є ПО ОРТОНОРМОВАНІЙ ПОСЛІДОВНОСТІ ФУНКЦІЙ. ЗБІЖНІСТЬ У СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ

1.1. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

У цьому параграфі на простір функцій, інтегровних за Ріманом на заданому відрізку, переносяться з певними видозмінами ті поняття й факти геометрії скінченновимірного простору, які визначаються за допомогою скалярного добутку: ортогональність, норма, ортонормований базис, теорема Піфагора та ін.

Нехай $[a, b]$ — фіксований відрізок на $\mathbf{R}$ і $\mathbf{R}([a, b])$ — клас функцій, інтегровних за Ріманом на $[a, b]$. Нагадаємо, що

$$\mathbf{C}([a, b]) \subset \mathbf{R}([a, b]),$$

а сума і добуток функцій із $\mathbf{R}([a, b])$ також належить $\mathbf{R}([a, b])$. Далі корисно мати на увазі наступні твердження.

Якщо функція $f \in \mathbf{R}([a, b])$ така, що $\forall x \in [a, b]$: $f(x) \geqslant 0$ і $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$, то функція f дорівнює нулю у всіх точках неперервності.

Якщо $f \in \mathbf{R}([a, b])$ і дорівнює нулю у всіх точках неперервності, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Означення 1. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$. ***Скалярним добутком*** функцій f і g називається число

$$(f, g) := \int\limits_a^b f(t)\,g(t)\,dt.$$

---

[1] *Фур'є Жан Батист Жозеф* (1768—1830) — французький математик. Його праці стали основою для створення теорії тригонометричних рядів і розробки інших загальних проблем математичного аналізу.

З цього означення безпосередньо випливають такі властивості скалярного добутку:

1°. $\forall f \in \mathbf{R}([a, b])$: $(f, f) \geqslant 0$;

2°. $\forall \{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$: $(f, g) = (g, f)$;

3°. $\forall \{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}$: $(\alpha f, g) = \alpha (f, g)$;

4°. $\forall \{f_1, f_2, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$: $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$;

5°. $\forall \{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$: $(f, g)^2 \leqslant (f, f) \cdot (g, g)$ (нерівність Коші).

Означення 2. Нормою функції $f \in \mathbf{R}([a, b])$ називається число

$$\|f\| := (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Із означення і властивості (5) скалярного добутку випливає, що

1°. $\forall f \in \mathbf{R}([a, b])$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}$: $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$;

2°. $\forall \{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$: $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

Зауважимо, що рівність $\|f\| = 0$ рівносильна тому, що функція f дорівнює нулю у всіх точках неперервності. Далі будемо вважати, що ***функції*** f і g ***збігаються***, якщо функція $f - g$ дорівнює нулю у всіх точках неперервності.

Означення 3. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$. Функції f і g називаються ***ортогональними*** на $[a, b]$, якщо

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = 0.$$

Функція f називається ***нормованою***, якщо $\|f\| = 1$.

Середньоквадратичною віддаллю між функціями f і g називається число $\|f - g\|$.

Середньоквадратична віддаль має всі властивості віддалі (з урахуванням домовленості про збіжні функції), а $(\mathbf{R}([a, b]), \|f - g\|)$ є метричним простором.

Істотною обставиною є той факт, що ***метричний простір*** $(\mathbf{R}([a, b]), \|f - g\|)$ ***неповний***.

Вправи

1. Довести, що функція $f \in \mathbf{R}([a, b])$ ортогональна до будь-якого многочлена степеня не більше n_0 на $[a, b]$ тоді й тільки тоді, коли f ортогональна до кожної із функцій

$$[a, b] \ni t \mapsto t^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, n_0.$$

2. Довести, що метричний простір $(\mathbf{R}([a, b]), \|f - g\|)$ неповний.

Означення 4. Набір функцій $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ називається ***ортонормованим набором***, якщо функції попарно ортогональні і нормовані, тобто якщо

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Послідовність функцій $\{\varphi_n\colon n \geqslant 1\}$ називається ***ортонормованою послідовністю***, якщо

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

де $i \geqslant 1$, $j \geqslant 1$.

Вправа

3. Довести, що функції послідовності

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots, t \in [0, 2\pi]$$

попарно ортогональні на $[0, 2\pi]$, а послідовність

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \ldots; \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

є ортонормованою.

Означення 5. Функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ з $\mathbf{R}([a, b])$ при $n \geqslant 2$ називаються ***лінійно залежними на*** $[a, b]$, якщо

$$\exists \{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset \mathbf{R}, \ |c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| \neq 0:$$

$$\| c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n \| = 0.$$

Якщо функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ не є лінійно залежними на $[a, b]$, то вони називаються ***лінійно незалежними на*** $[a, b]$.

Зауважимо, що для лінійно незалежних функцій $f_1, f_2, \ldots, f_n$

$$\| f_i \| \neq 0. \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Послідовність функцій $\{f_n\colon n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}([a, b])$ називається ***послідовністю лінійно незалежних функцій***, якщо будь-який скінченний набір $f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_m}$ є набором лінійно незалежних функцій ($j_1, j_2, \ldots, j_m$ — різні натуральні числа).

ЛЕМА. Нехай $[a, b]$ — довільний відрізок. Послідовність функцій

$$[a, b] \ni t \mapsto t^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

є послідовність лінійно незалежних функцій на $[a, b]$.

$\vdash$ Доведемо, що при будь-якому $n \geqslant 2$ функції

$$[a, b] \ni t \mapsto t^j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

лінійно незалежні на $[a, b]$. Нехай дійсні числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ такі, що

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} c_j t^j \right\| = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a, b]: \sum_{j=0}^{n} c_j t^j = 0.$$

Припустимо, що $t_0, t_1, \ldots, t_n$ — різні точки на $[a, b]$. Тоді

$$\sum_{j=0}^{n} c_j t_i^j = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Ці рівності являють собою однорідну систему лінійних рівнянь щодо $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Визначник її є відмінний від нуля визначник Вандермонда[1]. Тому $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$. $\dashv$

Вправи

4. Довести, що набір ортонормованих функцій є набором лінійно незалежних функцій.

5. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — різні дійсні числа. Довести, що наступні набори є набори лінійно незалежних функцій на $[a, b]$:

а) $[a, b] \ni t \mapsto t^{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \ a > 0;$

б) $[a, b] \ni t \mapsto e^{\alpha_i t}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

6. Нехай функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ лінійно незалежні на $[a, b]$. Довести, що

$$\det ((f_i, f_j))_{i,j=1}^{n} \neq 0.$$

7. Нехай функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ лінійно незалежні на $[a, b]$. Довести, що для будь-яких дійсних чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ існує функція $f \in \mathbf{R}([a, b])$ така, що

$$(f, f_i) = c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

8*. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$ і

$$\forall n \geqslant 0: \int_a^b t^n f(t)\, dt = 0.$$

Довести, що $\| f \| = 0$.

---

[1] *Вандермонд Олександр Теоріл* (1735—1796) — французький математик.

Зауваження. Будь-яку послідовність лінійно незалежних на $[a, b]$ функцій $\{f_n : n \geqslant 1\}$ з $\mathbf{R}([a, b])$ можна перетворити в ортонормовану послідовність. Нехай

$$\varphi_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1.$$

Тоді $\|\varphi_1\| = 1$ ($\|f_1\| \neq 0$ внаслідок лінійної незалежності). Нехай далі

$$\varphi_2 = \|f_2 - (f_2, \varphi_1)\varphi_1\|^{-1}(f_2 - (f_2, \varphi_1)\varphi_1).$$

Тоді $\|\varphi_2\| = 1$ і $(\varphi_2, \varphi_1) = 0$ ($\|f_2 - (f_2, \varphi_1)\varphi_1\| \neq 0$ внаслідок лінійної незалежності f_1 і f_2) і т. д. Отримана послідовність $\{\varphi_n : n \geqslant 1\}$ буде ортонормованою, причому для $n \geqslant 1$

$$\varphi_n = c_{n1}f_1 + c_{n2}f_2 + \ldots + c_{nn}f_n,$$

$$f_n = d_{n1}\varphi_1 + d_{n2}\varphi_2 + \ldots + d_{nn}\varphi_n,$$

де $\{c_{ij}, d_{ij}\}$ — деякі дійсні числа. Процес побудови послідовності $\{\varphi_n : n \geqslant 1\}$ називається ***процесом ортогоналізації Шмідта.***

1.2. ЗАДАЧА ПРО НАЙКРАЩЕ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ

Нехай $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — ортонормований на $[a, b]$ набір функцій із $\mathbf{R}([a, b])$. Система функцій

$$H_n := \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i \mid \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\right\}$$

є n-вимірним підпростором $\mathbf{R}([a, b])$. Функції із H_n називається також ***многочленами відносно функцій*** $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$ — фіксована функція.

Розглянемо задачу про визначення такого многочлена $P^* \in H_n$, для якого

$$\|f - P^*\| \leqslant \|f - P\|, \quad P \in H_n,$$

або

$$\|f - P^*\| = \min_{P \in H_n} \|f - P\|.$$

Многочлен P^* називається ***проекцією функції*** f **на підпростір** H_n.

ЛЕМА. Для будь-якого $P=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\in H_n$ має місце рівність

$$\|f-P\|^2=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-(f,\varphi_i))^2. \qquad (1)$$

Дійсно, використовуючи властивості скалярного добутку, одержимо

$$\|f-P\|^2=\left(f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i,\ f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\right)=$$

$$=\|f\|^2-2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(f,\varphi_i)+\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j(\varphi_i,\varphi_j)=$$

$$=\|f\|^2-2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(f,\varphi_i)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2=\|f\|^2-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-(f,\varphi_i))^2.$$

Наслідок. Для будь-якого многочлена $P=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\in H_n$ має місце нерівність

$$\|f-P\|^2\geqslant\|f\|^2-\sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)^2, \qquad (2)$$

у якій знак рівності має місце тоді й тільки тоді, коли

$$\alpha_i=(f,\varphi_i),\qquad 1\leqslant i\leqslant n. \qquad (3)$$

Таким чином, проекція P^* функції f на підпростір H_n визначається єдиним чином

$$P^*=\sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)\varphi_i \qquad (4)$$

і має такий же вигляд, як і проекція вектора на підпростір у скінченновимірному просторі. Крім того,

$$\|f-P^*\|^2=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)^2. \qquad (5)$$

Усі наведені означення й твердження є цілком аналогічними поняттям скінченновимірного простору із скалярним добутком. Проте ця аналогія не є повною. Особливо слід звернути увагу на те, що в просторі $\mathbf{R}([a, b])$ існують нескінченні послідовності ортонормованих функцій (див. вправу 13).

Вправа

9. Для функції

$$f(t) = \frac{1}{2}(\pi - t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

і заданого $n \in \mathbf{N}$ визначити тригонометричний многочлен вигляду

$$T_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$\{\alpha_i, \beta_i\} \subset \mathbf{R},$$

що мінімізує віддаль $\| f - T_n \|$.

1.3. КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є. РЯД ФУР'Є. ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ

Нехай $\{\varphi_n : n \geqslant 1\}$ — фіксована ортонормована послідовність функцій із $\mathbf{R}([a, b])$.

Означення 1. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$. Числа

$$c_n(f) := (f, \varphi_n) = \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt, \qquad n \geqslant 1,$$

називаються ***коефіцієнтами Фур'є*** функції f відносно ортонормованої послідовності $\{\varphi_n : n \geqslant 1\}$ на $[a, b]$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\, \varphi_n$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\, \varphi_n(t), \qquad t \in [a, b]$$

називається ***рядом Фур'є*** функції f щодо ортонормованої послідовності $\{\varphi_n : n \geqslant 1\}$.

Визначимо властивості коефіцієнтів Фур'є.

1°. Для будь-якої $f \in \mathbf{R}([a, b])$ має місце нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)^2 \leqslant \|f\|^2 \tag{1}$$

(Нерівність Бесселя[1]).

|— Дійсно, при кожному $n \geqslant 1$ з рівності (5) п. 1.2 маємо

$$\|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)^2 \geqslant 0,$$

звідки й випливає нерівність (1). —|

2°. Нехай $f \in \mathbf{R}([a, b])$. Тоді

$$c_n(f) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Означення 2. Послідовність функцій $\{f_n\colon n \geqslant 1\}$ називається ***замкненою*** в $\mathbf{R}([a, b])$, якщо

$$\forall f \in \mathbf{R}([a, b]) \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\exists P = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i, \ n \in \mathbf{N}, \ \{a_i\} \subset \mathbf{R}\colon \ \|f - P\| < \varepsilon,$$

тобто якщо система всіх скінченних лінійних комбінацій членів послідовності $\{f_n\colon n \geqslant 1\}$ скрізь щільна в просторі $(\mathbf{R}([a, b]), \|f - g\|)$.

Зауваження 1. Нехай $\{f_n : n \geqslant 1\}$ — замкнена послідовність у $\mathbf{R}([a, b])$ і $\{\varphi : n \geqslant 1\}$ — ортонормована послідовність, отримана з $\{f_n : n \geqslant 1\}$ за допомогою процесу ортогоналізації (п. 1.1). Тоді $\{\varphi_n : n \geqslant 1\}$ замкнена в $\mathbf{R}([a, b])$.

ЛЕМА 1. Для будь-якого відрізка $[a, b]$ послідовність функцій

$$[a, b] \ni t \mapsto t^n; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

замкнена в $\mathbf{R}([a, b])$.

|—Твердження цієї леми не є тривіальним. Доведення складається із двох частин.

I. Спочатку доведемо, що

$$\forall f \in \mathbf{R}([a, b]) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists h_\varepsilon \in \mathbf{C}([a, b])\colon \ \|f - h_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

---

[1] *Бессель Фрідріх Вільгельм* (1784—1846) — німецький математик.

Оскільки $f \in \mathbf{R}([a, b])$, то $\sup\limits_{[a,b]} |f| = L < +\infty$,

$$\forall \delta > 0 \ \exists \lambda = \lambda([a, b]): \ 0 \leqslant \int_a^b f(t)\, dt - L(f, \lambda) < \delta.$$

Нехай функція g_λ: $[a, b] \to \mathbf{R}$ визначена рівністю

$$g_\lambda(t) := m_i, \ t \in [t_i, t_{i+1}); \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \quad g_\lambda(b) := m_{n-1};$$

при цьому

$$\sup_{[a,b]} |g_\lambda| \leqslant L; \ \forall t \in [a, b]: \ g_\lambda(t) \leqslant f(t).$$

Нехай $\delta_1 := \min\left\{\frac{\delta}{n}\ ;\ \frac{1}{2n}\Delta t_i,\ 0 \leqslant i \leqslant n-1\right\}$, визначимо функцію $g_\delta \in \mathbf{C}([a, b])$

$$g_\delta(t) = m_i, \ t \in [t_i + \delta_1, \ t_{i+1} - \delta_1]; \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1,$$

і довизначимо g_δ на кожному відрізку $[t_i - \delta_1, \ t_i + \delta_1]$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $[t_0, t_0 + \delta_1]$, $[t_n - \delta_1, t_n]$ лінійно таким чином, щоб $g_\delta \in \mathbf{C}([a, b])$. Тоді

$$\|f - g_\delta\|^2 = \int_a^b (f(t) - g_\delta(t))^2\, dt \leqslant 2L \int_a^b |f(t) - g_\delta(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2L\left(\int_a^b |f(t) - g_\lambda(t)|\, dt + \int_a^b |g_\lambda(t) - g_\delta(t)|\, dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2L\left(\delta + \sum_{i=1}^{n-1} L 2\delta_1\right) \leqslant \tilde{L}\delta, \ \tilde{L} := 2L(1 + 2L).$$

Тому для заданого $\varepsilon > 0$ функцію h_ε можна покласти рівною g_δ, де $\delta = \tilde{L}^{-1}\varepsilon^2$.

II. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Розглянемо функцію $h_\varepsilon \in \mathbf{C}([a, b])$, для якої

$$\|f - h_{\varepsilon/2}\| < \varepsilon/2. \tag{3}$$

Згідно з теоремою Вейєрштрасса існує многочлен

$$P_\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i t^i, \ t \in [a, b]; \ \{\alpha_i\} \subset \mathbf{R},$$

такий, що

$$\forall t \in [a, b]: \ |h_{\varepsilon/2}(t) - P_\varepsilon(t)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}.$$

Тоді

$$\| h_{\varepsilon/2} - P_\varepsilon \| < \varepsilon/2. \tag{4}$$

Із нерівностей (3) і (4) отримаємо

$$\| f - P_\varepsilon \| \leqslant \| f - h_{\varepsilon/2} \| + \| h_{\varepsilon/2} - P_\varepsilon \| < \varepsilon. \quad \lrcorner$$

Зауваження 2. Не змінюючи доказу частини 1 леми 1, можна довести, що

$$\forall f \in \mathbf{R}([a, b]) \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\exists \tilde{h}_\varepsilon \in \mathbf{C}([a, b]), \ \tilde{h}_\varepsilon(a) = \tilde{h}_\varepsilon(b): \ \| f - \tilde{h}_\varepsilon \| < \varepsilon.$$

ЛЕМА 2. Послідовність функцій

$$1, \ \cos t, \ \sin t, \ \cos 2t, \ \sin 2t, \ldots, \cos nt, \ \sin nt, \ldots \tag{5}$$

замкнена в $\mathbf{R}([-\pi, \pi])$.

$\ulcorner$Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Згідно з доведенням леми 1 (частини I) для будь-якої функції $f \in \mathbf{R}([-\pi, \pi])$

$$\exists h_{\varepsilon/2} \in \mathbf{C}([-\pi, \pi]), \ h_{\varepsilon/2}(-\pi) = h_{\varepsilon/2}(\pi): \ \| f - h_{\varepsilon/2} \| < \varepsilon/2.$$

Згідно з теоремою Вейєрштрасса існує

$$P_\varepsilon(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \cos it + \beta_i \sin it), \ \{\alpha_i, \beta_i\} \subset \mathbf{R}:$$

$$\forall t \in [-\pi, \pi]: \ | h_{\varepsilon/2}(t) - P_\varepsilon(t) | < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Тоді $\| h_{\varepsilon/2} - P_\varepsilon \| < \varepsilon/2$. Звідси

$$\| f - P_\varepsilon \| \leqslant \| f - h_{\varepsilon/2} \| + \| h_{\varepsilon/2} - P_\varepsilon \| < \varepsilon. \quad \lrcorner$$

Зауваження 3. Система (5) замкнена в просторі $\mathbf{R}([\alpha, \alpha + 2\pi])$ для будь-якого $\alpha \in \mathbf{R}$.

Вправи

10. Довести, що для будь-якого $a \geqslant 0$ послідовність $[a, b] \in t \mapsto t^{2n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ замкнена в $\mathbf{R}([a, b])$.

11. Довести, що послідовність $[a, b] \ni t \mapsto t^{2n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ замкнена в $\mathbf{R}([a, b])$ при $a \geqslant 0$.

12. Довести, що кожна з послідовностей

$$1, \ \cos t, \ \cos 2t, \ \ldots, \ \cos nt, \ \ldots; \ t \in [0, \pi];$$

$$\sin t, \ \sin 2t, \ \ldots, \ \sin nt, \ \ldots; \ t \in [0, \pi],$$

замкнена в $\mathbf{R}([0, \pi])$.

13. Довести, що послідовність функцій вправи 10 не є замкненою в $\mathbf{R}([-1, 1])$.

Вказівка. Розглянути величину

$$\int_{-1}^{1}\left(t-\sum_{i=0}^{n} c_i t^{2i}\right)^2 dt,\ \{c_i\}\subset \mathbf{R}.$$

14. Нехай $\{\varphi_n : n \geqslant 1\}$ — послідовність функцій, замкнена в $\mathbf{R}([a, b])$. Чи обов'язково послідовність $\{\varphi_n : n \geqslant 2\}$ замкнена в $\mathbf{R}([a, b])$?

Вказівка. Розглянути послідовність вправи 12.

Наступну властивість ряду Фур'є сформулюємо у вигляді теореми.

3°. **ТЕОРЕМА**. Нехай $\{\varphi_n : n \geqslant 1\}$ — замкнена ортонормована послідовність функцій з $\mathbf{R}([a, b])$. Тоді для будь-якої функції $f \in \mathbf{R}([a, b])$ її ряд Фур'є

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\,\varphi_n(t),\quad t\in[a, b],$$

збігається в середньому квадратичному до функції f, тобто

$$\left\|f-\sum_{j=1}^{n} c_j(f)\,\varphi_j\right\| = \left(\int_a^b\left(f(t)-\sum_{j=1}^{n} c_j(f)\,\varphi_j(t)\right)^2 dt\right)^{1/2}\to 0,\ n\to\infty.$$

При цьому

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(f) \tag{6}$$

(рівність Парсеваля[1]).

Нехай $f\in \mathbf{R}([a, b])$. Нехай

$$s_n(t) := \sum_{j=1}^{n} c_j(f)\,\varphi_j(t),\quad t\in[a, b];\ n\geqslant 1.$$

Функція s_n (див. п. 1.2) є проекцією функції f на підпростір, що породжується функціями $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Тому $s_n = P^*$ і

$$\|f-s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2(f).$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Оскільки $\{\varphi_n : n \geqslant 1\}$ замкнена, то

$$\exists P_\varepsilon = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\varphi_i,\ \{\alpha_i\}\subset \mathbf{R}:\ \|f-P_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

---

[1] *Парсеваль М. А.* (1755—1836) — французький математик.

Звідси для $n \geqslant m$ одержимо

$$\| f - s_n \|^2 \leqslant \| f - P_\varepsilon \|^2 < \varepsilon^2.$$

Отже, $\forall n \geqslant m$:

$$0 \leqslant \| f - s_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 (f) < \varepsilon^2.$$

Тому

$$\| f - s_n \|^2 \to 0, \ n \to \infty,$$

і

$$\| f \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 (f). \qquad \lrcorner$$

Зауваження 4. Слід мати на увазі, що з твердження про середньоквадратичну збіжність ряду Фур'є не випливає рівномірна чи поточкова збіжність цього функціонального ряду на $[a, b]$ (див. вправу 16).

Вправи

15. При виконанні умов теореми має місце рівність

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (f) c_n (g), \ \{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b]),$$

яка називається ***узагальненою рівністю Парсеваля***. Довести цю рівність.

16.* Навести приклад функцій f; f_n: $n \geqslant 1$ з $\mathbf{R}([0, 1])$ таких, що:

а) $\| f - f_n \| \to 0, \ n \to \infty$;

б) послідовність функцій $\{f_n (t), \ t \in [0, 1] : n \geqslant 1\}$ не збігається до f ні в одній точці $t \in [0, 1]$.

Означення 3. Послідовність функцій $\{f_n : n \geqslant 1\}$ з $\mathbf{R}([a, b])$ називається ***повною*** в $\mathbf{R}([a, b])$, якщо $\forall f \in \mathbf{R}([a, b])$ із рівностей

$$\forall n \geqslant 1: \ (f, f_n) = 0 \Rightarrow \| f \| = 0.$$

Зауваження 5. Замкнена в $\mathbf{R}([a, b])$ послідовність $\{f_n : n \geqslant 1\}$ повна в $\mathbf{R}([a, b])$.

$\vdash$ Дійсно, нехай для

$$f \in \mathbf{R}([a, b]) \ \ \forall n \geqslant 1: \ \ (f, f_n) = 0.$$

Оскільки $\{f_n : n \geqslant 1\}$ замкнена, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists P_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \ \{\alpha_i\} \subset \mathbf{R}: \ \ \| f - P_\varepsilon \| < \varepsilon.$$

Тоді

$$\| f \|^2 = (f, f) = (f, f - P_\varepsilon) \leqslant \| f \| \cdot \| f - P_\varepsilon \| < \varepsilon \| f \|.$$

Звідси випливає, що $\|f\| = 0$.

Вправи

17. Нехай $f \in C([-1, 1])$ і

$$\forall n \geqslant 0: \quad \int_{-1}^{1} f(t)\, t^{2n} dt = 0.$$

Довести, що f — непарна функція на $[-1, 1]$.

18. Нехай $f \in C([-1, 1])$ і

$$\forall n \geqslant 0: \quad \int_{-1}^{1} f(t)\, t^{2n-1} dt = 0.$$

Довести, що f — парна функція на $[-1, 1]$.

19*. Нехай $f \in R([0, 3\pi])$ і

$$\forall n \geqslant 0: \quad \int_{0}^{3\pi} f(t) \cos nt dt = \int_{0}^{3\pi} f(t) \sin nt dt = 0.$$

Довести, що функція f у точках неперервності збігається з функцією g, для якої

$$g(t) = 0, \quad t \in (\pi, 2\pi):$$

$$g(t) + g(2\pi + t) = 0, \quad t \in [0, \pi].$$

20. Нехай $f \in C([a, b])$, $a > 0$ і

$$\forall n \geqslant 0: \quad \int_{a}^{b} f(t)\, e^{nt} dt = 0.$$

Довести, що $f(t) = 0$, $t \in [a, b]$.

21. Нехай $f \in C([0, 2\pi])$ і $f(0) = f(2\pi)$. Припустимо, що для $m \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geqslant m: \quad \int_{0}^{2\pi} f(t) \cos nt dt = \int_{0}^{2\pi} f(t) \cos mt dt = 0.$$

Описати функцію f.

22*. Нехай функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ з $R([a, b])$ лінійно незалежні на $[a, b]$. Довести, що $\exists \varepsilon > 0$ таке, що

$$\forall \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \subset R([a, b]), \ \|f_i - \varphi_i\| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

функції $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ лінійно незалежні на $[a, b]$.

§ 2. РЯД ФУР'Є ПО ТРИГОНОМЕТРИЧНІЙ ПОСЛІДОВНОСТІ ФУНКЦІЙ

2.1. ПОЗНАЧЕННЯ. НАСЛІДКИ ІЗ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ

Функції послідовності

$$\frac{1}{2}, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots, t \in [-\pi, \pi] \tag{1}$$

мають норми

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \ldots, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \ldots$$

відповідно і попарно ортогональні на $[-\pi, \pi]$. Послідовність (1) є замкненою в $\mathbf{R}$ ($[-\pi, \pi]$). Першими в математиці і її застосуваннях з'явилися ряди відносно тригонометричної послідовності (1). Ці ряди вже зустрічаються в роботах Д. Бернуллі, Д'Аламбера, Лагранжа і Ейлера, що відносяться до першої половини XVIII ст. Фур'є у виданій в 1822 р. книзі «Аналітична теорія тепла» систематично використовував ряди відносно послідовності (1) і продемонстрував користь і важливість таких рядів. Розробка теорії рядів Фур'є кількома поколіннями математиків привела до створення глибокої і різноманітної теорії, яка має виняткове важливе значення як для самої математики, так і для її застосувань.

Для функції $f \in \mathbf{R}$ ($[-\pi, \pi]$) її ***коефіцієнти Фур'є відносно тригонометричної послідовності*** (1) визначаються рівностями:

$$\begin{aligned} a_n! = a_n(f)! &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad n \geqslant 0; \\ b_n! = b_n(f)! &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt, \quad n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Функції f поставимо у відповідність функціональний ***ряд Фур'є***:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad t \in [-\pi, \pi]. \tag{3}$$

Зауваження 1. Всі члени ряду (3) періодичні функції з періодом 2π. Якщо ряд (3) збігається на $[-\pi, \pi]$, то такою ж буде і його сума. Тому часто зручно вважати функцію f заданою на $\mathbf{R}$ і періодичною з періодом 2π, зберігши припущення $f \in \mathbf{R}$ ($[-\pi, \pi]$).

Нехай $\mathbf{R}_0$ — множина всіх функцій f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, періодичних з періодом 2π, $f \in \mathbf{R}$ $([-\pi, \pi])$. При фактичних обчисленнях часто використовують той факт, що інтеграл від періодичної функції по будь-якому відрізку, довжина якого дорівнює періоду, приймає одне і те ж значення.

Послідовність функцій (1) не є ортонормованою, нормування приводить до ортонормованої послідовності

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \ldots, -\pi \leqslant t \leqslant \pi, \qquad (4)$$

відносно якої коефіцієнти Фур'є згідно з § 1 визначаються рівностями

$$c_0'(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt;$$

$$c_n'(f) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt; \quad n \geqslant 1; \qquad (5)$$

$$c_n''(f) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt; \quad n \geqslant 1.$$

Із результатів п. 1.3 маємо для $f \in \mathbf{R}$ $([-\pi, \pi])$:

(i) $c_n'(f) \to 0$, $c_n''(f) \to 0$, $n \to \infty$;

(ii)

$$(c_0'(f))^2 + \sum_{n=1}^{\infty} ((c_n'(f))^2 + (c_n''(f))^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt;$$

(iii)

$$\left\| f(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_0'(f) - \sum_{i=1}^{n} \left(c_i'(f) \frac{\cos it}{\sqrt{\pi}} + c_i'(t) \frac{\sin it}{\sqrt{\pi}} \right) \right\| \to 0,$$

$$n \to \infty.$$

Зауважимо, що

$$c_0'(f) = \sqrt{\pi/2}\, a_0(f);$$

$$c_n'(f) = \sqrt{\pi}\, a_n(f), \quad n \geqslant 1;$$

$$c_n''(f) = \sqrt{\pi}\, b_n(f), \quad n \geqslant 1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_0'(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k'(f) \frac{\cos kl}{\sqrt{\pi}} + c_k''(f) \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \right) = \frac{1}{2} a_0(f) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt).$$

Тому з тверджень (i) — (iii) випливає, що:

(i′)

$$\forall f \in \mathbf{R}([-\pi, \pi]):$$

$$a_n(f) \to 0, \quad b_n(f) \to 0, \quad n \to \infty; \tag{6}$$

(ii′)

$$\forall f \in \mathbf{R}([-\pi, \pi]):$$

$$\frac{1}{2} a_0^2(f) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt - \tag{7}$$

рівність Парсеваля:

(iii′)

$$\forall f \in \mathbf{R}([-\pi, \pi]):$$

$$\left\| f(t) - \frac{1}{2} a_0(t) - \sum_{k=1}^{n} (a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt \right\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

— збіжність ряду Фур'є в середньому квадратичному.

Вправа

1. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([-\pi, \pi])$. Довести узагальнену рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2} a_0(f) a_0(g) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) a_k(g) + b_k(f) b_k(g)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)\, dt.$$

Вказівка. Записати рівність Парсеваля (7) для функцій $f + g$, $f - g$.

1.1. Довести, що рядом Фур'є для тригонометричного многочлена

$$T(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt), \quad t \in \mathbf{R},$$

де $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n\} \subset \mathbf{R} \in T$.

2.2. ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Головною задачею подальшого викладу є вивчення ряду (3) як функціонального. Нас цікавлять питання: при яких умовах ряд (3) збігається в точці t? Чому дорівнює його сума? За яких умов ряд (3) можна інтегрувати чи диференціювати почленно? Спочатку розглянемо деякі прості твердження, що будуть відігравати в подальшому основну роль при доказах.

Твердження (i′) п. 2.1 про прямування до нуля коефіцієнтів Фур'є інтегровної функції має ряд важливих узагальнень.

1°. Лема Рімана. Нехай $[a, b]$ — довільний відрізок і f — функція така, що $|f|$ є інтегровною на $[a, b]$ функцією хоча б у невласному сенсі. Тоді

$$\int_a^b f(t)\cos\lambda t dt \to 0, \quad \lambda \to \infty;$$

$$\int_a^b f(t)\sin\lambda t dt \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

⌈Обидва твердження доводяться однаково. Розглянемо перше.

I. Твердження леми очевидно, якщо $\exists c \in \mathbf{R} \forall t \in [a, b]$: $f(t) = c$. Дійсно, в цьому випадку

$$\int_a^b c\cos\lambda t dt = c\,\frac{\sin\lambda b - \sin\lambda a}{\lambda} \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

II. Твердження леми справедливе, якщо f кусково-стала на $[a, b]$, тобто якщо існує розбиття $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

таке, що на кожному із інтервалів (t_i, t_{i+1}), $0 \leqslant i \leqslant n-1$ функція f постійна і приймає значення c_i на інтервалі (t_i, t_{i+1}). Дійсно,

$$\int_a^b f(t)\cos\lambda t dt = \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\cos\lambda t dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} c_i\,\frac{\sin\lambda t_{i+1} - \sin\lambda t_i}{\lambda} \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

III. Нехай тепер $f \in \mathbf{R}([a, b])$, $\varepsilon > 0$ задано. Тоді

$$\exists \bar{\lambda} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}: \quad \int_a^b f(t)\,dt - L(f, \bar{\lambda}) < \varepsilon/2.$$

Визначимо функцію f_ε:

$$f_\varepsilon(t) := m_i = \inf_{[t_i, t_{i+1}]} f, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

і $f_\varepsilon(b) := m_{n-1}$.

Зауважимо, що $f_\varepsilon(t) \leqslant f(t)$, $t \in [a, b]$. Згідно з доведеним

$$\exists \Lambda \ \forall \lambda \geqslant \Lambda: \left|\int_a^b f_\varepsilon(t)\cos\lambda t dt\right| < \varepsilon/2.$$

Тому для $\lambda \geqslant \Lambda$ маємо:

$$\left|\int_a^b f(t)\cos\lambda t dt\right| = \left|\int_a^b (f(t) - f_\varepsilon(t) + f_\varepsilon(t))\cos\lambda t dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(t) - f_\varepsilon(t)|\,|\cos\lambda t|\,dt + \left|\int_a^b f_\varepsilon(t)\cos\lambda t dt\right| <$$

$$< \int_a^b f(t)\,dt - L(f, \bar{\lambda}) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

IV. Нехай тепер $|f|$ інтегровна в невласному сенсі. Припустимо, що b — єдина особлива точка. Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Тоді

$$\exists \delta > 0: \int_{b-\delta}^b |f(t)|\,dt < \varepsilon/2,$$

а в силу III

$$\exists \Lambda\ \forall \lambda \geqslant \Lambda: \left|\int_a^{b-\delta} f(t)\cos\lambda t dt\right| < \varepsilon/2.$$

Тоді для $\lambda \geqslant \Lambda$

$$\left|\int_a^b f(t)\cos\lambda t dt\right| \leqslant \left|\int_a^{b-\delta} f(t)\cos\lambda t dt\right| + \int_{b-\delta}^b |f(t)|\,dt < \varepsilon. \quad \lrcorner$$

Вправа

2. Нехай функція f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ така, що невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$$

збігається. Довести, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt \to 0, \quad \lambda \to \infty;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

Вказівка. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують a і b такі, що

$$\int_{-\infty}^a |f(t)|\,dt + \int_b^{+\infty} |f(t)|\,dt < \varepsilon.$$

2°. Інтегральне зображення для часткової суми ряду Фур'є (3).

Нехай $f \in R_0$ і

$$\sigma_n(f, x) = s_n(x) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

$$x \in R, \ n \geqslant 0.$$

ЛЕМА. Для будь-якої функції $f \in R_0$ і будь-якого $n \geqslant 0$ має місце зображення

$$s_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x-v) + f(x+v)}{2} \mathcal{D}_n(v)\, dv, \tag{8}$$

в якому

$$\mathcal{D}_n(v) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) v}{2 \sin \frac{v}{2}}, \quad v \in (0, \pi) \text{ — ядро Діріхле.}$$

⌐ За допомогою означення (2) п. 2.2 маємо

$$s_n(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, du +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos kudu \cos kx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin kudu \sin kx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-u) \right) du.$$

Використаємо тотожність

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kv = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) v}{2 \sin \frac{v}{2}}; \ v \neq 2\pi n, \quad n \in Z,$$

яка має місце на всій прямій, якщо праву частину в точках $v_n = 2\pi n$, $n \in Z$ довизначити таким чином, щоб отримати неперервну на осі функцію. При цьому потрібні границі існують.

Враховуючи періодичність, одержимо

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+v) \mathcal{D}_n(v)\, dv = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x+v) \mathcal{D}_n(v)\, dv +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+v)\,\mathcal{D}_n(v)\,dv=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x-v)+f(x+v))\times$$

$$\times\,\mathcal{D}_n(v)\,dv,$$

звідки й випливає формула (8). ⌋

Зауваження. Відзначимо властивості ядра Діріхле:

$$\mathcal{D}_n(v)=\mathcal{D}_n(-v),\quad v\in(0,\pi);$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathcal{D}_n(v)\,dv=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(v)\,dv=1.$$

Друга рівність випливає із зображення (8) для функції $f(x)=1$, $x\in\mathbf{R}$, для якої $a_0=2$; $a_n=b_n=0$, $n\geqslant 1$.

3°. Інтегральне зображення для середніх за Чезаро[1] часткових сум ряду Фур'є. Нехай $f\in\mathbf{R}_0$ і для $n\geqslant 1$

$$\sigma_n(x):=\frac{1}{n}(s_0(x)+s_1(x)+\ldots+s_{n-1}(x)),\quad x\in\mathbf{R}.$$

Зазначимо, що при будь-якому $n\geqslant 1$ σ_n є тригонометричний многочлен.

Л Е М А. Для будь-якої функції $f\in\mathbf{R}_0$ і довільного $n\geqslant 1$ має місце зображення

$$\sigma_n(x)=\int_0^{\pi/2}(f(x-2v)+f(x+2v))\,F_n(v)\,dv, \tag{9}$$

в якому

$$F_n(v):=\frac{1}{n\pi}\frac{\sin^2 nv}{\sin^2 v},\quad v\in(0,\pi)\text{ — ядро Фейєра}^2.$$

⌈ Згідно с формулою (8) маємо

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}(f(x-2v)+f(x+2v))\,\mathcal{D}_n(2v)\,2dv.$$

Звідси

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2}(f(x-2v)+f(x+2v))\frac{1}{\sin v}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)v\,dv.$$

---

[1] *Чезаро Ернесто* (1859—1906) — італійський математик.
[2] *Фейєр Ліпот* (1880—1959) — угорський математик.

Тоді формулу (9) отримуємо з врахуванням тотожності

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)v = \frac{\sin^2 nv}{\sin v}. \qquad \lrcorner$$

Зауваження. Зазначимо властивості ядра Фейєра:

$$F_n(v) = F_n(-v), \quad F_n(v) \geqslant 0;$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} F_n(v)\,dv = 1.$$

2.3. ЗБІЖНІСТЬ РЯДУ ФУР'Є В ТОЧЦІ

Нехай $f \in \mathbf{R}_0$, $x \in [-\pi, \pi]$ — фіксована точка. Згідно з формулою (8) для числа $c \in \mathbf{R}$ маємо

$$s_n(x) - c = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g_c(u)\,\mathcal{D}_n(u)\,du, \tag{10}$$

де

$$g_c(u) := g_c(x, u) := \frac{f(x-u) + f(x+u)}{2} - c. \tag{11}$$

ТЕОРЕМА 1. Для того щоб ряд Фур'є (3) функції f збігався в точці x до числа c, тобто щоб

$$s_n(x) \to c, \quad n \to \infty,$$

необхідно й достатньо, щоб

$$\exists \delta \in (0, \pi): \int_0^{\delta} g_c(u) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{u}\,du \to 0, \quad n \to \infty.$$

$\ulcorner$ За допомогою формули (10) для будь-якого $\delta \in (0, \pi)$ маємо

$$s_n(x) - c = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g_c(u)\,\mathcal{D}_n(u)\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} g_c(u)\frac{\sin\lambda u}{u}\,du +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} g_c(u)\frac{\sin\lambda u}{2\sin(u/2)}\,du + \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} g_c(u) \times$$

$$\times \left(\frac{\sin\lambda u}{2\sin(u/2)} - \frac{\sin\lambda u}{u}\right)du, \quad \lambda = n + \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Покажемо, що до другого й третього інтегралів правої частини (12) можна застосувати лему Рімана при будь-якому $\delta \in (0, \pi)$. Дійсно, функція $g_c \in \mathbf{R}([\delta, \pi])$, а функція $[\delta, \pi] \ni u \mapsto 2 \sin (u/2)$ неперервна й додатна на $[\delta, \pi]$. Тому функція

$$[\delta, \pi] \ni u \mapsto \frac{g_c(u)}{2 \sin (u/2)}$$

інтегровна за Ріманом на $[\delta, \pi]$ і за лемою Рімана

$$\forall \delta \in (0, \pi): \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} g_c(u) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \sin (u/2)} du \to 0, \ n \to \infty. \quad (13)$$

Зауважимо далі, що

$$\frac{1}{2 \sin (u/2)} - \frac{1}{u} = \frac{1}{2u \sin (u/2)} \left(u - u + \frac{u^3}{24} - \ldots\right) \to 0$$

при $u \to 0+$. Тому, за лемою Рімана

$$\forall \delta \in (0, \pi): \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\delta} g_c(u) \left(\frac{\sin \lambda u}{2 \sin (u/2)} - \frac{\sin \lambda u}{u}\right) du \to 0, \quad \lambda \to \infty. \quad (14)$$

Із співвідношень (13), (14) і (12) одержимо твердження теореми. ⌋

Зауваження. З теореми 1 випливає неочікуваний на перший погляд висновок. Нехай $\delta' \in (0, \pi)$ задане. Розглянемо функцію $\tilde{f}$ таку, що $\forall t \in (x - \delta', x + \delta')$: $\tilde{f}(t) = f(t)$, а в останніх точках визначену довільно, але так, щоб $\tilde{f} \in \mathbf{R}_0$. Нехай в умові теореми 1 $\delta = \delta'$. Тоді функція $[0, \delta) \ni u \mapsto g_c(u)$ є одна для f і $\tilde{f}$. Тому збіжність і границя у послідовностей $\{s_n(f, x)\}$ і $\{s_n(\tilde{f}, x)\}$ однакові. Таким чином, гранична поведінка послідовності $\{s_n(f, x)\}$ залежить тільки від поведінки функції f поблизу точки x. Це твердження часто називають ***принципом локалізації Рімана.***

Вправа

3. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{R}_0$ і для фіксованого x

$$\exists \delta \in (0, \pi): \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+u) - g(x+u)}{u} \right| du < +\infty.$$

Довести, що

$$s_n(f, x) - s_n(g, x) \to 0, \quad p \to \infty.$$

ТЕОРЕМА 2 (ознака Діні[1]). Нехай c таке, що

$$\exists \delta \in (0, \pi): \int_0^\delta \frac{|g_c(u)|}{u}\, du < +\infty. \qquad (15)$$

Тоді $s_n(x) \to c$, $n \to \infty$.

$\vdash$ Для доведення за теоремою 1 досить упевнитися, що

$$\int_0^\delta g_c(u) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)}{u}\, du \to 0, \quad n \to \infty.$$

Проте при умові теореми 2 останнє твердження випливає з леми Рімана. $\dashv$

Зауваження. Нехай умова (15) виконана. Якщо припустити додатково існування границі

$$\lim_{u \to 0+} g_c(u),$$

то з (15) випливає, що ця границя дорівнює нулю. Тому, якщо виконана умова (15) і точка x є точкою розриву першого роду, то

$$c = \frac{1}{2}(f(x-) + f(x+));$$

якщо виконана умова (15) і x — точка неперервності функції f, то $c = f(x)$.

Зауважимо також без доведення, що ряд Фур'є для неперервної у точці x-функції не обов'язково збігається в цій точці.

ТЕОРЕМА 3 (ознака Ліпшица). Припустимо, що функція f в точці x задовольняє для деякого $\alpha \in (0, 1]$ умові

$$\exists L \in \mathbf{R}\ \exists \delta > 0\ \forall u \in (-\delta, \delta): |f(x+u) - f(x) \leqslant L|u|^\alpha. \qquad (16)$$

Тоді $s_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$.

$\vdash$ Із умови цієї теореми випливає, що для $c = f(x)$

$$|g_c(u)| = \frac{1}{2}|f(x-u) + f(x+u) - 2f(x)| \leqslant L|u|^\alpha,$$

якщо $u \in (-\delta, \delta)$. Тому умова (15) виконана для числа $c = f(x)$. $\dashv$

Наслідок 1. Якщо в точці x функція f має похідну $f'(x)$, то

$$s_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty.$$

---

[1] Діні Улісс (1845 — 1918) — італійський математик.

Наслідок 2. Нехай x — точка розриву першого роду функції f. Припустимо, що існують границі:

$$\lim_{u\to 0-} \frac{f(x+u)-f(x-)}{u} = \bar{f}'_{-}(x);$$

$$\lim_{u\to 0+} \frac{f(x+u)-f(x+)}{u} = \bar{f}'_{+}(x).$$

Тоді

$$s_n(x) \to \frac{1}{2}(f(x-)+f(x+)), \quad n\to\infty.$$

Приклад. Нехай функція $f \in \mathbf{R}_0$ і така, що

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x), \quad x \in (0, 2\pi)$$

і $f(0) = f(2\pi) = 0$. Тоді

$$f'(x) = -\frac{1}{2}, \quad x \in (0, 2\pi);$$

$$\frac{1}{2}(f(0-)+f(0+)) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 0 = f(0).$$

Крім того, $a_n = 0$, $n \geqslant 0$; $b_n = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$. Тому

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Наслідок 3. Для будь-якої функції $g \in \mathbf{R}_0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(g)}{n}$$

збігається.

$\vdash$ Дійсно, запишемо для функції g і функції прикладу узагальнену рівність Парсеваля:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(g)}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\,\frac{\pi - t}{2}\,dt. \qquad \dashv$$

Наслідок 4. У класі $\mathbf{R}_0$ не існує функції, для якої збіжний на $\mathbf{R}$ ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}, \quad x \in \mathbf{R}$$

був би її рядом Фур'є.

Вправи

4. Довести, що

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; б)* $\lim_{n\to\infty} \left(n\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)\right) = 1.$

Вказівка. Записати рівність Парсеваля для функції з розглянутого вище прикладу.

5. Нехай $\theta \in (0, 2\pi)$. Довести, що

$$\frac{\theta}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\theta}{n\pi} \cos nx + \frac{1 - \cos n\theta}{n\pi} \sin nx\right) =$$

$$= \frac{\theta}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(\theta - x)}{n\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\pi} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0; \\ 1, & x \in (0, \theta); \\ \frac{1}{2}, & x = \theta; \\ 0, & x \in (\theta, 2\pi). \end{cases}$$

2.4. ТЕОРЕМА ФЕЙЄРА

ТЕОРЕМА. Нехай функція $f \in C(\mathbf{R})$ і періодична з періодом 2π. Тоді

$$\max_{x\in\mathbf{R}} |f(x) - \sigma_n(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

$\vdash$ З леми і зауваження до 3° п. 2.2 спочатку маємо для $x \in \mathbf{R}$:

$$\sigma_n(x) - f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x - 2v) + f(x + 2v) - 2f(x)) F_n(v)\, dv.$$

Нехай тепер $\varepsilon > 0$ задано. Оскільки функція $f \in C(\mathbf{R})$ і періодична, то вона рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$. Тому

$$\exists \delta > 0 \ \forall \{x', x''\} \subset \mathbf{R}, \ |x' - x''| < \delta: \ |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Враховуючи зауваження до 3° п. 2.2, одержимо

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \int_0^{\delta/2} |f(x - 2v) + f(x + 2v) - 2f(x)|\, F_n(v)\, dv +$$

$$+\int_{\delta/2}^{\pi/2} 4\max_{\mathbf{R}}|f|\,F_n(v)\,dv<\varepsilon\int_0^{\delta/2}F_n(v)\,dv+$$

$$+4\max_{\mathbf{R}}|f|\int_{\delta/2}^{\pi/2}\frac{\sin nv}{\pi n\sin^2 v}\,dv<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{4}{\pi}\max_{\mathbf{R}}|f|\,\frac{1}{\sin^2\delta/2}\times$$

$$\times\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n}.$$

$\lrcorner$

Наслідок 1 (теорема Вейєрштрасса). Нехай функція $f\in\mathbf{C}(\mathbf{R})$ і періодична з періодом 2π. Тоді

$$\forall\varepsilon>0\ \exists T_\varepsilon(x)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx),\ \{\alpha_k,\beta_k\}\subset\mathbf{R}$$

$$\forall x\in\mathbf{R}:\ |f(x)-T_\varepsilon(x)|<\varepsilon.$$

Наслідок 2 (теорема Вейєрштрасса). Нехай $f\in\mathbf{C}([a,b])$. Тоді

$$\forall\varepsilon>0\ \exists P_\delta(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k,\quad\{\alpha_i\}\subset\mathbf{R}$$

$$\forall x\in[a,b]:\ |f(x)-P_\varepsilon(x)|<\varepsilon.$$

$\ulcorner$ Досить розглянути випадок, коли $[a,b]=[0,\pi]$. Нехай $\tilde f\in\mathbf{C}([0,2\pi])$, $\tilde f(0)=\tilde f(2\pi)$ і $\tilde f(t)=f(t)$, $t\in[0,\pi]$. Згідно з наслідком (1) для заданого $\varepsilon>0$ існує тригонометричний многочлен T такий, що

$$\forall x\in[0,2\pi]:\ |\tilde f(x)-T(x)|<\varepsilon/2.$$

Многочлен T є скінченна лінійна комбінація функцій вигляду $x\mapsto\sin nx$, $x\mapsto\cos nx$, кожна з яких є сумою ряду Тейлора на $\mathbf{R}$, який рівномірно збіжний на кожному відрізку. Тому

$$\exists P(x)=\sum_{k=0}^{N}\gamma_k x^k,\quad\{\gamma_i\}\subset\mathbf{R}$$

$$\forall x\in[0,2\pi]:\ |T(x)-P(x)|<\varepsilon/2.$$

Тому

$$\forall x\in[0,2\pi]:\ |\tilde f(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

$\lrcorner$

§ 3. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ РЯДУ ФУР'Є

3.1. ПОНЯТТЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО РЯДУ. ВЛАСТИВОСТІ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є

Ряд вигляду

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt), \quad t \in \mathbf{R}; \quad \{\alpha_i, \beta_i\} \subset \mathbf{R} \qquad (1)$$

називається ***тригонометричним***. Як показує наслідок 4 п. 2.3, існують збіжні тригонометричні ряди, які не є рядами Фур'є функцій з $\mathbf{R}_0$. Проте має місце наступне твердження.

ТЕОРЕМА. Рівномірно збіжний на осі тригонометричний ряд є рядом Фур'є своєї суми.

|— Зауважимо спочатку, що сума рівномірно збіжного на $\mathbf{R}$ тригонометричного ряду є неперервною на $\mathbf{R}$ функцією. Нехай ряд (1) збігається рівномірно на $\mathbf{R}$ до суми $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$:

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt) = f(t), \quad t \in \mathbf{R}. \qquad (2)$$

Помножимо цю рівність на $\frac{1}{\pi} \cos mt$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Отриманий у лівій частині ряд буде також збігатися рівномірно на $\mathbf{R}$, тому можливе його почленне інтегрування по відрізку $[-\pi, \pi]$:

$$\alpha_0 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt + \right.$$

$$\left. + \beta_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt dt \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt dt = a_m(f).$$

Внаслідок ортогональності функцій тригонометричної послідовності ця рівність набуває вигляду $\alpha_m = a_m(f)$. Таким же чином $\beta_m = b_m(f)$, $m \in \mathbf{N}$. —|

ЛЕМА 1. Нехай функція $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ періодична з періодом 2π і, виключаючи можливо скінченне число точок відрізка $[-\pi, \pi]$, існує f', причому $f' \in \mathbf{R}_0$. Тоді

$$a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}, \quad b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}, \quad n \geqslant 1.$$

⌈Обидві формули доводяться за допомогою інтегрування за частинами. ⌋

ЛЕМА 2. Нехай функція $f \in C^{r-1}(\mathbf{R})$ для $r \geqslant 1$, періодична із періодом 2π і, виключаючи можливо скінченне число точок відрізка $[-\pi, \pi]$ існує $f^{(r)}$, причому $f^{(r)} \in \mathbf{R}^0$. Тоді для $n \geqslant 1$

$$|a_n(f)| + |b_n(f)| \leqslant \frac{|a_n(f^{(r)})| + |b_n(f^{(r)})|}{n^r}.$$

⌈ Послідовно застосовуючи лему 1, отримуємо доведення. ⌋

Вправа

1. Нехай $\{f, g\} \subset \mathbf{R}_0$. Довести, що:

а) $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$: $a_n(\alpha f + \beta g) = \alpha a_n(f) + \beta a_n(g), \quad n \geqslant 0;$

$$b_n(\alpha f + \beta g) = \alpha b_n(f) + \beta b_n(g), \quad n \geqslant 1;$$

б) $\forall \varphi \in \mathbf{R}$ для функції $g_\varphi(t) := f(t + \varphi), \quad t \in \mathbf{R}$:

$$a_0(g_\varphi) = a_0(f), \quad a_n(g_\varphi) = a_n(f)\cos n\varphi + b_n(f)\sin n\varphi;$$

$$b_n(g_\varphi) = b_n(f)\cos n\varphi - a_n(f)\sin n\varphi; \quad n \geqslant 1.$$

3.2. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ, ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ РЯДУ ФУР'Є

ТЕОРЕМА 1. Нехай функція $f \in C(\mathbf{R})$ періодична з періодом 2π і, виключаючи можливо скінченне число точок відрізка $[-\pi, \pi]$, існує f', причому $f' \in \mathbf{R}_0$.

Тоді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

причому ряд збігається рівномірно на $\mathbf{R}$.

⌈Доведемо рівномірну збіжність на $\mathbf{R}$ ряду з формули (3). Згідно з ознакою Вейєрштрасса рівномірної збіжності досить довести збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(f)| + |b_n(f)|). \tag{4}$$

Із леми 1 п. 3.1 і нерівності Коші для будь-якого $n \geqslant 1$ маємо

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(2 \sum_{k=1}^{n} (a_k^2(f') + b_k^2(f')) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \leqslant \left(2 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(t))^2 \, dt \, \frac{\pi^2}{6}\right)^{1/2}.$$

Звідси випливає збіжність ряду (4). У точках, де існує f'', рівність (3) має місце. Оскільки f і сума рівномірно збіжного ряду з неперервних функцій є функція неперервна, то рівність (3) виконується на $\mathbf{R}$. ⌋

Зауваження. З теореми 1 випливає нерівність

$$\max_{k \in \mathbf{R}} |f(x) - s_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < \varepsilon_n \left(\int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}\right)^{1/2} = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 1, \tag{5}$$

де

$$\varepsilon_n := \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f')| + |b_k(f')|)^2\right)^{1/2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Нерівність (5) дає уявлення про швидкість збіжності часткових сум $\{s_n\}$ до функції f. При умовах леми 2 таким же чином отримуємо рівність

$$\max_{x \in \mathbf{R}} |f(x) - s_n(x)| \leqslant \frac{\tilde{\varepsilon}_n}{n^{r - \frac{1}{2}}}, \quad n \geqslant 1,$$

де $\tilde{\varepsilon}_n \to 0$, $n \to \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Нехай функція $f \in \mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{R})$, періодична з періодом 2π і, виключаючи можливо скінченне число точок відрізка $[-\pi, \pi]$, існує f'', причому $f'' \in \mathbf{R}_0$.

Тоді ряд Фур'є (3) для функції f можна почленно диференціювати

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n b_n \cos nx - n a_n \sin nx), \quad x \in \mathbf{R},$$

причому одержаний ряд збігається рівномірно на $\mathbf{R}$.

Твердження цієї теореми є безпосереднім наслідком теореми про почленне диференціювання функціонального ряду і теореми 1.

3.3. ІНТЕГРУВАННЯ РЯДУ ФУР'Є

Нехай $f \in \mathbf{R}_0$. Тоді ряд Фур'є

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx), \quad x \in \mathbf{R} \tag{6}$$

не обов'язково збігається поточково. Проте за наслідком 3 п. 2.3 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)}{n} \tag{7}$$

збігається.

Зауважимо, що інтеграл $\int_0^x f(t)\,dt$, $x \in \mathbf{R}$ від періодичної функції $f \in \mathbf{R}_0$ не є періодичною функцією. Наприклад, для функції $f(t) = 1 + \cos t$, $t \in \mathbf{R}$ інтеграл дорівнює $x + \sin x$, $x \in \mathbf{R}$. Проте функція

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0(f)}{2}\,x, \quad x \in \mathbf{R} \tag{8}$$

періодична з періодом 2π. Дійсно,

$$F(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} f(t)\,dt - \frac{a_0(f)}{2}(x+2\pi) =$$

$$= \int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0(f)}{2}\,x + \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt - \pi a_0(f) = F(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Зауважимо, що $F \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$.

Нехай $x \in (0, 2\pi)$. Розглянемо періодичну з періодом 2π функцію g таку, що

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t = 0, \quad t = x; \\ \pi, & t \in (0, x); \\ 0, & t \in (x, 2\pi). \end{cases}$$

Коефіцієнти Фур'є функції g дорівнюють:

$$a_0(g) = x;$$

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \pi \cos nt dt = \frac{\sin nx}{n};$$

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \pi \sin nt dt = \frac{1-\cos nx}{n}, \quad n \geqslant 1.$$

Застосуємо до функцій $f \in \mathbf{R}_0$ і g узагальнену рівність Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \pi f(t)\, dt = \frac{a_0(f)}{2} x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)\frac{\sin nx}{n} + b_n(f)\frac{1-\cos nx}{n}\right), \quad x \in [0, 2\pi]. \qquad (9)$$

Враховуючи збіжність ряду (7) і позначення (8), отримаємо рівність

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n(f)}{n} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n(f)}{n}\cos nx + \frac{a_n(f)}{n}\sin nx\right), \quad x \in [0, 2\pi]. \qquad (10)$$

Зауважимо, що рівність (9) одержується за допомогою формального інтегрування ряду Фур'є (6) для функції f, цей ряд не обов'язково збігається поточково. Крім того, функціональні ряди в (9) і (10) рівномірно на відрізку $[0, 2\pi]$ збігаються згідно з ознакою Вейєрштрасса рівномірної збіжності, оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n(f)| + |b_n(f)|}{n} < +\infty.$$

Внаслідок періодичності функції F рівність (10), а разом із нею і (9) мають місце на $\mathbf{R}$. За теоремою п. 3.1 можна зробити висновок, що ряд (10) є рядом Фур'є функції f і що

$$a_0(F) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n(f)}{n};$$

$$a_n(F) = -\frac{b_n(f)}{n}, \quad b_n(F) = \frac{a_n(f)}{n}, \quad n \geqslant 1.$$

Сформулюємо одержаний результат.

ТЕОРЕМА. Нехай $f \in \mathbf{R}_0$. Ряд, який одержується в ряду Фур'є функції f формальним почленним інтегруванням, збігається рівномірно на $\mathbf{R}$ до функції $\mathbf{R} \ni x \mapsto \int\limits_0^x f(t)\,dt$.

Таким чином, формальне інтегрування, можливо навіть розбіжного в деяких точках ряду Фур'є, приводить до ряду, рівномірно збіжному на осі до інтеграла від функції f.

3.4. ВИПАДОК ФУНКЦІЇ ІЗ ДОВІЛЬНИМ ПЕРІОДОМ

Нехай функція $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ періодична з періодом $2l$, $l > 0$: $\forall x \in \mathbf{R}$: $f(x + 2l) = f(x)$. Припустимо також, що $f \in \mathbf{R}([-l, l])$. Для таких функцій можна розглядати ряд Фур'є щодо тригонометричної послідовності (дещо видозміненої) і отримати всі факти, які доведено вище для 2π-періодичних функцій. Наведемо основні формули.

Функція $g(t) := f((l/\pi)\,t)$, $t \in \mathbf{R}$ має період 2π, оскільки $\forall t \in \mathbf{R}$:

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = g(t).$$

Коефіцієнти Фур'є для g і її ряд Фур'є має вигляд

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt, \quad n \geqslant 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\,dt, \quad n \geqslant 1;$$

$$g(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{11}$$

Вибравши в формулі (11) $t = (\pi/l)\,x$, одержимо

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{12}$$

Крім того, заміна $t = (\pi/l)\,x$ у формулах (11) приводить до таких виразів для $\{a_n, b_n\}$:

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n \geqslant 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n \geqslant 1. \tag{13}$$

Формули (13) визначають коефіцієнти Фур'є, а формула (12) — ряд Фур'є для $2l$ - періодичної функції щодо послідовності функцій

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{\pi n x}{l},\ \sin\frac{\pi n x}{l},\ \ldots,$$

попарно ортогональних на $[-l,\ l]$. Ця послідовність функцій замкнена в $\mathbf{R}\ ([-l,\ l])$.

§ 4. ІНТЕГРАЛ ФУР'Є

4.1. ФОРМАЛЬНЕ ВИВЕДЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ФОРМУЛИ ФУР'Є

Нехай $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ така, що $f \in \mathbf{R}\ ([-l,\ l])$ для будь-якого $l > 0$. При певних умовах, що містяться в § 2, функцію f на відрізку $[-l,\ l]$ можна зобразити у вигляді суми ряду Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),\quad x \in [-l, l].$$

Використовуючи формули для коефіцієнтів Фур'є, запишемо це зображення у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)\,du + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{n\pi(x-u)}{l}\,du =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)\,du + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} F_l\left(\frac{\pi n}{l}\right)\frac{\pi}{l},\quad x \in [-l, l], \qquad (1)$$

де

$$F_l(\lambda) := \int_{-l}^{l} f(u)\cos\lambda(x-u)\,du. \qquad (2)$$

Припустимо, що $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\,du < +\infty$. Тоді $\forall \lambda \in \mathbf{R}$:

$$F_l(\lambda) = \int_{-l}^{l} f(u)\cos\lambda(x-u)\,du \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\lambda(x-u)\,du,$$

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)\,du \to 0,\quad l \to +\infty.$$

Оскільки сума в правій частині (1) аналогічна до інтегральної суми для функції $F_{+\infty}$ інтервала $[0, +\infty)$, розбиття $\left\{0, \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \ldots\right\}$ і набору точок $\left\{\frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \ldots\right\}$, то можна чекати, що права частина рівності (1) при $l \to +\infty$ збігається до інтеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda (x - u)\, du \right) d\lambda.$$

Ці міркування приводять до формули

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda (x - u)\, du \right) d\lambda, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

яку також часто записують у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{4}$$

де

$$a(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda u du, \quad b(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \lambda u du, \quad \lambda \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Кожна з формул (3) і (4) називається ***інтегральною формулою Фур'є***, а права частина (3), (4) — ***інтегралом Фур'є***.

4.2. ЗБІЖНІСТЬ ІНТЕГРАЛА ФУР'Є В ТОЧЦІ

Нехай функція $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — абсолютно інтегровна на $\mathbf{R}$, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\, du < +\infty.$$

За цієї умови функції a і b, що визначаються рівностями (5), неперервні по λ на $\mathbf{R}$, оскільки невласні інтеграли збігаються рівномірно по λ на $\mathbf{R}$ за ознакою Вейєрштрасса. Згідно з лемою Рімана

$$a(\lambda) \to 0, \quad b(\lambda) \to 0, \quad |\lambda| \to +\infty.$$

Зауважимо, що a — парна функція на $\mathbf{R}$, а b — непарна функція на $\mathbf{R}$.

Вправа

1. Довести, що функції a і b рівномірно неперервні на $\mathbf{R}$.

Таким чином, для будь-якого $x \in \mathbf{R}$ функція

$$[0, \infty) \ni \lambda \mapsto a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda (x - u)\, du$$

неперервна по λ на $[0, \infty)$.

Нехай для $A \geqslant 0$

$$\mathcal{J}(A) := \frac{1}{\pi} \int_0^A (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda (x - u)\, du \right) d\lambda.$$

За теоремою про інтегровність по параметру рівномірно збіжного невласного інтеграла випливає, що

$$\mathcal{J}(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{\sin A(x - u)}{x - u}\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (f(x - v) + f(x + v)) \frac{\sin Av}{v}\, dv.$$

Враховуючи, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin Av}{v}\, dv = \frac{\pi}{2}, \quad A > 0,$$

отримаємо зображення для $\mathcal{J}(A) - c$, $c \in \mathbf{R}$;

$$\mathcal{J}(A) - c = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} g_c(u) \frac{\sin Au}{u}\, du, \tag{6}$$

де

$$g_c(u) := g_c(u, x) := \frac{f(x - u) + f(x + u)}{2} - c.$$

ТЕОРЕМА 1 (ознака Діні). Нехай

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\, du < +\infty,$$

$x \in \mathbf{R}$ — фіксоване і для числа $c \in \mathbf{R}$

$$\exists \delta > 0: \int_0^{\delta} \frac{|g_c(u)|}{u}\, du < +\infty.$$

Тоді $\mathcal{J}(A) \to c$, $A \to +\infty$, тобто

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda (x-u)\, du \right) d\lambda = c.$$

⌈ Згідно з зображенням (6) маємо

$$\mathcal{J}(A) - c = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{g_c(u)}{u} \sin Au du +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x-u) + f(x+u)}{2u} \sin Au du - \frac{2c}{\pi} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin Au}{u}\, du. \quad (7)$$

Перший і другий інтеграли при виконанні умов теореми 1 збігаються до нуля при $A \to +\infty$ за лемою Рімана. Крім того,

$$\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin Au}{u}\, du = \int_{\delta A}^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\, dv \to 0, \quad A \to +\infty. \quad ⌋$$

Зауваження 1. Якщо виконані умови теореми 1 і x — точка розриву першого роду, то

$$c = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Якщо виконані умови теореми 1 і x — точка неперервності, то $c = f(x)$.

ТЕОРЕМА 2 (ознака Ліпшица). Припустимо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\, du < +\infty$$

і функція f в точці x задовольняє для деякого $\alpha \in (0, 1]$ умові

$$\exists L \in \mathbf{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall u \in (-\delta, \delta): \ |f(x+u) - f(x)| \leqslant L |u|^{\alpha}.$$

Тоді

$$\mathcal{J}(A) \to f(x), \quad A \to +\infty,$$

тобто

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda.$$

⌈ Доведення випливає з теореми 1. ⌋

Наслідок. Якщо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\,du < +\infty$$

і функція f має в точці x похідну $f'(x)$, то

$$\mathcal{J}(A) \to f(x), \quad A \to +\infty.$$

Зауваження 2. Має місце також аналог наслідку 2 п. 2.3.

Вправа

2. Нехай $f(x) = \frac{\pi}{2\sigma} e^{-\sigma|x|}$, $x \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$. Обчислити функції a, b і довести рівність

$$\frac{\pi}{2\sigma} e^{-\sigma|x|} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\sigma^2 + \lambda^2}\, d\lambda, \quad x \in \mathbf{R}.$$

4.3. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Нехай функція $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ така, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\,du < +\infty.$$

Означення. Перетворенням Фур'є функції f називається функція

$$\hat{f}(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx = a(\lambda) + ib(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

ТЕОРЕМА (формула обертання). Нехай f неперервна в точці x, задовольняє умові ознаки Діні в точці x і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\,du < +\infty.$$

Тоді

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} e^{-i\lambda x} \hat{f}(\lambda)\,d\lambda.$$

Для доведення спочатку зазначимо, що

$$e^{-i\lambda x}\hat{f}(\lambda) = (\cos\lambda x - i\sin\lambda x)(a(\lambda) + ib(\lambda)) =$$
$$= a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x - ia(\lambda)\sin\lambda x + ib(\lambda)\cos\lambda x.$$

Тому

$$\int_{-A}^{A} e^{-i\lambda x}\hat{f}(\lambda)\,d\lambda = \int_{-A}^{A} (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)\,d\lambda = 2\pi\vartheta(A).$$

Потім використовуємо ознаку Діні збіжності інтеграла Фур'є і припущення неперервності f у точці x.

Вправа

3. Обчислити перетворення Фур'є функцій:

а) $f(x) = \frac{1}{2a}$, $x \in (-a, a)$; $f(x) = 0$, $|x| \geqslant a > 0$;

б) $f(x) = ae^{-ax}$, $x \geqslant 0$; $f(x) = 0$, $x < 0$; $a > 0$;

в) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $x \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Відповідь. а) $\frac{\sin\lambda a}{\lambda a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; б) $\frac{a}{a - i\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

в) $\pi e^{-|\lambda|}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; г) $\exp\left\{i\lambda a - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Зауваження. У тому випадку, коли перетворення Фур'є $\hat{f}$ функції також абсолютно інтегровне на $\mathbb{R}$, формули, що виражають f і $\hat{f}$ одне через друге, приймають вигляд

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\hat{f}(\lambda)\,d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.4. ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

1°. Нехай $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$. Тоді перетворення Фур'є $\hat{f}$ рівномірно неперервне на осі, причому $\hat{f}(\lambda) \to 0$, $|\lambda| \to +\infty$.

⌈ Твердження про неперервність випливає з теореми про неперервність по параметру рівномірно збіжного інтеграла; те, що $\hat{f}(\lambda) \to 0$, $|\lambda| \to +\infty$, випливає з теореми Рімана. ⌋

2°. Якщо для деякого $n \in \mathbf{N}$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|^n)\,|f(x)|\,dx < +\infty$, то перетворення Фур'є $\hat{f}$ має похідні до порядку n включно (кожна з них задовольняє властивості 1°), причому для k, $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\hat{f}^{(k)}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}(it)^k f(t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Зокрема,

$$\hat{f}^{(k)}(0) = i^k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\,dt, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

⌈ Це твердження є результатом послідовного застосування теореми про диференційовність невласного інтеграла по параметру. ⌋

3°. Якщо $f \in \mathbf{C}^{(n-1)}(\mathbf{R})$, існує $f^{(n)}$ на $\mathbf{R}$, причому $\forall k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$f^{(k)}(x) \to 0, \quad |x| \to +\infty,$$

і

$$\forall k, \quad 0 \leqslant k \leqslant n: \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)|\,dx < +\infty,$$

то

$$\widehat{f^{(n)}}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{i}\right)^n \hat{f}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

⌈ Розглянемо випадок $n = 1$. Використовуючи формулу інтегрування частинами, одержимо

$$\hat{f'}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f'(x)\,dx =$$

$$= e^{i\lambda x} f(x)\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - i\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx = \frac{\lambda}{i}\hat{f}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbf{R}. \ ⌋$$

Зауваження. Зауважимо, що при умові властивості 3

$$\lambda^n \hat{f}(\lambda) \to 0, \quad |\lambda| \to +\infty.$$

4°. Нехай функції f_1 і f_2 такі, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_i(x)|\,dx < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_i^2(x)\,dx < +\infty, \quad i = 1, 2.$$

Тоді *згортка функцій* f_1 і f_2 — функція

$$h(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u)\, f_2(u)\,du, \quad x \in \mathbf{R}.$$

має перетворення Фур'є $\hat{h} = \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2$.

Згортка функцій f_1 і f_2 позначається символом $f_1 * f_2$.

|‾ При припущеннях властивості 4° виконані умови теореми про інтегрування по параметру по необмеженому проміжку невласного інтеграла. Тому

$$\hat{h}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f_1(x-u)\,dx \right) f_2(u)\,du =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(u+v)} f_1(v)\,dv \right) f_1(u)\,du = \hat{f}_1(\lambda)\,\hat{f}_2(\lambda), \quad \lambda \in \mathbf{R}. \quad \_|$$

4.5. ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Приклад. Знайдемо розв'язок u: $\mathbf{R} \times [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ;\ t > 0,\ x \in \mathbf{R} \tag{8}$$

з початковими умовами

$$u(x, 0) = f(x),\ x \in \mathbf{R};\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty. \tag{9}$$

Задачу розв'язку рівняння (8) при умові (9) розглянемо при додаткових припущеннях 1): $\forall t \geqslant 0$ функція $\mathbf{R} \ni x \mapsto u(x, t)$ абсолютно інтегровна на $\mathbf{R}$; 2) $\forall t \geqslant 0$: $u(x, t) \to 0$, $u_1'(x, t) \to 0$ при $|x| \to +\infty$.

Нехай

$$\hat{u}(\lambda, t) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} u(x, t)\,dx,\ \lambda \in \mathbf{R},\ t \geqslant 0.$$

Зауважимо, що

$$\hat{u}(\lambda, 0) = \hat{f}(\lambda),\ \lambda \in \mathbf{R}. \tag{10}$$

Розглянемо перетворення Фур'є рівності (8), враховуючи формулу

$$\widehat{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}} = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda, t).$$

Отримаємо рівність

$$\frac{\partial \hat{u}(\lambda, t)}{\partial t} = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda, t);\ t > 0,\ \lambda \in \mathbf{R},$$

яку згідно з формулою (10) можна при кожному $\lambda \in \mathbf{R}$ розглядати як диференціальне рівняння відносно функції $\hat{u}(\lambda, \cdot)$ на $[0, +\infty)$. Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{f}(\lambda) e^{-\lambda^2 t},\ t \geqslant 0,\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Зауважимо також, що

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x} e^{-\lambda^2 t} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} \cos \lambda x d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(x^2/4t)};\ t > 0,\ x \in \mathbf{R}.$$

Останню рівність можна отримати таким чином. Нехай

$$\mathcal{J}(x) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} \cos \lambda x d\lambda;\ x \in \mathbf{R},\ t > 0.$$

Спочатку маємо

$$\mathcal{J}'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} \lambda \sin \lambda x d\lambda = -\sin \lambda x \left(-\frac{1}{2t}\right) e^{-\lambda^2 t} \Big|_{\lambda=0}^{\lambda \to +\infty} -$$

$$-\frac{x}{2t} \mathcal{J}(x),$$

звідки

$$\mathcal{J}(x) = c e^{-(x^2/4t)},\ c \in \mathbf{R}.$$

Зауважимо, що при $x = 0$

$$c = \mathcal{J}(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}},\ t > 0.$$

Згідно з властивістю 4° п. 4.4 знаходимо

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-[(x-u)^2/4t]} du,\ t > 0,\ x \in \mathbf{R}.$$

Вправа

4. Нехай додатково до умов (9) $f \in C(\mathbf{R})$. Довести, що

$$\lim_{t \to 0+} u(x, t) = f(x),\ x \in \mathbf{R}.$$

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ДО ГЛАВ 13—16

1. Нехай $F(\alpha) = \int\limits_0^1 e^{-\alpha^2 x^2} dx$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Довести, що $F \in C(\mathbf{R})$.

2. Нехай $F(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x)\, dx$, $\alpha > 1$.

Довести, що $F \in C^{(1)}((1, +\infty))$, і знайти F'.

3. Нехай $F(\alpha) = \int\limits_\alpha^{\alpha^2} \sin(x^2 + 2^\alpha)\, dx$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Довести, що $F \in C^{(1)}(\mathbf{R})$, і знайти F'.

4. Визначити, при яких значеннях $\alpha \in \mathbf{R}$ збігається інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^\alpha + 1} - \sqrt[3]{|x^\alpha - 1|}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Відповідь. $\alpha < -\frac{1}{2}$, $\alpha > \frac{3}{4}$.

5. Довести збіжність інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{(-1)^{[1/x]}}{x}\, dx$.

6. При яких значеннях $\alpha \in \mathbf{R}$ збігається інтеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x^\alpha}\, dx?$$

Відповідь. Збігається абсолютно при $\alpha > 1$ і умовно при $0 < \alpha \leqslant 1$.

7. Довести збіжність інтегралів:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \exp\{-x^2 \sin^2 x\}\, dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \exp\{-x^3 \sin^2 x\}\, dx$.

8. Довести збіжність інтеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x + \sin x} e^{\cos x} dx$.

9. При яких значеннях $\alpha \in \mathbf{R}$ збігається інтеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^\alpha} \sin x dx?$$

Відповідь. Збігається абсолютно при $\alpha > 2$ і умовно при $1 < \alpha \leqslant 2$.

10. Довести збіжність інтеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\pi^2 - x^2}\, dx.$$

11. Дослідити збіжність інтеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha \,|\ln x|^\beta}, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0.$$

Відповідь. Збігається при $\alpha < 1$ і $\beta < 1$.

12. Довести збіжність інтеграла

$$\int_0^{+\infty} x\,|\sin x|^{x^5} dx.$$

13. Довести збіжність інтегралів:

а) $\int_0^{+\infty} \cos(x + x^3)\, dx$; б) $\int_0^{+\infty} \cos(x^2 + \sin 2x)\, dx$; в) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2 + \sin x) dx$.

14. Довести, що наступні інтеграли збігаються умовно:

а) $\int_0^{+\infty} \cos x^3 dx$; б) $\int_0^{+\infty} e^x \sin e^{2x} dx$; в) $\int_0^{+\infty} e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x}\, dx$.

15. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\, du \right)$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du \right)$;

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin u}{u}\, du \right)^{\sqrt{x}}$.

Відповідь. а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) 1.

16. Для функції $f \in C^{(1)}(R)$ збігається інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx$.

Довести існування границь $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

17. Для функції $f \in C^{(1)}(R)$ збігаються інтеграли $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx$.

Довести, що $f(x) \to 0$, $|x| \to +\infty$.

18. Функція $f \in C([0, +\infty))$, $f(0) = 0$ і $\sup\limits_{x > 0} |f(x)| < +\infty$, а для

функції g збігається інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} |g(x)|\,dx$.

Довести, що $\lim\limits_{\alpha\to 0+} \int\limits_0^{+\infty} f\left(\frac{\alpha}{x}\right) g(x)\,dx = 0$.

19. Для функції $f \in C([0, +\infty))$ збігається інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$, а функція $g \in C([0, \infty))$ і обмежена на $[0, +\infty)$.

Довести, що $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f(x+\lambda)\, g(x)\,dx = 0$.

20. Функція f абсолютно інтегровна на $[0, +\infty)$ і при кожному $\lambda > 0$ відрізок $[a(\lambda), b(\lambda)] \subset [0, +\infty)$.

Довести, що $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int\limits_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x) \cos \lambda x\,dx = 0$.

21. Довести, що інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} (\alpha^3 + x)\,dx$, $\alpha > 0$ збігається рівномірно на $[1, 10]$.

22. Довести, що інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha^2 - x^2}{(\alpha^2 + x^2)^2}\,dx$, $\alpha \in R$ збігається рівномірно на R.

23. Довести, що інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x^3}{x}\,dx$, $\alpha \in R$ збігається рівномірно на $[1, +\infty)$.

24. Довести, що інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \cos(\alpha x^3)\,dx$, $\alpha \neq 0$ збігається рівномірно на множині $\{\alpha \mid |\alpha| \geqslant 1\}$.

25. Дослідити на рівномірну збіжність інтеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x \cdot \sin \frac{\alpha}{x}\,dx$, $\alpha \in [0, 1]$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(\alpha e^x)\,dx$, $|\alpha| \geqslant 1$.

Відповідь. а), б) збігається рівномірно.

26. Довести, що функція $F(\alpha) := \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha < 2$ неперервна на $[0, 2)$.

27. Нехай $F(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\,dx$, $\alpha < 1$.

Довести, що $F \in C((0, 1))$.

28. Нехай $F(\alpha) := \int\limits_0^1 \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{|x-\alpha|}}$, $\alpha \in [0, 1]$.

Довести, що $F \in C([0, 1])$.

29. Довести співвідношення:

а) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{x^\alpha} = 0$;

б) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}dx = 1$.

30. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \exp\left\{-\frac{\alpha}{2x^2}\right\} dx, \ \alpha > 0, \ n > 0.$$

Відповідь. $2^{(n-2)/2}\alpha^{-(n/2)}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$.

31. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x+1)}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha B(\alpha, n)$, $\alpha > 0$.

Відповідь. а) $\sqrt{e}$; б) $\Gamma(\alpha)$.

31.1. Довести, що множина

$$A = \left\{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \leqslant 1 \mid \int\limits_0^1 e^{(x_1^2-x_2^2)t^2} dt \leqslant 1\right\}$$

є компактною множиною в площині із звичайною віддаллю.

32. Нехай

$$A = \{(x_1, x_2) \mid (x_1-1)^2 + x_2^2 \leqslant 1\};$$

$$B_n = \left\{(x_1, x_2) \mid \left(x_1 - \frac{1}{n}\right)^2 + x_2^2 \leqslant \frac{1}{4^{2n}}\right\}, \ n \geqslant 1.$$

Довести, що множина $A \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ вимірна. Визначити площу цієї множини.

33. Нехай $F \in C([0, 1]^2)$.

Довести, що

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}, x_2\right) x_1^k (1-x_1)^{n-k} \to f(x_1, x_2), \quad n \to \infty$$

рівномірно по $(x_1, x_2) \in [0; 1]^2$.

34. Нехай M — компактна вимірна множина в R^m така, що для будь-яких $\vec{x}$ і $\vec{y}$ з M існують точки $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ з M такі, що відрізки, що з'єднують точки $\vec{x}_i$ і $\vec{x}_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n$: $\vec{x}_0 = \vec{x}$, $\vec{x}_{n+1} = \vec{y}$, лежать в M. Нехай $f \in C(M)$.

Довести, що $\exists \vec{\theta} \in M$: $\int\limits_M f(\vec{x})\, d\vec{x} = f(\vec{\theta})\, m(M)$.

35. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{[0,1]^2} \min(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$; б) $\int\limits_{[0,1]^2} \max(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$.

Відповідь. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$.

36. Довести, що для $f \in R([0, 1])$

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{x_1} \left(\int\limits_0^{x_2} f(x_1) f(x_2) f(x_3)\, dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1 = \frac{1}{6} \left(\int\limits_0^1 f(x)\, dx \right)^3.$$

37. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_A x_1 x_2^2 dx_1 dx_2;$$

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4,\ x_1 \geqslant 0\}.$$

Відповідь. $\frac{28}{15}$.

38. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^1 \overset{m}{\cdots} \int\limits_0^1 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2m} (x_1 + x_2 + \ldots + x_m) \right) dx_1 dx_2 \ldots dx_m.$$

Вказівка. Зробити заміну $x_k = 1 - y_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

39. Для функції $f \in C([0, 1])$ обчислити границю

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{\substack{(j,k) \in Z^2 \\ j^2 + k^2 \leqslant n^2}} f\left(\frac{j^2 + k^2}{n^2} \right) \right).$$

Відповідь. $\pi \int\limits_0^1 f(x)\, dx$.

40. Обчислити інтеграл $\int\limits_A \frac{e^z}{2 - \bar{z}}\, dx_1 dx_2$, де $z = x_1 + i x_2$, $A = \{z \mid |z| \leqslant 1\}$.

Відповідь. $\pi(e^{\frac{1}{2}}-1)$.

41. Нехай $f \in C(R)$; $f(x) \geqslant 0$ для $x \in R$ і $\int\limits_R f(x)\,dx = 1$. Для фіксованого числа $\alpha > 0$ обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant \alpha^2\right)}^{n} \cdots \int \prod_{k=1}^{n} f(x_k)\,dx_k$$

Відповідь. 0.

42. Для функції $f \in C([0, 1]^2)$ нехай

$$F(t) := \int\limits_{A_t} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2,$$

де $A_t = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant t,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant t\}$, $t \in [0, 1]$. Визначити F'.

Відповідь. $F'(t) = \int\limits_0^t f(t, x_2)\,dx_2 + \int\limits_0^t f(x_1, t)\,dx_1$, $t \in [0, 1]$.

43. Для функції $f \in C([0, 1]^2)$ нехай

$$F(t) := \int\limits_{A_t} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2,$$

де $A_t = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 \leqslant t\}$, $t \geqslant 0$. Визначити F'.

Відповідь. $F'(t) = \int\limits_0^t f(x_1, t - x_1)\,dx_1$, $t \geqslant 0$.

44. Для функції $f \in C(R^3)$ нехай

$$F(t) := \int\limits_{A_t} f(x_1, x_2, x_3)\,dx_1 dx_2 dx_3,$$

де $A_t = \{(x_1, x_2, x_3) \mid t^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4t^2\}$, $t \geqslant 0$. Обчислити F'.

Відповідь. $F'(t) = 8t^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(2t \cos\varphi \cos\psi, 2t \sin\varphi \cos\psi,$

$2t \sin\varphi) \cos\psi\, d\varphi\, d\psi - t^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t \cos\varphi \cos\psi, t \sin\varphi \cos\psi, t \sin\psi) \times$

$\times \cos\psi\, d\varphi\, d\psi$.

45. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}\,dx_1 dx_2$,

$$A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_2 \leqslant 1 - x_1,\ x_1 \geqslant 0\}\ \alpha > -1,\ \beta > -1\}$$

б) $\int\limits_A e^{-x_1} x_2^{\alpha} dx_1 dx_2,$

$$A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1\},\quad \alpha > -1;$$

в) $\int\limits_A (1 - x_1)^{\alpha} x_2^{\beta} dx_1 dx_2.$

$$A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant 1\},\quad \alpha > -1,\quad \beta > -1.$$

Відповідь. а) $\dfrac{B(\alpha+1,\ \beta+1)}{\alpha+\beta+2}$; б) $\Gamma(\alpha+1)$; в) $\dfrac{B(\alpha+1, \beta+1)}{\alpha+\beta+2}$.

46. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\Gamma} ((x_1 - x_2)\, dx_1 + dx_2)$, де Γ — границя множини $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2x_1,\ x_2 \geqslant 0\}$, що пробігається проти годинникової стрілки.

47. За допомогою криволінійного інтеграла обчислити:

а) площу, обмежену еліпсом;

б) площу множини, обмеженої кривими $x_1 x_2 = 1$, $x_1 x_2 = 2$, $x_2 = x_1^2$, $x_2 = 2x_1^2$.

48. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\Gamma} (x_1 + x_2^2 + x_3^3)\, dl$, де Γ — границя трикутника із вершинами (1, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 1, 1).

49. Нехай S — границя симплексу із вершинами (0,0,0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_S (x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_2 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 x_3 dx_3 \wedge dx_1)$ по зовнішній стороні S;

б) $\int\limits_S (x_1 + x_2^2 + x_2^3)\, d\sigma.$

50. Знайти ряд Фур'є для функції

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi \leqslant x < 0; \\ \dfrac{\pi}{4}, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$$

і дослідити його збіжність.

Довести, що $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots$.

51. Знайти ряд Фур'є для функції $f(x) = |x|$, $x \in (-\pi, \pi]$ і дослідити його збіжність.

Довести, що $\dfrac{\pi^2}{8} = 1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \ldots$

52. Довести рівність

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots = \frac{\pi}{4},\quad x \in (0, \pi).$$

53. Знайти суми рядів:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}, \quad x \in (0, \pi);$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad x \in (0, 2\pi).$

53.1. Довести, що

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{k^2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|}, \quad x \notin 2\pi\mathbf{Z}.$$

54. Довести, що:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

55. Нехай $f \in \mathbf{C}([0, 1])$. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \prod_{j=1}^{n} f(x_j)\, dx_j,$$

$$1 \leqslant k \leqslant n, \quad n \geqslant 1.$$

Відповідь. $\frac{k}{n} \left(\int\limits_0^1 f(x)\, dx \right)^n$.

56. Нехай $f \in \mathbf{C}([0, 1])$.
Довести рівність

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \min(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^{n} f(x_j)\, dx_j = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_x^1 f(u)\, du \right)^n dx.$$

57. Довести рівність

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 (x_1 x_2 \ldots x_n)^{x_1 x_2 \ldots x_n} dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^1 x^x \ln^{n-1} \frac{1}{x}\, dx, \quad n \geqslant 1.$$

58. Довести рівність

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{1 + \frac{1}{\alpha} e^x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^{3/2}}, \quad \alpha > 0$$

(*асимптотичний розклад для інтеграла* при $\alpha \to 0$).

59. Довести рівність

$$\min_{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbf{R}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} (1 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)^2 dx = \frac{1}{n+1}; \quad n \in \mathbf{N}.$$

60. Нехай $f \in C([0, +\infty))$ і $V(f, [0, +\infty)) < +\infty$.

Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ і інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

61. Нехай $f \in R([0, 1])$ і $f(x) \to 0$, $x \to 0+$.

Довести, що $\lim_{\alpha \to 0+} \alpha \int_{\alpha}^{1} \frac{f(x)}{x^2}\,dx = 0$.

62. Довести рівність

$$xy + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = \pi \min(x, y);$$

$$0 \leqslant x, \quad y \leqslant \pi.$$

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

(X, ρ) — метричний простір з метрикою ρ.
$(\mathbf{R}^m, \rho)$ — 6
$(\mathbf{l}_2, \rho)$ — 6
$B(x, r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$,
$\overline{B}(x, r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant r\}$
$d(A) := \sup\limits_{x \in A, y \in A} \rho(x, y)$
A° — множина всіх внутрішніх точок множини A
$\mathbf{C}(X, Y)$ — множина всіх неперервних на A функцій із значеннями в Y
$\mathbf{C}(X)$ — множина всіх дійсних неперервних на A функцій
$\mathbf{C}^{(n)}(A)$ — 64
$f'_{\vec{a}}(\vec{x})$ — похідна функції f в точці $\vec{x}$ за напрямком $\vec{a}$
$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ — частинна похідна за змінною x_k
$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x})$ — градієнт функції f в точці $\vec{x}$
$f'(\vec{x})$ — 54
$\vec{f}'(\vec{x})$ — 77
$df(\vec{x}) = df(\vec{x}, \vec{a})$ — 56
$f^{(n)}(\vec{x})\vec{a}^n$ — 64
$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — 97
Γ — функція 127
B — функція 136
$\mathbf{K}_m$ — множина всіх вимірних за Жорданом підмножин $\mathbf{R}^m$
$\mathbf{m}(A)$ — міра Жордана множини A
baC — основа циліндричної множини C
$\int\limits_A f(\vec{x})\,d\vec{x}$ — m-вимірний інтеграл по вимірній за Жорданом множині A
$\text{v. p.} \int\limits_A f(\vec{x})\,d\vec{x}$ — головне значення розбіжного інтеграла
∂F — 208

$\int\limits_M \omega$ — 200

$\int\limits_\Gamma f(\vec{x})\, dl$ —239

$\int\limits_S f(\vec{x})\, d\sigma$ — 241

(f, g) — скалярний добуток функцій f і g

$\| f \|$ — норма функції f

$\mathbf{R}([a, b])$ — множина всіх дійсних функцій, інтегровних за Ріманом по відрізку $[a, b]$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

І

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Ч

Я

ЗМІСТ ЧАСТИНИ 1

Підручник

Дороговцев Анатолій Якович

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

У двох частинах

Частина 2

Художник обкладинки *Г. Т. Задніпряний*
Художній редактор *Т. О. Щур*
Технічний редактор *Т. М. Піхота*
Коректори *Л. Ф. Кучеренко, А. І. Бараз*

Здано до набору 04.05.93. Підп. до друку 21.01.94. Формат 84×108/32. Папір друк. № 2. Літ. гарн. Вис. друк. Ум. друк. арк. 15,96. Ум. фарбовідб. 16,28. Обл.-вид. арк. 18,65. Вид. № 3446. Зам. № 3-676.

Видавництво «Либідь» при Київському університеті,
252001 Київ, Хрещатик, 10

Київська книжкова друкарня наукової книги. 252004 Київ, Терещенківська, 4